DETERMINACIÓN DE LA TOPOLOGÍA DE $L^p(\mu)$ MEDIANTE UN CONJUNTO DE ISOMETRÍAS

A. R. VILLENA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Abstract. Para un espacio de medida (Ω, Σ, μ) y un conjunto G de isometrías de $L^p(\mu)$ (con $1 < p < \infty$) investigamos la validez de las siguientes propiedades:

P1 todo funcional lineal $\phi\colon L^p(\mu) \to \mathbb{C}$ tal que $\phi \circ T = \phi$, $\forall T \in G$, es necesariamente continuo;

P2 todo operador lineal $\Phi\colon L^p(\mu) \to L^p(\mu)$ tal que $\Phi \circ T = T \circ \Phi$, $\forall T \in G$, es necesariamente continuo;

P3 cualquier norma (completa) $\|\cdot\|$ en $L^p(\mu)$ con la propiedad de que cada uno de los operadores $T\colon (L^p(\mu), \|\cdot\|) \to (L^p(\mu), \|\cdot\|)$ con $T \in G$ es continuo es necesariamente equivalente a la norma $\|\cdot\|_p$.

En el caso de tomar como espacio de medida la esfera euclídea de dimensión N con $N \geq 2$ encontramos un curioso fenómeno: existe un conjunto finito de isometrías de $L^p(\mathbb{S}^N)$ (procedentes de isometrías de $\mathbb{S}^N$) para el que todas las propiedades anteriores son válidas. Además, esta validez está muy estrechamemte vinculada al clásico problema de Banach-Ruziewicz.