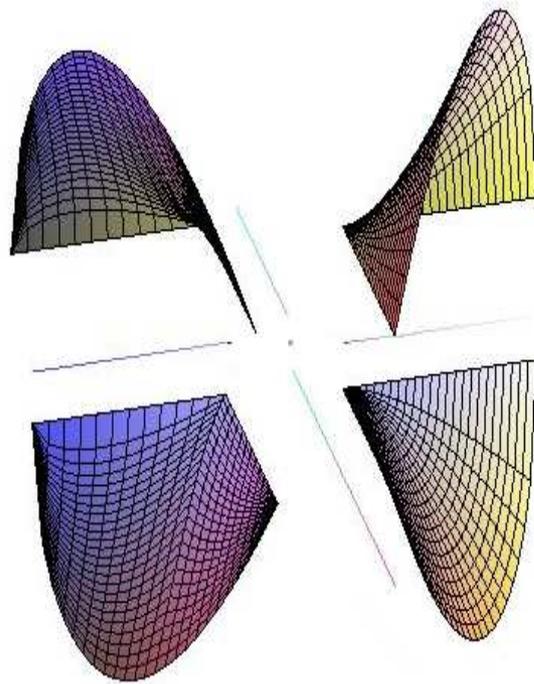


# Geometría analítica

Elías Baro González

7 de marzo de 2008



# Introducción

El presente trabajo es un estudio local de los subconjuntos analíticos complejos y de los subconjuntos semi-analíticos reales.

En las secciones 2 y 3 trataremos el caso complejo basados en los tres primeros capítulos del libro *Analytic functions of several complex variables* de Robert C. Gunning y Hugo Rossi. Los primeros resultados, la sección 2, componen una introducción a la teoría geométrica de funciones de varias variables complejas. Se incluyen las demostraciones de aquellos resultados bien por especial importancia, bien por su mayor utilidad para el trabajo. La sección 3 es un estudio local de las funciones y variedades analíticas en el sentido de la geometría analítica compleja.

Recordemos que dos funciones holomorfas  $f$  y  $g$  son equivalentes en el  $0 \in \mathbb{C}^n$  si existe un entorno abierto  $W$  de  $0$  tal que las restricciones de  $f$  y  $g$  a  $W$  coinciden. A las clases de equivalencia de esta relación las llamaremos gérmenes de funciones holomorfas en el punto  $0$ . El conjunto de todas las clases,  $\mathcal{O}_n$ , es un anillo local y dominio de integridad. Probaremos los teoremas de preparación y división de Weierstrass los cuales nos proporcionarán un concepto cercano a la división entre polinomios para los gérmenes de funciones. También daremos demostraciones de los teoremas de las syzigias de Hilbert y del lema de Oka sobre sucesiones exactas.

Recuérdese que dos subconjuntos  $X$  e  $Y$  de  $\mathbb{C}^n$  son equivalentes en el  $0$  si existe un entorno abierto  $U$  de  $0$  tal que  $X \cap U = Y \cap U$ . A las clases de equivalencia de esta relación las denominaremos gérmenes de conjuntos. Diremos que  $\mathbf{X}$  es el germen de una variedad analítica si existen funciones holomorfas  $f_1, \dots, f_s$  tales que  $\mathbf{X}$  es el germen del conjunto  $V(f_1, \dots, f_s) = \{\bar{x} \in \mathbb{C}^n : f_1(\bar{x}) = \dots = f_s(\bar{x}) = 0\}$ . Probaremos el teorema de los ceros de Hilbert para gérmenes de variedades, el cual establece que dado un ideal  $I \subset \mathcal{O}_n$  tenemos que  $\mathbf{I}(V(I)) = \text{rad}(I)$ . Como consecuencia de la demostración del teorema de los ceros de Hilbert probaremos el teorema 3.7.3, el cual nos ayudará a comprender la naturaleza local de las variedades analíticas complejas. Dicho teorema nos asegurará que localmente las variedades complejas, salvo en una serie de puntos singulares los cuales forman un conjunto analítico, se comportan como un recubrimiento finito. Terminaremos la sección 3 trabajando con una situación generalizada de este último teorema, los recubrimientos analíticos.

En la sección 4 trataremos el caso real basados en el artículo *Stratifications Distingüées comme outil en géométrie semi-analytique*, [3]. Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un subconjunto semi-analítico si para todo  $x \in A$  existe un entorno abierto  $U(x)$  tal que  $A \cap U(x) = \cup_{i=1}^s \cap_{j=1}^r A_{ij}$ , donde cada  $A_{ij}$  es de la forma  $\{f_{ij} > 0\}$  o bien  $\{f_{ij} < 0\}$  o bien  $\{f_{ij} = 0\}$  con  $f_{ij}$  funciones analíticas reales. La colección de conjuntos semi-analíticos es cerrada por complementarios, uniones finitas e intersecciones finitas.

Una estratificación semi-analítica de un abierto  $G \subset \mathbb{R}^n$  es una partición localmente finita de  $G$  en subvariedades analíticas conexas que son semi-analíticas como subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  satisfaciendo "la condición del borde", es decir, la frontera en  $G$  de una de estas subvariedades es la unión finita de algunas de las otras subvariedades de la partición de dimensión estrictamente menor.

Una estratificación distinguida  $\mathcal{C}$  de un intervalo abierto  $Q = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n :$

$|x_i| < \delta_i$  se define por recurrencia en  $n$ :

- Para  $n = 1$ : una estratificación distinguida de un intervalo  $(-\delta, \delta)$  es  $\{(-\delta, \delta)\}$  o bien  $\{(-\delta, 0), \{0\}, (0, \delta)\}$
- Para  $n$  habiendo definido  $n - 1$ : una estratificación distinguida de  $Q$  es una estratificación semi-analítica finita de  $Q$  que verifica las siguientes condiciones:

$$C2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Existe una estratificación distinguida } \mathcal{C}' \text{ de un intervalo} \\ \text{abierto } Q' = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n : |x_i| < \delta_i\} \text{ de } \mathbb{R}^{n-1} \\ \text{de forma que cada hoja } \Gamma \in \mathcal{C} \text{ de dimensión } \leq n - 1 \\ \text{es el grafo de una aplicación analítica } \Gamma : \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{para un } \Gamma' \in \mathcal{C}'. \end{array} \right.$$

$$C3) \left\{ \begin{array}{l} \text{Existe un polinomio } P \text{ no nulo con coeficientes analíticos} \\ \text{en un entorno abierto conteniendo a } \overline{Q'}, \text{ que es nulo} \\ \text{en el conjunto } V = \bigcup \{\Gamma \in \mathcal{C} : \dim(\Gamma) \leq n - 1\}, \text{ y tal} \\ \text{que la función orden, } \Gamma \ni x \rightarrow \text{ord}_x P, \text{ es constante para} \\ \text{cada } \Gamma \in \mathcal{C}. \end{array} \right.$$

En este trabajo probaremos el siguiente teorema,

**Teorema (de las estratificaciones distinguidas).** Sean  $E_1, \dots, E_q$  subconjuntos semi-analíticos de un entorno abierto de  $0 \in \mathbb{R}^n$ . Entonces, después de un cambio lineal de coordenadas adecuado, existe una estratificación distinguida de un intervalo abierto  $Q = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| < \delta_i, 1 \leq i \leq n\}$ , arbitrariamente pequeño, que es compatible con los conjuntos  $E_1, \dots, E_q$ .

Como consecuencia de este teorema deduciremos por ejemplo que la adherencia de un subconjunto semi-analítico también es semi-analítica y que la familia de componentes conexas de un semi-analítico es localmente finita y cada una de dichas componentes también es semi-analítica.

El estudio de las estratificaciones semi-analíticas fue introducido por Stanislaw Lojasiewicz durante un curso impartido en la Sorbona en 1964-1965 (véase [4] y [5]). En dicho trabajo se introdujeron las estratificaciones normales para las cuales se probaba un teorema similar al teorema de las estratificaciones distinguidas obteniendo, entre otras, las mismas consecuencias sobre la adherencia y las componentes conexas. Fue en 1995 cuando se publicó el artículo antes mencionado sobre el cual está basado este trabajo en el que se desarrollaban las estratificaciones distinguidas, cuya presentación resultaba mucho más elegante y menos complicada que la de las estratificaciones normales.

Por último, al final de la sección 3 estudiaremos los subconjuntos semi-analíticos de dimensión menor o igual que 1, demostrando que cualquiera de estos subconjuntos se puede poner como unión finita de arcos semi-analíticos, es decir, de subvariedades analíticas que son semi-analíticas como subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  y que son isomorfas al intervalo  $(0, 1)$  con extremos distintos. Como consecuencia de esto veremos que las proyecciones de conjuntos semi-analíticos acotados de dimensión menor o igual que 1 son también conjuntos semi-analíticos acotados de dimensión menor o igual que 1. Este último hecho no

se satisface para los subconjuntos semi-analíticos de dimensión  $n > 1$ . Esto supone una gran diferencia con la clase de subconjuntos semi-algebraicos los cuales, por el teorema de Tarski-Seidenberg, satisfacen que la proyección de un subconjunto semi-algebraico es también semi-algebraico (véase [1]).

Finalmente, en la sección 5 aplicaremos de forma constructiva las demostraciones del teorema 3.49 y del teorema de las estratificaciones distinguidas a una serie de ejemplos concretos comprobando de esta forma las diferencias que existen entre los casos complejo y real. Por ejemplo notaremos que los puntos singulares de una variedad analítica real no tienen por qué formar una subvariedad. Dichos ejemplos son de especial importancia puesto que, como probó José F. Fernando Galván en su tesis *Suma de cuadrados de gérmenes de función analítica*, [2], son los únicos gérmenes de superficie singular de  $\mathbb{R}^3$  tales que cualquier germen de función positiva sobre ellos es suma de cuadrados.

## Referencias

- [1] J. Bochnak, M. Coste y M.F.Roy, *Geometrie algebrique reelle*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [2] F. Acquistapace, F. Broglia, J.F. Fernando, J.M. Ruiz, *On the Pythagoras numbers of real analytic surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup.
- [3] K.Kurdyka, S.Lojasiewicz y M.A. Zurro, *Stratifications Distiguées comme outil en géométrie semi-analytique*, Manuscripta math., vol. 86, pags 81-102, 1995.
- [4] S. Lojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, IHES, 1965.
- [5] S. Lojasiewicz, M.A.Zurro, *Introducción a la geometría semi- y sub- analítica*, Universidad de Valladolid, 1993.

# Índice

<b>1. Preliminares de Álgebra</b>	<b>8</b>
<b>2. Propiedades básicas de las funciones holomorfas</b>	<b>10</b>
2.1. Propiedades básicas de las funciones holomorfas de varias variables complejas	10
2.2. La topología de la convergencia uniforme en compactos para $\mathcal{O}_D$	13
2.3. Teorema de la función implícita y Teorema de la función inversa	15
2.4. Singularidades evitables	17
<b>3. Anillos locales de funciones holomorfas</b>	<b>19</b>
3.1. Regularidad de orden $k$ de una función holomorfa	19
3.2. Gérmenes de funciones. Regularidad de un germen.	20
3.3. Teoremas de Weierstrass y consecuencias	21
3.4. $\mathcal{O}_n$ -módulos	22
3.5. Teorema de división de Weierstrass extendido	26
3.6. Variedades	29
3.7. El teorema de los ceros de Hilbert o <i>Nullstellensatz</i>	32
3.8. Recubrimientos analíticos	39
<b>4. Estratificaciones distinguidas</b>	<b>47</b>
4.1. Introducción a los conjuntos semi-analíticos	47
4.2. Estratificaciones distinguidas	48
4.3. El teorema de las estratificaciones distinguidas y sus consecuencias	53
4.4. Lemas auxiliares	53
4.5. Lema de Base y sus consecuencias	55
4.6. El lema de Thom	58
4.7. Prueba del teorema de estratificaciones distinguidas	60
4.8. Conjuntos semi-analíticos de dimensión $\leq 1$	62
<b>5. Ejemplos</b>	<b>67</b>
5.1. El paraguas de Whitney y sus deformaciones	67
5.1.1. El paraguas de Whitney como conjunto analítico real	67
5.1.2. El paraguas de Whitney como conjunto analítico complejo	71
5.1.3. La deformación del paraguas de Whitney como conjunto analítico real	73
5.1.4. La deformación del paraguas de Whitney como conjunto analítico complejo	78
5.2. El cono	79
5.2.1. El cono como conjunto analítico real	79
5.2.2. El cono como conjunto analítico complejo	82
5.3. El par de planos y sus deformaciones	84
5.3.1. El par de planos como conjunto analítico real	84
5.3.2. El par de planos como conjunto analítico complejo	87
5.3.3. La deformación del par de planos como conjunto analítico real	89

5.3.4.	La deformación del par de planos como conjunto analítico complejo	94
5.4.	La singularidad de Brieskorn y sus explosiones	96
5.4.1.	La singularidad de Brieskorn como conjunto analítico real	96
5.4.2.	La singularidad de Brieskorn como conjunto analítico complejo	99
5.4.3.	La explosión A de la singularidad de Brieskorn como conjunto analítico real	101
5.4.4.	La explosión A de la singularidad de Brieskorn como conjunto analítico complejo	106
5.4.5.	La explosión B de la singularidad de Brieskorn como conjunto analítico real	108
5.4.6.	La explosión B de la singularidad de Brieskorn como conjunto analítico complejo	112

## Notación

1. Utilizaremos la siguiente notación de multiíndices. Dada una  $n$ -upla  $z = (z_1, \dots, z_n)$  y un subconjunto  $J = \{\alpha_1 < \dots < \alpha_l\} \subset \{1, \dots, n\}$ , denotaremos por  $z_J = (z_{\alpha_1}, \dots, z_{\alpha_l})$ . Cuando  $J = \{1, \dots, n-1\}$ , denotaremos  $z' = z_J = (z_1, \dots, z_{n-1})$ .
2. Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico. Dado un subconjunto  $E \subset X$ , denotaremos por  $\text{int}(E)$  al interior de  $E$ .

# 1. Preliminares de Álgebra

Sean  $A \subset B$  una extensión entera de dominios de integridad y sea  $k \subset K$  la extensión de sus cuerpos de fracciones. Sea  $b \in B$  y sea  $P(x) \in A[X]$  mónico de grado mínimo tal que  $P(b) = 0$ . Sea  $r$  el grado de  $P$ .

- 1) Veamos que  $P(x)$  es el polinomio mínimo de  $b$  sobre  $k$ . Supongamos que dicho polinomio es  $P_1(x) \in k[X]$ . Entonces existe  $H(x) \in k[x]$  tal que  $P = HP_1$ . Podemos escribir

$$\begin{cases} H(x) = h\tilde{H}(x) \\ P_1(x) = p\tilde{P}_1(x), \end{cases}$$

para  $h, p \in k$  y  $\tilde{H}(x), \tilde{P}_1(x) \in A[x]$  primitivos. Sean  $h_1, p_1 \in A$  los coeficientes principales de  $\tilde{H}$  y  $\tilde{P}_1$  respectivamente. Tenemos que

$$P(x) = hp\tilde{H}(x)\tilde{P}_1(x).$$

Como el producto  $\tilde{H}\tilde{P}_1$  es primitivo y  $P$  también lo es,  $hp \in A$  es una unidad. Definimos  $P_2(x) = hph_1P_1(x) \in A[x]$ . Es un polinomio mónico en  $A[x]$  tal que  $P_2(b) = 0$ . Por tanto tiene grado menor o igual que  $P(x)$ . Deducimos que  $H(x)$  es constante. Como  $P$  y  $P_1$  son mónicos,  $H(x) = 1$ . Por tanto  $P(x) = P_1(x)$ .

- 2) Sea  $G(x) \in A[x]$  tal que  $G(b) = 0$ . Veamos que  $P$  divide a  $G$  en  $A[x]$ . Por ser  $P$  el polinomio mínimo de  $b$  en  $k$ ,  $G(x) = H(x)P(x)$ , para algún  $H(x) \in k[X]$ . Podemos escribir  $H(x) = h\tilde{H}(x)$  con  $h \in k$  y  $\tilde{H}(x) \in A[x]$  polinomio primitivo. Entonces  $G(x) = h\tilde{H}(x)P(x)$ . Como  $\tilde{H}(x)P(x)$  es primitivo,  $h \in A$ . Por tanto  $H(x) \in A[x]$ .
- 3) Supongamos que  $K = k(b)$ ,  $k$  tiene característica cero y que  $A$  es un dominio de factorización única. Veamos que dado  $a \in B$  existe un polinomio  $T(x) \in A[x]$  de grado menor que  $r$  tal que  $da = T(b)$ , donde  $d$  es el discriminante del polinomio  $P(x)$ . Sea  $G(x)$  el polinomio mínimo de  $a$  en  $k$ . Sea  $L \supset K$  el cuerpo de descomposición de  $G(x)P(x)$ . Sabemos que

$$[L : k] = [L : K][K : k].$$

Como la extensión  $k \subset L$  es normal, finita y separable, el teorema fundamental de Galois nos asegura que  $|Gal(L : k)| = [L : k]$  y  $|Gal(L : K)| = [L : K]$ . Supongamos que el número de  $k$ -isomorfismos de  $K$  en  $L$  es  $s$ . Digamos que son  $\phi_1, \dots, \phi_s$ . Podemos extenderlos a  $k$ -automorfismos  $\tilde{\phi}_i$  de  $L$ . Deducimos que  $|Gal(L : k)| = s \cdot |Gal(L : K)|$  y por tanto,  $s = [K : k] = r$ .

Como  $b$  es algebraico y el grado de su polinomio mínimo es  $r$  existen  $c_0, \dots, c_r \in k$  tales que

$$a = c_0 \cdot 1 + \dots + c_r b^{r-1}.$$

Sean  $\phi_1, \dots, \phi_r$  los  $k$ -isomorfismos de  $K$  en  $L$ . Tenemos entonces que  $\phi_i(b) = \alpha_i$ , donde  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  son las  $r$  raíces de  $P(x)$ . Por tanto

$$\phi_i(a) = c_0 \cdot \phi_i(1) + \dots + c_r \phi_i(b)^{r-1}.$$

La regla de cramer nos dice que

$$c_j = \frac{\gamma_j}{\delta}$$

donde  $\delta = \det(\phi_i(b^{j-1})) = \det(\alpha_i^{j-1})$  y  $\gamma_i$  es el determinante anterior sustituyendo la columna  $j$ -ésima por la columna cuyos elementos son  $\phi_i(b)$ ,  $1 \leq i \leq r$ . Por ser  $\delta$  el determinante de Vandermonde  $\delta^2 = d$ , donde  $d$  es el discriminante del polinomio mínimo de  $b$ . Por tanto

$$c_j = \frac{\gamma_j}{\delta} = \frac{\gamma_j \delta}{d}.$$

Como  $d \in A$ , tenemos que  $\gamma_j \delta = dc_j \in k$ . Tanto  $\gamma_j$  como  $\delta$  son determinantes de matrices cuyos elementos son enteros sobre  $k$ , y por tanto, ellos también enteros sobre  $k$ . Entonces  $\gamma_j \delta \in k$  es entero sobre  $A$ . Por ser  $A$  noetheriano,  $\gamma_j \delta \in A$ .

## 2. Propiedades básicas de las funciones holomorfas

### 2.1. Propiedades básicas de las funciones holomorfas de varias variables complejas

Un *polidisco* abierto en  $\mathbb{C}^n$  es un subconjunto  $\Delta(w; r) \subset \mathbb{C}^n$  de la forma

$$\Delta(w; r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - w_j| < r_j, j = 1, \dots, n\}.$$

Diremos que  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$  es el centro de  $\Delta(w; r)$  y  $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n, r_j > 0$ , su polirradio.

Con la notación anterior, llamamos *esfera* al conjunto  $S(w; r) \subset \mathbb{C}^n$  dado por

$$S(w; r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - w_j| = r_j, j = 1, \dots, n\}.$$

**Definición 2.1.** Decimos que una función compleja definida en un abierto  $D \subset \mathbb{C}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ , es *holomorfa* en  $D$  si cada punto  $w \in D$  tiene un entorno  $U$ ,  $w \in U \subset D$ , de forma que  $f$  tiene un desarrollo en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{k_1 + \dots + k_n = 0}^{\infty} a_{k_1, \dots, k_n} (z_1 - w_1)^{k_1} \dots (z_n - w_n)^{k_n}$$

que converge  $\forall z \in U$ . En consecuencia,  $\forall w \in D$ , la serie converge uniformemente en algún entorno de dicho punto. Al conjunto de todas las funciones holomorfas en  $D$  lo denotaremos por  $\mathcal{O}_D$ .

Si  $f$  es holomorfa entonces también lo es en cada una de sus variables separadamente. El recíproco no es tan evidente y es lo que se conoce como el lema de Osgood.

**Lema 2.2** (de Osgood). Si una función compleja  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  es continua y holomorfa en cada variable entonces es holomorfa en  $D$ .

*Demostración.* Sean  $w \in D$  y  $\bar{\Delta}(w; r) \subset D$ . Como  $f(z', z_n)$  es holomorfa en  $\Delta(w_n, r_n)$  se tiene que por la fórmula integral de Cauchy:  $\forall z \in \Delta(w; r)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|w_n - \zeta_n| = r_n} \frac{f(z_1, \dots, z_{n-1}, \zeta_n)}{\zeta_n - z_n} d\zeta_n.$$

Iterando este proceso en cada variable y utilizando el lema de Fubini obtenemos la fórmula de Cauchy en varias variables

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{S(w; r)} \frac{f(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)}.$$

Dado  $z \in \Delta(w; r)$  tenemos que la serie

$$\frac{1}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)} = \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_n = 0}^{\infty} \frac{(z_1 - w_1)^{\nu_1} \dots (z_n - w_n)^{\nu_n}}{(\zeta_1 - w_1)^{\nu_1 + 1} \dots (\zeta_n - w_n)^{\nu_n + 1}}$$

es absolutamente convergente si  $|\zeta_i - w_i| = r_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , luego la suma y la integración conmutan; en consecuencia,

$$f(z) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=0}^{\infty} a_{\nu_1 \dots \nu_n} (z_1 - w_1)^{\nu_1} \dots (z_n - w_n)^{\nu_n} \quad (1)$$

donde

$$a_{\nu_1 \dots \nu_n} = \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{S(w,r)} \frac{f(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_n}{(\zeta_1 - w_1)^{\nu_1+1} \dots (\zeta_n - w_n)^{\nu_n+1}}.$$

Por tanto  $f$  es holomorfa.  $\square$

**Observación 2.3.** Si derivamos y evaluamos en  $w$  en la expresión (1) deducimos que

$$a_{\nu_1 \dots \nu_n} = \frac{1}{\nu_1! \dots \nu_n!} \frac{\partial^{\nu_1 + \dots + \nu_n} f}{\partial z_1^{\nu_1} \dots \partial z_n^{\nu_n}}(w).$$

Algunos teoremas típicos de análisis complejo en una variable también son ciertos para funciones de varias variables.

**Teorema 2.4** (de identidad). Si  $f$  y  $g$  son funciones holomorfas en un abierto conexo  $D \in \mathbb{C}^n$  y  $f(z) = g(z)$  en un abierto  $U \subset D$ , entonces  $f(z) = g(z)$  en todo  $D$ .

*Demostración.* Sea  $E = \text{int}(\{z \in D : f(z) = g(z)\})$ , subconjunto que es abierto y no vacío, puesto que  $U \subset E$ . Si mostramos que  $E$  es cerrado en la topología relativa de  $D$  tendremos que  $D = E \cup (E^c \cap D)$  y, por ser  $D$  conexo, obtendremos que  $E = D$ .

Queremos mostrar que  $\bar{E} \cap D = E$ . Sea  $w \in D \cap \bar{E}$  y sea  $r > 0$  de forma que  $\Delta(w; r) \subset D$ . Como  $w \in \bar{E}$ ,  $\Delta(w; r/2) \cap E \neq \emptyset$  y por tanto existe un  $w' \in E$  tal que  $w' \in \Delta(w; r/2)$ . Como  $\Delta(w'; r/2) \subset \Delta(w; r) \subset D$ , la función  $f(z) - g(z)$  es holomorfa en  $\Delta(w'; r/2)$ , es decir, tiene un desarrollo en serie de potencias centrado en  $w'$  que converge en dicho polidisco. Ahora bien, como  $E$  es abierto, existe un entorno  $U(w') \subset E$  y por tanto  $f(z) - g(z)$  se anula en el abierto  $\Delta(w'; r/2) \cap U(w')$ . Como los coeficientes del desarrollo son derivadas parciales de  $f(z) - g(z)$  en el punto  $w'$ , concluimos que dichos coeficientes son todos nulos y que por tanto  $f(z) - g(z)$  es idénticamente nula en  $\Delta(w'; r/2)$ . En particular, como  $w \in \Delta(w'; r/2)$ ,  $w \in E$ .  $\square$

Utilizaremos el siguiente lema para demostrar el teorema del módulo máximo.

**Lema 2.5.** Sea  $f$  una función holomorfa en el abierto  $D \subset \mathbb{C}^n$  tal que  $|f|$  es constante. Entonces  $f$  es constante.

*Demostración.* Dadas las hipótesis del teorema,  $f(z) = \rho e^{i\theta(z)}$ , con  $\theta : D \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  es holomorfa, y por tanto

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \rho \frac{\partial e^{i\theta(z)}}{\partial \bar{z}} = i\rho e^{i\theta(z)} \frac{\partial \theta(z)}{\partial \bar{z}} \Rightarrow \frac{\partial \theta(z)}{\partial \bar{z}} = 0.$$

$\theta$  es función holomorfa y real.

$$\theta : D \ni (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) \longrightarrow \theta(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) \in \mathbb{R}$$

Como  $\theta$  es holomorfa, para  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial y_i} = 0. \end{cases}$$

Eso implica que  $\theta$  es constante y por tanto  $f$  también lo es.  $\square$

**Teorema 2.6** (del módulo máximo). Si  $f$  es una función holomorfa en un abierto conexo  $D \subset \mathbb{C}^n$  y existe un punto  $w \in D$  tal que  $|f(z)| \leq |f(w)|$  para todo  $z$  en un cierto entorno de  $w_0$ , entonces  $f$  es constante en  $D$ .

*Demostración.* Sea  $\Delta = \Delta(w; r) \subset D$ , tal que  $\forall z \in \Delta$   $|f(z)| \leq |f(w)|$  y sean  $\gamma_j(\theta_j) = \omega_j + r_j e^{i\theta_j}$ ,  $\theta_j \in [0, 2\pi]$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Haciendo un cambio de variable en la fórmula de Cauchy obtenemos

$$\begin{aligned} f(w) &= \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{S(w,r)} \frac{f(\zeta) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - w_1) \cdots (\zeta_n - w_n)} = \\ &= \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{[0, 2\pi]^n} \frac{f(\gamma_1(\theta_1), \dots, \gamma_n(\theta_n))}{r_1 \cdots r_n e^{i(\theta_1 + \dots + \theta_n)}} (r_1 \cdots r_n) i^n e^{i(\theta_1 + \dots + \theta_n)} d\theta = \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^n \int_{[0, 2\pi]^n} f(\gamma_1(\theta_1), \dots, \gamma_n(\theta_n)) d\theta. \end{aligned}$$

Tomando módulos

$$(2\pi)^n |f(w)| \leq \int_{[0, 2\pi]^n} |f(\gamma_1(\theta_1), \dots, \gamma_n(\theta_n))| d\theta \stackrel{\leq}{\text{hip.}} (2\pi)^n |f(w)|.$$

Tenemos por tanto que

$$\int_{[0, 2\pi]^n} (|f(w)| - |f(\gamma_1(\theta_1), \dots, \gamma_n(\theta_n))|) d\theta = 0.$$

Puesto que  $|f(w)| - |f(\gamma_1(\theta_1), \dots, \gamma_n(\theta_n))| \geq 0$ , nos queda que

$$|f(w)| = |f(\gamma_1(\theta_1), \dots, \gamma_n(\theta_n))|,$$

para todo  $\theta \in [0, 2\pi]^n$ . Como podemos hacer el polirradio todo lo pequeño que queramos, tenemos que  $|f|$  es constante en  $\Delta$ , y por el lema anterior, también  $f$  es constante en  $\Delta$ . El teorema de identidad nos asegura que entonces  $f$  es constante en  $D$ .  $\square$

**Definición 2.7.** Sea  $f$  una función holomorfa y sea

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(w; z)$$

su desarrollo en términos homogéneos de orden  $k$  alrededor de  $w$ . Decimos que  $f$  tiene *orden total  $k$  en el punto  $w$*  si  $k$  es el menor de los grados de los polinomios homogéneos anteriores que no son idénticamente cero.

**Teorema 2.8** (Lema de Schwartz). Sea  $f$  una función holomorfa en un entorno de  $\bar{\Delta}(0; \mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r} = (r, \dots, r)$ , con orden total  $k$  en el 0 y tal que  $|f(z)| \leq M$  para todo  $z \in \bar{\Delta}(0; \mathbf{r})$ . Entonces se tiene que para todo  $z \in \bar{\Delta}(0; r)$

$$|f(z)| \leq M \left| \frac{z}{r} \right|^k.$$

## 2.2. La topología de la convergencia uniforme en compactos para $\mathcal{O}_D$

Dado un compacto  $K \subset D$  definimos

$$\|\cdot\|_K : \mathcal{C}_D \ni f \rightarrow \|f\|_K = \max_{z \in K} |f(z)| \in \mathbb{R}^+.$$

Esta función es una pseudonorma ya que  $\forall f, g \in \mathcal{C}_D$

- 1)  $\|f + g\|_K \leq \|f\|_K + \|g\|_K$ ,
- 2)  $\|\lambda f\|_K = |\lambda| \cdot \|f\|_K$ .

Obsérvese que no es una norma porque no satisface la siguiente propiedad

$$\|f\|_K = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Los siguientes subconjuntos de  $\mathcal{C}_D$

$$U_f(K, \varepsilon) = \{g \in \mathcal{C}_D : \|f - g\|_K < \varepsilon\}.$$

son una base. Efectivamente, dado  $g \in \mathcal{C}_D$ ,

$$g \in U_{f_1}(K_1, \varepsilon_1) \cap U_{f_2}(K_2, \varepsilon_2),$$

tenemos que, para  $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1 - \|f_1 - g\|_{K_1}, \varepsilon_2 - \|f_2 - g\|_{K_2}\}$ ,

$$g \in U_g(K_1 \cup K_2, \varepsilon) \subset U_{f_1}(K_1, \varepsilon_1) \cap U_{f_2}(K_2, \varepsilon_2).$$

Podemos definir la topología que genera esta base de otra forma. Dado un dominio  $D$ , sea  $\{K_n\}$  una colección de compactos,  $K_n \subset D$ , tales que  $K_n \subset K_{n+1}$  y  $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = D$ . Para cualesquiera  $f, g \in \mathcal{C}_D$  definimos:

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|f - g\|_{K_n}}{1 + \|f - g\|_{K_n}}$$

Esta función  $d$  es una métrica y la topología que induce es equivalente a la definida anteriormente. Respecto a esta métrica  $\mathcal{C}_D$  es completa.

La topología que hereda  $\mathcal{O}_D$  de  $\mathcal{C}_D$  se denomina *topología de convergencia uniforme en compactos*.

**Lema 2.9.**  $\mathcal{O}_D$  es un cerrado en  $\mathcal{C}_D$

**Teorema 2.10** (generalizado de Vitali). Cualquier familia  $\mathcal{F}$  acotada de funciones holomorfas en un dominio  $D \subset \mathbb{C}^n$  tiene clausura compacta en  $\mathcal{O}_D$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F}$  una familia acotada de funciones holomorfas. Entonces existe una constante  $M > 0$  de forma que

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{A} = \{f \in \mathcal{O}_D : |f(z)| < M, \forall z \in D\}$$

Si mostramos que  $\mathcal{A}$  es compacto entonces  $\bar{\mathcal{F}} \subset \mathcal{A}$  también lo será por ser un cerrado dentro de un compacto. Para demostrar que  $\mathcal{A}$  es compacto vamos a comprobar que toda sucesión de elementos de  $\mathcal{A}$  tiene una subsucesión convergente en  $\mathcal{A}$ . Sea  $\bar{\Delta}_\nu = \bar{\Delta}(w_\nu; r_\nu)$  una familia de polidiscos compactos tales que  $\bar{\Delta}_\nu \subset D$  y  $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \bar{\Delta}_\nu = D$ . Sea  $2\delta_\nu$  la distancia de  $\bar{\Delta}_\nu$  a  $\mathbb{C}^n - D$ . Por tanto  $\bar{\Delta}(w_\nu; r_\nu) \subset \bar{\Delta}(w_\nu; r_\nu + \delta_\nu) \subset D$ . Dados  $f \in \mathcal{A}$  y  $z \in \bar{\Delta}_\nu$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial z_r} \right| &= \left| \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{S(w_\nu; r_\nu + \delta_\nu)} \frac{f(\zeta) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_r - z_r)^2 \cdots (\zeta_n - z_n)} \right| \leq \\ &\leq \left( \frac{1}{2\pi} \right)^n \int_{S(w_\nu; r_\nu + \delta_\nu)} \frac{|f(\zeta)| d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{|\zeta_1 - z_1| \cdots |\zeta_r - z_r|^2 \cdots |\zeta_n - z_n|}. \end{aligned}$$

Puesto que  $|\zeta_j - z_j| \geq \delta_\nu$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial z_r} \right| &\leq \left( \frac{1}{2\pi} \right)^n M \int_{S(w_\nu; r_\nu + \delta_\nu)} \frac{d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{\delta_\nu^{n+1}} = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^n \frac{M [2\pi(r_\nu + \delta_\nu)]^n}{\delta_\nu^{n+1}} = \\ &= \frac{M}{\delta_\nu} \left( 1 + \frac{r_\nu}{\delta_\nu} \right) = MC. \end{aligned}$$

Iterando este cálculo obtenemos que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z_1^{k_1} \cdots \partial z_n^{k_n}} \right| \leq MC^{k_1 + \cdots + k_n}.$$

Por tanto  $\forall z, z^0 \in \bar{\Delta}_\nu$

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z^0)| &\leq \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} |a_{k_1, \dots, k_n}| |z_1 - z_1^0|^{k_1} \cdots |z_n - z_n^0|^{k_n} \leq \\ &\leq \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} \frac{MC^{k_1 + \cdots + k_n}}{k_1! + \cdots + k_n!} |z_1 - z_1^0|^{k_1} \cdots |z_n - z_n^0|^{k_n}. \end{aligned}$$

Utilizando esta expresión probamos que la familia  $\mathcal{A}$  es equicontinua en  $\bar{\Delta}_\nu$ , es decir, que para todo  $\varepsilon > 0$  existe un polirradio  $\delta > 0$  tal que  $\forall z, z_0 \in \bar{\Delta}_\nu, \forall f \in \mathcal{A}$ , si  $z - z_0 \in \Delta(0; \delta)$ , entonces  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ . Por el teorema de Arzela-Ascoli, tenemos que la familia  $\mathcal{A}$  es normal en cada  $\bar{\Delta}_\nu$ . Por tanto dada una sucesión de funciones  $\{f_k\}$  de  $\mathcal{A}$  siempre podemos encontrar una subsucesión uniformemente convergente en  $\bar{\Delta}_\nu$ . Es más, dada una sucesión de funciones  $\{f_k\}$  y dadas las subsucesiones uniformemente convergentes  $\{f_{k_{j\nu}}\}$  para cada  $\bar{\Delta}_\nu$ , escogemos a su vez subsucesiones de las sucesiones de forma que los índices queden de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} k_{11} &< k_{21} < \dots < k_{j1} < \dots \\ k_{12} &< k_{22} < \dots < k_{j2} < \dots \\ &\vdots \\ k_{1\nu} &< k_{2\nu} < \dots < k_{j\nu} < \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

con  $k_{j\nu} < k_{j(\nu+1)}, \forall j, \nu$ . Tomamos la subsucesión  $\{f_{k_{jj}}\}$  que es uniformemente convergente en todo  $\bar{\Delta}_\nu$  y, por tanto, convergente en  $\mathcal{O}_D$ .  $\square$

**Observación 2.11.** En la demostración de este teorema tiene especial importancia el concepto de familia equicontinua:

Una familia de funciones  $\mathcal{F}$  se dice *equicontinua* en un subconjunto  $E$  si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $d(f(z), f(z_0)) < \varepsilon$  siempre y cuando  $|z - z_0| < \delta$  y  $z, z_0 \in E$ , simultáneamente para toda  $f \in \mathcal{F}$ .

El resultado es una consecuencia del teorema de Arzela-Ascoli:

*Una familia  $\mathcal{F}$  de funciones continuas con valores en un espacio métrico  $S$  es normal en una región  $\omega$  del plano complejo si y solo si*

- i)  $\mathcal{F}$  es equicontinua en todo compacto.
- ii) para cualquier  $z \in \omega$  los valores  $f(z), f \in \mathcal{F}$ , están incluidos en un compacto de  $S$ .

### 2.3. Teorema de la función implícita y Teorema de la función inversa

**Teorema 2.12** (de la función implícita.). Sea  $f(z_1, \dots, z_n)$  holomorfa en un polidisco  $\Delta(w; r) \subset \mathbb{C}^n$  y tal que  $f(w) = 0$  y  $\frac{\partial f}{\partial z_n}(w) \neq 0$ . Entonces existe un polidisco  $\Delta(w; \delta) \subset \Delta(w; r)$  y una única función holomorfa  $\varphi(z')$  en  $\Delta(w'; \delta')$  tal que

- i)  $\varphi(w') = w_n$ ,
- ii)  $|\varphi(z') - w_n| < \delta_n$  en  $\Delta(w'; \delta')$ ,

iii)  $f(z) = 0$  en el punto  $z \in \Delta(w; \delta)$  si y solo si  $z_n = \varphi(z')$ .

*Demostración.* Se  $\Delta(w; \delta) \subset \Delta(w; r)$  el polidisco cuya existencia nos asegura el corolario 3.4. Tenemos entonces que  $\forall z' \in \Delta(w'; \delta')$  existe un único  $z_n \in \Delta(w_n; \delta_n)$  tal que  $f(z', z_n) = 0$ . Sea  $\varphi(z')$  la función en  $\Delta(w'; \delta')$  que asigna a cada  $z'$  dicho  $z_n \in \Delta(w_n; \delta_n)$ . Por definición  $\varphi(w') = w_n$ .

Por tanto tan sólo nos falta comprobar que  $\varphi$  es holomorfa. Sabemos que si  $f$  y  $g$  son funciones holomorfas en una variable compleja en  $\Delta(0; r)$  y  $a \in \Delta(0; r)$  es el único cero de  $f$  entonces

$$g(a) = \int_{|z|=r} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Aplicando este resultado a nuestra función  $f$  en la última variable (siendo  $g = id$ ) tenemos que

$$\varphi(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_n - w_n| = \delta_n} \frac{\zeta_n}{f(z', \zeta_n)} \frac{\partial f}{\partial \zeta_n}(z', \zeta_n) d\zeta_n.$$

Como  $f(z', \zeta_n) \neq 0$  para todo  $z' \in \Delta(w'; \delta')$  y para todo  $\zeta_n$  tal que  $|\zeta_n - w_n| = \delta_n$ , concluimos que  $\varphi$  es holomorfa en  $\Delta(w'; \delta')$ .  $\square$

**Teorema 2.13** (de la aplicación implícita.). Si  $f_{k+1}, \dots, f_n$  son holomorfas en un polidisco  $\Delta(w; r) \subset \mathbb{C}^n$  y tales que

- i)  $f_j(w) = 0, j = k + 1, \dots, n$
- ii)  $\frac{\partial f_j}{\partial z_i} = \delta_i^j, i, j = k + 1, \dots, n$

entonces en un polidisco  $\Delta(w; \delta) \subset \Delta(w; r)$  existen unas únicas funciones holomorfas  $\varphi_j(z_1, \dots, z_k), j = k + 1, \dots, n$  tales que  $f_j(z_1, \dots, z_n) = 0$  para  $j = k + 1, \dots, n$  si y solo si  $z_j = \varphi_j(z_1, \dots, z_k)$  para  $j = k + 1, \dots, n$ .

**Teorema 2.14.** Sea  $n \geq m$  y sea  $F : U(0) \rightarrow \mathbb{C}^m, U(0) \subset \mathbb{C}^n$ , una aplicación holomorfa no singular tal que  $F(0) = 0$ . Entonces existe un cambio de variables lineal  $w_i = \sum_j a_{ij} z_j$  en  $\mathbb{C}^n$  y unas funciones holomorfas  $\varphi_j(w_1, \dots, w_{n-m}), j = n - m + 1, \dots, n$ , en el polidisco  $\Delta(0; \delta)$  tales que  $F(w_1, \dots, w_n) = 0$  si y sólo si  $w_j = \varphi_j(w_1, \dots, w_{n-m})$  en  $\Delta(0; \delta)$  para  $j = n - m + 1, \dots, n$ .

Demostraremos el teorema de la función inversa como consecuencia del de la función implícita.

**Teorema 2.15** (de la función inversa). Sea  $F : U(0) \rightarrow \mathbb{C}^n, U(0)$  abierto de  $\mathbb{C}^n$ , una aplicación holomorfa no singular tal que  $F(0) = 0$ . Entonces existe un polidisco  $\Delta(0; \delta)$  en el que  $F$  es invertible.

*Demostración.* Sea  $J$  la matriz jacobiana de  $F$ . Como  $F$  no es singular, haciendo un cambio de variable, podemos suponer que  $J_F(0) = I_{n \times n}$ . Sea la función holomorfa en un entorno de 0 en  $\mathbb{C}^{2n}$  dada por

$$H(w, z) = w - F(z)$$

La matriz jacobiana de  $H$  en 0 es de la forma

$$J_H(0) = \left( -I \mid I \right)$$

Por el teorema anterior, visto que  $H(0) = 0$ , existen unas coordenadas

$$(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n, \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n) = (w_1 \dots, w_n, z_1 + w_1, \dots, z_n + w_n)$$

en un polidisco  $\Delta(0; \delta) \times \Delta(0; \varepsilon) \subset \mathbb{C}^{2n}$  y unas únicas funciones  $\varphi_j(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , holomorfas en  $\Delta(0; \delta) \subset \mathbb{C}^n$  tales que  $\forall (w, z) \in \Delta(0; \delta) \times \Delta(0; \varepsilon)$

$$H(\tilde{w}, \tilde{z}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{z}_j = \varphi_j(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n).$$

Definamos

$$G : \Delta(0; \delta) \ni w \longrightarrow (\varphi_1(w), \dots, \varphi_n(w)) \in \Delta(0; \varepsilon).$$

Vistas las siguientes equivalencias

$$H(\tilde{w}, \tilde{z} - \tilde{w}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{w} = F(\tilde{z} - \tilde{w}) \Leftrightarrow w = F(z)$$

$$\tilde{z}_j - \tilde{w}_j = \varphi_j(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n) \Leftrightarrow z_j = \varphi_j(w) \Leftrightarrow z = G(w)$$

nos convencemos de que  $G$  es una función holomorfa biyectiva tal que  $F(G(w)) = w$  y, por tanto, que es la función inversa de  $F(z)$ . □

## 2.4. Singularidades evitables

**Definición 2.16.** Sea  $D$  un dominio de  $\mathbb{C}^n$ . Un subconjunto  $X \subset D$  es *fino* si para todo punto  $z \in D$  existe un polidisco  $\Delta(z; r) \subset D$  y una función  $f$  holomorfa en  $\Delta(z; r)$  no idénticamente nula que se anula en  $X \cap \Delta(z; r)$ .

**Definición 2.17.** Sea  $D$  un dominio de  $\mathbb{C}^n$  y sea  $X \subset D$ . Una función definida en  $D - X$  es *localmente acotada en  $D$*  si para todo punto  $z \in D$  existe un polidisco  $\Delta(z; r) \subset D$  tal que la función  $f$  es acotada en  $\Delta(z; r) \cap (D - X)$ .

**Teorema 2.18** (de extensión de Riemann). Sea  $X$  un subconjunto fino del dominio  $D$  de  $\mathbb{C}^n$  y sea  $f$  una función holomorfa en  $D - X$  localmente acotada en  $D$ . Entonces existe una única función  $\tilde{f}$  holomorfa en  $D$  tal que  $\tilde{f}(z) = f(z)$  para todo  $z \in D - X$ .

*Demostración.* Empecemos demostrando la unicidad. Sean  $\tilde{f}_1$  y  $\tilde{f}_2$  dos extensiones de  $f$ . Puesto que  $X$  no es densa en ningún punto tenemos que  $\overline{D - X} \cap D = D$ , y por tanto, por continuidad,  $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$  en  $D$ . Para terminar la demostración basta probar este otro enunciado<sup>1</sup>:

<sup>1</sup>Sea  $w \in D$ . Sabemos que existe un polidisco  $\Delta = \Delta(w; r) \subset D$  y una función  $g$  holomorfa en  $\Delta$  tal que  $X \cap \Delta \subset V(g) = \{z \in \Delta : g(z) = 0\}$ . Puesto que  $f$  es holomorfa en  $\Delta - (X \cap \Delta)$  también lo es en  $\Delta - V(g)$ . El segundo enunciado nos asegura que existe una única extensión  $\tilde{f}$  en  $\Delta$  tal que  $\tilde{f} = f$  en  $\Delta - V(g)$ . Debemos comprobar que  $f$  y  $\tilde{f}$  coinciden en  $\Delta - (X \cap \Delta)$ . Dado que ambas coinciden en  $\Delta - V(g)$ , basta comprobar que para todo  $w_0 \in V(g) - (X \cap \Delta)$ ,  $\tilde{f}(w_0) = f(w_0)$ . Como  $\Delta - V(g)$  es denso, existe una sucesión  $\{w_n\} \subset \Delta - V(g)$  que converge a  $w_0$ . Por tanto, por continuidad,

$$\tilde{f}(w_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(w_n) = f(w_0).$$

La unicidad de las extensiones localmente nos permite definir correctamente la extensión  $\tilde{f}$  en todo  $D$ .

Sea  $g$  una función holomorfa en  $\Delta(w; r)$  no idénticamente nula y sea  $X = \{z \in \Delta(w; r) : g(z) = 0\}$ . Dada una función  $f$  holomorfa en  $\Delta(w; r) - X$  localmente acotada en  $\Delta(w; r)$ , existe un abierto  $U(w) \subset \Delta(w; r)$  y una única función  $\tilde{f}$  holomorfa en dicho abierto tal que  $\tilde{f}(z) = f(z)$  para todo  $z \in U(w) - X$ .

Si  $w \notin X$ , podemos tomar un abierto  $U(w) \subset \Delta(w; r) - X$  y  $\tilde{f} = f$  en dicho entorno. Si  $w \in X$ , haciendo un cambio de coordenadas podemos suponer que  $g$  es regular de orden  $k$  en  $z_n$  en el punto  $w$ . Por el corolario 3.4, existe  $\Delta(w; \delta) \subset \Delta(w; r)$  tal que para todo  $z' \in \Delta(w'; \delta')$  la función  $g(z', z_n) = 0$  tiene  $k$  ceros en  $|z_n - w_n| < \delta_n$  y es distinta de cero en  $|z_n| = \delta_n$ . Consideremos la función en  $\Delta(w; \delta)$  dada por

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_n - w_n| = \delta_n} \frac{f(z', \zeta_n)}{\zeta_n - z_n} d\zeta_n.$$

El denominador del integrando no se anula en el dominio de integración puesto que  $|w_n - z_n| < \delta_n$  y  $|\zeta_n - w_n| = \delta_n$ . El numerador está bien definido en el dominio de integración ya que, por lo dicho anteriormente, para  $z' \in \Delta(w'; \delta')$  y  $|\zeta_n| = \delta_n$  tenemos que  $g(z', \delta_n) \neq 0$  y por tanto  $(z', \delta_n) \notin X$ . Por ello  $\tilde{f}$  es holomorfa en las variables  $z_1, \dots, z_{n-1}$ . También se comprueba que es holomorfa en la variable  $z_n$ . Como  $\tilde{f}$  es continua, por el lema de Osgood es holomorfa. Fijado  $z' \in \Delta(w'; \delta')$ , para  $|z_n - w_n| < \delta_n$  la función  $f(z_n) = f(z', z_n)$  no es holomorfa en como mucho  $k$  puntos, aquellos en los que  $g(z', z_n)$  se anula. Como  $f$  es localmente acotada, la función  $f(z_n)$  es acotada en  $\Delta(w_n; \delta_n)$ . El teorema de extensión de Riemann en una variable nos asegura que existe una única función  $\tilde{f}(z_n)$  holomorfa en  $\Delta(w_n; \delta_n)$  tal que  $\tilde{f}(z_n) = f(z', z_n)$  para todo  $z_n \in \Delta(w_n; \delta_n)$  con  $g(z', z_n) \neq 0$ . Por la fórmula integral de Cauchy, para todo  $z_n \in \Delta(w_n; \delta_n)$  tal que  $g(z', z_n) \neq 0$

$$\tilde{f}(z_n) = \int_{|\zeta_n - w_n| = \delta_n} \frac{\tilde{f}(\zeta_n)}{\zeta_n - z_n} d\zeta_n = \int_{|\zeta_n - w_n| = \delta_n} \frac{f(z', \zeta_n)}{\zeta_n - z_n} d\zeta_n = \tilde{f}(z', z_n).$$

Por tanto, para todo  $z_n \in \Delta(w_n; \delta_n)$  tal que  $g(z', z_n) \neq 0$ ,  $\tilde{f}(z', z_n) = \tilde{f}(z_n) = f(z', z_n)$ . Haciendo variar  $z' \in \Delta(w'; \delta')$  concluimos que  $\tilde{f}(z) = f(z)$  para todo  $z \in \Delta(w, \delta) - X$ .  $\square$

**Corolario 2.19.** Sea  $X$  un subconjunto fino de un dominio  $D \subset \mathbb{C}^n$ . Entonces  $D - X$  es conexo.

### 3. Anillos locales de funciones holomorfas

#### 3.1. Regularidad de orden $k$ de una función holomorfa

**Notación.** Dado un polidisco  $\Delta(w; r) \subset \mathbb{C}^n$  y un punto  $z \in \Delta(w; r)$ , denotaremos  $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$ .

**Definición 3.1.** Una función holomorfa  $f$  es *regular de orden  $k$  en  $z_n$  en el punto  $w$*  si  $f(w_1, \dots, w_{n-1}, z_n)$  considerada como función holomorfa dependiente de la variable  $z_n$  tiene un cero de orden  $k$  en el punto  $z_n = w_n$ .

El siguiente lema nos proporciona una relación entre el concepto de regularidad total y el de regularidad en una cierta variable.

**Lema 3.2.** Sea  $f$  una función holomorfa de orden total  $k < \infty$  en el punto  $w$ . Entonces existe un cambio de coordenadas lineal en  $\mathbb{C}^n$  tal que  $f$  se convierte en una función holomorfa regular de orden  $k$  en  $z_n$  en el punto  $w$ .

*Demostración.* Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $w = 0$ . Sea  $f = \sum_{j=k}^{\infty} f_j$ , donde  $f_j$  son polinomios homogéneos de grado  $j$  y  $f_k \neq 0$ . Sea  $a = (a_1, \dots, a_n) \neq 0$  tal que  $f_k(a) \neq 0$ . Puesto que  $a \neq 0$ , existen  $b_{ij} \in \mathbb{C}$  tales que el cambio de coordenadas

$$z_i = a_i \zeta_n + \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} \zeta_j$$

es no singular. Observamos que la función  $g(\zeta) = f(z(\zeta))$  aún tiene orden total  $k$  y que  $g(0, \dots, 0, 1) = f_k(a) \neq 0$ . Por tanto  $g$  es regular de orden  $k$  en  $\zeta_n$  en el origen.  $\square$

**Lema 3.3.** Sea  $f$  una función holomorfa regular de orden  $k$  en  $z_n$  en un polidisco  $\Delta(w; r)$ . Entonces existe un polidisco  $\Delta(w; \delta) \subset \Delta(w; r)$  tal que para todo

$$a' \in \Delta(w'; \delta')$$

la función  $f(a', z_n)$ , como función de una variable respecto a  $z_n$ , tiene exactamente  $k$  ceros (contando multiplicidades) en el disco  $|z_n - w_n| < \delta_n$ .

*Demostración.* Para simplificar la notación podemos suponer que  $w = 0$ . Por hipótesis,  $f(0, \dots, 0, z_n) = 0$  tiene un cero de orden  $k$  en  $z_n$ . De análisis complejo en una variable sabemos que los ceros de funciones holomorfas son aislados, es decir, que existe un  $\delta_n > 0$  tal que  $f(0, \dots, 0, z_n) \neq 0$  si  $0 < |z_n| \leq \delta_n$ . Sea

$$\varepsilon = \inf_{|z_n|=\delta_n} |f(0, \dots, 0, z_n)| > 0$$

Como  $f(z)$  es una función continua, sabemos que existen  $\tilde{\delta}_1(z_n), \dots, \tilde{\delta}_n(z_n)$  tales que  $\forall \zeta \in \Delta(0; r)$ , si  $(\zeta', \zeta_n - z_n) \in \bar{\Delta}(0; \tilde{\delta})$ , entonces

$$|f(\zeta) - f(0', z_n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideremos  $\tilde{\delta}_n(z_n)$  para todo  $|z_n| = \delta_n$ . Por compacidad,

$$\{z_n : |z_n| = \delta_n\} \subset \bigcup_{i=1}^s \Delta(z_n^i; \tilde{\delta}_n(z_n^i))$$

Si tomamos

$$\begin{cases} \delta_1 = \min\{\tilde{\delta}_1(z_n^1), \dots, \tilde{\delta}_1(z_n^s)\} \\ \vdots \\ \delta_{n-1} = \min\{\tilde{\delta}_{n-1}(z_n^1), \dots, \tilde{\delta}_{n-1}(z_n^s)\} \end{cases}$$

tendremos que  $\forall (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \Delta(0; \delta_1, \dots, \delta_{n-1})$ ,  $\forall z_n$  tal que  $|z_n| = \delta_n$ ,

$$|f(a_1, \dots, a_{n-1}, z_n) - f(0, \dots, 0, z_n)| < \varepsilon$$

Finalmente, como para todo  $z_n$  tal que  $|z_n| = \delta_n$  tenemos

$$|f(a_1, \dots, a_{n-1}, z_n) - f(0, \dots, 0, z_n)| < |f(0, \dots, 0, z_n)|,$$

el teorema de Rouché de variable compleja nos asegura que  $\forall (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \Delta(0; \delta_1, \dots, \delta_{n-1})$ ,  $f(a_1, \dots, a_{n-1}, z_n)$  y  $f(0, \dots, 0, z_n)$  tienen el mismo número de ceros en  $|z_n| < \delta_n$ . □

**Corolario 3.4.** Sea  $f$  una función holomorfa regular de orden  $k$  en  $z_n$  en un polidisco  $\Delta(w; r)$ . Entonces existe un polidisco  $\Delta(w; \delta) \subset \Delta(w; r)$  tal que para todo  $z' \in \Delta(w'; \delta')$  y para todo  $z_n$  con  $|z_n - w_n| = \delta_n$ ,

$$f(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) \neq 0.$$

### 3.2. Gérmenes de funciones. Regularidad de un germen.

**Definición 3.5.** Fijada una dimensión  $n$ , dos funciones holomorfas  $f_U, g_V$  son equivalentes en el punto  $w$  si existe un entorno  $W$  de  $w$  tal que  $W \subset U \cap V \subset \mathbb{C}^n$  y  $f_U|_W = g_V|_W$  (es una relación de equivalencia). A las clases de equivalencia de esta relación se las va a llamar gérmenes de funciones holomorfas en el punto  $w$ . El conjunto de todas las clases (gérmenes) junto con las operaciones suma y producto usuales de las funciones es un anillo conmutativo al que denominaremos anillo de gérmenes de funciones holomorfas en el punto  $w$  y al que denotaremos por  ${}_n\mathcal{O}_w$ , o bien  $\mathcal{O}_w$ , si la dimensión se deduce del contexto.

**Teorema 3.6.** El anillo  $\mathcal{O}_w$  es isomorfo al anillo de series convergentes centradas en el punto  $w$ .

Haciendo un cambio de coordenadas podemos suponer que  $w = 0$  y por tanto denotaremos al anillo de gérmenes  ${}_n\mathcal{O}_0$  por  $\mathcal{O}_n$ . Se tiene que las funciones holomorfas que representan al mismo germen tienen el mismo valor en el punto  $w$ . Las unidades de este anillo son los gérmenes que no se anulan en el punto  $w$ . En consecuencia,  $\mathcal{O}_n - \mathcal{U}(\mathcal{O}_n)$  es un ideal maximal. Luego  $\mathcal{O}_n$  es un anillo local. Observamos también que este anillo es dominio de integridad.

**Definición 3.7.** Un germen  $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$  es regular de orden  $k$  en  $z_n$  si tiene algún representante que sea regular de orden  $k$  en  $z_n$  en el origen.

**Definición 3.8.** Un polinomio de Weierstrass de grado  $k < 0$  en  $z_n$  es un elemento  $\mathbf{h} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$  de la forma

$$\mathbf{h} = \mathbf{z}_n^k + \mathbf{a}_1 \mathbf{z}_n^{k-1} + \cdots + \mathbf{a}_{k-1} \mathbf{z}_n + \mathbf{a}_k,$$

donde los coeficientes  $\mathbf{a}_j \in \mathcal{O}_{n-1}$  no son unidades.

### 3.3. Teoremas de Weierstrass y consecuencias

**Teorema 3.9** (de preparación de Weierstrass). Si  $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$  es regular de orden  $k$  en  $z_n$ , existe un único polinomio de Weierstrass  $\mathbf{h} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$  de grado  $k$  tal que  $\mathbf{f} = \mathbf{u}\mathbf{h}$  para alguna unidad  $\mathbf{u} \in \mathcal{O}_n$ .

*Demostración.* Sea  $f$  una función holomorfa en  $\Delta(0; r)$  regular de orden  $k$  en  $z_n$  cuyo germen es  $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$ . Por el Lema 2.1.1, sabemos que existe un poldisco  $\Delta(0; \delta) \subset \bar{\Delta}(0; \delta) \subset \Delta(0; r)$  tal que  $\forall (z_1, \dots, z_{n-1}) \in \Delta(0; \delta_1, \dots, \delta_{n-1})$  la función  $f(z_1, \dots, z_n)$  tiene exactamente  $k$  ceros en  $|z_n| < \delta_n$ . Esos ceros podemos denotarlos con  $\varphi_1(z'), \dots, \varphi_k(z')$ , donde  $z' = (z_1, \dots, z_n)$ , aunque las funciones  $\varphi_j$  no tienen por qué ser ni siquiera continuas. Por hipótesis  $|\varphi_j(z')| < \delta_n$  y  $\varphi_j(0) = 0$ .

Consideremos la función

$$h(z_1, \dots, z_n) = \prod_{j=1}^k [z_n - \varphi_j(z')] = z_n^k + a_{k-1}(z')z_n^{k-1} + \cdots + a_0(z'),$$

donde  $a_j(z')$  son las funciones elementales simétricas evaluadas en  $\varphi_j(z')$ . Vamos a demostrar que las funciones  $a_j(z')$  son continuas. Para  $1 \leq r \leq k$ ,

$$\phi_r(z') = \sum_{j=1}^k \varphi_j(z')^r = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\delta_n} \frac{\partial f(z', \zeta)}{\partial \zeta} \frac{\zeta^r}{f(z', \zeta)} d\zeta.$$

Una igualdad similar a ésta se probó en la demostración del teorema de la función implícita. Como  $f(z', \zeta) \neq 0$  si  $z' \in \Delta(0; \delta')$  y  $|\zeta| = \delta_n$  tenemos que la integral es holomorfa y por tanto lo es el sumatorio. Puesto que  $a_j(z') = P_j[\phi_1(z'), \dots, \phi_k(z')]$ , para un cierto polinomio  $P_j$ , las  $a_j$  también son holomorfas. Como  $\varphi_j(0) = 0$ , tenemos que  $a(0) = 0$ . Por tanto el germen  $\mathbf{h}$  es un polinomio de Weierstrass. Además, es el único que tiene los mismos ceros que  $f$  en  $\Delta(0; \delta)$  porque si hubiera otro  $\tilde{h}$

$$\tilde{h}(z) = \prod_{j=1}^k [z_n - \varphi_j(z')] = h(z).$$

Sólo falta comprobar que  $u = f/h$  es holomorfa y no se anula en  $\Delta(0; \delta)$ . Veamos que  $u$  toma valores en todo  $\Delta(0; \delta)$ , incluso cuando  $h(z) = 0$ . Si fijamos un  $z' \in \bar{\Delta}(0; \delta')$  tenemos que para cualquier  $|z_n| < \delta_n$

$$\lim_{z \rightarrow z_n} (z - z_n)u(z) = 0,$$

ya que  $f$  y  $h$  tienen los mismo ceros. Por tanto  $u(z_n) = u(z', z_n)$  es holomorfa en  $|z_n| \leq \delta_n$ . Además  $u(z_n) \neq 0$ , porque de lo contrario  $f$  tendría ceros donde no los tiene  $h$ . Consideremos ahora el conjunto fino  $X = \{z \in \Delta(0; \delta) : h(z) = 0\}$ . Como  $u$  es holomorfa en  $\Delta(0; \delta) - X$ , si mostramos que es localmente acotada en  $\Delta(0; \delta)$  el teorema de extensión de Weierstrass nos asegurará la existencia de una única función  $\tilde{u}$  holomorfa en todo  $\Delta(0; \delta)$  que coincide con nuestra  $u$  en  $\Delta(0; \delta) - X$ . Por continuidad, esa función deberá coincidir con los valores que toma  $u$  en  $X$ , lo cual quiere decir que  $u = \tilde{u}$  y por tanto habremos terminado.

Si vemos que  $u$  es acotada en  $\Delta(0; \delta)$  tendremos que en particular es localmente acotada en  $\Delta(0; \delta) - X$ . Sean

$$M = \max_{\Delta(0; \delta)} |f(z)|,$$

$$m = \min_{\substack{z' \in \bar{\Delta}(0; \delta') \\ |z_n| = \delta_n}} |h(z', z_n)| > 0.$$

Fijado  $z' \in \bar{\Delta}(0; \delta')$ , la función  $f(z_n) = f(z', z_n)$  es holomorfa y su módulo máximo lo alcanza en la frontera. Por tanto,  $|u(z)| \leq \frac{M}{m}$ ,  $\forall z \in \bar{\Delta}(0; \delta)$ .  $\square$

**Teorema 3.10** (de división de Weierstrass). Sea  $\mathbf{h} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$  un polinomio de Weierstrass de grado  $k$ . Para todo  $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$  podemos escribir de forma única  $\mathbf{f} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{r}$ , siendo  $\mathbf{r} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$  y  $\mathbf{g} \in \mathcal{O}_n$ . Es más, si  $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ , entonces necesariamente  $\mathbf{g} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ .

*Demostración.* Es consecuencia del teorema de división de Weierstrass extendido, cuya demostración se encuentra en la sección 3.5.  $\square$

Como consecuencia de estos teoremas tenemos que nuestros anillos locales  $\mathcal{O}_n$  tienen buenas propiedades algebraicas:

**Lema 3.11.** Un polinomio de Weierstrass  $\mathbf{h} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$  es reducible en  $\mathcal{O}_n$  si y solo si lo es en  $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ . Además, si es reducible, todos sus factores deben ser polinomios de Weierstrass salvo unidades de  $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ .

**Teorema 3.12.** Los anillos locales  $\mathcal{O}_n$  son dominios de factorización única.

**Teorema 3.13.** Los anillos locales  $\mathcal{O}_n$  son anillos noetherianos.

### 3.4. $\mathcal{O}_n$ -módulos

**Definición 3.14.** Sean  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{S}$  dos  $\mathcal{O}_n$ -módulos y sea  $\mu : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S}$  un homomorfismo de módulos. Una *syzigia* para  $\mu$  es un homomorfismo de módulos  $\lambda : \mathcal{O}_n^p \rightarrow \mathcal{R}$  tal que

$$\mathcal{O}_n^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{R} \xrightarrow{\mu} \mathcal{S}$$

es una sucesión exacta. Una *cadena de syzigias para un  $\mathcal{O}_n$ -módulo  $\mathcal{R}$*  es una sucesión exacta de  $\mathcal{O}_n$ -módulos de la forma

$$\dots \longrightarrow \mathcal{O}_n^{p_2} \xrightarrow{\lambda_2} \mathcal{O}_n^{p_1} \xrightarrow{\lambda_1} \mathcal{O}_n^{p_0} \xrightarrow{\lambda_0} \mathcal{R} \longrightarrow 0$$

Decimos que una cadena de syzigias (1) se *para en el  $k$ -ésimo paso* si el núcleo de  $\lambda_{k-1}$  es un módulo libre; en este caso, podemos reemplazar (1) por la *cadena finita de syzigias* de la forma

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_n^q \xrightarrow{\mu} \mathcal{O}_n^{p_{k-1}} \xrightarrow{\lambda_{k-1}} \dots \xrightarrow{\lambda_1} \mathcal{O}_n^{p_0} \xrightarrow{\lambda_0} \mathcal{R} \longrightarrow 0$$

donde  $\mathcal{O}_n^q$  es isomorfo al núcleo de  $\lambda_{k-1}$  a través del homomorfismo  $\mu$ .

**Teorema 3.15** (de Hilbert de las Syzigias). Cualquier cadena de syzigias de un  $\mathcal{O}_n$ -módulos  $\mathcal{R}$  se para en el  $n$ -ésimo paso.

*Demostración.* Considerar la cadena de syzigias para el  $\mathcal{O}_n$ -módulo  $\mathcal{R}$  dada por

$$\dots \xrightarrow{\lambda_2} \mathcal{O}_n^{p_1} \xrightarrow{\lambda_1} \mathcal{O}_n^{p_0} \xrightarrow{\lambda_0} \mathcal{R} \longrightarrow 0 \quad (2)$$

Para  $k = 0, 1, \dots$ , sea  $\mathcal{K}_k \subset \mathcal{O}_n^{p_k}$  el núcleo de la aplicación  $\lambda_k$ . Sea  $\mathcal{M}_j \subset \mathcal{O}_n$  el ideal generado por los gérmenes de la variables  $z_1, \dots, z_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Obsérvese que  $\mathcal{M}_n$  es el ideal maximal de  $\mathcal{O}_n$  ya que dado  $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$  que no sea una unidad podemos aplicar el teorema de preparación de Weierstrass sucesivamente en cada variable hasta conseguir un expresión que pertenezca a  $\mathcal{M}_n$ . Veamos que

$$\mathcal{K}_k \cap \mathcal{M}_j \mathcal{O}_n^{p_k} = \mathcal{M}_j \mathcal{K}_k,$$

para  $k \geq j$ . La inclusión  $\supset$  es trivial. Procedemos por inducción sobre  $j$  para probar la otra inclusión:

- Caso  $j = 1$ ,  $k \geq 1$ . Sea  $\mathbf{F} \in \mathcal{K}_k \cap \mathcal{M}_1 \mathcal{O}_n^{p_k}$ . Entonces  $\lambda_k(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{F} = \mathbf{z}_1 \mathbf{G}$  para algún  $\mathbf{G} \in \mathcal{O}_n^{p_k}$ . Así pues,  $\lambda_k(\mathbf{F}) = \mathbf{z}_1 \lambda_k(\mathbf{G}) = \mathbf{0}$ . Eso implica que  $\lambda_k(\mathbf{G}) = \mathbf{0}$  y por tanto  $\mathbf{F} = \mathbf{z}_1 \mathbf{G} \in \mathcal{M}_1 \mathcal{K}_k$ .
- Supongamoslo cierto para  $j$  y  $k \geq j$ . Probemos que es cierto para  $j+1$  y  $k \geq j+1$ . Sea  $\mathbf{F} \in \mathcal{K}_k \cap \mathcal{M}_{j+1} \mathcal{O}_n^{p_k}$ . Tenemos entonces que  $\lambda_k(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$  y

$$\mathbf{F} = \mathbf{z}_1 \mathbf{G}_1 + \dots + \mathbf{z}_{j+1} \mathbf{G}_{j+1}, \quad (3)$$

para ciertos  $\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_{j+1} \in \mathcal{O}_n^{p_k}$ . Por tanto

$$\mathbf{z}_{j+1} \lambda_k(\mathbf{G}_{j+1}) = -\mathbf{z}_1 \lambda_k(\mathbf{G}_1) - \dots - \mathbf{z}_j \lambda_k(\mathbf{G}_j)$$

Esta expresión nos asegura que cada monomio de  $\mathbf{z}_{j+1} \lambda_k(\mathbf{G}_{j+1})$  es divisible por algún  $\mathbf{z}_i$ ,  $1 \leq i \leq j$ . De acuerdo con eso, cada monomio de  $\lambda_k(\mathbf{G}_{j+1})$  es divisible por algún  $\mathbf{z}_i$ ,  $1 \leq i \leq j$ . Tenemos que

$$\lambda_k(\mathbf{G}_{j+1}) = \mathbf{z}_1 \mathbf{G}'_1 + \dots + \mathbf{z}_j \mathbf{G}'_j,$$

donde  $\mathbf{G}'_1, \dots, \mathbf{G}'_j \in \mathcal{O}_n^{p_{k-1}}$ . Por la exactitud de la sucesión 2,  $\lambda_{k-1} \lambda_k(\mathbf{G}_{j+1}) = \mathbf{0}$ . Por tanto  $\lambda_k(\mathbf{G}_{j+1}) \in \mathcal{K}_{k-1} \cap \mathcal{M}_j \mathcal{O}_n^{p_{k-1}}$ . Puesto que  $k-1 \geq j$ , por hipótesis de inducción  $\mathcal{K}_{k-1} \cap \mathcal{M}_j \mathcal{O}_n^{p_{k-1}} = \mathcal{M}_j \mathcal{K}_{k-1}$ . Como  $\mathcal{K}_{k-1} = \text{Ker}(\lambda_{k-1}) = \text{Im}(\lambda_k)$

$$\lambda_k(\mathbf{G}_{j+1}) = \mathbf{z}_1 \lambda_k(\mathbf{H}_1) + \dots + \mathbf{z}_j \lambda_k(\mathbf{H}_j),$$

para  $\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_j \in \mathcal{O}_n^{p_k}$ . Definimos

$$\mathbf{H}_{j+1} = \mathbf{G}_{k+1} - \mathbf{z}_1 \mathbf{H}_1 - \dots - \mathbf{z}_j \mathbf{H}_j \in \mathcal{O}_n^{p_k}.$$

$\mathbf{H}_{j+1} \in \mathcal{K}_k$  ya que  $\lambda_k(\mathbf{H}_{j+1}) = 0$ . Combinando esto último con la ecuación (3) obtenemos que

$$\mathbf{F} - \mathbf{z}_{j+1} \mathbf{H}_{j+1} = \mathbf{z}_1 (\mathbf{G}_1 + \mathbf{z}_{j+1} \mathbf{H}_1) + \dots + \mathbf{z}_j (\mathbf{G}_j + \mathbf{z}_{j+1} \mathbf{H}_j).$$

Por tanto  $\mathbf{F} - \mathbf{z}_{j+1} \mathbf{H}_{j+1} \in \mathcal{K}_k \cap \mathcal{M}_j \mathcal{O}_n^{p_k}$ . Por hipótesis de inducción,  $\mathcal{K}_k \cap \mathcal{M}_j \mathcal{O}_n^{p_k} = \mathcal{M}_j \mathcal{K}_k$ . Tenemos entonces que  $\mathbf{F} - \mathbf{z}_{j+1} \mathbf{H}_{j+1} \in \mathcal{M}_j \mathcal{K}_k$ , lo cual implica que  $\mathbf{F} \in \mathcal{M}_{j+1} \mathcal{K}_k$ .

Para probar el teorema debemos mostrar que  $\mathcal{K}_{n-1}$  es un  $\mathcal{O}_n$ -módulo libre. Por ser  $\mathcal{O}_n$  noetheriano y  $\mathcal{O}_n^{p_{n-1}}$  finitamente generado, podemos encontrar unos generadores  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_q$  de  $\mathcal{K}_{n-1}$  tales que ninguno de ellos sea combinación lineal de los otros con coeficientes en  $\mathcal{O}_n$ . Definimos

$$\mu : \mathcal{O}_n^q \ni (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_q) \longrightarrow \sum_{j=1}^q \mathbf{f}_j \mathbf{F}_j \in \mathcal{K}_{n-1}.$$

Podemos formar la siguiente cadena de syzigias juntando  $\mu$  con la cadena (2)

$$\mathcal{O}_n^q \xrightarrow{\mu} \mathcal{O}_n^{p_{n-1}} \xrightarrow{\lambda_{n-1}} \dots \xrightarrow{\lambda_2} \mathcal{O}_n^{p_1} \xrightarrow{\lambda_1} \mathcal{O}_n^{p_0} \xrightarrow{\lambda_0} \mathcal{R} \longrightarrow 0. \quad (4)$$

Sea  $\mathcal{K}$  el núcleo de la aplicación  $\mu$ . Veamos que  $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}_n \mathcal{O}_n^q$ . Sea  $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_q) \in \mathcal{K}$ . Entonces

$$0 = \mu(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_q) = \sum_{j=1}^q \mathbf{f}_j \mathbf{F}_j.$$

Si algún  $\mathbf{f}_{i_0}$  fuera unidad, podríamos expresar  $\mathbf{F}_{i_0}$  como combinación lineal de los otros generadores con coeficientes en  $\mathcal{O}_n$ . Como eso no puede ocurrir, deducimos que  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_q$  pertenecen al ideal maximal de  $\mathcal{O}_n$ , es decir, a  $\mathcal{M}_n$ . Por tanto  $\mathbf{f} \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_n^q$ . Por el resultado que probamos al empezar la demostración del teorema aplicado a la cadena (4),  $\mathcal{K} \cap \mathcal{M}_n \mathcal{O}_n^q = \mathcal{M}_n \mathcal{K}$ . Por tanto  $\mathcal{K} = \mathcal{M}_n \mathcal{K}$ , lo cual sólo puede ser cierto si  $\mathcal{K} = 0$ . En caso contrario, llegaríamos a una contradicción considerando un elemento de  $\mathcal{O}_n$  que fuera la coordenada de algún elemento de  $\mathcal{K}$  y que tuviera orden total mínimo. Concluimos que  $\mathcal{K}_{n-1}$  es libre y la cadena (2) se para en el  $n$ -ésimo paso.  $\square$

**Definición 3.16.** Decimos que el homomorfismo de  $\mathcal{O}_n$ -módulos

$$\mathcal{O}_n^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{O}_n^q$$

tiene una *matriz polinomial* si los elementos de la matriz que la representa pertenecen a  $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ . En este caso, podemos deducir el siguiente homomorfismo de  $\mathcal{O}_{n-1}$ -módulos

$$\mathcal{O}_{n-1}[z_n]^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{O}_{n-1}[z_n]^q$$

**Definición 3.17.** Denotamos el conjunto de polinomios en  $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$  de grado menor o igual que  $d$  por  ${}^d\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ .

**Lema 3.18** (de Oka). Sean  $\lambda$  y  $\mu$  dos homomorfismos con matrices polinomiales en  $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$  de grados  $l$  y  $m$  respectivamente, definiendo las siguientes sucesiones:

$$\mathcal{O}_n^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{O}_n^q \xrightarrow{\mu} \mathcal{O}_n, \quad (5)$$

$${}^{d-l}\mathcal{O}_{n-1}[z_n]^p \xrightarrow{\lambda} {}^d\mathcal{O}_{n-1}[z_n]^q \xrightarrow{\mu} {}^{d+m}\mathcal{O}_{n-1}[z_n]. \quad (6)$$

Supongamos que  $d \geq m$ , y que la matriz  $\mu$  contiene al menos una entrada regular en  $z_n$ . Si (6) es una sucesión exacta de  $\mathcal{O}_{n-1}$ -módulos entonces (5) es una sucesión exacta de  $\mathcal{O}_n$ -módulos.

*Demostración.* Que la sucesión (6) sea exacta implica que, restringida a  ${}^{d-l}\mathcal{O}_{n-1}[z_n]^p$ , la composición  $\mu \circ \lambda$  es nula y por tanto el producto de las matrices que las representan es idénticamente nulo. Dicho producto de matrices también representa la composición  $\mu \circ \lambda$  en  $\mathcal{O}_n^p$ . Tenemos entonces que  $\mu \circ \lambda = 0$  y por tanto la imagen de  $\lambda$  está contenida en el núcleo de  $\mu$ . Veamos que el núcleo de  $\mu$  está contenido en la imagen de  $\lambda$ . Sea  $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_q) \in \mathcal{O}_n^q$ . Sea

$$(\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_q)_{1 \times q}$$

la matriz de la aplicación  $\mu$ , donde  $\mathbf{a}_i \in {}^m\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ . Podemos suponer que  $\mathbf{a}_1$  es la entrada regular en  $z_n$  de la matriz de  $\mu$ . Si dicha entrada fuera  $\mathbf{a}_{i_0}$ , tan sólo habría que sustituir el papel que representa  $\mathbf{a}_1$  por  $\mathbf{a}_{i_0}$  en lo que sigue. Tenemos entonces que para todo  $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_q) \in \mathcal{O}_n^q$ ,  $\mu(\mathbf{F}) = \mathbf{a}_1\mathbf{f}_1 + \dots + \mathbf{a}_q\mathbf{f}_q$ . Podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1\mathbf{F} &= (\mathbf{a}_1\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{a}_1\mathbf{f}_q) = \\ &= \sum_{j=2}^q \mathbf{f}_j(-\mathbf{a}_j, 0, \dots, 0, \mathbf{a}_1, \dots, 0) + (\mathbf{a}_1\mathbf{f}_1 + \dots + \mathbf{a}_q\mathbf{f}_q, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Obsérvese que  $\mu(-\mathbf{a}_j, 0, \dots, 0, \mathbf{a}_1, \dots, 0) = -\mathbf{a}_1\mathbf{a}_j + \mathbf{a}_j\mathbf{a}_1 = 0$ . Como  $(-\mathbf{a}_j, 0, \dots, 0, \mathbf{a}_1, \dots, 0) \in {}^d\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ , ya que  $m \leq d$ , y la sucesión (6) es exacta, existe  $\mathbf{H}_j \in {}^{d-l}\mathcal{O}_{n-1}[z_n]^p$  tal que  $\lambda(\mathbf{H}_j) = (-\mathbf{a}_j, 0, \dots, 0, \mathbf{a}_1, \dots, 0)$ . Definiendo  $\mathbf{H} = \sum_{j=2}^n \mathbf{f}_j\mathbf{H}_j$  obtenemos que

$$\mathbf{a}_1\mathbf{F} = \lambda(\mathbf{H}) + \mathbf{S},$$

para  $\mathbf{S} = (\mathbf{a}_1\mathbf{f}_1 + \dots + \mathbf{a}_q\mathbf{f}_q, 0, \dots, 0) \in \mathcal{O}_n^q$ .

Como  $\mathbf{a}_1$  es regular en  $z_n$ , el teorema de preparación de Weierstrass asegura que existe un polinomio de Weierstrass  $\mathbf{a}'_1 \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$  y una unidad  $\mathbf{a}''_1 \in \mathcal{O}_n$  tales que  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}''_1\mathbf{a}'_1$ . Además, puesto que  $\mathbf{a}_1 \in {}^m\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ , tenemos que  $\mathbf{a}'_1 \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ . Sean  $m_1$ ,  $m'_1$  y  $m''_1$  los grados de  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}'_1$  y  $\mathbf{a}''_1$  respectivamente. Entonces  $m'_1 + m''_1 = m_1 \leq m$ . Sea  $\mathbf{F} \in \mathbf{O}_n^q$ . El teorema de división de Weierstrass aplicado en cada componente de  $\mathbf{F}$  respecto al polinomio de Weierstrass  $\mathbf{a}'_1$  nos asegura la existencia de  $\mathbf{F}'' \in \mathbf{O}_n^q$  y  $\mathbf{R}' \in {}^{m'_1-1}\mathcal{O}_{n-1}[z_n]^q$  tales que  $\mathbf{F} = \mathbf{a}'_1\mathbf{F}'' + \mathbf{R}'$ . Si definimos  $\mathbf{F}' = (\mathbf{a}''_1)^{-1}\mathbf{F}''$ , tenemos que  $\mathbf{F} = \mathbf{a}_1\mathbf{F}' + \mathbf{R}'$ . Por

lo discutido anteriormente, existen  $\mathbf{H} \in \mathcal{O}_n^p$  y  $\mathbf{S} = (\mathbf{s}, 0, \dots, 0) \in \mathcal{O}_n^p$  tales que  $\mathbf{a}_1 \mathbf{F}' = \lambda(\mathbf{H}) + \mathbf{S}$ . Por tanto

$$\mathbf{F} = \lambda(\mathbf{H}) + \mathbf{R},$$

donde  $\mathbf{R} = \mathbf{R}' + \mathbf{S} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_q) \in \mathcal{O}_n^q$  es tal que  $\mathbf{r}_1 \in \mathcal{O}_n$  y  $\mathbf{r}_j \in {}^{m'_j-1}\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ ,  $2 \leq j \leq q$ . Si  $\mu(\mathbf{F}) = 0$ , entonces

$$0 = \mu(\mathbf{F}) = \mu(\lambda(\mathbf{H})) + \mu(\mathbf{R}) = \mu(\mathbf{R}) = \mathbf{a}_1 \mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{a}_q \mathbf{r}_q.$$

Por tanto

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{r}_1 = -\mathbf{a}_1 \mathbf{r}_2 - \dots - \mathbf{a}_q \mathbf{r}_q \in {}^{m+m'_1-1}\mathcal{O}_{n-1}[z_n].$$

Por el teorema de división de Weierstrass, existen unos únicos  $\mathbf{g} \in \mathcal{O}_n$  y  $\mathbf{r} \in {}^{m'_1}\mathcal{O}_n$  tales que  $\mathbf{a}_1 \mathbf{r}_1 = \mathbf{g} \mathbf{a}'_1 + \mathbf{r}$ . Además, como  $\mathbf{a}_1 \mathbf{r}_1 \in {}^{m+m'_1-1}\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ , el teorema asegura que dicho  $\mathbf{g}$  pertenece a  ${}^{m-1}\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ . Como  $\mathbf{a}_1 \mathbf{r}_1 = \mathbf{a}'_1 \mathbf{a}''_1 \mathbf{r}_1$ , tenemos que  $\mathbf{g} = \mathbf{a}''_1 \mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r} = 0$ . En particular,  $\mathbf{a}''_1 \mathbf{r}_1 \in {}^{m-1}\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ . Para  $2 \leq j \leq n$ ,  $\mathbf{a}''_1 \mathbf{r}_j \in {}^{m-1}\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ . Como  $\mathbf{a}''_1 \mathbf{R} \in {}^{m-1}\mathcal{O}_{n-1}[z_n]^q \subset d\mathcal{O}_{n-1}[z_n]^q$  y  $\mu(\mathbf{R}) = 0$ , la exactitud de la sucesión (6) nos asegura que existe  $\mathbf{G}' \in {}^{d-l}\mathcal{O}_{n-1}[z_n]^q$  tal que  $\lambda(\mathbf{G}') = \mathbf{a}''_1 \mathbf{R}$ . Definiendo  $\mathbf{G} = \mathbf{H} + (\mathbf{a}'_1)^{-1} \mathbf{G}' \in \mathcal{O}_n^p$ , nos queda que

$$\lambda(\mathbf{G}) = \lambda(\mathbf{H}) + (\mathbf{a}'_1)^{-1} \lambda(\mathbf{G}') = \lambda(\mathbf{H}) + (\mathbf{a}'_1)^{-1} \mathbf{a}''_1 \mathbf{R} = \mathbf{F}.$$

□

### 3.5. Teorema de división de Weierstrass extendido

**Definición 3.19.** Sea  $K$  un cerrado de  $\mathbb{C}^n$ . Consideremos la familia de funciones holomorfas en abiertos  $U \subset \mathbb{C}^n$  tales que  $K \subset U$ . En dicha familia vamos a definir la siguiente relación de equivalencia: decimos que  $f \in \mathcal{O}_U$  y  $g \in \mathcal{O}_V$  son equivalentes si y solo si existe un abierto  $W$  tal que  $K \subset W \subset U \cap V$  y  $f|_W = g|_W$ . A cada clase de equivalencia la llamamos *germen de funciones holomorfas en  $K$* . La operación producto y suma usuales de las funciones holomorfas está bien definida para estos gérmenes, y por tanto el conjunto cociente adquiere estructura de anillo conmutativo, al cual llamaremos *anillo de gérmenes de funciones holomorfas en  $K$*  y denotaremos por  $\mathcal{O}_K$ .

El siguiente lema técnico nos ayudará a probar el teorema de Weierstrass extendido:

**Lema 3.20.** Sea  $f$  una función holomorfa sobre el polidisco compacto  $\bar{\Delta}(0; r) \subset \mathbb{C}^n$ . Entonces el módulo máximo se alcanza en  $S(0; r)$ .

*Demostración.* Supongamos que el módulo máximo se alcanza en un  $a \in \bar{\Delta}(0; r)$  tal que  $|a_i| < r$  para algún  $i$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $i=1$ . Tenemos entonces que la función  $\tilde{f}(z) = f(z, a_2, \dots, a_n)$ , que es holomorfa en  $|z| \leq r_1$ , alcanza su módulo máximo en un punto interior, y por tanto, es constante. Eso quiere decir que, en particular, existe  $|\tilde{a}_1| = r_1$  tal que  $|f(\tilde{a}_1, \dots, a_n)|$  es máximo. □

**Teorema 3.21** (de división de Weierstrass extendido). Sea  $h(z)$  una función holomorfa en  $\bar{\Delta}(0; r)$  teniendo forma de polinomio de Weierstrass de orden  $k$  en  $z_n$  en dicho polidisco compacto. Supongamos que para todo  $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in \bar{\Delta}(0; r_1, \dots, r_{n-1})$  las  $k$  soluciones de  $h(a_1, \dots, a_{n-1}, z_n) = 0$  satisfacen que  $|z_n| < r_n$ . Entonces existe una constante  $K > 0$  tal que toda función  $f \in \mathcal{O}_{\bar{\Delta}(0; r)}$  puede ser escrita de forma única como  $f = gh + p$  en  $\bar{\Delta}(0; r)$ , donde

$$g \in \mathcal{O}_{\bar{\Delta}(0; r)} \text{ y } \|g\|_{\bar{\Delta}(0; r)} < K \|f\|_{\bar{\Delta}(0; r)}$$

y

$$p = \sum_{i=0}^{k-1} p_j(z_1, \dots, z_{n-1}) z_n^i,$$

con

$$p_j \in \mathcal{O}_{\bar{\Delta}(0; r)} \text{ y } \|p_j\|_{\bar{\Delta}(0; r)} < K \|f\|_{\bar{\Delta}(0; r)}.$$

*Demostración.* Como  $h(z)$  es una función holomorfa en  $\bar{\Delta}(0; r)$  teniendo forma de polinomio de Weierstrass de orden  $k$  en  $z_n$  en dicho polidisco compacto, existen unos  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$  tales que para todo  $z \in \Delta(0; r + 2\varepsilon)$

$$h(z) = z_n^k + a_{k-1}(z') z_n^{k-1} + \dots + a_0(z'), \quad (7)$$

donde  $a_i \in \mathcal{O}_{n-1}$ ,  $a_i(0) = 0$ ,  $0 \leq i \leq k-1$ . Podemos escoger los  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$  de forma que  $h$  sea de la forma (7) en  $\Delta(0; r + 2\varepsilon)$  y que para todo

$$a' \in \Delta(0; r' + 2\varepsilon')$$

las  $k$  raíces de  $h(a') = 0$  satisfacen que  $|z_n| < r_n$ . Podemos argumentar esto último de dos maneras:

- 1) Para todo  $a' \in \Delta(0; r')$  las  $k$  raíces de  $h(a', z_n)$  son tales que  $|z_n| < r_n$ . Como el número de raíces es como mucho  $k$  y son continuas respecto de  $a'$ , existe un  $\varepsilon$  como el que deseábamos
- 2) Para todo  $a' \in \bar{\Delta}(0; r')$  tenemos que  $h(a', z_n) \neq 0$  si  $|z_n| = r_n$ . Por tanto existen  $\delta_1(a'), \dots, \delta_{n-1}(a') > 0$  de forma que para todo  $\zeta' \in \Delta(a'; \delta')$  y para todo  $z_n$  tal que  $|z_n| = r_n$  tenemos que  $h(\zeta', z_n) \neq 0$ . Por ser  $\bar{\Delta}(0; r')$  compacto podemos asegurar que

$$\bar{\Delta}(0; r') \subset \bigcup_{i=1}^l \Delta(b^i; \delta_1(b^i), \dots, \delta_{n-1}(b^i)).$$

Podemos encontrar unos  $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}$  tales que

$$\bar{\Delta}(0; r') \subset \Delta(0; r' + \delta') \subset \bigcup_{i=1}^l \Delta(b^i; \delta_1(b^i), \dots, \delta_{n-1}(b^i)).$$

Si fijamos  $\delta_i = 2\varepsilon_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , y un  $\varepsilon_n$  suficientemente pequeño tendremos lo que buscamos.

Sea, para todo  $z \in \Delta(0; r + \varepsilon)$ ,

$$g(z) = \int_{|\zeta|=r_n+\varepsilon_n} \frac{f(z', \zeta)}{h(z', \zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z_n}.$$

Es una función holomorfa porque el denominador no se anula en el dominio de integración. Por otro lado, definimos la función holomorfa en  $\Delta(0; r + \varepsilon)$

$$\begin{aligned} p(z) &= f(z) - g(z)h(z) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_n+\varepsilon_n} \frac{f(z', \zeta)}{h(z', \zeta)} \left[ \frac{h(z', \zeta) - h(z)}{\zeta - z_n} \right] d\zeta = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_n+\varepsilon_n} \frac{f(z', \zeta)}{h(z', \zeta)} h_j^*(z', \zeta) d\zeta \right) z_n^j = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} p_j(z') z_n^j, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} h_j^*(z', \zeta) &= \sum_{i=0}^{k-1-j} \zeta^{k-i-j-1} a_{k-i}(z'), \\ p_j(z') &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_n+\varepsilon_n} \frac{f(z', \zeta)}{h(z', \zeta)} h_j^*(z', \zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Hemos expresado  $f$  de la manera deseada con  $g, p, p_i \in \mathcal{O}_{\Delta(0; r)}$ . Tan sólo falta acotar  $g$  y  $p_i$  respecto a  $f$ . Observamos que, fijado  $z'$ , el integrando de  $p_j$  es holomorfo para  $r_n \leq |\zeta| \leq r_n + \varepsilon_n$  puesto que  $h(z', \zeta)$  no se anula para dichos  $\zeta$  y por tanto, por el teorema de Cauchy-Goursat de análisis complejo en una variable, tenemos que

$$p_j(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_n+\varepsilon_n} \frac{f(z', \zeta)}{h(z', \zeta)} h_j^*(z', \zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_n} \frac{h_j^*(z', \zeta)}{h(z', \zeta)} f(z', \zeta) d\zeta. \quad (8)$$

Consideramos la constante

$$K_j = \max_{\substack{|z_j| \leq r_j \\ |\zeta|=r_n}} \left| \frac{h_j^*(z_1, \dots, z_{n-1}, \zeta)}{h(z_1, \dots, z_{n-1}, \zeta)} \right|.$$

Tomando módulos en (8)

$$|p_j(z_1, \dots, z_{n-1})| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=r_n} \left| \frac{h_j^*(z_1, \dots, z_{n-1}, \zeta)}{h(z_1, \dots, z_{n-1}, \zeta)} \right| |f(z_1, \dots, z_{n-1}, \zeta)| d\zeta \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=r_n} K_j \|f\|_{\bar{\Delta}(0;r)} d\zeta = r_n K_j \|f\|_{\bar{\Delta}(0;r)}.$$

Vamos a acotar  $g$ . Por lo discutido al comienzo de la demostración del teorema, tenemos que  $h(z) \neq 0$  si  $|z_i| = r_i$ . Consideramos la constante

$$m = \min_{|z_i|=r_i} |h(z)| > 0.$$

Tomando módulos para todo  $z$  tal que  $|z_i| = r_i$ ,

$$\begin{aligned} |g(z)| &= \left| \frac{f(z) - g(z)}{h(z)} \right| \leq \frac{|f(z) - g(z)|}{|h(z)|} \leq \frac{|f(z)| + |g(z)|}{m} \leq \\ &\leq \frac{1}{m} \left[ |f(z)| + \sum_{j=0}^{k-1} |p_j(z_1, \dots, z_{n-1})| r_n^j \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{m} \left[ \|f\|_{\bar{\Delta}(0;r)} + \sum_{j=0}^{k-1} (r_n K_j \|f\|_{\bar{\Delta}(0;r)}) r_n^j \right] = \\ &= \frac{1}{m} \left[ 1 + \sum_{j=0}^{k-1} K_j r_n^{j+1} \right] \|f\|_{\bar{\Delta}(0;r)}. \end{aligned}$$

El lema anterior y el teorema del módulo máximo nos aseguran que

$$\|g\|_{\bar{\Delta}(0;r)} \leq \frac{1}{m} \left[ 1 + \sum_{j=0}^{k-1} K_j r_n^{j+1} \right] \|f\|_{\bar{\Delta}(0;r)}.$$

Finalmente, tomando

$$K = \max\{r_n K_0, \dots, r_n K_{k-1}, \sum_{j=0}^{k-1} K_j r_n^{j+1}\},$$

concluimos la demostración del teorema. □

### 3.6. Variedades

**Definición 3.22.** Sea  $U$  un dominio de  $\mathbb{C}^n$ . Un subconjunto  $V$  de  $U$  se dice *subvariedad de  $U$*  si para todo  $z \in U$  existe un entorno abierto  $U(x)$  y funciones  $f_1, \dots, f_r$  holomorfas en  $U(z)$  tales que

$$V \cap U(x) = \{z \in U(z) : f_1(z) = \dots = f_r(z) = 0\}$$

Denotaremos

$$V(f_1, \dots, f_r) = \{z \in U(z) : f_1(z) = \dots = f_r(z) = 0\}$$

**Teorema 3.23.** Una subvariedad  $V$  de  $U$  es un subconjunto cerrado y no denso en ningún punto de  $U$ . Si  $U$  es conexa, entonces  $U - V$  también lo es.

**Teorema 3.24.** Sea  $\mathcal{F}$  una colección de funciones holomorfas en un dominio  $D \subset \mathbb{C}^n$ . Entonces el conjunto

$$V(\mathcal{F}) = \{z \in D : f(z) = 0, \forall f \in \mathcal{F}\}$$

es una subvariedad de  $D$ .

*Demostración.* Sea  $z \in D$ . Sea  $I$  el ideal de  $\mathcal{O}_z$  generado por  $\{\mathbf{f} \in \mathcal{O}_z : f \in \mathcal{F}\}$ . Puesto que  $\mathcal{O}_z$  es noetheriano, existen generadores  $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_k$  del ideal  $I$ . Por el teorema ?, podemos encontrar un polidisco  $\Delta = \Delta(z; r)$  tal que si  $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_\Delta$  y  $\mathbf{f} \in I$  entonces existen  $h_{ij} \in \mathcal{O}_\Delta$  tales que  $f = \sum_{i=1}^k h_{ij} g_i$ . Podemos suponer que dicho polidisco es tal que existen  $f_{ij} \in \mathcal{F}$  y  $h_{ij} \in \mathcal{O}_\Delta$  de forma que  $\mathbf{g}_i = \sum_{j=1}^{n_i} h_{ij} \mathbf{f}_{ij}$ . Entonces  $V(g_1, \dots, g_k) \cap \Delta = V(\mathcal{F}) \cap \Delta$ .  $\square$

**Definición 3.25.** Sean  $X$  e  $Y$  subconjuntos de  $\mathbb{C}^n$ . Decimos que  $X$  e  $Y$  son *equivalente en 0* si existe un entorno abierto de 0 tal que  $X \cap U = Y \cap U$ . A las clases de equivalencia de esta relación las denominamos *gérmenes de conjuntos*. Al germen del subconjunto  $X$  lo denotaremos por  $\mathbf{X}$ .

**Observación 3.26.** Las operaciones de unión, intersección y diferenciación entre gérmenes de conjuntos están bien definidas. La relación de contenido también está bien definida.

**Definición 3.27.** Sea  $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$ . Denotamos por  $\mathbf{V}(\mathbf{f})$  el germen del conjunto  $\{x \in U(0) : f(x) = 0\}$ , donde  $f$  representa a  $\mathbf{f}$  en un dominio  $U(0)$ .

**Observación 3.28.** La definición anterior no depende de la representación de  $\mathbf{f}$  que escojamos.

**Definición 3.29.** Sea  $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$  y  $\mathbf{X}$  el germen de un conjunto. Decimos que  $\mathbf{f}$  se *anula en*  $\mathbf{X}$  si  $\mathbf{X} \subset \mathbf{V}(\mathbf{f})$ .

**Definición 3.30.** Un germen  $\mathbf{X}$  es el *germen de una variedad* si existen  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_t \in \mathcal{O}_n$  tales que  $\mathbf{X} = \mathbf{V}(\mathbf{f}_1), \dots, \mathbf{V}(\mathbf{f}_t)$ . Denotaremos

$$\mathbf{V}(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_t) = \mathbf{V}(\mathbf{f}_1), \dots, \mathbf{V}(\mathbf{f}_t).$$

Al conjunto de todos los gérmenes de variedades lo denotaremos por  $\mathfrak{B}_n$ .

**Proposición 3.31.** Sean  $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathfrak{B}_n$ . Entonces  $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}, \mathbf{V} \cup \mathbf{W} \in \mathfrak{B}_n$ .

**Definición 3.32.** El *ideal de*  $\mathbf{V} \in \mathfrak{B}_n$  es el subconjunto de  $\mathcal{O}_n$  dado por  $\mathbf{I}(\mathbf{V}) = \{\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n : \mathbf{V} \subset \mathbf{V}(\mathbf{f})\}$ . El *locus* de un subconjunto  $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_n$  es  $\mathbf{V}(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathbf{f} \in \mathcal{A}} \mathbf{V}(\mathbf{f})$ .

**Proposición 3.33.** Sean  $\mathbf{V} \in \mathfrak{B}_n$  y  $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_n$ . Entonces

- i)  $\mathbf{I}(\mathbf{V})$  es un ideal de  $\mathcal{O}_n$ ,
- ii)  $\mathbf{V}(\mathcal{A})$  es el germen de una variedad.

**Teorema 3.34.** Sean  $\mathbf{V}, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 \in \mathfrak{B}_n$  y sean  $I, I_1, I_2$  ideales de  $\mathcal{O}_n$ . Las siguientes relaciones se satisfacen:

- i)  $\mathbf{V}_1 \supset \mathbf{V}_2 \Rightarrow \mathbf{I}(\mathbf{V}_1) \subset \mathbf{I}(\mathbf{V}_2)$ ,
- ii)  $\mathbf{V}_1 \neq \mathbf{V}_2 \Rightarrow \mathbf{I}(\mathbf{V}_1) \neq \mathbf{I}(\mathbf{V}_2)$ ,
- iii)  $\mathbf{I}(\mathbf{V}) = \text{rad}(\mathbf{I}(\mathbf{V}_1))$ ,
- iv)  $I_1 \supset I_2 \Rightarrow \mathbf{V}(I_1) \subset \mathbf{V}(I_2)$ ,
- v)  $\mathbf{V}(\mathbf{I}(\mathbf{V})) = \mathbf{V}$ ,
- vi)  $\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(\text{rad}(I))$ ,
- vii)  $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) \supset \text{rad}(I)$ .

**Definición 3.35.** Un germen  $\mathbf{V} \in \mathfrak{B}_n$  es *irreducible* si dados  $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 \in \mathfrak{B}_n$  tales que  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \cup \mathbf{V}_2$  entonces  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1$  o  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_2$ .

**Teorema 3.36.**  $\mathbf{V}$  es irreducible si y sólo si  $\mathbf{I}(\mathbf{V})$  es un ideal primo.

**Teorema 3.37.** Sea  $\mathbf{V} \in \mathfrak{B}_n$ . Existen  $\mathbf{V}_i \in \mathfrak{B}_n$  irreducibles,  $\mathbf{V}_i \not\subset \mathbf{V}_j$ ,  $i \neq j$ , tales que  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \cup \dots \cup \mathbf{V}_t$ . Los  $\mathbf{V}_i$  están determinados unívocamente por  $\mathbf{V}$ .

**Teorema 3.38** (de los ceros de Hilbert o *Nullstellensatz*). Sea  $I$  un ideal de  $\mathcal{O}_n$ . Entonces  $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \text{rad}(I)$ .

En la sección (3.7) probaremos este teorema. El siguiente resultado nos permite restringirnos al caso de ideales primos.

**Teorema 3.39.** Si el teorema de los ceros de Hilbert es cierto para los ideales primos entonces es cierto para todos los ideales.

*Demostración.* Sea  $I$  un ideal de  $\mathcal{O}_n$ . Puesto que  $\mathcal{O}_n$  es noetheriano, podemos considerar la descomposición primaria minimal de  $I$  dada por

$$I = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_t.$$

Los ideales primos  $\mathfrak{p}_i = \text{rad}(\mathfrak{q}_i)$  están determinados unívocamente por  $I$ . Por la propiedad *vi*) del teorema 3.34,  $\mathbf{V}\mathfrak{p}_i = \mathbf{V}(\text{rad}(\mathfrak{q}_i))$ . Por tanto

$$\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(\mathfrak{p}_1) \cup \dots \cup \mathbf{V}(\mathfrak{p}_t).$$

Finalmente

$$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathfrak{p}_1)) \cap \dots \cap \mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathfrak{p}_t)) = \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_t = \text{rad}(I).$$

□

### 3.7. El teorema de los ceros de Hilbert o *Nullstellensatz*

Dado un ideal primo  $I \subset \mathcal{O}_n$ , sea

$$\pi : \mathcal{O}_n \ni x \rightarrow \bar{x} \in \mathcal{O}_n/I$$

el homomorfismo natural y sea  $\mathcal{F}_n$  el cuerpo de fracciones de  $\mathcal{O}_n/I$ .

**Definición 3.40.** Sea  $I$  un ideal primo de  $\mathcal{O}_n$ . Un sistema de coordenadas  $z_1, \dots, z_n$  se dice *regular para  $I$*  si existe un número  $k = 0, \dots, n$  tal que las siguientes propiedades se satisfacen:

- i)  $I \cap \mathcal{O}_k = (0)$ ,
- ii)  $\mathcal{O}_n/I$  es entero sobre  $\mathcal{O}_k$ , y
- iii)  $\mathcal{F}_n$  está generado sobre  $\mathcal{F}_k$  por el elemento  $\eta_{k+1} = \pi(\mathbf{z}_{k+1})$ , donde  $\mathcal{F}_k$  es el cuerpo de fracciones de  $\mathcal{O}_k$ .

El número  $k$  se denomina *dimensión de  $I$  relativa al sistema de coordenadas  $z_1, \dots, z_n$* .

**Teorema 3.41.** Todo ideal primo  $I \subset \mathcal{O}_n$  tiene un sistema de coordenadas regular.

*Demostración.* En primer lugar vamos a probar por inducción sobre  $n$  que mediante un cambio de coordenadas lineal podemos conseguir un sistema que satisfaga

- i)  $I \cap \mathcal{O}_k = (0)$ ,
- ii)  $\mathcal{O}_n/I$  es entero sobre  $\mathcal{O}_k$ , y
- iv)  $\mathcal{O}_n/I$  está generado sobre  $\mathcal{O}_k$  por los elementos  $\eta_j = \pi(\mathbf{z}_j)$ ,  $k+1 \leq j \leq n$ .

Para los casos  $I = (0)$  e  $I = \mathcal{O}_n$  tomamos  $k = n$  y  $k = 0$  respectivamente. Podemos suponer por tanto que el ideal  $I$  es propio. En el caso  $n = 0$  tenemos que  $\mathcal{O}_0 = \mathbb{C}$ , que es un cuerpo y por tanto no tiene ideales propios.

Supongamos que es cierto para  $n - 1$  y probemos que entonces lo es para  $n$ . Sea  $I \subset \mathcal{O}_n$  un ideal propio y sea  $\mathbf{f} \in I$ ,  $\mathbf{f} \neq 0$ . Como  $\mathbf{f}$  no es una unidad, mediante un cambio de variables lineal adecuado podemos suponer que  $\mathbf{f}$  es regular en  $z_n$ . Entonces, por el teorema de Preparación de Weierstrass,  $\mathbf{f} = \mathbf{u}\mathbf{h}$ , donde  $\mathbf{u}$  es una unidad de  $\mathcal{O}_n$  y  $\mathbf{h}$  es un polinomio de Weierstrass,

$$\mathbf{h} = \mathbf{z}_n^r + \sum_{i < r} \mathbf{a}_i \mathbf{z}_n^i.$$

donde  $\mathbf{a}_i \in \mathcal{O}_{n-1}$  no son unidades. Como  $\mathbf{u}$  es una unidad,  $\mathbf{h} = \mathbf{u}^{-1}\mathbf{f} \in I$ . El ideal  $I' = I \cap \mathcal{O}_{n-1}$  sigue siendo un ideal primo y por hipótesis de inducción existe un número  $0 \leq k \leq n-1$  y un sistema de coordenadas, que denotaremos nuevamente con  $z_1, \dots, z_{n-1}$ , tales que

- i)  $I' \cap \mathcal{O}_k = (0)$ ;
- ii)  $\mathcal{O}_{n-1}/I'$  es entero sobre  $\mathcal{O}_k$ ;

- iv)  $\mathcal{O}_{n-1}/I'$  está generado sobre  $\mathcal{O}_k$  por los elementos  $\eta_j = \pi(\mathbf{z}_j), k+1 \leq j \leq n-1$ .

Comprobemos que el sistema  $z_1, \dots, z_n$  satisface las tres propiedades para el ideal  $I$  y el mismo número  $k$ .

- i) Como  $\mathcal{O}_k \subset \mathcal{O}_{n-1}$ , tenemos que  $I \cap \mathcal{O}_k = I' \cap \mathcal{O}_k = (0)$ .  
 ii) Veamos que  $\mathcal{O}_n/I = (\mathcal{O}_{n-1}/I')[\eta_n]$ . Sea  $\mathbf{g} \in \mathcal{O}_n$ . El teorema de división de Weierstrass aplicado al polinomio  $\mathbf{h}$  del comienzo de la demostración nos proporciona la siguiente igualdad

$$\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{g}}\mathbf{h} + \sum_{i < r} \mathbf{b}_i \mathbf{z}_n^i,$$

donde  $\mathbf{b}_i \in \mathcal{O}_{n-1}$ . Puesto que  $\mathbf{h} \in I$ ,

$$\pi(\mathbf{g}) = \sum_{i < r} \pi(\mathbf{b}_i) \eta_n^i \in (\mathcal{O}_{n-1}/I')[\eta_n].$$

Como  $\eta_n$  es entero sobre  $\mathcal{O}_{n-1}/I'$  dado que

$$\mathbf{h} = \mathbf{z}_n^r + \sum_{i < r} \mathbf{a}_i \mathbf{z}_n^i \Rightarrow 0 = \pi(\mathbf{h}) = \eta_n^r + \sum_{i < r} \pi(\mathbf{a}_i) \eta_n^i,$$

deducimos que  $\mathcal{O}_n/I = (\mathcal{O}_{n-1}/I')[\eta_n]$  es entero sobre  $\mathcal{O}_{n-1}/I$ . Concluimos que  $\mathcal{O}_n/I$  es entero sobre  $\mathcal{O}_k$  ya que, por hipótesis,  $\mathcal{O}_{n-1}/I'$  es entero sobre  $\mathcal{O}_k$ . Véase el corolario 5.4 de [A-M] para una demostración de este último hecho.

- iv) Como  $\mathcal{O}_{n-1}/I'$  está generado sobre  $\mathcal{O}_k$  por los elementos  $\eta_j = \pi(\mathbf{z}_j), k+1 \leq j \leq n-1$  y  $\mathcal{O}_n/I = (\mathcal{O}_{n-1}/I')[\eta_n]$ , deducimos que  $\mathcal{O}_n/I$  está generado sobre  $\mathcal{O}_k$  por los elementos  $\eta_j = \pi(\mathbf{z}_j), k+1 \leq j \leq n$ .

Para terminar la demostración del teorema basta hacer un cambio lineal adecuado de un sistema que satisfaga i), ii), iv). Efectivamente, si  $\mathcal{O}_n/I$  está generado sobre  $\mathcal{O}_k$  por  $\eta_{k+1}, \dots, \eta_n$  entonces  $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_k(\eta_{k+1}, \dots, \eta_n)$ . Los elementos  $\eta_{k+1}, \dots, \eta_n$  son algebraicos sobre  $\mathcal{F}_k$  ya que son enteros sobre  $\mathcal{O}_k$ . Por tanto la extensión  $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$  es algebraica. Podemos utilizar el teorema del elemento primitivo puesto que estamos trabajando en un cuerpo de característica 0. La demostración de dicho teorema, la cual se puede encontrar en el teorema 14 de [C], nos asegura que existen  $c_i \in \mathbb{C}$  tales que  $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_k(\eta)$ , donde  $\eta = \sum_{i=k+1}^n c_i \eta_i$ . Basta tomar como sistema de coordenadas  $z'_i = z_i, 1 \leq i \leq k, z'_{k+1} = \sum_{i=k+1}^n c_i z_i$  y  $z'_{k+2}, \dots, z'_n$  coordenadas cualesquiera independientes a las anteriores.  $\square$

Sea  $z_1, \dots, z_k; z_{k+1}, \dots, z_n$  un sistema regular de coordenadas para el ideal  $I$ . Sean  $\mathbf{q}_j(x) \in \mathcal{O}_k[x], k+1 \leq j \leq n$  los polinomios mínimos de  $\eta_j = \pi(\mathbf{z}_j)$  sobre  $\mathcal{F}_k$ . Sean  $r_j$  sus grados. Denotemos  $r = r_{k+1}$ . Obsérvese que  $\mathbf{q}_j(\eta_j) = \pi(\mathbf{q}_j(\mathbf{z}_j)) = 0$  y que por tanto  $\mathbf{q}_j(\mathbf{z}_j) \in I$ .

**Lema 3.42.** Los polinomios  $\mathbf{q}_j(\mathbf{z}_j) \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$  son polinomios de Weierstrass.

*Demostración.* Por definición, los polinomios  $\mathbf{q}_j(\mathbf{z}_j)$  son regulares de orden  $r_j$  en  $z_j$ . Por el teorema de preparación de Weierstrass,  $\mathbf{q}_j(\mathbf{z}_j) = \mathbf{u}\mathbf{q}'_j(\mathbf{z}_j)$ , donde  $\mathbf{q}'_j(\mathbf{z}_j)$  es un polinomio de Weierstrass de orden  $r_j$  en  $z_j$  y  $\mathbf{u} \in \mathcal{O}_k[\mathbf{z}_j]$  es una unidad. Tenemos entonces que  $\mathbf{q}'_j(\mathbf{z}_j) = \mathbf{u}^{-1}\mathbf{q}_j(\mathbf{z}_j) \in I$ . Por tanto  $\pi(\mathbf{q}'_j(\mathbf{z}_j)) = \mathbf{q}'_j(\eta_j) = 0$ . Como  $\mathbf{q}'_j$  y  $\mathbf{q}_j$  son mónicos del mismo grados y se anulan en  $\eta_j$ , tenemos que  $\mathbf{q}'_j = \mathbf{q}_j$ .  $\square$

Como  $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_k(\eta_{k+1})$ , existen polinomios  $\mathbf{T}_j(x) \in {}^{r-1}\mathcal{O}_k[x]$ ,  $k+2 \leq j \leq n$ , tales que

$$\eta_j = \frac{\mathbf{T}_j(\eta_{k+1})}{\mathbf{D}}$$

donde  $\mathbf{D} \in \mathcal{O}_k$  es el discriminante de  $\mathbf{q}_{k+1}(x)$ . Véanse los preliminares de álgebra para este último hecho. Entonces

$$\mathbf{D}\eta_j - \mathbf{T}_j(\eta_{k+1}) = \pi(\mathbf{D}\mathbf{z}_j - \mathbf{T}_j(\mathbf{z}_{k+1})) = 0.$$

Por tanto  $\mathbf{D}\mathbf{z}_j - \mathbf{T}_j(\mathbf{z}_{k+1}) \in I$ . Consideremos los siguientes ideales

$$\begin{cases} I_1 = (\mathbf{q}_{k+1}(\mathbf{z}_{k+1}), \dots, \mathbf{q}_n(\mathbf{z}_n), \mathbf{D}\mathbf{z}_{k+2} - \mathbf{T}_{k+2}(\mathbf{z}_{k+1}), \dots, \mathbf{D}\mathbf{z}_n - \mathbf{T}_n(\mathbf{z}_{k+1})), \\ I_2 = (\mathbf{q}_{k+1}(\mathbf{z}_{k+1}), \mathbf{D}\mathbf{z}_{k+2} - \mathbf{T}_{k+2}(\mathbf{z}_{k+1}), \dots, \mathbf{D}\mathbf{z}_n - \mathbf{T}_n(\mathbf{z}_{k+1})). \end{cases}$$

Sean  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(I)$ ,  $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}(I_1)$  y  $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}(I_2)$ . Obsérvese que  $I_2 \subset I_1 \subset I$ , lo cual implica que  $\mathbf{V} \subset \mathbf{V}_1 \subset \mathbf{V}_2$ .

**Lema 3.43.**  $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}(\mathbf{D}) = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}(\mathbf{D})$ .

*Demostración.* Como  $\mathbf{V}_1 \subset \mathbf{V}_2$ , basta probar que  $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}(\mathbf{D}) \supset \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}(\mathbf{D})$ . Sea

$$\mathbf{h}_j(x) = \mathbf{D}^{r_j} \mathbf{q}_j \left( \frac{\mathbf{T}_j(x)}{\mathbf{D}} \right). \quad (9)$$

Como  $\mathbf{T}_j, \mathbf{q}_j \in \mathcal{O}_k[x]$  y  $\mathbf{q}_j$  tiene grado  $r_j$ , deducimos que  $\mathbf{h}_j \in \mathcal{O}_k[x]$ . Obsérvese que  $\mathbf{h}_j(\eta_{k+1}) = 0$ . Por tanto existe  $\mathbf{Q}_j \in \mathcal{O}_k[x]$  tal que  $\mathbf{h}_j = \mathbf{Q}_j \mathbf{q}_{k+1}$ . Consideremos un polidisco de  $\mathbb{C}^n$  centrado en el cero suficientemente pequeño de forma que todos los gérmenes con los que estamos trabajando tengan un representante. Sea  $a = (a_0; a_{k+1}, \dots, a_n) \in \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}(\mathbf{D})$ , donde  $a_0 = (a_1, \dots, a_k)$ . Veamos que  $a \in \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}(\mathbf{D})$ . Es suficiente comprobar que los generadores de  $I_1$  se anulan en  $a$ . Como los únicos generadores de  $I_1$  que no están en  $I_2$  son  $\mathbf{q}_j$ ,  $k+2 \leq j \leq n$ , basta probar que  $q_{k+2}, \dots, q_n$  se anulan en  $a$ . Por la fórmula (9),

$$h_j(a) = h_j(a_0; a_{k+1}) = D(a_0)^{r_j} q_j \left( a_0; \frac{T_j(a_0; a_{k+1})}{D(a_0)} \right).$$

Puesto que  $D(a_0)a_j - T_j(a_0; a_{k+1}) = 0$  y  $D(a_0) \neq 0$ , tenemos que  $a_j = \frac{T_j(a_0; a_{k+1})}{D(a_0)}$ . Por tanto

$$h_j(a_0; a_{k+1}) = D(a_0)^{r_j} q_j(a_0; a_j).$$

Como  $a$  se anula en  $q_{k+1}$ ,  $h_j(a) = Q_j(a)q_{k+1}(a) = 0$ . Dado que  $D(a_0) \neq 0$ , deducimos que  $q_j(a_0; a_j) = 0$ .  $\square$

**Lema 3.44.** Sean  $\alpha = \sum_{j=k+2}^n (r_j - 1)$  y  $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$ . Entonces existe  $\tilde{\mathbf{R}} \in \mathcal{O}_k[\mathbf{z}_{k+1}]$  con grado menor que  $r$  tal que  $\mathbf{D}^\alpha \mathbf{f} - \tilde{\mathbf{R}} \in I_1$ .

*Demostración.* Por el teorema de división de Weierstrass existen  $\mathbf{A}_n \in \mathcal{O}_n$  y  $\mathbf{R}_n \in \mathcal{O}_{n-1}[\mathbf{z}_n]$  tales que  $\mathbf{f} = \mathbf{A}_n \mathbf{q}_n(\mathbf{z}_n) + \mathbf{R}_n$ . Aplicando el teorema de división de Weierstrass nuevamente a los coeficientes de  $\mathbf{R}_n$ , obtenemos  $\mathbf{A}_{n-1} \in \mathcal{O}_n$  y  $\mathbf{R}_{n-1} \in \mathcal{O}_{n-2}[\mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n]$ , donde  $\mathbf{z}_{n-1}$  tiene grado menor que  $r_{n-1}$  y  $\mathbf{z}_n$  tiene grado menor que  $r_n$ , tales que

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}_n \mathbf{q}_n(\mathbf{z}_n) + \mathbf{A}_{n-1} \mathbf{q}_{n-1}(\mathbf{z}_{n-1}) + \mathbf{R}_{n-1}.$$

Iterando este proceso obtenemos

$$\mathbf{f} = \sum_{j=k+1}^n \mathbf{A}_j \mathbf{q}_j(\mathbf{z}_j) + \mathbf{R}.$$

para ciertos  $\mathbf{A}_j \in \mathcal{O}_n$  y un  $\mathbf{R} \in \mathcal{O}_k[\mathbf{z}_{k+1}, \dots, \mathbf{z}_n]$ , donde cada  $\mathbf{z}_j$  tiene grado menor que  $r_j$ . Multiplicando por  $\mathbf{D}^\alpha \in \mathcal{O}_k$ ,

$$\mathbf{D}^\alpha \mathbf{f} = \sum_{j=k+1}^n \mathbf{A}'_j \mathbf{q}_j(\mathbf{z}_j) + \hat{\mathbf{R}},$$

para  $\mathbf{A}'_j = \mathbf{D}^\alpha \mathbf{A}_j$  y  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{D}^\alpha \mathbf{R}$ . Dada la restricción en los grados de las variables de  $\mathbf{R}$ , podemos considerar que  $\hat{\mathbf{R}}$  es un polinomio en  $\mathbf{z}_{k+1}, \mathbf{D}\mathbf{z}_{k+2}, \dots, \mathbf{D}\mathbf{z}_n$  con coeficientes en  $\mathcal{O}_k$ . Escribiendo  $\mathbf{D}\mathbf{z}_j = \mathbf{D}\mathbf{z}_j - \mathbf{T}_j(\mathbf{z}_{k+1}) + \mathbf{T}_j(\mathbf{z}_{k+1})$ ,  $k+2 \leq j \leq n$ , y desarrollando las potencias y reordenando, obtenemos

$$\mathbf{D}^\alpha \mathbf{f} = \sum_{j=k+1}^n \mathbf{A}'_j \mathbf{q}_j(\mathbf{z}_j) + \mathbf{R}'' + \mathbf{R}'$$

para  $\mathbf{R}''$  polinomio en  $\mathbf{z}_{k+1}, \mathbf{D}\mathbf{z}_{k+2} - \mathbf{T}_{k+2}(\mathbf{z}_{k+1}), \dots, \mathbf{D}\mathbf{z}_n - \mathbf{T}_n(\mathbf{z}_{k+1})$  sin términos que no tengan alguna potencia de  $(\mathbf{D}\mathbf{z}_j - \mathbf{T}_j(\mathbf{z}_{k+1}))$  como factor y para  $\mathbf{R}'$  polinomio en  $\mathbf{z}_{k+1}, \mathbf{T}_{k+2}(\mathbf{z}_{k+1}), \dots, \mathbf{T}_n(\mathbf{z}_{k+1})$ . Por el teorema de división de Weierstrass y puesto que  $\mathbf{R}' \in \mathcal{O}_k[\mathbf{z}_{k+1}]$ ,

$$\mathbf{R}' = \mathbf{Q}\mathbf{q}_{k+1}(\mathbf{z}_{k+1}) + \tilde{\mathbf{R}}$$

donde  $\tilde{\mathbf{R}} \in \mathcal{O}_k[\mathbf{z}_{k+1}]$  tiene grado menor que  $r$  y  $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}_k[\mathbf{z}_{k+1}]$ . Por tanto

$$\mathbf{D}^\alpha \mathbf{f} - \tilde{\mathbf{R}} = \sum_{j=k+1}^n \mathbf{A}'_j \mathbf{q}_j(\mathbf{z}_j) + \mathbf{R}'' + \mathbf{Q}\mathbf{q}_{k+1}(\mathbf{z}_{k+1}) \in I_1.$$

□

**Lema 3.45.**  $\mathbf{V} - \mathbf{V}(\mathbf{D}) = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}(\mathbf{D})$ .

*Demostración.* Como  $\mathbf{V}_1 \subset \mathbf{V}$ , basta probar que  $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}(\mathbf{D}) \supset \mathbf{V} - \mathbf{V}(\mathbf{D})$ . Sea  $\mathbf{f} \in I$ . Veamos que  $\mathbf{f}$  se anula en  $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}(\mathbf{D})$ . Sabemos que existe  $\tilde{\mathbf{R}} \in \mathcal{O}_k[\mathbf{z}_{k+1}]$  con grado menor que  $r$  tal que  $\mathbf{D}^\alpha \mathbf{f} - \tilde{\mathbf{R}} \in I_1$ . Como  $\mathbf{f} \in I$ , tenemos que  $\tilde{\mathbf{R}} \in I$ . Por tanto  $\pi(\tilde{\mathbf{R}}) = \tilde{\mathbf{R}}(\eta_{k+1}) = 0$ . Como  $\mathbf{q}_{k+1}$  no puede dividir a  $\tilde{\mathbf{R}}$  porque tiene grado  $r$ ,  $\tilde{\mathbf{R}} = 0$ . Entonces  $\mathbf{D}^\alpha \mathbf{f} \in I_1$ . Por tanto  $\mathbf{f}$  se anula en  $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}(\mathbf{D})$ .  $\square$

**Teorema 3.46** (del los ceros de Hilbert para ideales primos). Sea  $I \subset \mathcal{O}_n$  un ideal primo. Entonces  $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I$ .

*Demostración.* Sea  $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$  nula en  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(I)$ . Por el lema 3.44, existen  $\tilde{\mathbf{R}} \in \mathcal{O}_k[x]$  de grado menor que  $r$  y  $\mathbf{Q} \in I_1$  tales que  $\mathbf{D}^\alpha \mathbf{f} = \mathbf{Q} + \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{z}_{k+1})$ . Puesto que  $\mathbf{V}(I_1) \supset \mathbf{V}, \mathbf{Q}$  se anula en  $\mathbf{V}$  y por tanto  $\tilde{\mathbf{R}}$  también se anula en  $\mathbf{V}$ . Por los lemas 3.43 y 3.45,  $\tilde{\mathbf{R}}$  se anula en  $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}(\mathbf{D})$ . Sea  $J = \{1, \dots, k\}$ . Consideremos un polidisco  $\Delta(0; \delta) \subset \mathbb{C}^n$  lo suficientemente pequeño como para poder escoger representantes en  $\Delta(0; \delta_j)$  de los gérmenes  $\tilde{\mathbf{R}}, \mathbf{D}, \mathbf{q}_{k+1}, \mathbf{q}_j, \mathbf{T}_j, k+2 \leq j \leq n$  y de forma que los representantes de los polinomios de Weierstrass  $\mathbf{q}_j \in \mathcal{O}_k[\mathbf{z}_j], k+2 \leq j \leq n$ , satisfagan que las raíces en  $z_j$  respecto de  $z_J$  sean tales que  $|z_j| < \delta_j$ . Sea  $a_J \in \Delta(0; \delta_J)$  tal que  $D(a_J) \neq 0$ . Eso quiere decir que  $q_{k+1}(a_J; x)$  tiene  $r$  raíces distintas. Dada  $a_{k+1}$  una raíz de las anteriores, definimos

$$a_j = \frac{T_j(a_{k+1})}{D(a_0)}, k+1 \leq j \leq n.$$

Tenemos que  $q_j(a_J; a_j) = 0$  y por tanto  $a = (a_J; a_{k+1}, \dots, a_n) \in \Delta(0; \delta) \cap \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}(\mathbf{D})$  es tal que  $\tilde{\mathbf{R}}(a) = \tilde{\mathbf{R}}(a_J, a_{k+1}) = 0$ . Como podemos hacer esto último con las  $r$  raíces de  $q_{k+1}(a_J; x)$ , deducimos que  $\tilde{\mathbf{R}}$  tiene también  $r$  raíces distintas. De modo que  $\tilde{\mathbf{R}}(a_J, x) = 0$ , puesto que  $\tilde{\mathbf{R}}$  tiene grado menor que  $r$ . Como esto ocurre para todo  $a_J$  perteneciente al abierto  $\Delta(0; \delta_J) - D^{-1}(0)$ , el teorema de identidad nos asegura que  $\tilde{\mathbf{R}} = 0$ . Así pues,  $\mathbf{D}^\alpha \mathbf{f} = \mathbf{Q} \in I_1 \subset I$ . Como  $I$  es primo y  $\mathbf{D} \notin I$ , deducimos que  $\mathbf{f} \in I$ .  $\square$

**Definición 3.47.** Sea  $I \subset \mathcal{O}_n$  un ideal primo. Sea  $z_1, \dots, z_k; z_{k+1}, \dots, z_n$  un sistema de coordenadas regular para  $I$  y sean  $\mathbf{q}_j(X), \mathbf{T}_j(X), \mathbf{D}$  definidos como en los discutido anteriormente. Una *representación admisible* de  $I$  consiste en:

- i) unos polidiscos  $\Delta(0; r) \subset \mathbb{C}^n$  y  $\Delta_k = \Delta(0; \delta) \subset \mathbb{C}^k$ , donde  $\delta_i = r_i, i \leq k$ ,
- ii) representantes  $q_j(X)$  y  $T_j(x)$  de los gérmenes  $\mathbf{q}_j(X)$  y  $\mathbf{T}_j(X)$  cuyos coeficientes sean holomorfos en  $\Delta_k$ , y
- iii) un representante  $D$  de  $\mathbf{D}$  holomorfo en  $\Delta_k$ .

La siguiente condición debe ser satisfecha:

- iv) Si  $a \in \Delta_k$  y  $q_j(a; b_j) = 0$  entonces  $|b_j| < r_j$  para todo  $j \geq k+1$ .

Cualquier elemento de los anteriores se denomina *admisible*.

**Lema 3.48.** Sea  $I \subset \mathcal{O}_n$  un ideal primo. Sea  $z_1, \dots, z_k; z_{k+1}, \dots, z_n$  un sistema de coordenadas regular para  $I$ . Entonces

- 1) existe una representación admisible de  $I$ ;
- 2)  $\{z \in \Delta(0; r) : q_{k+1}(z) = 0, D(z)z_j - T_j = 0, D(z) \neq 0\}$  es un representante de  $\mathbf{V}(I) - \mathbf{V}(\mathbf{D})$ .

*Demostración.* La existencia de la representación admisible es consecuencia de lo discutido en esta sección. La propiedad *iv)* podemos conseguirla gracias a la continuidad de las raíces de los polinomios. Deducimos 2) de los lemas 3.43 y 3.45.  $\square$

Denotaremos con  $V - V(D)$  al conjunto descrito en el punto 2) del lema 3.48 y por  $\bar{V}$  su clausura en  $\Delta(0; r)$ . Recuérdese que una función es propia si la preimagen de un compacto es compacta.

**Teorema 3.49.** Sea  $\Delta, \Delta_k, q_j, T_j$  y  $D$  una representación del ideal primo  $I$ . Sea  $\pi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^k$  la proyección natural. Sea  $s$  el grado de  $q_{k+1}(x)$ . Entonces

- i)  $V - V(D)$  es una subvariedad de  $\Delta$  y  $\pi : (V - V(D)) \rightarrow (\Delta_k - V(D))$  es un recubrimiento finito de  $s$  hojas,
- ii)  $\pi : \bar{V} \rightarrow \Delta_k$  es una aplicación propia,
- iii)  $V - V(D)$  es conexo y  $\bar{V}$  es un representante de  $\mathbf{V}(I)$ .

*Demostración.* Sea  $J = \{1, \dots, k\}$ .

- i) Sea  $a_J \in \Delta_k$  tal que  $D(a_J) \neq 0$ . Sean  $b_{k+1}^i, 1 \leq i \leq s$ , las raíces distintas del polinomio  $q_{k+1}(a_J; x)$ . Sean

$$b_j^i = \frac{T_j(a; b_{k+1}^i)}{D(a)}$$

para  $j = k + 2, \dots, n$ . Consideremos los puntos distintos  $b_i = (a_J, b_{k+1}^i, \dots, b_n^i)$ . Tenemos entonces que  $(V - V(D)) \cap \pi^{-1}(a_J) = \{b_1, \dots, b_s\}$ . Puesto que  $q_{k+1}(a_J; x)$  tiene raíces distintas, para  $1 \leq i \leq s$ ,

$$\frac{\partial q_{k+1}(a_J; x)}{\partial x}(b^i) \neq 0.$$

El teorema de la función implícita nos asegura la existencia de unas únicas funciones holomorfas  $h_i : U_i \rightarrow W_i$ , donde  $U_i$  es un entorno de  $a$  y  $W_i$  es un entorno abierto de  $b_{k+1}^i$ , tales que  $h_i(a_J) = b_{k+1}^i$  y dados  $(z, w) \in U_i \times W_i$

$$q_{k+1}(z; w) = 0 \Leftrightarrow w = h_i(z).$$

Podemos tomar los  $U_i$  suficientemente pequeños de forma que los entornos  $W_i$  sean disjuntos dos a dos. Sea  $U = \bigcap_{i=1}^s U_i$ . Entonces  $V \cap \pi^{-1}(U) = W_1 \cup \dots \cup W_s$ , donde

$$W_i = \{z \in \pi^{-1}(U) : z_{k+1} = h_i(z_J), z_j = \frac{T_j(z_J; h_i(z_J))}{D(z_J)}, k + 2 \leq j \leq n\}.$$

Las funciones

$$F_i : U \ni z_J \rightarrow (z_J, h_i(z_J), \frac{T_{k+2}(z_J; h_i(z_J))}{D(z_J)}, \dots, \frac{T_n(z_J; h_i(z_J))}{D(z_J)}) \in \mathbb{C}^n$$

son inversas de la proyección  $\pi$  y por tanto los  $W_i$  son homeomorfos a  $U$ . En particular, hemos mostrado que  $\pi : (V - V(D)) \rightarrow (\Delta_k - V(D))$  es un recubrimiento finito de  $s$  hojas.

Veamos que  $V - V(D)$  es subvariedad compleja. Sea  $a \in V - V(D)$ . Tenemos entonces que  $a_J \in \Delta_k - V(D)$  y por lo discutido anteriormente  $a \in W_{i_0}$ , para algún  $i_0$ . La aplicación  $F_{i_0}$  es holomorfa no singular y  $F_{i_0}(U) = (V - V(D)) \cap W_{i_0}$ .

- ii) Sea el cerrado de  $\Delta$  dado por  $V_0 = V(q_{k+1}, \dots, q_n) = \{z \in \Delta : q_{k+1}(z) = \dots = q_n(z) = 0\}$ . Como  $V - V(D) \subset V_0$  y  $V_0$  es cerrado,  $\bar{V} \subset V_0$ . Por tanto basta mostrar que  $\pi : V_0 \rightarrow \Delta_k$  es propia. Sea  $K \subset \Delta_k$  un compacto y sea  $\{b_n\}$  una sucesión en  $\pi^{-1}(K) \cap V_0$  y sea  $\pi(b_n) = a_n$ . Puesto que  $\pi^{-1}(K) \cap V_0 \subset \bar{\Delta}$ , y  $\bar{\Delta}$  es compacto, existe una subsucesión  $\{b_{n_k}\}$  que converge a un punto  $b \in \bar{\Delta}$ . Por continuidad, y puesto que  $K$  es cerrado,

$$\pi(b) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \in K$$

También por continuidad,

$$q_j(b) = q_j(\pi(b); b_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} q_j(b_{n_k}) = 0$$

Puesto que  $\pi(b) \in \Delta_k$ , por la condición 4) de representación admisible, tenemos que  $|b_j| < r_j$ ,  $k+2 \leq j \leq n$ , y por tanto  $b \in \Delta$ . Puesto que  $q_j(b) = 0$ ,  $k+2 \leq j \leq n$ ,  $b \in V_0$ .

- iii) Los puntos *i*) y *ii*) nos aseguran que  $\bar{V}$  es un recubrimiento analítico de  $\Delta_k$ . Sea  $W$  una componente conexa de  $V - V(D)$ . Ya vimos que entonces  $\bar{W} \cap \bar{V}$  es un recubrimiento analítico de  $\Delta_k$ . Sea  $x_0 \in \Delta$  tal que  $x_0 \notin \bar{W}$ . Sea  $a_0 = \pi(x_0)$ ,  $\pi^{-1}(a_0) = \{x_0^1, \dots, x_0^r\}$ . Puesto que  $x_0, x_0^1, \dots, x_0^r$  son puntos distintos, podemos encontrar un polinomio  $h \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  tal que  $h(x_0) = 0$  y  $h(x_0^i) = 1$ ,  $1 \leq i \leq r$ . Puesto que dicho polinomio es holomorfo en  $\bar{W}$ , podemos encontrar otro polinomio  $R(T)$  de grado  $r$  con coeficientes holomorfos en  $\Delta_k$  tal que  $R(\pi(x); h(x)) = 0$  para todo  $x \in \bar{W}$ . En realidad podemos considerar la función holomorfa en  $\Delta$  dada por  $R(\pi(x); h(x))$ . Como  $R$  es un polinomio de grado  $r$ , en  $a_0$  tenemos que  $T = 1$  es el único cero de  $R(a_0; T)$ . Puesto que  $h(x_0) = 0$ ,  $R(\pi(x_0); h(x_0)) \neq 0$ .

Sea la familia  $\mathcal{F}$  dada por todas las funciones holomorfas en  $\Delta$  que se anulan en  $\bar{W}$ . Entonces

$$\bar{W} = \{x \in \Delta : F(x) = 0, \forall F \in \mathcal{F}\}.$$

Así pues,  $\bar{W}$  es una subvariedad de  $\Delta$ .

Sean  $W_1, \dots, W_l$  las componentes conexas de  $V - V(D)$ . Por los lemas 3.43 y 3.45, tenemos que

$$\mathbf{V}(I) \subset \mathbf{V} - \mathbf{V}(\mathbf{D}) \cap \mathbf{V}(\mathbf{D}) \subset \cup_{i=1}^l \bar{W}_i \cup \mathbf{V}(\mathbf{D}),$$

$$\mathbf{V}(I) \supset \mathbf{V} - \mathbf{V}(\mathbf{D}) = \cup_{i=1}^l \mathbf{W}_i.$$

Como  $\mathbf{V}(I)$  es germen de un conjunto cerrado,

$$\cup_{i=1}^l \bar{\mathbf{W}}_i \subset \mathbf{V}(I).$$

Así pues

$$\mathbf{V}(I) = \cup_{i=1}^l \bar{\mathbf{W}}_i \cup (\mathbf{V}(I) \cap \mathbf{V}(D)).$$

Puesto que  $\mathbf{V}(I)$  es irreducible y  $\mathbf{V}(I)$  no está contenido en  $\mathbf{V}(D)$ , porque en caso contrario  $\mathbf{D}$  pertenecería a  $I$ , deducimos que para algún  $i_0$ ,  $\mathbf{V}(I) = \bar{\mathbf{W}}_{i_0}$ . Concluimos entonces que existe una representación  $V - V(D)$  de  $\mathbf{V} - \mathbf{V}(\mathbf{D})$  que es conexa y tal que  $V - \bar{V}(D)$  es un representante de  $\mathbf{V}(I)$ .

□

### 3.8. Recubrimientos analíticos

**Definición 3.50.** Una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  es de *fibras discretas* si  $f^{-1}(y)$  es un conjunto discreto de puntos para todo  $y \in Y$ .

**Observación 3.51.** 1) Por el teorema de extensión de Riemann los subconjuntos finos son subconjuntos despreciables.

2) Sea  $X$  un subconjunto despreciable del dominio  $D$  y sea  $D'$  un subdominio de  $D$ . Veamos que  $D' - X$  es conexo. Supongamos que no lo sea. Entonces existe una función holomorfa  $f : D' - X \rightarrow \{0, 1\}$  la cual es localmente acotada en  $D'$  de forma evidente. Por tanto existe una única extensión  $\tilde{f}$  de  $f$  a todo  $D'$ . Como  $X$  es no denso en ningún punto, la función holomorfa  $\tilde{f}$  toma valores de nuevo en  $\{0, 1\}$ . Así pues,  $D'$  no es conexo, lo cual es una contradicción.

**Definición 3.52.** Sea  $D$  un dominio de  $\mathbb{C}^n$  y sea  $X$  un subconjunto de  $D$ . Decimos que  $X$  es *despreciable* si es un cerrado, no denso en ningún punto, tal que para todo subdominio  $D'$  de  $D$  y cualquier función holomorfa en  $D' - X$  y localmente acotada en  $D'$  tiene una única extensión a todo  $D'$ .

**Definición 3.53.** Un espacio topológico Hausdorff  $X$  es localmente compacto si para todo punto  $x \in X$  y para todo entorno abierto  $U$  de  $x$  existe un entorno abierto  $V \subset U$  de  $x$  tal que  $\bar{V}$  es compacto y está contenido en  $U$ .

**Teorema 3.54.** Sea  $D$  un dominio de  $\mathbb{C}^n$  y sea  $X$  un subconjunto despreciable de  $D$ . Sea  $Y$  un subconjunto despreciable del dominio  $D - X$ . Entonces  $X \cup Y$  es despreciable en  $D$ .

*Demostración.* Sea  $D' \subset D$  un subdominio y sea  $f$  una aplicación holomorfa en  $D' - (X \cup Y)$  y localmente acotada en  $D'$ . Como  $D' - X$  es un dominio,  $f$  es holomorfa en  $(D' - X) - Y$  y localmente acotada en  $D' - X$ , existe una única extensión  $\tilde{f}$  en  $D' - X$ . Dicha extensión es localmente acotada en  $D'$ , ya que dado un punto  $x \in X$ , sabemos que existe un entorno abierto  $U(x)$  tal que  $U(x) \cap Y = \emptyset$  y en donde  $f$  es acotada. Por tanto  $\tilde{f}$ , que coincide con  $f$  en dicho abierto, también es acotada en  $U(x)$ . Por ser  $X$  despreciable, existe una única extensión  $\hat{f}$  en  $D'$ . □

**Definición 3.55.** Un *recubrimiento analítico* es una terna  $(X, \pi, U)$  tal que

- i)  $X$  es un espacio topológico Hausdorff localmente compacto,
- ii)  $U$  es un dominio de  $\mathbb{C}^n$ ,
- iii)  $\pi : X \rightarrow D$  es una aplicación sobreyectiva, propia, de fibras discretas y continua,
- iv) existe un conjunto despreciable  $A \subset U$  tal que  $\pi : X - \pi^{-1}(A) \rightarrow D - A$  es un recubrimiento finito de  $\lambda$  hojas, y
- v)  $X - \pi^{-1}(A)$  es denso en  $X$ .

Denotaremos  $X_0 = X - \pi^{-1}(A)$ . Al conjunto  $A$  lo llamaremos *conjunto crítico* y al número  $\lambda$  el *grado* del recubrimiento analítico.

**Lema 3.56.** Sea  $X$  un recubrimiento analítico de  $U$ . Entonces para todo  $x \in X$  existen unos sistemas de entornos  $\{D_n\}$  de  $x$  y  $\{W_n\}$  de  $\pi(x)$  tales que  $\pi : D_n \rightarrow W_n$  es propia y sobreyectiva.

*Demostración.* Sea  $W$  un entorno abierto de  $\pi(x) = a$  y sea  $D = \pi^{-1}(W)$ . Puesto que  $X$  es localmente compacto y  $\pi$  es de fibras discretas, podemos encontrar un entorno abierto  $D'$  de  $x$  tal que  $\overline{D'}$  es compacto y  $\pi^{-1}(a) \cap \overline{D'} = \{x\}$ . Tenemos que  $\pi(\overline{D'} - D')$  es compacto y no contiene al punto  $a$ . Sea  $W'' \subset W$  un entorno abierto y conexo de  $a$  tal que  $W'' \cap \pi(\overline{D'} - D') = \emptyset$ . Sea  $D'' = \pi^{-1}(W'') \cap D'$ . Veamos que  $\pi : D'' \rightarrow W''$  es propia y sobreyectiva.

- Es propia: Sea  $K \subset W''$  un compacto. Como  $\pi^{-1}(K) \cap D''$  está contenido en  $\overline{D'}$  y éste último es compacto, basta demostrar que  $\pi^{-1}(K) \cap D''$  es cerrado. Sea  $y \in \overline{\pi^{-1}(K) \cap D''}$ . Entonces  $\pi(y) \in \overline{K} = K$ . Como  $K \subset W''$  tenemos que  $\pi(y) \notin \pi(\overline{D'} - D')$ . Puesto que  $y \in \overline{D'}$ , deducimos que  $y \in D'$ . Así pues  $y \in \pi^{-1}(K) \cap D''$ .
- Es sobreyectiva: Veamos que  $\pi(D'' \cap X_0) = W'' - A$ . Puesto que  $W'' - A$  es conexo, basta demostrar que  $\pi(D'' \cap X_0)$  es abierto y cerrado en  $W'' - A$ . Es abierto puesto que  $D'' \cap X_0$  es abierto y  $\pi$  es homeomorfismo local en  $X_0$ . Cualquier aplicación propia entre espacios localmente compactos es cerrada. Así pues, como  $\pi : D'' \cap X_0 \rightarrow W'' - A$  es propia por serlo  $\pi : D'' \rightarrow W''$ , tenemos que  $\pi(D'' \cap X_0)$  es cerrado en  $W'' - A$ . Finalmente, como  $\pi$  es continua y cerrada,  $\pi(D'') = \pi(\overline{D'' \cap X_0}) = \overline{\pi(D'' \cap X_0)} = \overline{W'' - A} = W''$ .

Sea  $\{W_n\}$  un sistema de entornos de  $\pi(x)$ . Veamos que  $D_n$ , donde  $D_n = \pi^{-1}(W_n) \cap D'$ , es un sistema de entornos  $x$ . Sea  $V$  un entorno abierto de  $x$ . Supongamos que existe  $x_n \in D_n - V$  para todo  $n$ . Obsérvese que  $\{x_n : n = 1, \dots\}$  es un conjunto infinito. Como  $\overline{D'}$  es compacto,  $\{x_n\}$  tiene un punto de acumulación  $x_0 \in \overline{D'} - V$ , es decir, que todo entorno abierto de  $x_0$  contiene un elemento de  $x_n \neq x_0$ . Véase el teorema 28.1 de [MC] para una demostración de este hecho. En particular  $\pi(x_0)$  es un punto de acumulación de  $\{\pi(x_n) : n = 1, \dots\}$ . Así pues, puesto que  $\pi(x_n) \in W_n$  y los abiertos  $W_n$  son un sistema de entornos, tenemos que  $\pi(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(x_n) = a$ . Como  $\pi^{-1}(a) \cap \overline{D'} = \{x\}$ , deducimos que  $x_0 = x$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

**Teorema 3.57.** Sea  $X$  un recubrimiento analítico de  $U$  y sean  $D$  un abierto de  $X$  y  $W$  un subdominio de  $U$  tales que  $\pi : D \rightarrow W$  es propia y sobreyectiva. Sea  $D_0$  una componente conexa de  $X_0 \cap D$ . Entonces  $\overline{D_0} \cap D$  es un recubrimiento analítico de  $W$ .

*Demostración.* En primer lugar veamos que  $D_0$  es una componente conexa de  $\pi^{-1}(W - A)$ . Como  $D_0 \subset \pi^{-1}(W - A)$  y  $D_0$  es conexo tenemos que  $D_0 \subset C$ , donde  $C$  es una componente conexa de  $\pi^{-1}(W - A)$ . Supongamos que existe un punto  $x \in \overline{D_0} \cap C$  tal que  $x \notin D_0$ . Denotemos por  $\pi(x) = a$ . Sea  $U(a) \subset W - A$  un abierto tal que  $\pi^{-1}(U(a)) = U_1 \cup \dots \cup U_r$ , donde  $\pi|_{U_i}$  es un homeomorfismo y de forma que  $\overline{U_i}$  son compactos, conexos y disjuntos dos a dos. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $x \in U_1$ . Sea  $V(a) \subset \overline{V(a)} \subset U(a)$ , siendo  $\overline{V(a)}$  compacto. Tenemos entonces que  $\pi^{-1}(\overline{V(a)}) \cap D \subset X_0$  es compacto. Como las componentes conexas son cerradas,  $\pi^{-1}(\overline{V(a)}) \cap D_0$  es compacto y por tanto  $\pi^{-1}(\overline{V(a)}) \cap D_0 \cap \overline{U_1}$  también lo es. Por estar contenido en el compacto  $\overline{U_1}$ ,  $\pi^{-1}(\overline{V(a)}) \cap D_0 \cap \overline{U_1}$  es cerrado. Sin embargo,  $x \notin \pi^{-1}(\overline{V(a)}) \cap D_0 \cap \overline{U_1}$  mientras que  $x \in \pi^{-1}(\overline{V(a)}) \cap D_0 \cap \overline{U_1}$ , lo cual es una contradicción. Así pues,  $D_0$  es una componente conexa de  $\pi^{-1}(W - A)$ . Puesto que  $\pi^{-1}(W - A)$  es recubrimiento finito de  $W - A$  y  $D_0$  es una componente conexa de  $\pi^{-1}(W - A)$ , tenemos que  $D_0$  también es recubrimiento finito de  $W - A^2$ . Comprobemos que  $\pi : \overline{D_0} \cap D \rightarrow W$  es un recubrimiento analítico,

- $\overline{D_0} \cap D$  es localmente compacto,
- $W$  es un dominio,
- $\pi$  es continua y de fibras discretas. Es sobreyectiva por lo dicho al inicio de la demostración y es propia por serlo  $\pi : D \rightarrow W$  y ser  $\overline{D_0} \cap D$  un cerrado,
- $(\overline{D_0} \cap D) - \pi^{-1}(A) = D_0$  es un recubrimiento finito de  $W - A$ , y
- $(\overline{D_0} \cap D) - \pi^{-1}(A)$  es denso en  $(\overline{D_0} \cap D)$  por ser  $X - \pi^{-1}(A)$  denso en  $X$ .

□

**Lema 3.58.** Sea  $(X, \pi, U)$  un recubrimiento analítico. Sea  $A$  su conjunto crítico y sea  $W$  un subdominio de  $U$ . Sean  $D_1, \dots, D_n \subset D$  tales que  $(D_i, \pi, W)$  son recubrimiento analíticos, con  $W \cap A$  sus conjuntos despreciables, tales que los  $D_i - \pi^{-1}(A)$  son disjuntos dos a dos. Entonces  $(D, \pi, W)$  es un recubrimiento analítico donde  $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$ .

*Demostración.* Comprobemos que satisface todas las propiedades de recubrimiento analítico,

---

<sup>2</sup>Veamos por qué una componente conexa  $C$  de  $\pi^{-1}(W - A)$  es un recubrimiento conexo de  $W - A$ . En primer lugar observamos que por ser  $C$  un cerrado de  $\pi^{-1}(W - A)$ ,  $\pi(C)$  es cerrado dado que  $\pi$  es cerrada. Sea  $a \in \pi(C)$  y sea un entorno abierto y conexo  $U(a)$  tal que  $\pi^{-1}(U(a)) = U_1 \cup \dots \cup U_l$ , donde  $\pi(U_i)$  es homeomorfo a  $U(a)$  y los  $U_i$  son disjuntos dos a dos. Puesto que  $a = \pi(x)$  para un cierto  $x \in C$ , podemos suponer que, sin pérdida de generalidad,  $x \in U_1$ . Como  $U_1$  es conexa tenemos que  $U_1 \subset C$  y por tanto  $U(a) \subset \pi(C)$ . Eso quiere decir que  $\pi(C)$  es abierto y cerrado y por tanto  $\pi(C) = W - A$ . Veamos que el número de componentes es constante. Sea  $a \in W - A$  y sean  $\beta = \# \pi^{-1}(a) \cap C$  y  $B = \{x \in W - A : \pi^{-1}(a) \cap C = \beta\}$ . Como  $B$  es abierto y cerrado, tenemos que  $B = W - A$ .

- $D$  es localmente compacto y Hausdorff,
- $W$  es dominio,
- $\pi : D \rightarrow W$  es
  - i) de fibras discretas, ya que  $\pi : X \rightarrow U$  lo es,
  - ii) continua, puesto que  $\pi : X \rightarrow U$  lo es,
  - iii) sobreyectiva, ya que cada  $\pi : D_i \rightarrow W$  lo es, y
  - iv) propia, puesto que dado un compacto  $K \subset W$ ,  $\pi^{-1}(K) \cap D_i$  son compactos, y por tanto también lo es  $\pi^{-1}(K) \cap D = \bigcup_{i=1}^n \pi^{-1}(K) \cap D_i$ .
- puesto que los  $\pi : D_i - \pi^{-1}(A) \rightarrow W - A$  son recubrimientos finitos de  $m_i$  hojas,  $\pi : D - \pi^{-1}(A) \rightarrow W - A$  es recubrimiento finito de  $(m_1 + \dots + m_n)$  hojas, y
- $D - \pi^{-1}(A)$  es denso en  $D$  ya que  $X_0$  es denso en  $X$ .

□

**Corolario 3.59.** Sea  $X$  un recubrimiento analítico de  $U$ . Entonces para todo  $x \in X$  existe un sistema de entornos  $\{D_n\}$  de  $x$  tal que  $\pi : D_n \rightarrow W_n$  es un recubrimiento analítico.

*Demostración.* Por el lema 3.56 existen unos sistemas de entornos  $\{D_n\}$  de  $x$  y  $\{W_n\}$  de  $\pi(x)$  tales que  $\pi : D_n \rightarrow W_n$  es propia y sobreyectiva. Por el teorema 3.57 para cada componente conexa  $D_0$  de  $D \cap X_0$ ,  $\pi : \overline{D_0} \cap D \rightarrow W_n$  es un recubrimiento analítico. El lema 3.58 nos asegura que, puesto que el número de componentes conexas  $C_i$  de  $D_n \cap X_0$  es finito,  $D_n = \bigcup_{i=1}^l \overline{C_i} \cap D_n$  es un recubrimiento analítico de  $W_n$ . □

**Corolario 3.60.** Sea  $X$  un recubrimiento analítico de  $U$ . Entonces  $X$  es localmente conexo.

*Demostración.* Repasando la demostración del lema 3.56 observamos que el sistema de entornos  $\{D_n\}$  es tal que  $D_n \cap \pi^{-1}(\pi(x)) = \{x\}$ . Sea  $D_0$  una componente conexa de  $D_n \cap X_0$ . Tenemos que  $\pi : \overline{D_0} \cap D \rightarrow W_n$  es sobreyectiva y por tanto  $x \in \overline{D_0} \cap D$ . Sean  $C_1, \dots, C_l$  las componentes conexas de  $D_n \cap X_0$ . Entonces, puesto que  $\overline{C_i} \cap D_n$  son conexas,  $D_n = \bigcup_{i=1}^l \overline{C_i} \cap D_n$  y  $x \in \overline{C_i} \cap D_n$ , deducimos que  $D_n$  es conexa. □

**Definición 3.61.** Sea  $X$  un recubrimiento analítico de  $U$ . Dado  $x \in X$  el número de componentes de  $x$ , al cual denotamos por  $o(x)$ , es el número entero  $\lambda$  tal que  $x$  tiene un sistema de entornos que son recubrimientos analíticos de grado  $\lambda$ .

**Lema 3.62.** Sea  $X$  un recubrimiento analítico de  $U$  de grado  $\lambda$ . Entonces para todo  $a \in U$ ,  $\sum_{\pi(x)=a} o(x) = \lambda$ .

**Definición 3.63.** Sea  $(X, \pi, U)$  un recubrimiento analítico y sea  $W$  un abierto de  $X$ . Una función  $f : W \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa si para todo  $W' \subset W - \pi^{-1}(A)$  tal que  $\pi|_{W'}$  es un homeomorfismo,  $(f|_{W'}) \circ (\pi^{-1}|_{W'})$  es holomorfa en  $\pi(W')$ .

**Teorema 3.64.** Sea  $(X, \pi, U)$  un recubrimiento analítico y sea  $f$  una función continua en  $X$ . Entonces  $f$  es holomorfa en  $X$  si y sólo si existe un polinomio mónico  $P(T) \in \mathcal{O}_U[T]$  tal que  $P(\pi(x); f(x)) = 0$  para todo  $x \in X$ .

*Demostración.* Para cada  $a \in U - A$  tomemos un entorno abierto  $\Delta_a$  contenido en  $U - A$  tal que  $\pi^{-1}(\Delta_a) = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i$ , donde  $\pi : \Delta_i \rightarrow \Delta_a$  es homeomorfismo. Sea  $f$  una función holomorfa en  $X$ . Dado  $a \in U - A$ , tenemos que  $\tilde{f}_a^i = (f|_{\Delta_i}) \circ (\pi^{-1}|_{\Delta_a})$  son holomorfas en  $\Delta_a$ . Sea  $S(T_1, \dots, T_\lambda)$  un polinomio simétrico. Definimos en  $\Delta_a$  la función holomorfa  $\hat{S}_a = (\tilde{f}_a^1, \dots, \tilde{f}_a^\lambda)$ . Dado  $b \in U - A$ , puesto que  $S$  es simétrico, tenemos que  $\hat{S}_a = \hat{S}_b$  en  $\Delta_a \cap \Delta_b$ . Por tanto  $\hat{S}$  está bien definida en  $U - A$ . Como  $f$  es continua en el espacio localmente compacto  $X$ , tenemos que  $\hat{S}$  es localmente acotada en  $U$ . Por el teorema de extensión de Riemann tenemos una extensión holomorfa  $\tilde{S}$  de  $\hat{S}$  en  $U$ .

Dado  $a \in U - A$  definimos en  $\Delta_a$  el polinomio dado por

$$P(T) = \prod_{i=1}^{\lambda} (T - \tilde{f}_a^i) \in \mathcal{O}_{\Delta_a}[T].$$

Los coeficientes de  $P$  son polinomios simétricos evaluados en  $\tilde{f}_a^1, \dots, \tilde{f}_a^\lambda$ . Por la discusión anterior, dichos coeficientes holomorfos están bien definidos en  $U - A$  y se pueden extender a  $U$ . Hemos encontrado un polinomio mónico con coeficiente holomorfos en  $U$  que extiende al anterior y que por tanto para todo  $x \in X_0$ , si denotamos  $\pi(x) = a$ ,

$$R(a; f(x)) = \prod_{i=1}^{\lambda} (f(x) - \tilde{f}_a^i(a)) = 0.$$

Supongamos ahora que  $f$  es una función continua en  $X$  y que existe un polinomio  $P(T) \in \mathcal{O}_U[T]$  tal que  $P(\pi(x); f(x)) = 0$  en  $X$ . Sea  $W' \subset X_0$  un abierto tal que  $\pi : W' \rightarrow \pi(W')$  es un homeomorfismo. Denotemos por  $\pi(W') = U_1 \cup \dots \cup U_n$ , donde  $U_i$  son sus componentes conexas. Sean  $W_i = \pi^{-1}(U_i) \cap W'$ . Tenemos que  $\tilde{f}_i = (f|_{W_i}) \circ (\pi^{-1}|_{U_i})$  es función continua en  $U_i$  y que  $P(\tilde{f}_i) = 0$ . Dado que los  $U_i$  son dominios, en virtud del lema 3.65 tenemos que  $\tilde{f}_i$  son holomorfas en  $U_i$ . Por tanto  $(f|_{W'}) \circ (\pi^{-1}|_{\pi(W)})$  es holomorfa en  $W'$ .  $\square$

**Lema 3.65.** Sea  $f$  una función continua en el dominio  $U$  de  $\mathbb{C}^n$  y sea  $P(T) \in \mathcal{O}_U[T]$  un polinomio tal que  $P(f) = 0$  en  $U$ . Entonces  $f$  es holomorfa en  $U$ .

*Demostración.* Sea  $z \in U$ . Como  $\mathcal{O}_z$  es dominio de factorización única,  $\mathcal{O}_z[T]$  también lo es. Sea  $\mathbf{P} = \prod_{j=1}^s \mathbf{P}_j^{s_j}$  la factorización en irreducibles de  $\mathbf{P}$ . Sea  $\mathbf{P}_0 = \prod_{j=1}^s \mathbf{P}_j$ . Tenemos que  $\mathbf{P}_0(f) = 0$ . El discriminante  $\mathbf{D} \in \mathcal{O}_z$  es distinto de cero porque en caso contrario  $\mathbf{P}_0$  y  $\mathbf{P}'_0$  tendrían una raíz en común, y por tanto un factor en común, lo cual no es posible ya que  $\mathbf{P}_0$  tiene todos sus factores irreducibles distintos. Sea  $\Delta = \Delta(z; \delta) \subset U$  un polidisco tal que  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{D}$  tienen representantes  $P_0$  y  $D$  respectivamente y tal que  $P_0(x; f(x)) = 0$  para todo  $x \in \Delta$ . Sea  $y \in \Delta - \{D = 0\}$ . Entonces  $P_0(y, T)$  tiene todas sus raíces distintas. Puesto que  $P_0(y, f(y)) = 0$  y  $\frac{\partial P_0}{\partial T}(y, f(y)) \neq 0$ , y dado que  $f(y)$  es raíz simple, por el teorema de la aplicación implícita aplicado a

$$P_0(x, T) : \Delta \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

en el punto  $(y, f(y))$ , existen un abierto  $W \subset \Delta$  y  $\Delta(f(y); r)$  y una única función holomorfa  $\varphi : W \rightarrow \Delta(f(y); r)$  tales que  $\varphi(y) = f(y)$  y  $P_0(x, T) = 0$ ,  $(x, T) \in W \times \Delta(f(y); r)$ , si y sólo si  $\varphi(x) = T$ . Puesto que  $f$  es continua y  $\mathbf{P}_0(f)$  en  $\Delta$  existen entornos abiertos  $V(y)$  y  $\Delta(f(y); \tilde{r})$  tales que  $f(x) \in \Delta(f(y); \tilde{r})$  y  $P_0(x, f(x)) = 0$  para todo  $x \in V(y)$ . Así pues  $f(x) = \varphi(x)$  para todo  $x \in V(y)$  y por tanto  $f$  es holomorfa en  $V(y)$ . Concluimos que  $f$  es holomorfa en  $\Delta - V(D)$ . Puesto que  $f$  es continua y localmente acotada en  $\Delta$  y por ser  $V(D)$  fino, por el teorema de extensión de Riemann  $f$  tiene una extensión holomorfa en  $\Delta$  que, por continuidad, debe coincidir con  $f$ . Es decir,  $f$  es holomorfa en  $\Delta$ . Considerando cualquier punto  $z \in U$  deducimos que  $f$  es holomorfa en  $U$ .  $\square$

**Corolario 3.66.** Sea  $X$  un recubrimiento analítico de  $U$ . Sea  $f$  una función holomorfa en  $X_0$  y localmente acotada en  $X$ . Entonces existe un polinomio irreducible  $P(T) \in \mathcal{O}_U[T]$  tal que  $P(\pi(x), f(x)) = 0$  para todo  $x \in X_0$ .

*Demostración.* En la demostración del teorema 3.64 sólo hemos utilizado que  $f$  fuera holomorfa en  $X_0$ . En  $\pi^{-1}(A)$  tan sólo necesitamos que sea  $f$  sea localmente acotada para poder utilizar el teorema de extensión de Riemann.  $\square$

**Teorema 3.67** (Principio del máximo). Sea  $X$  un recubrimiento analítico conexo de  $U$ . Sea  $f$  una función holomorfa en  $X$ . Si existe un punto  $x_0 \in X$  y un entorno abierto  $D$  de  $x_0$  tal que  $|f(x)| \leq |f(x_0)|$  para todo  $x \in U(x_0)$  entonces  $f$  es constante.

*Demostración.* Sea  $D' \subset D$  un entorno conexo de  $x_0$  y sea  $W'$  un entorno de  $\pi(x_0) = a_0$  tales que  $D'$  es un recubrimiento analítico de  $W'$  de grado  $\lambda$ , con  $\lambda = o(x_0)$ . Sea  $a \in W' - A$  y sea  $\pi^{-1}(a) \cap D' = \{x_1, \dots, x_\lambda\}$ . Sea  $S_r(a) = \sum_{i=1}^{\lambda} (f(x_i))^r$ .  $S_r$  es una función definida y holomorfa en  $W' - A$ . Por ser  $f$  continua,  $S_r$  es localmente acotada en  $W'$  y por tanto existe una extensión holomorfa en  $W'$ . Veamos que  $S_r$  alcanza su módulo máximo en el punto  $a_0$ . Sea  $\{a_n\} \subset W' - A$  una sucesión convergente a  $\pi(x_0)$ . Sea  $\pi^{-1}(a_n) = \{x_n^1, \dots, x_n^\lambda\}$ . Veamos que  $x_n^i \rightarrow x_0$ . Sean  $\{D_k\}$  y  $\{W_k\}$  sistemas de entornos de  $x_0$  y  $a_0$ . Sea  $U(x_0)$  un abierto de  $x_0$ . Sabemos que existe  $D_{k_0} \subset U(x_0)$ . Sea  $n_0$  tal que para todo  $n \geq n_0$ ,  $a_n \in W_{k_0}$ . Tenemos que para todo  $n > n_0$ ,  $x_n^i \in D_{k_0}$ . Por continuidad,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_r(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\lambda} (f(x_n^i))^r = \lambda f(x_0)^r = S_r(a_0).$$

Así pues, para todo  $a \in W' - A$ ,

$$|S_r(a)| \leq \left| \sum_{i=1}^{\lambda} (f(x_i))^r \right| \leq \sum_{i=1}^{\lambda} |f(x_i)|^r \leq \lambda |f(x_0)|^r = |S_r(a_0)|.$$

Dado  $a \in A$ , existe un sucesión  $\{a_n\}$  que converge a  $a$ . Por tanto

$$|S_r(a_n)| \leq |S_r(a_0)| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |S_r(a_n)| = |S_r(a)| \leq |S_r(a_0)|.$$

Por el teorema del módulo máximo,  $S_r$  es constante en  $W'$ .

Dado que  $f$  es holomorfa en  $D'$ , por el teorema 3.65, existe un polinomio mónico  $P(T) \in \mathcal{O}_{W'}[T]$  tal que  $P(\pi(x), f(x)) = 0$  para todo  $x \in W'$ . Utilizando la notación de la demostración del teorema 3.65, para todo  $a \in W' - A$  y un cierto entorno  $\Delta_a$  dicho polinomio viene dado por

$$P(T) = \prod_{i=1}^{\lambda} (T - \tilde{f}_a^i) \in \mathcal{O}_{\Delta_a}[T],$$

Por tanto los coeficientes de  $P$  son polinomio simétricos evaluados en  $f(x_i)$ , donde  $\pi^{-1}(a) \cap D' = \{x_1, \dots, x_\lambda\}$ . Puesto que los polinomios simétricos están a su vez generados por las sumas de potencias de los  $f(x_i)$ , o lo que es lo mismo, están generados por  $S_r(a)$ ,  $r = 1, \dots, \lambda$ , concluimos que los coeficientes de  $P(T)$  son constantes en  $W' - A$  y por tanto en  $W'$ . Así pues, puesto que  $f$  es continua y  $D'$  es conexo, sólo puede tomar en  $D'$  el valor de una de las raíces de  $P(T)$ . Por tanto  $f$  es constante en  $D'$ .

Sea  $B = \text{int}\{x \in X : f(x) = f(x_0)\}$ . Hemos demostrado que  $D' \subset B$ . Sea  $x_1 \in X - B$ . Sea  $\tilde{D}$  un entorno conexo de  $x_0$  y sea  $\tilde{W}$  un entorno de  $\pi(x_1) = a_1$  tales que  $\tilde{D}$  es un recubrimiento analítico de  $\tilde{W}$  de grado  $\tilde{\lambda}$ , con  $\tilde{\lambda} = o(x_1)$ . Sabemos que existe un polinomio  $\tilde{P}(T) \in \mathcal{O}_{\tilde{W}}$  tal que  $\tilde{P}(f) = 0$  en  $\tilde{D}$ . Supongamos que  $\tilde{D} \cap B \neq \emptyset$ .  $\pi(\tilde{D} \cap B)$  es un abierto no vacío de  $\tilde{W}$ . Por ser  $f$  constante en  $B$ , los coeficientes de  $\tilde{P}(T)$  son constantes en  $\pi(\tilde{D} \cap B)$ . Puesto que  $\tilde{W}$  es conexo, por el teorema de identidad dichos coeficientes son constantes en  $\tilde{W}$ . Por tanto, por ser  $f$  continua y  $\tilde{D}$  conexa, sólo puede tomar el valor de una de las raíces de  $\tilde{P}(T)$ . Así pues,  $\tilde{D} \subset B$ , lo cual es una contradicción porque  $x_1 \notin B$ . Finalmente, por ser  $B$  abierto y cerrado no vacío del espacio conexo  $X$ , tenemos que  $B = X$ .  $\square$

**Teorema 3.68.** Sea  $V$  una subvariedad conexa del dominio  $U \subset \mathbb{C}^n$ . Si  $f$  es holomorfa en  $U$  y su módulo alcanza el máximo en  $V$  entonces  $f$  es constante en  $V$ .

*Demostración.* Sea  $x_0 \in V$  tal que  $f(x_0) = M$  es el máximo de  $f$ . Sea  $S = \{x \in V : f(x) = M\}$ . Veamos que  $S$  es abierto y cerrado en  $V$ .

- $S$  es cerrado: Por ser  $f$  continua,  $f^{-1}(M)$  es cerrado y por tanto  $S = V \cap f^{-1}(M)$  es cerrado en  $V$ .
- $S$  es abierto: Sea  $x \in S$ . Consideremos el germen  $\mathbf{V}$  en  $x$ . Sabemos que

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \cup \dots \cup \mathbf{V}_l,$$

donde  $\mathbf{V}_i$  son sus componentes irreducibles. Sean los ideales primos  $I(\mathbf{V}_i)$ . Sabemos que existe una representación admisible de  $I(\mathbf{V}_i)$ . Como existe una representación  $V_i$  de  $\mathbf{V}_i$  en un polidisco  $\Delta_i = \Delta(x; r_i)$  tal que es un recubrimiento analítico y  $f$  alcanza su máximo en  $V_i$  deducimos que  $f$  es constante en dicho entorno. Sea el entorno abierto  $U(x) = \Delta_1 \cap \dots \cap \Delta_l$ . Tenemos que  $f$  es constante en  $V \cap U(x)$  y por tanto  $V \cap U(x) \subset S$ .

Finalmente, como  $S$  es abierto y cerrado y  $V$  es conexo,  $V = S$ .  $\square$

**Corolario 3.69.** Una subvariedad compacta  $V$  de  $\mathbb{C}^n$  es un conjunto finito de puntos.

*Demostración.* Sea  $\pi_i : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ . Sea  $V = V_1 \cup \dots \cup V_l$ , donde  $V_j$  son sus componentes conexas. Por ser  $V_j$  cerradas en un compacto, también son compactas. Como  $\pi_i$  alcanza su máximo en cada  $V_j$ , por el teorema anterior,  $\pi_i$  es constante en cada  $V_j$ . Por tanto  $V_j = \{x_j\}$  y  $V = \{x_1, \dots, x_l\}$ .  $\square$

**Lema 3.70.** Sea  $X$  un recubrimiento analítico de  $U$  y sea  $f$  una función holomorfa en  $X$ . Sea  $P(T) \in \mathcal{O}_U[T]$  el polinomio construido en el teorema 3.64. Entonces, para todo  $a \in U$ , las raíces de  $P(a; T) = 0$  están contenidas en los valores que toma  $f$  en  $\pi^{-1}(a)$ .

*Demostración.* Por la propia construcción, el teorema es evidente para los puntos  $a \in U - A$ , donde  $A$  es el conjunto crítico. Sea  $a \in A$  y sea  $a_n$  una sucesión de puntos  $a_n \in U - A$  que converge a  $a$ . Denotemos  $\pi^{-1}(a) = \{x_n^1, \dots, x_n^\lambda\}$ . Sea  $\pi^{-1}(a) = \{x^1, \dots, x^\mu\}$  y sea  $t_i = o(x^i)$ . Sean  $D_i$  entornos de  $x^i$  recubrimientos analíticos de  $\pi(D_i)$  de grados  $t_i$  y disjuntos dos a dos. Sabemos que existe un  $n_0$  tal que para todo  $n \geq n_0$ ,  $a_n \in \pi(D_1) \cap \dots \cap \pi(D_\mu)$ . Sean  $\mathcal{P}_i = \{j : x_{n_0}^j \in D_i\}$ . Tenemos entonces que, para todo  $j \in \mathcal{P}_i$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^j = x^i.$$

Por continuidad y puesto que  $P(a_n; T) = \prod_{j=1}^\lambda (T - f(x_n^j)) = \prod_{i=1}^\mu \prod_{j \in \mathcal{P}_i} (T - f(x_n^j))$ , obtenemos que

$$P(a; T) = \prod_{i=1}^\mu (T - f(x^i)^{t_i}),$$

Por tanto, las raíces de  $P(a; T)$  son  $f(x^1), \dots, f(x^\mu)$ .  $\square$

**Teorema 3.71.** Sea  $X$  un subconjunto del dominio  $D$  en  $\mathbb{C}^n$  y sea  $g : D \rightarrow \mathbb{C}^k$  una aplicación holomorfa tal que

- i)  $(X, g, g(D))$  es un recubrimiento analítico,
- ii)  $X_0$  es una subvariedad compleja de  $\mathbb{C}^n$ .

Entonces  $X$  es una subvariedad de  $D$ .

*Demostración.* Veamos que para todo  $z_0 \in D - X$  existe un función  $f$  holomorfa en  $D$  tal que  $f(z_0) \neq 0$  y  $f(z) = 0$  para todo  $x \in X$ . Sea  $g(z_0) = a_0 \in U$ . Tenemos que

$$g^{-1}(a_0) \cap X = \{y_1, \dots, y_\mu\},$$

para  $\mu \leq \lambda$ . Podemos encontrar un polinomio  $h \in \mathcal{O}_D[T_1, \dots, T_n]$  tal que  $h(z_0) = 0$  y  $h(y_i) = 1$ ,  $1 \leq i \leq \mu$ . Como  $X_0$  es una subvariedad de  $D$ ,  $h|_X$  es holomorfa. Sea  $P(T) \in \mathcal{O}_D[T]$  de grado  $\lambda$  tal que  $P(g(z); h(z)) = 0$  para todo  $z \in X$ . Tenemos que la función  $f(z) = P(g(z); h(z))$  es holomorfa en  $D$  y se anula en  $X$ . La única raíz de  $P(a_0; T)$  es  $h(y_1) = \dots = h(y_\mu) = 1$ . Por tanto  $f(z_0) = P(a_0; z_0) \neq 0$ .  $\square$

## 4. Estratificaciones distinguidas

### 4.1. Introducción a los conjuntos semi-analíticos

Sea  $M$  un variedad analítica real de dimensión  $n$ .

**Definición 4.1.** Sea  $\mathcal{F}$  una familia de funciones reales en un abierto  $U$  de  $M$ . Diremos que el subconjunto  $A$  de  $M$  está *definido* en  $U$  por las funciones de  $\mathcal{F}$  si

$$A \cap U = \cup_{i=1}^{s_i} \cap_{j=1}^s A_{ij}.$$

donde cada  $A_{ij}$  es de la forma  $\{f_{ij} > 0\}$  o bien  $\{f_{ij} < 0\}$  o bien  $\{f_{ij} = 0\}$  con  $f_{ij} \in \mathcal{F}$ .

**Definición 4.2.** Diremos que un subconjunto  $E$  de  $M$  es *semi-analítico* (en  $M$ ) si para cada  $x \in M$ , existe un entorno abierto  $U$  de  $x$  tal que  $E$  está definido en  $U$  por la familia de funciones analíticas en  $U$ .

**Observación 4.3.** La familia de subconjuntos semi-analíticos de  $M$  es cerrada por la operación del complementario, de la union localmente finita y de la intersección localmente finita. Cada semi-analítico es un  $F_\sigma$ -conjunto, es decir, es union contable de cerrados.

**Definición 4.4.** La *dimensión* de un subconjunto semi-analítico  $E$  de  $M$  se define por

$$\dim(E) = \max\{\dim(\Gamma) : \Gamma \text{ subvariedad}, \Gamma \subset E\}.$$

**Observación 4.5.** Dada la definición anterior, tenemos que

$$\dim(E) = n \Leftrightarrow \text{int}_M(E) \neq \emptyset.$$

Dada una familia de conjuntos semi-analíticos  $\{E_i\}_{i=1}^k$ , tenemos que

$$\dim(\cup_{i=1}^k E_i) = \max_{i=1, \dots, k} \dim E_i.$$

Utilizando el teorema de Baire, el resultado anterior también se demuestra para una familia numerable de semi-analíticos.

**Definición 4.6.** Denominaremos *hoja semi-analítica* de  $M$  a cada subvariedad analítica de  $M$  que sea un subconjunto semi-analítico de  $M$ .

Para las siguientes definiciones supondremos que  $M = \mathbb{R}^n$ .

**Definición 4.7.** Sea  $\lambda \subset \mathbb{R}^n$  una recta que pasa por el  $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ . Diremos que una función analítica  $f$  en un entorno de  $\bar{0}$  es  $\lambda$ -regular si el germen en  $\bar{0}$  de la restricción  $f_\lambda$  no es nulo. Si la recta  $\lambda$  es el eje de las  $x_k$  entonces diremos que  $f$  es  $x_k$ -regular.

**Definición 4.8.** Sea  $P$  un polinomio mónico en la variable  $x_n$  con coeficientes analíticos en un abierto de  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Definimos el *orden de  $P$  en  $x \in \mathbb{R}^{n-1}$*  como

$$\text{ord}_x P = \min\{i : \frac{\partial^i P}{\partial x_n^i}(x) \neq 0\}.$$

## 4.2. Estratificaciones distinguidas

**Definición 4.9.** Una *estratificación semi-analítica*  $\mathcal{T}$  de un abierto  $G$  de  $\mathbb{R}^n$  es una partición localmente finita de  $G$  en hojas semi-analíticas conexas verificando la *condición del borde*:

$$C1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Para cada } \Gamma \in \mathcal{T}, \text{ el borde en } G, \text{ es decir, } \partial\Gamma \cap G, \\ \text{es una unión finita de hojas de } \mathcal{T} \text{ de dimensión} \\ \text{estrictamente inferior a la de } \Gamma. \end{array} \right.$$

**Definición 4.10.** Diremos que una estratificación semi-analítica  $\mathcal{T}$  de un abierto  $G$  de  $\mathbb{R}^n$  es *compatible* con los subconjuntos  $E_1, \dots, E_q$  de  $\mathbb{R}^n$ , si para cada  $E_i$  tenemos que

$$\Gamma \subset E_i \text{ o bien } \Gamma \subset G \setminus E_i, \text{ para cada } \Gamma \in \mathcal{T}.$$

**Observación 4.11.** Observamos que con la notación anterior, los  $E_i \cap G$  son uniones de hojas de  $\mathcal{T}$ .

**Definición 4.12.** Definimos una *estratificación distinguida*  $\mathcal{C}$  de un intervalo abierto  $Q = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| < \delta_i\}$  por recurrencia en  $n$ :

- Para  $n = 1$ : una estratificación distinguida de un intervalo  $(-\delta, \delta)$  es o bien  $\{(-\delta, \delta)\}$  o bien  $\{(-\delta, 0), \{0\}, (0, \delta)\}$
- Para  $n$  habiendo definido  $n - 1$ : una estratificación distinguida de  $Q$  es una estratificación semi-analítica finita de  $Q$  que verifica las siguientes condiciones:

$$C2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Existe una estratificación distinguida } \mathcal{C}' \text{ del intervalo abierto} \\ Q' = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n : |x_i| < \delta_i\} \text{ de } \mathbb{R}^{n-1} \text{ de forma} \\ \text{que cada hoja } \Gamma \in \mathcal{C}' \text{ de dimensión } \leq n - 1 \text{ es el grafo} \\ \text{de una aplicación analítica } \Gamma : \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \text{ para un } \Gamma' \in \mathcal{C}'. \end{array} \right.$$

$$C3) \left\{ \begin{array}{l} \text{Existe un polinomio distinguido } P \text{ no nulo con coeficientes} \\ \text{analíticos en un intervalo abierto de } \overline{Q'} \text{ que es nulo en el} \\ \text{conjunto } V = \bigcup \{\Gamma \in \mathcal{C}' : \dim(\Gamma) \leq n - 1\} \text{ y tal} \\ \text{que el orden, } \Gamma \ni x \rightarrow \text{ord}_x P, \text{ es constante para} \\ \text{cada } \Gamma \in \mathcal{C}'. \end{array} \right.$$

Observamos que la condición C3) implica que  $V = \{x \in Q : P(x) = 0\}$  puesto que como  $P$  es no nulo tenemos que  $\text{ord}_x P = 0$  para toda hoja  $\Gamma$  de dimensión  $n$ . Al polinomio de la condición C3) lo llamaremos *polinomio asociado a  $\mathcal{C}$* . Para cada  $\Gamma \in \mathcal{C}$  escribiremos

$$P^\Gamma = \frac{\partial^{r-1} P}{\partial x_n^{r-1}},$$

donde  $r = \text{ord}_x P$  para cualquier  $x \in \Gamma$ . A las hojas semi-analíticas de la estratificación las llamaremos *estratos*.

**Observación 4.13.** Siguiendo la notación anterior:

1. La *condición del borde* implica que el conjunto  $V$  de la definición anterior es un cerrado de  $Q$ .
2. Por las condiciones  $C2)$  y  $C3)$  tenemos que

$$0 \in \bar{\Gamma}, \text{ para cada } \Gamma \in \mathcal{C}. \quad (\star)$$

Probemos esta propiedad por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 1$  es evidente. Supongámoslo cierto para  $n - 1$  y veamos que es cierto para  $n$ . Sea  $\Gamma \in \mathcal{C}$ ,  $\dim(\Gamma) = n$ . Si  $\Gamma = Q$ , entonces  $0 \in \bar{\Gamma} = \Gamma = Q$ . Si  $\Gamma \neq Q$ , entonces  $\partial\Gamma = \bar{\Gamma} \setminus \Gamma \neq \emptyset$ . Por tanto existe  $\Gamma_0 \in \mathcal{C}$ ,  $\dim(\Gamma_0) \leq n - 1$ , con  $\Gamma_0 \subset \partial\Gamma$ . Entonces basta comprobar que para todo  $\tilde{\Gamma} \in \mathcal{C}$  con  $\dim(\tilde{\Gamma}) \leq n - 1$  tenemos que  $0 \in \bar{\tilde{\Gamma}}$  para terminar la demostración. Sea  $\mathcal{C}'$  una estratificación distinguida en  $Q'$  de forma que la condición  $C2)$  y  $C3)$  se satisfaga. Entonces  $\pi(\tilde{\Gamma}) \in \mathcal{C}'$  y por hipótesis de inducción,  $\bar{0}' \in \overline{\pi(\tilde{\Gamma})} \subset \pi(\bar{\tilde{\Gamma}})$ . Sea  $x_n \in (-\delta_n, \delta_n)$  tal que  $(\bar{0}', x_n) \in \bar{\tilde{\Gamma}}$ . Como  $\dim(\tilde{\Gamma}) \leq n - 1$ , seguro que  $(\bar{0}', x_n)$  pertenece a un estrato de dimensión estrictamente menor que  $n - 1$ . Sea  $P$  el polinomio asociado a la estratificación distinguida. Entonces, puesto que  $P$  es distinguido,

$$P(\bar{0}'; x_n) = x_n^r = 0 \Rightarrow x_n = 0.$$

Por tanto  $\bar{0}' \in \bar{\tilde{\Gamma}}$ .

**Lema 4.14.** Toda hoja semi-analítica de una estratificación distinguida de dimensión  $k$  es el grafo de una aplicación analítica de un abierto semi-analítico de  $\mathbb{R}^k$  en  $\mathbb{R}^{n-k}$ .

*Demostración.* Sea  $\Gamma_0 \in \mathcal{C}$  un estrato de dimensión  $k < n$ . Por la condición  $b)$  existe una estratificación  $\mathcal{C}'$  en  $Q'$ , un estrato  $\Gamma_1 \in \mathcal{C}'$  y una función  $\phi_0 : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$  de forma que  $\Gamma$  es el grafo de dicha función. Puesto que la dimensión de  $\Gamma_0$  es  $k$ , la dimensión de  $\Gamma_1$  también será  $k$ . Continuando con este proceso definimos los estratos  $\Gamma_0, \dots, \Gamma_{n-k}, \Gamma_{n-j} \in \mathcal{C}^{(n-j)}$ ,  $\phi_{n-j} : \Gamma_{n-j+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\Gamma_{n-j} = \Gamma(\phi_{n-j})$ ,  $j = k + 1, \dots, n$ . Basta considerar la función

$$\phi : \mathbb{R}^k \supset \Gamma_{n-k} \ni \bar{x} \rightarrow (\phi_{n-k-1}(\bar{x}), \phi_{n-k+1}(\bar{x}), \phi_{n-k}(\bar{x}), \dots) \in \mathbb{R}^{n-k}.$$

El grafo de la función analítica  $\phi$  es  $\Gamma_0$ . □

**Observación 4.15.** Para demostrar el lema 4.14 tan sólo hemos utilizado la condición  $C2)$ .

**Lema 4.16.** Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un abierto y  $\Gamma$  una subvariedad de clase  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^n$  disjuntos. Sea  $a \in \Gamma \cap \partial\Omega$ . Entonces

$$(\partial\Omega)_a \subset \Gamma_a \Rightarrow \Gamma_a \subset (\partial\Omega)_a.$$

*Demostración.* Podemos suponer que  $\Gamma$  es un subespacio afín de  $\mathbb{R}^n$ . Supongamos que  $(\partial\Omega)_a \subset \Gamma_a$ . Entonces existe un entorno abierto  $U$  de  $a$  tal que  $\partial\Omega \cap U \subset \Gamma \cap U \subset \Gamma$ . Podemos tomar dicho entorno  $U$  convexo. Supongamos que existe  $x \in \Gamma \cap U \setminus \bar{\Omega}$ . Como

$a \in \partial\Omega$ , existe  $y \in \Omega \cap U$ . Como  $U$  es convexo tenemos que el segmento que une los puntos  $x$  e  $y$  y al cual denotaremos por  $[x, y]$ , está contenido en  $U$ . Puesto que  $x \notin \bar{\Omega}$  e  $y \in \Omega$ , debe existir un punto  $z \in [x, y] \subset U$  tal que  $z \in \partial\Omega$ . Observamos que  $z \in \partial\Omega \cap U \subset \Gamma$ . Sin embargo, puesto que  $\Gamma$  es subespacio afín y  $z, x \in \Gamma$ , tenemos que  $[x, y] \subset \Gamma$  y en particular  $y \in \Gamma$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

**Proposición 4.17.** Sea  $\mathcal{C}$  una estratificación definida como las estratificaciones distinguidas pero exigiendo tan sólo que se satisfagan las condiciones  $C2)$  y  $(\star)$ . Entonces la condición  $C1)$  es equivalente a decir que el conjunto  $V$  es cerrado en  $Q$ .

*Demostración.* Por definición tenemos que  $Q \setminus V = \bigcup \{\Gamma : \Gamma \in \mathcal{C}, \dim(\Gamma) = n\}$ . Supongamos que  $V$  es cerrado. Veamos que

$$\Gamma \in \mathcal{C} \Rightarrow \partial\Gamma \subset \bigcup \{\Gamma' \in \mathcal{C} : \dim(\Gamma') < \dim(\Gamma)\}. \quad (10)$$

Procedemos por inducción sobre  $n$ . Sea  $\Gamma \in \mathcal{C}$ . Podemos suponer que  $\dim(\Gamma) < n$  puesto que al ser  $Q \setminus V$  abierto, sus componentes conexas, es decir, los estratos de dimensión  $n$ , son abiertas y por tanto deducimos que la frontera de un estrato de dimensión  $n$  no puede contener otro estrato de dimensión  $n$  ya que su interior es vacío. Por  $C2)$  existe  $\Gamma' \in \mathcal{C}'$  y una función analítica  $\Gamma : \Gamma' \rightarrow \mathbb{R}$  cuyo grafo es el estrato  $\Gamma$ . Sea  $(\bar{a}', a_n) \in \partial\Gamma$ . Entonces  $\bar{a}' \in \partial\Gamma'$ . Por hipótesis de inducción,  $\bar{a}'$  pertenece a un estrato  $\Lambda' \in \mathcal{C}'$  de dimensión  $\leq k-1$ . Observamos que entonces  $(\bar{a}', a_n)$  pertenece a un estrato de  $\mathcal{C}$  de dimensión igual a  $\dim(\Lambda')$  porque en caso contrario  $(\bar{a}', a_n)$  pertenecería a un estrato de dimensión  $n$  y entonces  $V$  no sería cerrado. Hemos mostrado que

$$\Gamma \in \mathcal{C} \Rightarrow \partial\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset, \forall \Gamma' \in \mathcal{C}, \dim(\Gamma') \geq \dim(\Gamma). \quad (11)$$

La ecuación (10) y la ecuación (11) son equivalentes. Una vez que hemos demostrado (10) es suficiente probar que dados  $\Gamma$  y  $\Gamma'$  estratos de  $\mathcal{C}$

$$\Gamma' \cap \partial\Gamma \neq \emptyset \Rightarrow \Gamma' \subset \partial\Gamma.$$

Vamos a proceder por inducción doble<sup>3</sup> sobre  $k = \dim(\Gamma)$  y sobre  $r = \dim(\Gamma')$ , con  $0 \leq r < k$ . El caso  $\dim(\Gamma) = 1$  y  $\dim(\Gamma') = 0$  es trivial puesto que  $\Gamma'$  es un punto. Probemos el paso de inducción:

- Supongamos que  $\Gamma' \cap \partial\Gamma$  no es abierto en  $\partial\Gamma$ . Entonces existe  $a \in \Gamma' \cap \partial\Gamma$  tal que para todo entorno abierto  $U(a)$

$$U(a) \cap \partial\Gamma \cap (\partial\Gamma \cap \Gamma')^c \neq \emptyset.$$

---

<sup>3</sup>Sea  $P(r, k)$  una cierta propiedad para  $0 \leq r < k$ . Si se satisface  $P(0, 1)$  y

$$\left. \begin{array}{l} P(r', k'), \forall r' < k', \forall k' < k \\ P(r', k), \forall r < r' < k \end{array} \right\} \Rightarrow P(r, k)$$

entonces se satisface  $P(r, k)$  para todo  $0 \leq r < k$ .

Por tanto  $a \in (\partial\Gamma \cap \Gamma') \cap \overline{\partial\Gamma \setminus \Gamma'}$ . Por (10) tenemos que

$$\begin{aligned} \partial\Gamma \setminus \Gamma' &\subset \bigcup \{\Gamma'' \in \mathcal{C} : \dim(\Gamma'') < \dim(\Gamma), \Gamma'' \neq \Gamma', \partial\Gamma \cap \Gamma'' \neq \emptyset\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \overline{\partial\Gamma \setminus \Gamma'} \subset \bigcup \{\overline{\Gamma''} \in \mathcal{C} : \dim(\Gamma'') < k-1, \Gamma'' \neq \Gamma', \partial\Gamma \cap \Gamma'' \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Por tanto existe un estrato  $\Gamma''$ ,  $\Gamma'' \neq \Gamma'$ ,  $\partial\Gamma \cap \Gamma'' \neq \emptyset$  de dimensión  $\leq k-1$  tal que  $a \in \overline{\Gamma''}$ . Dado que  $a \in \partial\Gamma \cap \Gamma'$  tenemos que  $a \notin \Gamma''$  y por tanto  $a \in \partial\Gamma''$ . Por (11) y puesto que  $\partial\Gamma'' \cap \Gamma' \neq \emptyset$ ,  $\dim(\Gamma'') > \dim(\Gamma') = r$ . Por hipótesis de inducción sobre  $k$ ,

$$\Gamma' \cap \partial\Gamma'' \neq \emptyset \Rightarrow \Gamma' \subset \partial\Gamma''.$$

Por hipótesis de inducción sobre  $r$ , ya que  $k > \dim(\Gamma'') > r$ ,

$$\partial\Gamma \cap \Gamma'' \neq \emptyset \Rightarrow \Gamma'' \subset \partial\Gamma.$$

Eso implica que  $\partial\Gamma'' \subset \partial\Gamma$ . Finalmente

$$\Gamma' \subset \partial\Gamma'' \subset \partial\Gamma.$$

Observese que en particular hemos demostrado que si  $\dim(\Gamma') = k-1$  y  $\dim(\Gamma) = k$  entonces  $\Gamma' \cap \partial\Gamma$  debe ser abierto en  $\partial\Gamma$ .

- Supongamos que  $\Gamma' \cap \partial\Gamma$  es abierto en  $\partial\Gamma$ . Basta probar que  $\Gamma' \cap \partial\Gamma$  es abierto en  $\Gamma'$ , porque por ser también cerrado y  $\Gamma'$  conexo tendremos que  $\Gamma' \cap \partial\Gamma = \Gamma'$ . Sea  $c = (a, b) \in \Gamma' \cap \partial\Gamma$ ,  $a \in \mathbb{R}^k$ ,  $b \in \mathbb{R}^{n-k}$ . Por ser  $\Gamma' \cap \partial\Gamma$  abierto en  $\partial\Gamma$  existe un abierto  $U' = U'_1 \times U'_2$ ,  $a \in U'_1$ ,  $b \in U'_2$ , tal que

$$U' \cap \partial\Gamma \subset \Gamma' \cap \partial\Gamma. \quad (12)$$

Por el lema 4.14 existen aplicaciones analíticas  $\phi_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  y  $\phi_2 : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  abierto,  $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}^k$  hoja semi-analítica,  $\Gamma_0 \cap \Omega = \emptyset$ , de forma que  $\Gamma$  es el grafo de  $\phi_1$  y  $\Gamma'$  es el grafo de  $\phi_2$ . Sea  $\pi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  la proyección natural. Sea  $U_2$  un entorno abierto de  $b$  tal que  $\overline{U_2} \subset U'_2$ . Por 12

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2) \in \partial\Gamma \cap (\{a\} \times \overline{U_2}) &\Rightarrow (x_1 = a) \wedge (a, x_2) \in \Gamma' \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_2 = \phi_2(a) = b \Rightarrow x = (a, b) = c. \end{aligned}$$

Puesto que  $\Omega \cap \Gamma_0 = \emptyset$ ,

$$\Gamma \cap (a \times \mathbb{R}^{n-k}) = \emptyset.$$

Así pues,

$$\overline{\Gamma} \cap (\{a\} \times \overline{U_2}) = \partial\Gamma \cap (\{a\} \times \overline{U_2}) = c.$$

Podemos suponer que  $\overline{U_2}$  es compacto. Tenemos entonces que  $\overline{U_2} \setminus U_2$  también es compacto. Consideremos para cada  $x_2 \in \overline{U_2} \setminus U_2$  unos entornos abiertos  $U_{x_2}(a) \subset \mathbb{R}^k$

y  $V(x_2) \subset \mathbb{R}^{n-k}$  de  $a$  y  $x_2$  respectivamente tales que  $(U_{x_2}(a) \times V(x_2)) \cap \Gamma = \emptyset$ , los cuales existen ya que  $(a, x_2) \notin \bar{\Gamma}$ . Por ser  $\bar{U}_2 \setminus U_2$  compacto

$$\bar{U}_2 \setminus U_2 \subset \bigcup_{i=1}^s V(x_2^i).$$

Sea  $U_1 = U'_1 \cap (\bigcap_{i=1}^s U_{x_2^i}(a))$  y sea  $U = U_1 \times U_2 \subset U'$ . Veamos que  $\bar{\Gamma} \cap (U_1 \times \bar{U}_2) \subset U$ . Sea  $(x_1, x_2) \in \bar{\Gamma} \cap (U_1 \times (\bar{U}_2 \setminus U_2))$ . Existe  $j \in \{1, \dots, s\}$  tal que  $(x_1, x_2) \in U_{x_2^j}(a) \times V(x_2^j)$ . Sin embargo  $(U_{x_2^j}(a) \times V(x_2^j)) \cap \Gamma = \emptyset$ , lo cual implica que  $(x_1, x_2) \notin \bar{\Gamma}$ .

Sea el abierto  $\Omega_0 = \pi(\Gamma \cap U) = \Omega \cap U_1$ . Tenemos que

$$x \in \partial\Omega_0 \cap U_1 \Rightarrow (x, t') \in \partial\Gamma \cap U \text{ para un } t'.^4 \quad (13)$$

Por 12, tenemos que  $(x, t') \in \Gamma'$ . Así pues,  $x \in \Gamma_0$ . Hemos mostrado entonces que  $\partial\Omega_0 \cap U_1 \subset \Gamma_0$ . Por el lema 4.16, existe un entorno abierto  $U''_1 \subset U_1$  de  $a$  tal que

$$\Gamma_0 \cap U''_1 \subset \partial\Omega_0$$

Por tanto  $\Gamma' \cap U'' \subset \partial\Gamma$ , donde  $U'' = U''_1 \times U_2$ . En efecto, si  $(x, t) \in \Gamma' \cap U''$ , entonces  $x \in \partial\Omega_0$  ya que  $x \in \Gamma_0 \cap U''_1$ . Como  $U''_1 \subset U_1$ ,  $x \in \partial\Omega_0 \cap U''_1 \subset \partial\Omega_0 \cap U_1$ . Por (13),  $(x, t') \in \partial\Gamma \cap U$  para algún  $t'$ . Finalmente, por (12),  $(x, t') \in \Gamma' \Rightarrow t' = \phi(x) = t$ . Así pues  $(x, t) \in \partial\Gamma$ .

□

**Observación 4.18.** Por la proposición 4.17 tenemos que la condición  $a)$  es redundante en la definición de estratificación distinguida.

**Observación 4.19.** La condición  $C2)$  implica que existe una sucesión de estratificaciones distinguidas  $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}, \dots, \mathcal{C}_1$  de los intervalos abierto  $Q_k \subset \mathbb{R}^k$ ,  $Q_k = \pi_k(Q_{k+1})$ ,  $\pi_k : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ , de forma que cada hoja semi-analítica  $\Gamma \in \mathcal{C}_{k+1}$  de dimensión  $\leq k$  es el grafo de una aplicación analítica  $\Gamma : \Gamma' \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\Gamma' \in \mathcal{C}_k$ . Dado un estrato  $\Gamma \in \mathcal{C}$  de dimensión  $l \leq n$ , definimos por recurrencia  $\Gamma_n = \Gamma$ ,  $\Gamma_k = \pi_k(\Gamma_{k+1}) \in \mathcal{C}_k$ . Sea  $P_k$  el polinomio asociado a  $\mathcal{C}_k$ . Entonces

$$\Gamma \subset \{P_{l+1}^{\Gamma_{l+1}} = \dots = P_n^{\Gamma_n} = 0\}.$$

**Corolario 4.20.** Sea  $\mathcal{C}$  una estratificación distinguida de un intervalo abierto  $Q$ . Entonces para todo estrato  $\Gamma \in \mathcal{C}$  existe un aplicación analítica  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-l}$  de un entorno abierto de  $\bar{Q}$  tal que  $T_x\Gamma = \text{Ker } d_x F$ , para todo  $x \in \Gamma$ .

<sup>4</sup>Puesto que  $\bar{\Omega}_0 = \pi(\bar{\Gamma} \cap \bar{U})$ ,

$$\partial\Omega_0 \subset \pi(\bar{\Gamma} \cap \bar{U}) \setminus \Omega_0 \subset \pi(\bar{\Gamma} \cap \bar{U} \setminus \Gamma \cap U).$$

Por tanto existe  $(x, t') \in \bar{\Gamma} \cap \bar{U} \setminus \Gamma \cap U$ . Ahora bien, como  $x \in U_1$ , tenemos que  $(x, t') \in \bar{\Gamma} \cap (U_1 \times \bar{U}_2) \subset U$ . De forma trivial,  $(x, t') \in \bar{\Gamma} \cap \bar{U} \subset \bar{\Gamma}$ . Si  $(x, t') \in \Gamma$ , entonces  $(x, t') \in \Gamma \cap U$ , lo cual es una contradicción. Así pues,  $(x, t') \in \partial\Gamma \cap U$ .

*Demostración.* En la demostración utilizaremos las notaciones de la observación 4.19. Sea  $F(\bar{x}) = (P_{l+1}^{\Gamma_{l+1}}(\bar{x}), \dots, P_n^{\Gamma_n}(\bar{x}))$ . El jacobiano de esta función tiene rango máximo en todo  $x \in \Gamma$  debido a la propia definición de los polinomios  $P_j^{\Gamma_j}$ . Fijemos  $\bar{x}_0 \in \Gamma$ . Por el teorema de la función implícita existe una función  $\phi : U(\bar{x}'_0) \rightarrow V(\bar{x}''_0)$ ,  $\phi(\bar{x}'_0) = \bar{x}''_0$ , tal que  $F(\bar{x}', \phi(\bar{x}')) = 0$ . Por tanto  $(d_{(\bar{x}', \phi(\bar{x}'))}F)(d_{\bar{x}'}(\bar{x}', \phi(\bar{x}'))) = 0$ . En particular,  $(d_{\bar{x}_0}F)(d_{\bar{x}'_0}(\bar{x}', \phi(\bar{x}')))$ , y puesto que las columnas de  $d_{\bar{x}'_0}(\bar{x}', \phi(\bar{x}'))$  generan el espacio tangente de  $\Gamma$  en  $\bar{x}_0$ , obtenemos el resultado.  $\square$

### 4.3. El teorema de las estratificaciones distinguidas y sus consecuencias

**Teorema 4.21** (de las estratificaciones distinguidas). Sean  $E_1, \dots, E_q$  subconjuntos semi-analíticos de un entorno abierto del  $0 \in \mathbb{R}^n$ . Entonces, después de un cambio lineal de coordenadas adecuado, existe una estratificación distinguida de un intervalo abierto  $Q = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| < \delta_i\}$ , arbitrariamente pequeño, que es compatible con los conjuntos  $E_1, \dots, E_q$ .

Demostraremos este teorema en la sección 4.7. Los siguientes resultados son consecuencias inmediatas de este teorema.

**Teorema 4.22** (de la adherencia). La adherencia de un semi-analítico es semi-analítica

**Teorema 4.23** (de las componentes conexas). La familia de componentes conexas de un semi-analítico es localmente finita y cada una de sus componentes es semi-analítica.

**Corolario 4.24.** Un subconjunto de un semi-analítico  $E$  que sea abierto y cerrado en  $E$  es semi-analítico.

**Corolario 4.25.** Sea  $E$  un conjunto semi-analítico no vacío. Entonces

1.  $\dim(\bar{E} \setminus E) < \dim(E)$ ,
2.  $\dim(\bar{E}) = \dim(E)$ .

**Observación 4.26.** La restricción de una estratificación distinguida de un intervalo abierto  $Q$  a un intervalo abierto  $\tilde{Q} \subset Q$  es también una estratificación distinguida.

### 4.4. Lemas auxiliares

Consideremos el polinomio  $P_{\bar{c}}(z) = z^k + c_1 z^{k-1} + \dots + c_k$  con  $z \in \mathbb{C}$  y  $\bar{c} = (c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{C}^k$ . Sea

$$W_s = \{\bar{c} \in \mathbb{C}^k : \#\{z : P_{\bar{c}}(z) = 0\} \leq s\}$$

para  $s = 1, \dots, k$ . Sean  $K = \{1, \dots, k\}$  y

$$\mathcal{D}_s(z_1, \dots, z_k) = \sum_{\substack{J \subset K \\ \#J = k-s}} \prod_{\substack{\mu < \nu \\ \mu, \nu \in J}} (z_\mu - z_\nu)^2,$$

para  $s = 0, \dots, k-2$ . Puesto que  $\mathcal{D}_s(z_1, \dots, z_k)$  es un polinomio simétrico en las variables  $z_1, \dots, z_k$ , sabemos que existe un polinomio  $D_s(T_1, \dots, T_k) \in \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_k]$  tal que

$$\mathcal{D}_s(z_1, \dots, z_k) = D_s(\sigma_1(\bar{z}), \dots, \sigma_k(\bar{z})),$$

donde  $\sigma_i$  son las funciones simétricas elementales. A los polinomios  $D_s$  los llamaremos *discriminantes generalizados*.

**Lema 4.27.** Siguiendo la notación del párrafo anterior,

$$W_s = \{\bar{c} \in \mathbb{C}^k : D_0(\bar{c}) = \dots = D_{k-s-1}(\bar{c}) = 0\}$$

para  $s = 1, \dots, k-1$ .

*Demostración.* Mostremos ambas inclusiones:

$\square$  Sea  $\bar{c} \in W_s$  y  $\bar{z} = (z_1, \dots, z_k)$  una sucesión completa de las raíces de  $P_{\bar{c}}(\bar{z})$ . Entonces

$$\mathcal{D}_0(\bar{z}) = \dots = \mathcal{D}_{k-s-1}(\bar{z}) = 0.$$

Por tanto, para  $m = s+1, \dots, k$ ,

$$0 = \mathcal{D}_{k-m}(\bar{z}) = D_{k-m}(\sigma_1(\bar{z}), \dots, \sigma_k(\bar{z})) = D_{k-m}(c_1, \dots, c_k).$$

$\square$  Sea  $\bar{c} \in \mathbb{C}^k$  tal que  $D_{k-m}(\bar{c}) = 0$  para  $m = s+1, \dots, k$ . Sea  $(z_1, \dots, z_k)$  una sucesión completa de las raíces de  $P_{\bar{c}}$ . Supongamos que  $\bar{c} \notin W_s$ , es decir, que  $t = \#\{z_1, \dots, z_k\} \geq s+1$ . Reordenando podemos suponer que  $z_1, \dots, z_t$  son las  $t$  raíces distintas de  $P_{\bar{c}}$ . Tenemos entonces que

$$0 = D_{k-t}(\bar{c}) = \mathcal{D}_{k-t}(z_1, \dots, z_k) = \prod_{\substack{\mu < \nu \\ \mu, \nu \in \{1, \dots, t\}}} (z_\mu - z_\nu)^2 \neq 0,$$

lo cual es una contradicción.  $\square$

**Lema 4.28.** Siguiendo la notación del lema 4.27, los subconjuntos  $W_s$ ,  $s = 1, \dots, k$ , son algebraicos.

*Demostración.* Para  $s = 1, \dots, k-1$  el resultado se deduce del lema anterior. Para  $s = k$ ,  $W_k = \mathbb{C}^k$ , que también es algebraico.  $\square$

**Corolario 4.29.** Sea  $G$  un abierto de  $\mathbb{C}^n$  y sea

$$P(\bar{v}; z) = z^k + c_1(\bar{v})z^{k-1} + \dots + c_k(\bar{v})$$

un polinomio con coeficientes  $c_1(\bar{v}), \dots, c_k(\bar{v})$  holomorfos en  $G$ . Sea  $\bar{a} \in G$  tal que  $P(\bar{a}; z)$  tiene exactamente  $r$  raíces distintas, donde  $1 \leq r \leq k$ . Entonces existe un entorno abierto  $U$  de  $\bar{a}$  tal que el subconjunto

$$Z = \{\bar{v} \in U : \#\{z : P(\bar{v}; z) = 0\} = r\}$$

es analítico.

*Demostración.* Por el lema 4.28 tenemos que para  $s \in \{1, \dots, k-1\}$  cualquier conjunto

$$Z_s = \{\bar{v} \in G : \#\{z : P(\bar{v}; z) = 0\} \leq s\}$$

es analítico puesto que

$$Z_s = \{\bar{v} \in G : D_0(\bar{c}(\bar{v})) = \dots = D_{k-s-1}(\bar{c}(\bar{v})) = 0\},$$

donde  $\bar{c}(\bar{v}) = (c_1(\bar{v}), \dots, c_k(\bar{v}))$ . Si  $r \geq 2$ , el conjunto  $R = \{\bar{v} \in G : \#\{z : P(\bar{v}; z) = 0\} = r\}$  es igual a  $Z_r \setminus Z_{r-1}$ . Puesto que  $\bar{a} \notin Z_{r-1}$  y  $Z_{r-1}$  es analítico, existe un entorno abierto  $U \subset G$  tal que  $U \cap Z_{r-1} = \emptyset$ . Sea  $Z = \{\bar{v} \in U : \#\{z : P(\bar{v}; z) = 0\} = r\}$ . Tenemos entonces que

$$Z = R \cap U = Z_r \cap U$$

y por tanto  $Z$  es analítico en  $U$ . Si  $r = 1$ ,  $R$  es igual a  $Z_1$ , que es analítico en todo  $G$ .  $\square$

## 4.5. Lema de Base y sus consecuencias

El siguiente lema jugará un rol esencial en la prueba del teorema de las estratificaciones distinguidas.

**Lema 4.30** (de base). Sea  $G$  un abierto de  $\mathbb{C}^n$  y consideremos

$$P(\bar{v}; z) = z^k + c_1(\bar{v})z^{k-1} + \dots + c_k(\bar{v})$$

un polinomio mónico con coeficientes holomorfos en  $G$ . Supongamos que el número  $r$  de raíces distintas de  $z \rightarrow P(\bar{v}; z)$  no depende de  $\bar{v}$  en  $G$ . Entonces, si  $\bar{c} \in G$ , existe un entorno abierto  $U$  de  $\bar{c}$  tal que

$$\{(\bar{v}, z) \in U \times \mathbb{C} : P(\bar{v}; z) = 0\} = \zeta_1 \cup \dots \cup \zeta_r,$$

donde  $\zeta_i$  son los grafos de funciones holomorfas  $\zeta_i : U \rightarrow \mathbb{C}$  tales que  $\zeta_i(x) \neq \zeta_j(x)$  para todo  $x \in U$ , si  $i \neq j$ .

Necesitaremos el siguiente lema para la demostración del lema de base.

**Lema 4.31.** Sea  $Q$  un polinomio mónico con coeficientes holomorfos en un abierto  $U$  de  $\mathbb{C}^n$  y sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{C}$ . Supongamos que el polinomio  $Q(\bar{v}; z)$  tiene una sola raíz  $\zeta(\bar{v})$  en  $\Omega$  y que la multiplicidad de dicha raíz no depende de  $\bar{v}$  en  $U$ . Entonces la función  $\zeta : U \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa.

*Demostración.* Por el teorema de continuidad de las raíces y puesto que  $\zeta(\bar{v})$  es la única raíz en  $\Omega$ , tenemos que  $\zeta(\bar{v})$  es continua. Por el lema 3.65 obtenemos el resultado.  $\square$

*Demostración del lema de base.* Sea  $(z_1, \dots, z_k)$  una sucesión completa de las raíces de  $P(\bar{c}; z)$  y sean  $a_1, \dots, a_r$  sus raíces distintas. Sea  $K = \{1, \dots, k\}$  y sea la partición  $\{I_j\}_{j=1}^r$  de  $K$ , donde  $I_j = \{\nu \in K : z_\nu = a_j\}$ . Sea  $\delta > 0$  tal que

$$\delta < \frac{1}{2} \min\{|a_i - a_j| : i \neq j\}.$$

Por el teorema de continuidad de las raíces existe un entorno abierto  $U$  de  $\bar{c}$  tal que para todo  $\bar{v} \in U$  podemos ordenar la sucesión completa de raíces de  $P(\bar{v}; z)$ ,  $(z'_1, \dots, z'_k)$ , de forma que  $|z'_i - z_i| < \delta$ ,  $1 \leq i \leq k$ . En particular, si  $a'_1, \dots, a'_r$  son las raíces distintas, tendremos que  $|a'_i - a_i| < \delta$ ,  $1 \leq i \leq r$ . Sean  $B_j = \{w \in \mathbb{C} : |w - a_j| < \delta\}$ . Tenemos que para todo  $\nu \in I_j$ ,  $z_\nu \in B_j$ . Los abiertos  $B_j$  son disjuntos y por tanto todos los  $z'_\nu$ ,  $\nu \in I_j$ , serán iguales a  $a'_j$ . Por el lema 4.31 aplicado a los abiertos  $U$  y  $B_j$  tenemos que la función  $\zeta_i(\bar{v})$  que asocia al punto  $\bar{v}$  la raíz de  $P(\bar{v}; z)$  en  $B_j$  es holomorfa.  $\square$

El lema de base tiene consecuencias en el caso real.

**Corolario 4.32.** Sea  $\Gamma$  una subvariedad analítica de  $\mathbb{R}^n$  y sea

$$P(u; x) = x^k + a_1(u)x^{k-1} + \dots + a_k(u)$$

un polinomio mónico con coeficientes analíticos reales en  $\Gamma$ . Si el número  $r$  de raíces complejas de  $z \rightarrow P(u; z)$  no depende de  $u$  entonces para todo  $c \in \Gamma$  existe un entorno abierto  $U$  de  $c$  en  $\Gamma$  tal que

$$\{(u; z) \in U \times \mathbb{C} : P(u; z) = 0\} = \xi_1 \cup \dots \cup \xi_r,$$

donde  $\xi_j$  son funciones analíticas o bien reales o bien tales que  $\mathcal{I}m(\xi_j) \neq 0$  en  $U$ .

*Demostración.* Como el enunciado es local, podemos suponer que  $\Gamma = G \subset \mathbb{R}^m$ , donde  $G$  es un abierto y  $m = \dim(\Gamma)$ . Consideremos las complexificaciones  $\tilde{a}_i$  holomorfas en un abierto  $\tilde{G} \ni c$  de  $\mathbb{C}^m$  lo suficientemente pequeño como para que  $U = \tilde{G} \cap \mathbb{R}^m \subset G$ . Puesto que es posible tomar los entornos tan pequeños como queramos, en adelante supondremos que  $U$  y  $\tilde{G}$  son conexos. Consideremos el polinomio

$$\tilde{P}(w; z) = z^k + \tilde{a}_1(w)z^{k-1} + \dots + \tilde{a}_k(w).$$

Por el corolario 4.29 el conjunto

$$Z = \{v \in \tilde{G} : \tilde{P}(w; z) = 0 \text{ tiene exactamente } r \text{ raíces complejas distintas}\}$$

es analítico para un cierto entorno abierto  $V(c) \subset \tilde{G}$ . Renombremos con  $\tilde{G} = V(c)$ . Sean  $f_1, \dots, f_l : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{C}$  las funciones holomorfas tales que

$$Z = \{w \in \tilde{G} : f_1(w) = \dots = f_l(w) = 0\}.$$

Dado que  $U = \tilde{G} \cap \mathbb{R}^m \subset Z$ , tenemos que  $f_j(x) = 0$  para todo  $x \in U$ . Eso implica que  $f_j \equiv 0$  en  $\tilde{G}$  y por tanto  $Z = \tilde{G}$ <sup>5</sup>. Entonces  $\tilde{P}(v; z)$  tiene exactamente  $r$  raíces distintas para cada  $w \in \tilde{G}$ . Por el lema de base existe un entorno abierto de  $c$ , al cual denotaremos

<sup>5</sup>Recuérdese que por ser  $f_j$  analítica tenemos que  $f_j = \sum_{k=k_1+\dots+k_m}^{\infty} b_{k_1 \dots k_m} z_1^{k_1} \dots z_m^{k_m}$  donde  $b_{k_1 \dots k_m}$  son las derivadas parciales respecto a  $x_j$  con orden  $k_j$  en 0. Puesto que  $f_j(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^m$ , podemos deducir que las derivadas anteriores son nulas y por tanto  $f_j$  es idénticamente nulo en un abierto de  $\tilde{G}$  y, por el teorema de identidad, en todo  $\tilde{G}$ .

de nuevo sin pérdida de generalidad con  $\tilde{G}$ , y funciones  $\zeta_j : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfas tales que  $\zeta_i(w) \neq \zeta_j(w)$  para todo  $w \in \tilde{G}$ ,  $i \neq j$ , con

$$Z = \zeta_1 \cup \dots \cup \zeta_r.$$

Por tanto

$$V = \{(u, z) \in U \times \mathbb{C} : P(u; z) = 0\} = \xi_1 \cup \dots \cup \xi_r,$$

donde  $\xi_j = \zeta_j|_U : U \rightarrow \mathbb{C}$  son analíticas. Por último, como  $0 = \overline{P(u; z)} = P(\bar{u}; \bar{z}) = P(u; \bar{z})$ , tenemos que  $\bar{\xi}_j = \xi_i$  para algún  $i$ . Si  $i = j$ , entonces  $\xi_j$  es real. Si  $i \neq j$ , entonces  $\text{Im}(\xi_j) \neq 0$  en  $U$  ya que  $\xi_j(v) \neq \xi_i(v)$  para todo  $u \in U$ .  $\square$

**Observación 4.33.** Podemos completar el corolario 4.32 con la siguiente observación: para cada  $j = 1, \dots, r$  existe un  $l \in \mathbb{N}$  tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial^t P}{\partial x^t}(\bar{u}; \xi_j(\bar{u})) = 0, \forall t \leq l \\ \frac{\partial^{l+1} P}{\partial x^{l+1}}(\bar{u}; \xi_j(\bar{u})) \neq 0 \end{cases}$$

para todo  $\bar{u} \in U$ . Esto es consecuencia de la propia demostración del corolario 4.32 y de la del lema 4.31. El número  $l$  en cuestión es el orden del cero  $a_j$ .

**Corolario 4.34.** Sean las hipótesis y notaciones del corolario 4.32. Sea  $R$  un divisor mónico de  $P$  en el anillo de polinomios reales con coeficientes analíticos en  $\Gamma$ . Entonces para todo punto  $\bar{c} \in \Gamma$  existe un entorno abierto  $W$  tal que

$$\{(\bar{u}, x) \in W \times \mathbb{R} : R(\bar{u}, x) = 0\} = (\xi_{\alpha_1})_W \cup \dots \cup (\xi_{\alpha_s})_W,$$

para ciertos  $\alpha_1 < \dots < \alpha_s$ .

*Demostración.* Sea  $l$  el grado de  $R$ . Las raíces de  $R(\bar{c}, x)$  son algunas de las raíces de  $P(\bar{c}, x)$ . Digamos que dichas raíces son  $\xi_{\beta_1}(\bar{c}), \dots, \xi_{\beta_{s'}}(\bar{c})$  para ciertos  $\beta_1 < \dots < \beta_{s'}$  y sea  $(z_1, \dots, z_l)$  su sucesión completa de raíces. Por el teorema de continuidad de las raíces, existe un entorno abierto  $W$  de  $\bar{c}$  tal que para todo  $\bar{u} \in W \subset \Gamma$  podemos ordenar la sucesión completa de raíces de  $R(\bar{u}, x)$ ,  $(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_l)$ , de forma que  $|\tilde{z}_i - z_i| < \delta$ , donde  $\delta > 0$  es el mismo que utilizamos en la demostración del lema de base. Por tanto

$$\{(\bar{u}, z) \in W \times \mathbb{C} : R(\bar{u}, z) = 0\} = (\xi_{\beta_1})_W \cup \dots \cup (\xi_{\beta_{s'}})_W.$$

Puesto que las funciones  $\xi_{\beta_j}$  son reales o con parte imaginaria no nula en ningún punto, existe  $\{\alpha_1 < \dots < \alpha_s\} \subset \{\beta_1 < \dots < \beta_{s'}\}$  tales que

$$\{(\bar{u}, z) \in W \times \mathbb{R} : R(\bar{u}, z) = 0\} = (\xi_{\alpha_1})_W \cup \dots \cup (\xi_{\alpha_s})_W,$$

donde las  $\xi_{\alpha_j}$  son reales.  $\square$

**Proposición 4.35.** Sean las hipótesis y notaciones del corolario 4.34, con  $\Gamma$  una subvariedad analítica conexa. Entonces

$$\{(\bar{u}, x) \in \Gamma \times \mathbb{R} : P(\bar{u}, x) = 0\} = \xi_1 \cup \dots \cup \xi_q,$$

donde  $\xi_j : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  son analíticas reales y  $\xi_1 < \dots < \xi_q$  en  $\Gamma$  con  $q \leq r$ .

*Demostración.* Consideremos los conjuntos  $C_i = \{\bar{u} \in \Gamma : P(\bar{u}; z) \text{ tiene } i \text{ raíces reales}\}$ ,  $0 \leq i \leq r$ . Observamos que:

- $C_i$  es abierto: Dado  $\bar{c} \in C_i$ , por el corolario 4.34 aplicado al propio  $P$ , existe entorno abierto  $W$  de  $\bar{c}$  tal que  $W \subset C_i$ .
- $C_i$  es cerrado: Sea  $\bar{c} \notin C_i$ . Entonces  $\bar{c} \in C_j$ , para algún  $i \neq j$ . Existe entorno abierto  $W$  de  $\bar{c}$  tal que  $W \subset C_j$  y, por tanto,  $W \subset C_i^c$ .

Así pues, para cada  $i = 0, \dots, r$  y por ser  $\Gamma$  conexo, tenemos que los conjuntos  $C_i$  son vacíos o todo  $\Gamma$ . Por tanto existe  $q$  tal que  $C_q = \Gamma$ . Para cada  $\bar{c} \in \Gamma$  consideremos las funciones  $\xi_1, \dots, \xi_q : U \rightarrow \mathbb{R}$ , que podemos ordenarlas y renombrarlas de forma que  $\xi_1 < \dots < \xi_q$ . Sean

$$\tilde{\xi}_j : \Gamma \ni \bar{c} \rightarrow \xi_j(\bar{c}) \in \mathbb{R},$$

donde  $\xi_j$  es la función considerada anteriormente para  $\bar{c}$ . Las funciones  $\tilde{\xi}_j$  están bien definidas por estar las  $\xi_j$  ordenadas y es analítica por serlo estas últimas. Tenemos entonces que

$$\{(\bar{u}, x) \in \Gamma \times \mathbb{R} : P(\bar{u}, x) = 0\} = \tilde{\xi}_1 \cup \dots \cup \tilde{\xi}_q.$$

□

**Observación 4.36.** Podemos completar la proposición 4.35 haciendo la observación de que para cada  $j = 1, \dots, q$ , el orden

$$\xi_j \ni \bar{u} \longrightarrow \text{ord}_{\bar{u}} P \in \mathbb{N}$$

es constante. Eso se deduce de la observación 4.33.

**Proposición 4.37.** Sean las hipótesis y las notaciones de la proposición 4.35. Sea  $R$  un divisor de  $P$  mónico en el anillo de polinomios reales con coeficientes analíticos en  $\Gamma$ . Entonces

$$\{(\bar{u}, x) \in \Gamma \times \mathbb{R} : R(\bar{u}, x) = 0\} = \xi_{\alpha_1} \cup \dots \cup \xi_{\alpha_s},$$

para ciertos  $\alpha_1 < \dots < \alpha_s$ .

*Demostración.* Argumentando como en la proposición 4.35 se demuestra que los conjuntos  $\tilde{C}_j = \{\bar{u} \in \Gamma : R(\bar{u}; x) \text{ tiene } j \text{ raíces}\}$  para  $0 \leq j \leq \text{deg}(R)$  son abiertos y cerrados y por tanto existe  $s$  tal que  $C_s = \Gamma$ . Ordenando los  $\xi_{\alpha_1} < \dots < \xi_{\alpha_s}$  comprobamos que se pueden definir en todo  $\Gamma$  como hicimos en la demostración de la proposición 4.35. □

## 4.6. El lema de Thom

**Lema 4.38** (de Thom). Sea  $P(t) \in \mathbb{R}[t]$  un polinomio en una variable real de grado  $k$  y sea  $\Theta = \{\theta_0, \dots, \theta_{k-1}\}$  donde  $\theta_i \in \{(-\infty, 0), \{0\}, (0, \infty)\}$ ,  $i = 0, \dots, k-1$ . Entonces el conjunto

$$\Delta_\Theta = \{t \in \mathbb{R} : \frac{d^i P}{dt^i}(t) \in \theta_i, i = 0, \dots, k-1\}$$

es un intervalo abierto, un punto o el conjunto vacío.

*Demostración.* Lo demostramos por inducción sobre el grado  $k$  del polinomio

- Caso  $k = 1$ : Sea  $P(t) = a + bt$ , donde  $b \neq 0$ . Entonces
  - Si  $b > 0$ : Si  $\theta_0 = \{0\}$  entonces  $\Delta_\Theta = \{-\frac{a}{b}\}$ . Si  $\theta_0 = (-\infty, 0)$  entonces  $\Delta_\Theta = (-\infty, -\frac{a}{b})$ . Si  $\theta_0 = (0, \infty)$  entonces  $\Delta_\Theta = (-\frac{a}{b}, \infty)$ .
  - Si  $b < 0$ : Si  $\theta_0 = \{0\}$  entonces  $\Delta_\Theta = \{-\frac{a}{b}\}$ . Si  $\theta_0 = (-\infty, 0)$  entonces  $\Delta_\Theta = (-\frac{a}{b}, \infty)$ . Si  $\theta_0 = (0, \infty)$  entonces  $\Delta_\Theta = (-\infty, -\frac{a}{b})$ .
- Caso  $k$  suponiendo que es cierto para  $k - 1$ : Podemos escribir

$$\Delta_\Theta = \Delta_0 \cap \Delta_{\Theta'}$$

donde  $\Delta_0 = \{t \in \mathbb{R} : P(t) \in \theta_0\}$  y  $\Delta_{\Theta'} = \{t \in \mathbb{R} : \frac{d^i P}{dt^i} \in \theta_i, i = 1, \dots, k - 1\}$ . Por hipótesis de inducción aplicada a  $P'(t)$  y a  $\Theta' = \{\theta_1, \dots, \theta_{k-1}\}$ , tenemos los siguientes casos:

- $\Delta_{\Theta'} = \emptyset$ : entonces  $\Delta_\Theta = \emptyset$ ,
- $\Delta_{\Theta'} = \{a\}$ : entonces  $\Delta_\Theta = \emptyset$  ó  $\Delta_\Theta = \{a\}$ ,
- $\Delta_{\Theta'}$  es un intervalo abierto: Lo primero que observamos es que para que eso ocurra ningún  $\theta_i$ ,  $1 \leq i \leq k - 1$ , puede ser  $\{0\}$ . En particular,  $P' \neq 0$  en  $\Delta_{\Theta'}$  y por tanto  $P$  es monótona estricta en  $\Delta_{\Theta'}$ . Así pues  $P$  tiene como mucho un cero en  $\Delta_{\Theta'}$ . Si  $\theta_0 = \{0\}$ , entonces  $\Delta_\Theta$  es el vacío o es un punto. Como la intersección de dos intervalos abiertos es el vacío u otro intervalo abierto, tenemos que si  $\theta_0 = (-\infty, 0)$  o  $\theta_0 = (0, \infty)$ , entonces  $\Delta_\Theta$  es el vacío o un intervalo abierto.

□

**Corolario 4.39.** Siguiendo las hipótesis y notaciones del lema de Thom, sean  $\tau_1 < \dots < \tau_N$  las raíces de los polinomios  $P, P', \dots, P^{(k-1)}$ . Entonces tenemos que la colección de los subconjuntos  $\Delta_\Theta$  no vacíos es igual a

$$\{(-\infty, \tau_1), \{\tau_1\}, (\tau_1, \tau_2), \dots, (\tau_N, \infty)\}.$$

*Demostración.* Vamos a proceder por inducción sobre  $k$ . Además probaremos que cada intervalo abierto o punto es igual a un  $\Delta_\Theta$  para un único  $\Delta_\Theta$ .

- Caso  $k = 1$ : es evidente vista la demostración anterior.
- Caso  $k$  suponiendo que es cierto para  $k - 1$ : probemos ambas inclusiones.

□ Sea  $\Theta$  tal que  $\Delta_\Theta \neq \emptyset$ . Escribamos  $\Delta_\Theta = \Delta_0 \cap \Delta_{\Theta'}$  como hicimos en la demostración del lema de Thom. Por hipótesis de inducción, tenemos que  $\Delta_{\Theta'}$  es un intervalo abierto cuyos extremos son las raíces de  $P', \dots, P^{(k-1)}$  o bien es una de las raíces de  $P', \dots, P^{(k-1)}$ . Por tanto, puesto que  $\Delta_0$  es una de las raíces de  $P$  o un intervalo cuyos extremos son raíces de  $P$ ,  $\Delta_0 \cap \Delta_{\Theta'}$  debe ser un intervalo o un punto perteneciente a la familia del enunciado.

□ Sea  $\tau$  una de las raíces de  $P, P', \dots, P^{(k-1)}$ . Comprobemos que existe un único  $\Theta$  tal que  $\Delta_\Theta = \{\tau\}$ . Si  $\tau$  es una de las raíces de  $P', \dots, P^{(k-1)}$  entonces  $\Delta_{\Theta'}$  sólo puede ser  $\{\tau\}$ . Por hipótesis de inducción basta tomar el único  $\Theta'$  tal que  $\Delta_{\Theta'} = \{\tau\}$  y por último elegir el único  $\theta_0$  de acuerdo con el signo de  $P(\tau)$ . Si  $\tau$  es raíz de  $P$  pero no lo es de  $P', \dots, P^{(k-1)}$  entonces  $\Delta_{\Theta'}$  sólo puede ser  $(\tau_{k_1}, \tau_{k_2})$  donde  $\tau_{k_1}$  y  $\tau_{k_2}$  son raíces de  $P', \dots, P^{(k-1)}$  tales que  $\tau_{k_1} < \tau < \tau_{k_2}$ . Por hipótesis de inducción, tomamos el único  $\Theta'$  tal que  $\Delta_{\Theta'} = (\tau_{k_1}, \tau_{k_2})$  y hacemos la única elección posible  $\theta_0 = \{0\}$ . Sea el intervalo abierto  $(\tau_{k_1}, \tau_{k_1+1})$ , donde  $\tau_{k_1}$  es una de las raíces de  $P, \dots, P^{(k-1)}$ , y comprobemos que existe un único  $\Theta$  tal que  $\Delta_\Theta = \{(\tau_{k_1}, \tau_{k_1+1})\}$ . Sea  $\tilde{\tau}_1$  la raíz de  $P', \dots, P^{(k-1)}$  máxima tal que  $\tilde{\tau}_1 \leq \tau_{k_1}$  y sea  $\tilde{\tau}_2$  la raíz de  $P', \dots, P^{(k-1)}$  mínima tal que  $\tilde{\tau}_2 \geq \tau_{k_1+1}$ . Por hipótesis de inducción tomamos el único  $\Theta'$  tal que  $\Delta_{\Theta'} = (\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$ . Por último basta fijar de forma unívoca  $\theta_0$  de acuerdo con el signo de  $P$  en  $(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$ . □

## 4.7. Prueba del teorema de estratificaciones distinguidas

Vamos a demostrar dicho teorema por inducción sobre la dimensión  $n$  del espacio  $\mathbb{R}^n$ . Es suficiente encontrar una estratificación compatible con las funciones que describen  $E_1, \dots, E_q$  en un entorno  $U$  de 0 en  $\mathbb{R}^n$ . Argumentando de forma similar a como se hizo en la demostración del lema 3.2 podemos encontrar un cambio lineal de coordenadas de forma que dichos conjuntos estén descritos por un número finito de polinomios  $R_1, \dots, R_s$  distinguidos en la variable  $x_n$ . Sean  $R = \prod_{i=1}^s R_i$  y  $k = \deg_{x_n} R$ . Consideremos el polinomio distinguido

$$P = \frac{1}{C} R \frac{\partial R}{\partial x_n} \dots \frac{\partial^{k-1} R}{\partial x_n^{k-1}},$$

donde  $C = \prod_{j=0}^{k-1} (k-j)^{k-1-j}$ . Sea  $l = \deg_{x_n} P$ . Por el corolario 4.29 para cada  $s \in \{1, \dots, l\}$  tenemos que

$$A_s = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^{n-1} : \#\{z \in \mathbb{C} : P(\bar{v}; z) = 0\} = s\}$$

es un conjunto semi-analítico en un entorno abierto de  $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Por hipótesis de inducción existe una estratificación distinguida  $\mathcal{C}'$  de un intervalo abierto  $Q'$  de  $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$  compatible con los  $A_s$ . Denotemos con

$$A_s = \bigcup_{\substack{\Gamma'_{st} \in \mathcal{C}' \\ t=1, \dots, n_s}} \Gamma'_{st}.$$

Por la proposición 4.33 tenemos que los conjuntos

$$\Lambda_{st} = \{(\bar{v}, x_n) \in \Gamma'_{st} \times \mathbb{R} : P(\bar{v}; x_n) = 0\}$$

son de la forma

$$\Lambda_{st} = \xi_{st}^{(1)} \cup \dots \cup \xi_{st}^{(r_{st})},$$

donde  $\xi_{st}^{(1)} < \dots < \xi_{st}^{(r_{st})} : \Gamma'_{st} \rightarrow \mathbb{R}$  son analíticas. Por la observación 4.36, podemos asegurar que el orden  $ord_x P$  es constante para todo  $x \in \xi_{st}^{(j)}$ . Por el teorema de la

continuidad de las raíces podemos suponer que el intervalo abierto  $Q'$  es lo suficientemente pequeño como para que las funciones  $\xi_{st}^{(i)}$  estén acotadas por un  $\delta > 0$  arbitrario. Tomemos  $Q = Q' \times (-\delta, \delta) \subset U$ . Consideremos la partición de  $Q$  dada por  $\mathcal{C} = \{\xi_{st}^{(j)}\}_{s,t,j} \cup \{\text{componentes conexas de } Q \setminus \bigcup_{s,t,j} \xi_{st}^{(j)}\}$ . Para cada  $s \in \{1, \dots, l\}$ ,  $t \in \{1, \dots, n_s\}$  sean

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{st}^{(0)} = \{(\bar{v}, x_n) \in \Gamma'_{st} \times (-\delta, \delta) : x_n < \xi_{st}^{(1)}\} \\ \vdots \\ B_{st}^{(j)} = \{(\bar{v}, x_n) \in \Gamma'_{st} \times (-\delta, \delta) : \xi_{st}^{(j)} < x_n < \xi_{st}^{(j+1)}\} \\ \vdots \\ B_{st}^{(r_{st})} = \{(\bar{v}, x_n) \in \Gamma'_{st} \times (-\delta, \delta) : x_n > \xi_{st}^{(r_{st})}\} \\ Z_{st}^{(1)} = \{(\bar{v}, x_n) \in \Gamma'_{st} \times (-\delta, \delta) : x_n = \xi_{st}^{(1)}\} \\ \vdots \\ Z_{st}^{(r_{st})} = \{(\bar{v}, x_n) \in \Gamma'_{st} \times (-\delta, \delta) : x_n = \xi_{st}^{(r_{st})}\}. \end{array} \right.$$

Observamos que la partición  $\tilde{\mathcal{C}} = \{Z_{st}^j\}_{s,t,j} \cup \{B_{st}^j\}_{s,t,j}$  es más fina que  $\mathcal{C}$ . Así pues, si mostramos que los conjuntos  $Z_{st}^j$  y  $B_{st}^j$  son semi-analíticos entonces tendremos que las hojas semi-analíticas de  $\mathcal{C}$  también lo serán por tratarse de uniones finitas de las anteriores. Sea  $\Theta = (\theta_0, \dots, \theta_{k-1})$  con  $\theta_j \in \{(-\infty, 0), \{0\}, (0, \infty)\}$ . Sean

$$C_{\Theta, s, t} = \{(\bar{v}, x_n) \in \Gamma'_{st} \times (-\delta, \delta) : \frac{\partial^i R}{\partial x_n^i}(\bar{v}, x_n) \in \theta_i, 0 \leq i \leq k-1\}.$$

Fijemos  $\bar{v}_0 \in \Gamma'_{st}$ . Por el corolario 4.39, para cada  $j = 0, \dots, r_{st}$  existe un único  $\Theta_j^B(\bar{v}_0) = (\theta_0, \dots, \theta_{k-1})$  tal que las fibras

$$(B_{st}^{(j)})_{\bar{v}_0} = (C_{\Theta_j^B(\bar{v}_0), s, t})_{\bar{v}_0}.$$

De la misma forma, para cada  $j = 1, \dots, r_{st}$  existe un único  $\Theta_j^Z(\bar{v}_0) = (\theta_0, \dots, \theta_{k-1})$  tal que las fibras

$$(Z_{st}^{(j)})_{\bar{v}_0} = (C_{\Theta_j^Z(\bar{v}_0), s, t})_{\bar{v}_0}.$$

Consideremos el conjunto

$$\{\bar{v} \in \Gamma'_{st} : \Theta_j^B(\bar{v}) = \Theta_j^B(\bar{v}_0)\},$$

para  $j = 0, \dots, r_{st}$ . Por la continuidad de  $\xi_{st}^j$  y a la continuidad de  $\frac{\partial^i R}{\partial x_n^i}$  dicho conjunto es abierto en  $\Gamma'_{st}$ . Observamos que también es cerrado, puesto que si un punto  $\bar{v} \in \Gamma'_{st}$  no está en dicho conjunto precisamente por el argumento anterior tendrá un entorno que no esté contenido en él. Como  $\Gamma'_{st}$  es conexo, deducimos que

$$\Gamma'_{st} = \{\bar{v} \in \Gamma'_{st} : \Theta_j^B(\bar{v}) = \Theta_j^B(\bar{v}_0)\},$$

para  $j = 0, \dots, r_{st}$ . De la misma manera demostramos que

$$\Gamma'_{st} = \{\bar{v} \in \Gamma'_{st} : \Theta_j^Z(\bar{v}) = \Theta_j^Z(\bar{v}_0)\},$$

para  $j = 0, \dots, r_{st}$ . Tenemos entonces que

$$\tilde{\mathcal{C}} \subset \{C_{\Theta, s, t}\}_{\Theta, s, t}$$

y por tanto las hojas de  $\tilde{\mathcal{C}}$  son semi-analíticas.

La partición  $\mathcal{C}$  es compatible con los conjuntos  $E_1, \dots, E_q$  ya que, por la proposición 4.37 y la propia definición del polinomio  $R$ , es compatible con los  $R_i$ . La condición C2) se satisface por la propia construcción. La condición C3) se satisface por la definición de  $P$  y por la observación 4.36. Finalmente, por la proposición 4.17, tenemos que la condición del borde se satisface.

**Corolario 4.40.** Sean  $E_1, \dots, E_q$  subconjuntos semi-analíticos definidos por los polinomios distinguidos  $R_1, \dots, R_s$  en un entorno abierto del 0 en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces, tras un cambio lineal  $x_1, \dots, x_{n-1}$  de coordenadas en  $\mathbb{R}^{n-1}$ , existe una estratificación distinguida en un intervalo abierto  $Q = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| < \delta_i\}$  que es compatible con  $E_1, \dots, E_q$ .

## 4.8. Conjuntos semi-analíticos de dimensión $\leq 1$

**Definición 4.41.** Llamaremos *arco semi-analítico* (de  $\mathbb{R}^n$ ) a una subvariedad analítica  $\lambda \subset \mathbb{R}^n$  isomorfa al intervalo  $(0, 1)$ , semi-analítica en  $\mathbb{R}^n$ , relativamente compacta y tal que si  $\phi : (0, 1) \rightarrow \lambda$  es un isomorfismo analítico entonces los límites de  $\phi$  en 0 y 1 son distintos. A dichos límites los llamaremos *extremos del arco*.

**Observación 4.42.** Comprobemos que los límites de  $\phi$  de la definición anterior siempre existen. Supongamos por ejemplo que el límite en 0 no existe. Puesto que  $\bar{\lambda}$  es compacta, la única posibilidad es que existan dos puntos límites  $a \neq b$ . Consideremos el hiperplano  $H$  perpendicular a la recta que une  $a$  y  $b$  y que pasa por el punto  $\frac{a+b}{2}$ . Entonces el conjunto  $H \cap \lambda$  tiene infinitas componentes conexas, porque en caso contrario, o bien  $a$  o bien  $b$  no podría ser punto límite. Sin embargo,  $H \cap \lambda$  es un conjunto semi-analítico y  $H \cap \bar{\lambda}$  es compacto. Por el teorema de las componentes conexas,  $H \cap \lambda$  tiene un número finito de componentes conexas, lo cual es una contradicción.

**Definición 4.43.** Sea  $E$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\bar{a} \in \bar{E}$ . Definimos el *cono tangente*  $C_{\bar{a}}(E) \subset \mathbb{P}^{n-1}$  de  $E$  en  $\bar{a}$  de la siguiente manera. Consideremos la aplicación

$$W : E \setminus \{a\} \ni \bar{x} \rightarrow \mathbb{R}(\bar{x} - \bar{a}) \in \mathbb{P}^{n-1}.$$

El cono viene definido por la igualdad  $\bar{W}|_{\bar{a}} = \bar{a} \times C_{\bar{a}}(E)$ .

**Observación 4.44.** Sea  $f$  una función analítica en un entorno abierto  $U$  de  $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $f(\bar{0}) = 0$ . Comprobemos que

$$C_0(\{f = 0\}) \subset \{h = 0\} \subset \mathbb{P}^{n-1},$$

donde  $h$  es la forma inicial de  $f$ , es decir, si  $f = \sum_{j=k}^{\infty} f_k$ , donde  $f_k$  son polinomios homogéneos de grado  $j$  y  $k$  es el orden total de  $f$ , entonces  $h = f_k$ . Sea  $\lambda = \mathbb{R}\bar{v} \in C_0(\{f =$

0}). Entonces debe existir una sucesión  $\bar{x}_n \in \mathbb{R}^n$  tal que  $f(\bar{x}_n) = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = \bar{0}$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{x}_n}{\|\bar{x}_n\|} = \bar{v}$ . Sea  $\tilde{f} = \sum_{j=k+1}^{\infty} f_j$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{f(\bar{x}_n)}{\|\bar{x}_n\|^k} = f_k\left(\frac{\bar{x}_n}{\|\bar{x}_n\|}\right) + \frac{\tilde{f}(\bar{x}_n)}{\|\bar{x}_n\|^k} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f_k\left(\frac{\bar{x}_n}{\|\bar{x}_n\|}\right) = -\frac{\tilde{f}(\bar{x}_n)}{\|\bar{x}_n\|^k} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f_k(\bar{v}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_k\left(\frac{\bar{x}_n}{\|\bar{x}_n\|}\right) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{f}(\bar{x}_n)}{\|\bar{x}_n\|^k} = 0. \end{aligned}$$

En general, si  $E$  es un conjunto de  $\mathbb{R}^n$  descrito por las funciones  $f_1, \dots, f_t$  entonces tenemos que

$$C_0(E) \subset \{h_1 = 0\} \cap \dots \cap \{h_t = 0\} \subset \mathbb{P}^{n-1},$$

donde  $h_j$  son la formas iniciales de  $f_j$ ,  $j = 1, \dots, t$ .

**Observación 4.45.** La familia de arcos semi-analíticos es invariante por cambios de coordenadas.

**Lema 4.46.** Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto semi-analítico acotado de dimensión  $\leq 1$ . Entonces  $E$  es la unión finita de arcos semi-analíticos y de puntos. Además, existe un cambio lineal de coordenadas tal que cada uno de estos arcos semi-analíticos se transforma en el grafo de una aplicación analítica sobre un intervalo abierto y acotado en  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

*Demostración.* Es suficiente probar el lema para  $E \cap U$  donde  $U$  es el entorno de un punto de  $\bar{E}$ <sup>6</sup>. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que dicho punto es el  $\bar{0}$ . Por el teorema de estratificaciones distinguidas, después de un cambio lineal de coordenadas adecuado, existe una estratificación  $\mathcal{C}$  de un intervalo abierto  $Q$  de  $\mathbb{R}^n$  compatible con  $E \cap Q$ . Sea  $E \cap Q = \bigcup_{j=1}^s \Gamma_j$ , donde  $\Gamma_j \in \mathcal{C}$ . Puesto que  $\dim(E \cap Q) \leq 1$ , tenemos que  $\dim(\Gamma_j) \leq 1$ , para  $j = 1, \dots, s$ . Por el lema 4.14 tenemos que cada  $\Gamma_j$  que no sea un punto es el grafo de una aplicación analítica de un intervalo abierto y acotado de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^{n-1}$ . En particular, cada  $\Gamma_j$  debe ser un punto o un arco semi-analítico.  $\square$

**Lema 4.47.** Sea  $n \geq 2$  y sea  $\Gamma$  un arco semi-analítico de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\bar{0}$  es uno de sus extremos y que no contiene el eje  $I$  de las  $x_n$ . Entonces existe una función analítica  $F$  en un entorno abierto  $W$  de  $\bar{0}$  tal que  $F$  es  $x_n$ -regular y  $F = 0$  en  $\Gamma \cap W$ .

*Demostración.* Lo demostramos por inducción sobre  $n$ :

<sup>6</sup> $\bar{E}$  es compacto por ser  $E$  acotado. Para cada  $a \in \bar{E}$ , tomemos un entorno abierto  $U(a)$  de forma que el lema sea cierto en  $E \cap U(a)$ . Entonces

$$\bar{E} \subset \bigcup_{a \in \bar{E}} U(a).$$

Por ser  $\bar{E}$  compacto existe un recubrimiento finito  $\bar{E} \subset \bigcup_{i=1}^s U(a_i)$ . En particular,  $E \subset \bigcup_{i=1}^s U(a_i)$ .

- Caso  $n = 2$ : Puesto que  $\Gamma$  es semi-analítico y tiene dimensión 1, existe un entorno abierto  $W'$  de 0 tal que  $\Gamma \cap W' = \bigcup_{i=1}^s \{h_i = 0\} \cap G_i$ , donde  $h_i \neq 0$  son funciones analíticas en  $W'$  y  $G_i$  son abiertos semi-analíticos. Tenemos que la función analítica  $h = h_1 \cdots h_s \neq 0$  se anula en  $\Gamma \cap W'$ . Por ser  $h$  analítica sabemos que existe un entorno abierto conexo  $W''$  de 0 de forma que

$$h(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x_2)x_1^i,$$

para ciertas funciones analíticas  $a_i(x_2)$ . Sea  $k = \min\{m \in \mathbb{N} : a_k \neq 0\}$ . Tenemos que

$$h(x_1, x_2) = x_1^k F(x_1, x_2)$$

donde  $F(x_1, x_2) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i(x_2)x_1^{k-i}$ , la cual es analítica en  $W''$ .  $F$  es  $x_2$ -regular por definición. Puesto que  $\Gamma \cap I$  es semi-analítico, existe un entorno  $W''' \subset W''$  tal que el número de componentes conexas de  $\Gamma \cap I \cap W'''$  es finito. Puesto que  $\lambda$  no está contenido en  $I$ , deducimos que existe un entorno abierto  $W \subset W'''$  de  $\bar{0}$  tal que  $\Gamma \cap I \cap W = \emptyset$ . Finalmente, como  $h$  se anula en  $\Gamma \cap W$  y  $\Gamma \cap I \cap W = \emptyset$ , tenemos que  $F$  se anula en  $\Gamma \cap W$ .

- Caso  $n$  siendo cierto  $n - 1$ : Supongamos que existe un plano  $H$  que contiene al eje  $I$  y a  $\Gamma$ . Aplicando un cambio lineal de coordenadas adecuado podemos suponer que  $H = 0 \times \mathbb{R}^2$ . Sea  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$  la proyección natural sobre las dos últimas coordenadas. Por hipótesis de inducción aplicada a  $\pi(\Gamma)$ , existe una función analítica  $F^*(x_{n-1}, x_n)$  en un entorno abierto  $W' \subset \mathbb{R}^2$  de  $\bar{0}$  tal que  $F^*$  es  $x_n$ -regular y  $F^* = 0$  en  $\pi(\Gamma) \cap W'$ . Basta considerar la función  $F(x_1, \dots, x_n) = F^*(x_{n-1}, x_n)$  para obtener el resultado. Demostremos el paso de inducción en el caso de que no exista un plano que contenga el eje  $I$  y a  $\Gamma$ . Sean  $f_1, \dots, f_n \neq 0$  funciones analíticas en un entorno  $U$  de 0 tales que definen  $\Gamma \cap U$ . Puesto que el entorno  $U$  es tan pequeño como queramos y uno de los extremos de  $\Gamma$  es el  $\bar{0}$ , podemos suponer que  $f_i(\bar{0}) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Por la observación 4.44 sabemos que

$$C_0(\Gamma) \subset C = \{h_1 = 0\} \cap \dots \cap \{h_r = 0\},$$

donde  $h_j$  es la forma inicial de  $f_j$ . El conjunto  $D = \mathbb{P}^{n-1} \setminus C$  es un abierto denso de  $\mathbb{P}^{n-1}$ . Sea  $\lambda \in D$  tal que  $\lambda \neq I$  y tal que posea un vector director de la forma  $\bar{v} = (v_1, \dots, 1, v_n)$ . Obsérvese que  $B' = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n-2}, \bar{e}_n, \bar{v}\}$  forma una base de  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $H$  el cambio lineal de coordenadas  $\bar{x}$  en la base  $B = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$  a las coordenadas  $\bar{w}$  en la base de  $B'$ , es decir,

$$\bar{w} = H(\bar{x}) = (A\bar{x}^t)^t$$

donde  $A$  es la matriz de paso de  $B$  a  $B'$ . Sea  $\tilde{\Gamma} = H(\Gamma) = \{\bar{w} \in \mathbb{R}^n : H^{-1}(\bar{w}) \in \Gamma\}$ . Observamos que el eje  $x_n$  se transforma en el eje  $w_{n-1}$  y que  $\lambda$  se convierte en el eje  $w_n$ . Observamos también que las funciones  $\tilde{f}_j = f_j \circ H$  describen el conjunto  $\tilde{\Gamma}$  en el entorno abierto  $H(U)$  de  $\bar{0}$ . Además  $\tilde{f}_j$  son  $w_n$ -regulares,  $1 \leq j \leq r$  ya que

si  $\tilde{f}_j$  no fuera  $w_n$ -regular, entonces tendríamos que  $\lambda \in \{h_j = 0\}$  lo cual es una contradicción. Por el teorema de preparación aplicado a las funciones  $\tilde{f}_j$  existe un entorno abierto  $W$  tal que  $\tilde{\Gamma}$  está definido por unos polinomios distinguidos  $R_j$ . Por el corolario 4.40, tras un cambio de coordenadas  $\hat{h}$  de  $(w_1, \dots, w_{n-1})$  a  $(\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_{n-1})$  en  $\mathbb{R}^{n-1}$ , existe una estratificación distinguida  $\mathcal{C}$  en un entorno intervalo abierto  $\hat{Q} \subset \hat{H}(W)$  de  $\bar{0}$  compatible con  $\hat{H}(\tilde{\Gamma})$ , donde  $\hat{H}$  es el cambio de  $(w_1, \dots, w_{n-1}, w_n)$  a  $(\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_{n-1}, w_n)$ . Por ser una subvariedad de dimensión 1 semi-analítica conexa,  $\hat{H}(\tilde{\Gamma}) \cap \hat{Q}$  debe ser un estrato. Obtenemos que  $\pi(\hat{H}(\tilde{\Gamma}) \cap \hat{Q})$  es un estrato de dimensión  $\leq 1$  de  $\mathcal{C}'$  y, por el lema 4.46, es unión finita de puntos y arcos semi-analíticos. Si  $\pi(\hat{H}(\tilde{\Gamma}) \cap \hat{Q})$  fuera un punto, entonces  $\hat{H}(\tilde{\Gamma}) \cap \hat{Q}$  estaría contenido en el eje  $w_n$  y  $\Gamma$  estaría contenido en la recta  $\lambda$  y, por tanto, en el plano que generan  $\lambda$  e  $I$ , lo cual es una contradicción. Así pues, al ser  $\pi(\hat{H}(\tilde{\Gamma}) \cap \hat{Q})$  un estrato de dimensión 1, debe ser arco semi-analítico. Como ser arco semi-analítico no depende de cambios lineales de coordenadas,  $\hat{h}^{-1}(\pi(\tilde{\Gamma} \cap \hat{H}(\hat{Q}))) = \pi(\tilde{\Gamma} \cap \hat{H}(\hat{Q}))$  también es arco semi-analítico. Denotemos  $Q = \hat{H}^{-1}(\hat{Q})$ . Observamos que si  $\pi(\tilde{\Gamma} \cap Q)$  estuviera contenida en el eje  $w_{n-1}$  entonces  $\Gamma$  estaría contenida en el plano que definen  $\lambda$  y  $I$ , lo cual es una contradicción. Por tanto  $\pi(\tilde{\Gamma} \cap Q)$  no está contenida en el eje  $w_{n-1}$ . Por hipótesis de inducción existe una función  $\tilde{F}(w_1, \dots, w_{n-1})$  en un entorno  $\tilde{W}$  de  $\bar{0}' \in \mathbb{R}^{n-1}$  tal que  $\tilde{F}$  se anula en  $\pi(\tilde{\Gamma} \cap Q)$  y es  $w_{n-1}$  regular. Consideremos la función

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &= \tilde{F}(\pi(H(x_1, \dots, x_n))) = \\ &= \tilde{F}(x_1 - v_1 x_{n-1}, \dots, x_{n-2} - v_{n-2} x_{n-1}, -v_n x_{n-1} + x_n). \end{aligned}$$

Tenemos entonces que  $F$  es una función analítica en el entorno  $H^{-1}(\tilde{W} \times \mathbb{R})$ , es  $x_n$ -regular por ser  $\tilde{F}$  una función  $w_{n-1}$ -regular y  $F$  se anula en  $\Gamma \cap H^{-1}(\tilde{W} \times \mathbb{R})$ . □

**Proposición 4.48.** Sea  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $k < n$ , la proyección natural y sea  $E$  un conjunto semi-analítico, acotado y de dimensión  $\leq 1$ . Entonces la imagen  $\pi(E)$  es un semi-analítico acotado de dimensión  $\leq 1$ .

*Demostración.* Es suficiente considerar el caso  $k = n - 1$ , ya que podemos aplicar dicho caso repetidas veces. Por el lema 4.46,  $E$  es la unión finita de puntos y arcos semi-analíticos y por tanto basta que probemos el enunciado para un arco semi-analítico  $\Gamma$ . Sea  $a \in \bar{\Gamma}$  y probemos que existe un entorno de  $U(a)$  tal que  $\pi(\Gamma \cap U(a))$  es semi-analítico. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $a = \bar{0}$ . Obsérvese que basta probarlo en el caso de que  $\bar{0}$  sea una de los extremos del arco semi-analítico ya que en caso contrario bastaría dividirlo en dos trozos de forma que  $\bar{0}$  fuera extremo de cada uno de ellos. Sea  $B$  una bola abierta de centro  $\bar{0}$  tal que

$$\Gamma \cap B = \bigcup_{j=1}^s S_j,$$

donde  $S_j = \{x \in B : h_j(x) = 0, f_{j1}(x) > 0, \dots, f_{jt_j}(x) > 0\}$ , donde  $h_j$  y  $f_{ji}$  son funciones analíticas en un entorno de  $\bar{B}$ . Fijemos  $j_0 = 1, \dots, s$ . Es suficiente mostrar que  $\pi(S_{j_0} \cap U)$

es semi-analítico para un entorno  $U \subset B$  de  $\bar{0}$ . Si  $\bar{0} \notin \bar{S}_{j_0}$  ó  $\bar{0}$  es un punto aislado de  $S_{j_0}$  entonces la afirmación es trivial. Supongamos que  $\bar{0} \in \bar{S}_{j_0}$  y que  $\bar{0}$  no es un punto aislado de  $S_{j_0}$ . Entonces existe un entorno abierto  $V \subset B$  de  $\bar{0}$  en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\Gamma_{j_0} = S_{j_0} \cap V$  es un arco semi-analítico y  $\bar{0}$  es uno de sus extremos<sup>7</sup>. Por último, tan sólo se pueden dar los siguientes casos,

*Caso 1* Supongamos que  $h_{j_0}$  es  $x_n$ -regular. Podemos suponer que los  $f_{j_0i}$  son  $x_n$ -regulares porque en caso contrario podemos sustituirlos por las funciones  $f_{j_0i} + h_{j_0}$  que seguirán definiendo el mismo conjunto. Por el teorema de preparación de Weierstrass existe un entorno  $U \subset V$  del  $\bar{0}$  tal que el conjunto  $S_{j_0}$  está definido por los polinomios distinguidos asociados a las funciones anteriores. Por el corolario 4.40, tras un cambio de coordenadas  $H$  adecuado que sólo afecta a las primeras  $n - 1$  coordenadas, existe una estratificación distinguida  $\mathcal{C}$  en un intervalo abierto  $Q \subset H(U)$  de  $\bar{0}$  compatible con  $H(S_{j_0})$  y por tanto  $H(S_{j_0}) \cap Q$  es un estrato de dimensión 1 de  $\mathcal{C}$ . Así pues,  $\pi(H(S_{j_0}) \cap Q)$  es un estrato de dimensión 1 de  $\mathcal{C}'$  y, en particular, es semi-analítico. Podemos deshacer el cambio de coordenadas, y como la variable  $x_n$  no se veía afectada, deducimos que  $H^{-1}(\pi(H(S_{j_0}) \cap Q)) = \pi(S_{j_0} \cap H^{-1}(Q))$  es semi-analítica.

*Caso 2* Supongamos que  $h_{j_0}(0, \dots, 0, x_n) \equiv 0$  y que  $S_{j_0} \cap V$  está contenido en el eje  $x_n$ . Entonces  $\pi(\Gamma_{j_0}) = \bar{0}'$  y por tanto es semi-analítico.

*Caso 3* Supongamos que  $h_{j_0}(0, \dots, 0, x_n) \equiv 0$  y que  $\Gamma_{j_0}$  no está contenido en el eje  $x_n$ . Por el lema 4.47, existe una función analítica  $H_{j_0}$  en un entorno  $\Omega_{j_0} \subset V$  que es  $x_n$ -regular y que se anula en  $\Gamma_{j_0} \cap \Omega_{j_0}$ . Podemos reemplazar  $h_{j_0}$  por la función analítica  $h_{j_0}^2 + H_{j_0}^2$  ya que ambas describen el mismo conjunto, y puesto que esta última es  $x_n$ -regular, estamos en el caso 1. □

**Observación 4.49.** En la proposición 4.48 la hipótesis de acotación sobre el conjunto  $E$  es necesaria. Por ejemplo el conjunto  $E = \{(\frac{1}{n}, n) : n = 1, 2, \dots\} \subset \mathbb{R}^2$  es un subconjunto semi-analítico de dimensión 0 no acotado. Sin embargo,  $\pi(E) = \{\frac{1}{n} : n = 1, \dots, \} \subset \mathbb{R}$  no es un subconjunto semi-analítico.

---

<sup>7</sup>Eso se debe a que  $S_{j_0} \cap B$  es un semi-analítico de dimensión  $\leq 1$  acotado y por tanto es unión finita de arcos semi-analíticos y puntos. Como  $\bar{0} \in \bar{S}_{j_0}$  y no es un punto aislado,  $\bar{0}$  debe ser el extremo de un sólo arco semi-analítico ya que todos ellos están incluidos en  $\Gamma$ . Finalmente, existe un entorno abierto de  $\bar{0}$  que aísla dicho arco.

## 5. Ejemplos

En esta sección vamos a aplicar de forma constructiva el teorema 3.49 y el teorema de estratificaciones distinguidas a algunos ejemplos concretos. Como ya se dijo en la introducción, los ejemplos han sido escogidos por su especial importancia ya que son los únicos gérmenes de superficie singular de  $\mathbb{R}^3$  tales que cualquier germen de función positiva sobre ellos es suma de cuadrados. La notación utilizada en los ejemplos es exactamente la misma que la empleada para las demostraciones de los teoremas antes citados.

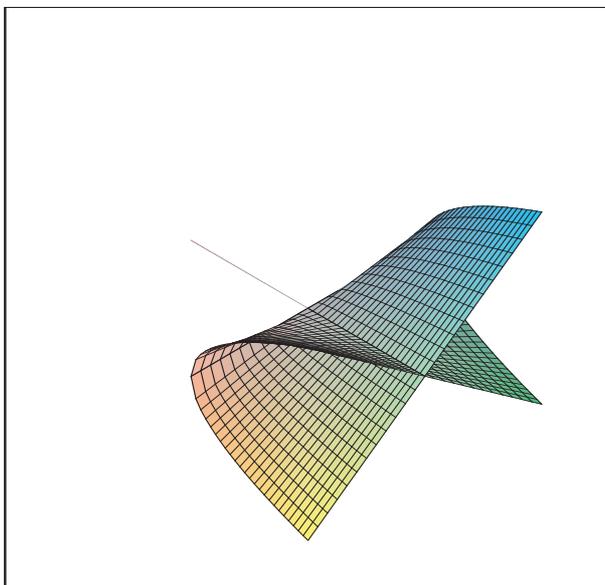
### 5.1. El paraguas de Whitney y sus deformaciones

En esta sección estudiaremos localmente los conjuntos descritos por las siguientes ecuaciones desde el punto de vista real y desde el punto de vista complejo,

$$\begin{cases} \text{Paraguas de Whitney: } z^2 - x^2y = 0, \\ \text{Deformaciones del paraguas de Whitney: } z^2 - x^2y - (-1)^k y^k = 0, k \geq 3 \end{cases}$$

#### 5.1.1. El paraguas de Whitney como conjunto analítico real

En este ejemplo aplicaremos el teorema de estratificaciones distinguidas al conjunto analítico real  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2y = 0\}$  en el punto  $(0, 0, 0)$ .



Puesto que  $E$  está definido por un polinomio distinguido, en un primer momento no es necesario hacer un cambio lineal de coordenadas. Sea  $R = z^2 - x^2y$ . Entonces

$$P = \frac{1}{2}R \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{2}(z^2 - x^2y)2z = z(z^2 - x^2y) = z^3 - x^2yz.$$

Denotamos  $c_3 = c_1 = 0$ ,  $c_2 = -xy$ . Sean

$$\begin{cases} A'_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \#\{z : P(x, y, z) = 0\} = 1\}, \\ A'_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \#\{z : P(x, y, z) = 0\} = 2\}, \\ A'_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \#\{z : P(x, y, z) = 0\} = 3\}. \end{cases}$$

Utilizando un programa de ordenador obtenemos que

$$\begin{cases} D_0(T_1, T_2, T_3) = T_3(-27T_3 + 18T_1T_2 - 4T_1^3) + T_2^2(-4T_2 + T_1^2), \\ D_1(T_1, T_2, T_3) = -6T_2 + 2T_1^2. \end{cases}$$

Sean  $Z_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \#\{z : P(x, y, z) = 0\} \leq i\}$ ,  $1 \leq i \leq 2$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : D_0(c_1, c_2, c_3) = D_1(c_1, c_2, c_3) = 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -xy = 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : D_0(c_1, c_2, c_3) = 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -xy = 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}. \end{aligned}$$

Tenemos que

$$\begin{cases} A'_1 = Z_1 = \{x = 0\} \cup \{y = 0\}, \\ A'_2 = Z_2 \setminus Z_1 = \emptyset, \\ A'_3 = \mathbb{R}^2 \setminus Z_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0\}. \end{cases}$$

Por el teorema de estratificaciones distinguidas, tras un cambio lineal de coordenadas adecuado, existe una estratificación  $\mathcal{C}'$  en un intervalo abierto  $Q'$  de  $0 \in \mathbb{R}^2$  compatible con  $A'_1$ ,  $A'_2$  y  $A'_3$ . Para hacer esta estratificación debemos volver a aplicar la demostración del teorema de estratificaciones distinguidas. Utilizaremos un tipo de letra más pequeño para diferenciarla de la estratificación que estamos llevando a cabo.

En primer lugar, tenemos que los conjuntos  $A'_1$ ,  $A'_2$  y  $A'_3$  están descritos por los polinomios  $\tilde{R}_1 = x$  y  $\tilde{R}_2 = y$ . Como el polinomio  $\tilde{R}_1$  no es distinguido, debemos hacer un cambio de coordenadas adecuado para que ambos polinomios lo sean. Elegimos el siguiente cambio de coordenadas

$$(u, v) = H(x, y) = \frac{1}{2}(x + y, x - y).$$

Obtenemos que  $\tilde{R}_1 = u + v$  y  $\tilde{R}_2 = u - v$ . Sean  $\tilde{R} = \tilde{R}_1\tilde{R}_2$  y

$$\tilde{P} = \frac{1}{2}\tilde{R}\frac{\partial\tilde{R}}{\partial v} = (u - v)(u + v)v = (u^2 - v^2)v = u^2v - v^3.$$

Sean

$$\begin{cases} \tilde{A}_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R} : \#\{z : \tilde{P}(u, v) = 0\} = 1\}, \\ \tilde{A}_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R} : \#\{z : \tilde{P}(u, v) = 0\} = 2\}, \\ \tilde{A}_3 = \{(u, v) \in \mathbb{R} : \#\{z : \tilde{P}(u, v) = 0\} = 3\}. \end{cases}$$

Denotemos  $c_3 = c_1 = 0$ ,  $c_2 = u^2$ . Utilizando un programa de ordenador obtenemos que

$$\begin{cases} D_0(T_1, T_2, T_3) = T_3(-27T_3 + 18T_1T_2 - 4T_1^3) + T_2^2(-4T_2 + T_1^2), \\ D_1(T_1, T_2, T_3) = -6T_2 + 2T_1^2. \end{cases}$$

Sean  $Z_i = \{u \in \mathbb{R} : \#\{z : \tilde{P}(u, v) = 0\} \leq i\}$ ,  $1 \leq i \leq 2$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{u \in \mathbb{R} : D_0(c_1, c_2, c_3) = D_1(c_1, c_2, c_3) = 0\} = \\ &= \{u \in \mathbb{R} : u = 0\}, \\ Z_2 &= \{u \in \mathbb{R} : D_0(c_1, c_2, c_3) = 0\} = \\ &= \{u \in \mathbb{R} : u = 0\}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{cases} \tilde{A}_1 = Z_1 = \{u = 0\}, \\ \tilde{A}_2 = Z_2 \setminus Z_1 = \emptyset, \\ \tilde{A}_3 = \mathbb{R} \setminus Z_2 = \{u \in \mathbb{R} : u \neq 0\}. \end{cases}$$

Obtener una estratificación  $\mathcal{C}''$  compatible con los  $\tilde{A}_i$  es inmediato. Fijemos el intervalo  $Q'' = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Sea  $\mathcal{C}'' = \{(-\frac{1}{2}, 0), \{0\}, (0, \frac{1}{2})\}$  y denotemos  $\tilde{\Gamma}_{11} = \{0\}$ ,  $\tilde{\Gamma}_{31} = (-\frac{1}{2}, 0)$  y  $\tilde{\Gamma}_{32} = (0, \frac{1}{2})$ . Así pues,  $\tilde{A}_1 = \tilde{\Gamma}_{11}$  y  $\tilde{A}_3 = \tilde{\Gamma}_{31} \cup \tilde{\Gamma}_{32}$ . Los conjuntos  $\tilde{\Lambda}_{it} = \{(u, v) \in \tilde{\Gamma}_{it} \times \mathbb{R} : \tilde{P}(u, v) = 0\}$  son de la forma

$$\tilde{\Lambda}_{11} = \tilde{\xi}_{11}^{(1)}, \quad \tilde{\Lambda}_{31} = \tilde{\xi}_{31}^{(1)} \cup \tilde{\xi}_{31}^{(2)} \cup \tilde{\xi}_{31}^{(3)}, \quad \tilde{\Lambda}_{32} = \tilde{\xi}_{32}^{(1)} \cup \tilde{\xi}_{32}^{(2)} \cup \tilde{\xi}_{32}^{(3)},$$

donde

- *Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{11}$ :*

$$\tilde{\xi}_{11}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{11} \ni 0 \rightarrow 0 \in \mathbb{R},$$

- *Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{31}$ :*

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_{31}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{31} \ni u \rightarrow u \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\xi}_{31}^{(2)} : \tilde{\Gamma}_{31} \ni u \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\xi}_{31}^{(3)} : \tilde{\Gamma}_{31} \ni u \rightarrow -u \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

- *Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{32}$ :*

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_{32}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{32} \ni u \rightarrow -u \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\xi}_{32}^{(2)} : \tilde{\Gamma}_{32} \ni u \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\xi}_{32}^{(3)} : \tilde{\Gamma}_{32} \ni u \rightarrow u \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Tomemos  $Q' = Q'' \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Finalmente, sea

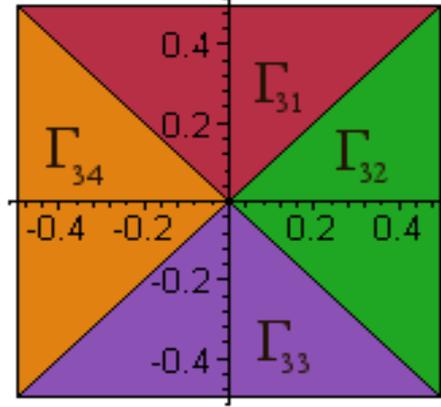
$$\mathcal{C}' = \{\tilde{\xi}_{it}^j\} \cup \{\text{componentes conexas de } Q' \setminus \bigcup \tilde{\xi}_{it}^j\}$$

nuestra estratificación, la cual representamos en el siguiente dibujo:

Si denotamos con  $A_i$  a los conjuntos  $H(A'_i)$ , tenemos que, siguiendo la notación del teorema,

$$\begin{cases} A_1 = \Gamma_{11} \cup \Gamma_{12} \cup \Gamma_{13} \cup \Gamma_{14} \cup \Gamma_{15}, \\ A_3 = \Gamma_{31} \cup \Gamma_{32} \cup \Gamma_{33} \cup \Gamma_{34}, \end{cases}$$

donde  $\Gamma_{3j}$  son los de los dibujos y  $\Gamma_{11} = \tilde{\xi}_{11}^{(1)}$ ,  $\Gamma_{12} = \tilde{\xi}_{31}^{(3)}$ ,  $\Gamma_{13} = \tilde{\xi}_{32}^{(1)}$ ,  $\Gamma_{14} = \tilde{\xi}_{31}^{(1)}$ ,  $\Gamma_{15} = \tilde{\xi}_{32}^{(3)}$ .



En lo que sigue utilizaremos la notación que se emplea en la estratificación de los conjuntos  $A_i$ . Tenemos que los conjuntos  $\Lambda_{st} = \{(u, v, z) \in \Gamma_{st} \times \mathbb{R} : P(u, v, z) = 0\}$  son de la forma

$$\Lambda_{11} = \xi_{11}^{(1)}, \quad \Lambda_{12} = \xi_{12}^{(1)}, \quad \Lambda_{13} = \xi_{13}^{(1)}, \quad \Lambda_{14} = \xi_{14}^{(1)}, \quad \Lambda_{15} = \xi_{15}^{(1)},$$

$$\Lambda_{31} = \xi_{31}^{(1)}, \quad \Lambda_{32} = \xi_{32}^{(1)} \cup \xi_{32}^{(2)} \cup \xi_{32}^{(3)}, \quad \Lambda_{33} = \xi_{33}^{(1)} \cup \xi_{33}^{(2)} \cup \xi_{33}^{(3)}, \quad \Lambda_{34} = \xi_{34}^{(1)},$$

donde

- *Grafos asociados a  $\Gamma_{1j}$ ,  $1 \leq j \leq 5$ :*

$$\xi_{1j}^{(1)} : \Gamma_{1j} \ni 0 \rightarrow 0 \in \mathbb{R}$$

- *Grafos asociados a  $\Gamma_{3j}$ ,  $j \in \{1, 4\}$ :*

$$\xi_{3j}^{(1)} : \Gamma_{3j} \ni 0 \rightarrow 0 \in \mathbb{R}$$

- *Grafos asociados a  $\Gamma_{3j}$ ,  $j \in \{2, 3\}$ :*

$$\begin{cases} \xi_{3j}^{(1)} : \Gamma_{3j} \ni (u, v) \rightarrow -(u+v)\sqrt{u-v} \in \mathbb{R} \\ \xi_{3j}^{(2)} : \Gamma_{3j} \ni (u, v) \rightarrow 0 \in \mathbb{R} \\ \xi_{3j}^{(3)} : \Gamma_{3j} \ni (u, v) \rightarrow (u+v)\sqrt{u-v} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

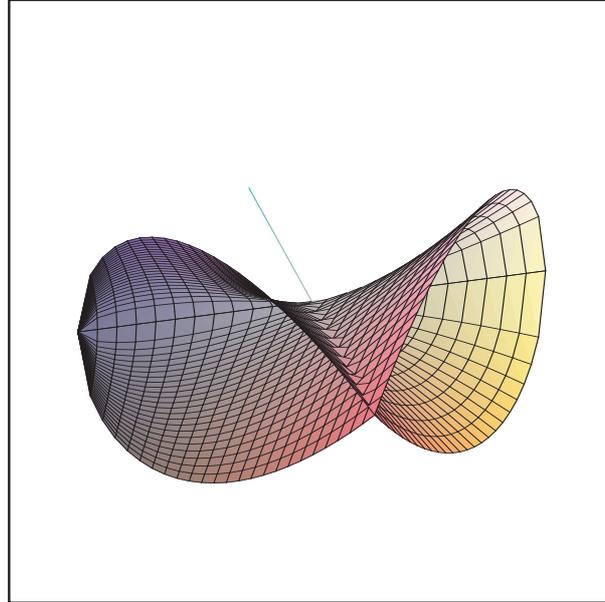
Puesto que  $|\xi_{st}^{(t)}| < 1$ , fijamos el intervalo  $Q = Q' \times (-1, 1)$ . Finalmente, tomamos la estratificación distinguida  $\mathcal{C}$  dada por

$$\mathcal{C} = \{\xi_{st}^j\} \cup \{\text{componentes conexas de } Q \setminus \bigcup \xi_{st}^j\}.$$

En particular, el paraguas de Whitney, tras el cambio de coordenadas, es la union de los siguientes estratos

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \{(u, v, z) : z^2 - (u+v)^2(u-v) = 0\} = \\ &= \xi_{11}^{(1)} \cup \xi_{12}^{(1)} \cup \xi_{13}^{(1)} \cup \xi_{14}^{(1)} \cup \xi_{15}^{(1)} \cup \xi_{32}^{(1)} \cup \xi_{32}^{(3)} \cup \xi_{33}^{(1)} \cup \xi_{33}^{(3)}. \end{aligned}$$

La que sigue es una representación del paraguas de Whitney después del cambio de coordenadas,



### 5.1.2. El paraguas de Whitney como conjunto analítico complejo

En este ejemplo estudiaremos el conjunto analítico complejo  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : z^2 - x^2y = 0\}$  en el punto  $(0, 0, 0)$ , es decir, el germen de dicho conjunto en el punto  $(0, 0, 0)$ . Para ello vamos a seguir el estudio que se realizó en la sección del teorema de los ceros de Hilbert. Observamos que  $E = \mathbf{V}(I)$ , donde  $I = (\mathbf{z}^2 - \mathbf{x}^2\mathbf{y})$  es el ideal generado por  $\mathbf{z}^2 - \mathbf{x}^2\mathbf{y}$ , el germen de la función  $z^2 - x^2y$  en el punto  $(0, 0, 0)$ , y el cual es primo. Dada  $f \in \mathcal{O}_3$ , denotaremos su clase en el cociente  $\mathcal{O}_3/I$  con  $\bar{f}$ . Tenemos que el sistema de coordenadas  $x, y, z$  es regular para el ideal  $I$  puesto que:

- i)  $I \cap \mathcal{O}_2 = (0)$ ,
- ii)  $\mathcal{O}_3/I = \mathcal{O}_2[\bar{\mathbf{z}}]$  es entero sobre  $\mathcal{O}_2$  dado que  $\mathbf{q}(\bar{\mathbf{z}}) = 0$ , para  $\mathbf{q}(T) = T^2 - \mathbf{x}^2\mathbf{y} \in \mathcal{O}_2[T]$ ,
- iii)  $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_2[\bar{\mathbf{z}}]$ .

El discriminante de  $\mathbf{q}(T)$  es  $\mathbf{D} = 4\mathbf{x}^2\mathbf{y} \in \mathcal{O}_2$ . Sean los polidiscos  $\Delta = \Delta((0, 0, 0) : (1, 1, 1))$  y  $\Delta_2 = \Delta((0, 0) : (1, 1))$ . Sean  $q(T) = T^2 - x^2y$  y  $D = 4x^2y$  representantes de  $\mathbf{q}(T)$  y  $\mathbf{D}$  en el polidisco  $\Delta$ . Observamos que para todo  $(x, y) \in \Delta_2$  si  $q(z) = 0$  entonces  $|z| < 1$ . Por tanto, los elementos anteriormente descritos forman una representación admisible de  $I$ . Así pues, el conjunto

$$V \setminus V(D) = \{(x, y, x) \in \Delta : z^2 - x^2y = 0, xy \neq 0\}$$

es una subvariedad compleja conexa de dimensión 2 y la proyección natural

$$\pi : V \setminus V(D) \rightarrow \Delta_2 \setminus V(D)$$

es un recubrimiento finito de 2 hojas.

Sean  $U_1 = \{re^{i\theta} : 0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi\}$  y  $U_2 = \{re^{i\theta} : 0 < r < 1, -\pi < \theta < \pi\}$ . Tenemos entonces que

$$\Delta_2 \setminus V(D) = (\Delta(0, 1)^* \times U_1) \cup (\Delta(0, 1)^* \times U_2),$$

donde  $\Delta(0, 1)^* = \{x \in \mathbb{C} : 0 < |x| < 1\}$ . Consideremos las funciones holomorfas,

$$\begin{cases} f_1(re^{i\theta}) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}, (r, \theta) \in U_1, \\ f_2(re^{i\theta}) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}, (r, \theta) \in U_2. \end{cases}$$

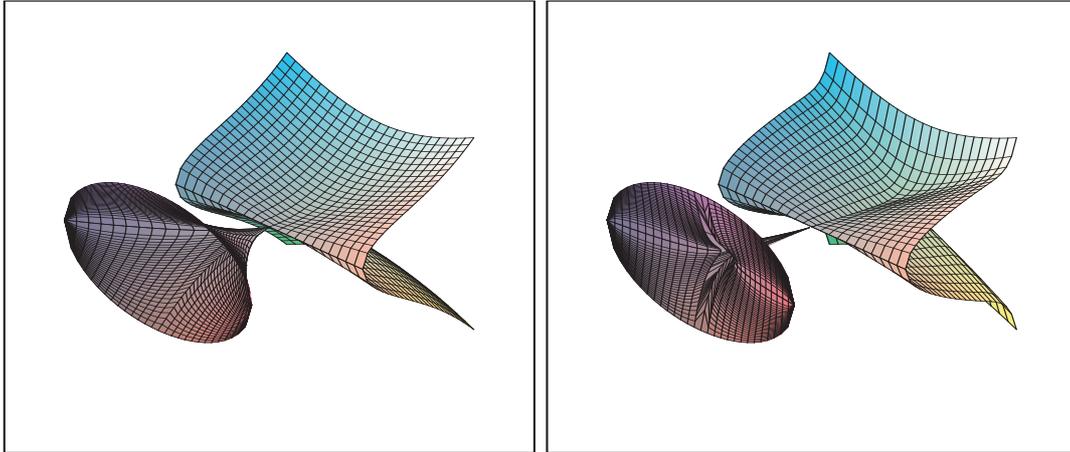
Así pues, podemos describir ambas hojas en dos trozos,

$$\begin{cases} \varphi_1 : \Delta(0, 1)^* \times U_1 \ni (x, y) \rightarrow (x, y, xf_1(y)) \in \Delta(0, 1)^* \times U_1 \times \mathbb{C}, \\ \varphi_2 : \Delta(0, 1)^* \times U_1 \ni (x, y) \rightarrow (x, y, -xf_1(y)) \in \Delta(0, 1)^* \times U_1 \times \mathbb{C}, \\ \psi_1 : \Delta(0, 1)^* \times U_2 \ni (x, y) \rightarrow (x, y, xf_2(y)) \in \Delta(0, 1)^* \times U_2 \times \mathbb{C}, \\ \psi_2 : \Delta(0, 1)^* \times U_2 \ni (x, y) \rightarrow (x, y, -xf_2(y)) \in \Delta(0, 1)^* \times U_2 \times \mathbb{C}. \end{cases}$$

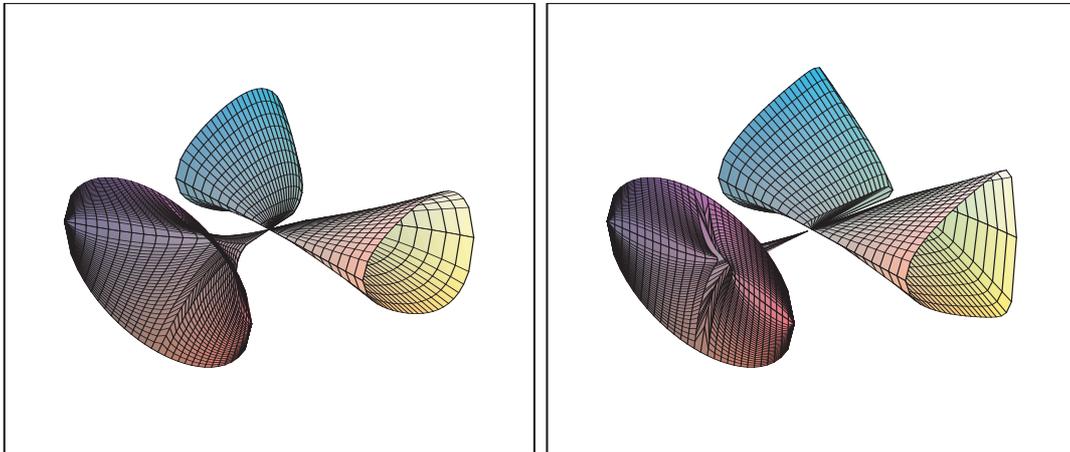
### 5.1.3. La deformación del paraguas de Whitney como conjunto analítico real

En este ejemplo aplicaremos el teorema de estratificaciones distinguidas al conjunto analítico real  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - yx^2 - (-1)^k y^k = 0\}$  en el punto  $(0, 0, 0)$ .

- Si  $k$  es par:



- Si  $k$  es impar:



Puesto que  $E$  está definido por un polinomio distinguido, en un primer momento no es necesario hacer un cambio lineal de coordenadas. Sea  $R = z^2 - yx^2 - (-1)^k y^k$ . Entonces

$$P = \frac{1}{2} R \frac{\partial R}{\partial z} = z(z^2 - yx^2 - (-1)^k y^k) = z^3 - (yx^2 + (-1)^k y^k)z.$$

Siguiendo la notación del teorema,  $c_3 = c_1 = 0$ ,  $c_2 = -yx^2 - (-1)^k y^k$ . Sean  $A_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \#\{z : P(x, y, z) = 0\} = i\}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Utilizando un programa de ordenador obtenemos que

$$\begin{cases} D_0(T_1, T_2, T_3) = T_3(-27T_3 + 18T_1T_2 - 4T_1^3) + T_2^2(-4T_2 + T_1^2), \\ D_1(T_1, T_2, T_3) = -6T_2 + 2T_1^2. \end{cases}$$

Sean  $Z_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \#\{z : P(x, y, z) = 0\} \leq i\}$ ,  $1 \leq i \leq 2$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : D_0(c_1, c_2, c_3) = D_1(c_1, c_2, c_3) = 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -yx^2 - (-1)^k y^k = 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : D_0(c_1, c_2, c_3) = 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -yx^2 - (-1)^k y^k = 0\}. \end{aligned}$$

Así pues

$$\begin{cases} A_1 = Z_1 = \{-yx^2 - (-1)^k y^k = 0\}, \\ A_2 = Z_2 \setminus Z_1 = \emptyset, \\ A_3 = \mathbb{R}^2 \setminus Z_2 = \{-yx^2 - (-1)^k y^k \neq 0\}. \end{cases}$$

Por el teorema de estratificaciones distinguidas existe una estratificación  $\mathcal{C}'$  en un intervalo abierto  $Q'$  de  $0 \in \mathbb{R}^2$  compatible con  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ . Para hacer esta estratificación debemos volver a aplicar la demostración del teorema de estratificaciones distinguidas. Utilizaremos un tipo de letra más pequeño para diferenciarla de la estratificación que estamos llevando a cabo.

En primer lugar, tenemos que los conjuntos  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  están descritos por el polinomio distinguido  $\tilde{R} = (-1)^k x^2 y + y^k$ . Como el polinomio  $\tilde{R}$  es distinguido, no es necesario hacer un cambio de coordenadas. Sea

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \frac{1}{C} \tilde{R} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial y} \dots \frac{\partial^{k-1} \tilde{R}}{\partial y^{k-1}} = ((-1)^k x^2 y + y^k)((-1)^k x^2 + k y^{k-1}) y^m = \\ &= \frac{1}{k} x^4 y^{m+1} + \frac{k+1}{k} (-1)^k x^2 y^{k+m} + y^{2k+m-1}, \end{aligned}$$

donde  $C = k^{k-1} (k-1)^{k-2} \dots 2$  y  $m = \frac{k(k-3)}{2} + 1$ . Utilizando la notación del teorema, tenemos que  $c_i = 0$ ,  $i \neq 2k-2, k-1$ ,  $c_{k-1} = \frac{k+1}{k} (-1)^k x^2$  y  $c_{2k-2} = \frac{1}{k} x^4$ . Sean  $\tilde{A}_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \#\{z : \tilde{P}(x, y, z) = 0\} = i\}$ ,  $1 \leq i \leq 2k+m-1$ . Vamos a prescindir de los discriminantes generalizados puesto que el cálculo de estos resulta costoso para una variable indeterminada  $k$ . Sean  $Z_i = \{x \in \mathbb{R} : \#\{z : \tilde{P}(x, y, z) = 0\} \leq i\}$ ,  $1 \leq i \leq 2k+m-2$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} Z_j &= \{x \in \mathbb{R} : x = 0\}, j = 1, \dots, 2k-2 \\ Z_j &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}, j = 2k-1, \dots, 2k+m-1 \end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{cases} \tilde{A}_1 = Z_1 = \{x = 0\}, \\ \tilde{A}_j = Z_j \setminus Z_{j-1} = \emptyset, j = 2, \dots, 2k-2, \\ \tilde{A}_{2k-1} = Z_{2k-1} \setminus Z_{2k-2} = \{x \neq 0\}, \\ \tilde{A}_j = Z_j \setminus Z_{j-1} = \emptyset, j = 2k, \dots, 2k+m-1. \end{cases}$$

Obtener una estratificación  $\mathcal{C}''$  compatible con los  $\tilde{A}_i$  es inmediato. Vamos a tomar como intervalo  $Q'' = (-1, 1)$ . Sea  $\mathcal{C}'' = \{(-1, 0), \{0\}, (0, 1)\}$  y denotemos  $\tilde{\Gamma}_{11} = \{0\}$ ,  $\tilde{\Gamma}_{2k-1,1} = (-1, 0)$  y  $\tilde{\Gamma}_{2k-1,2} = (0, 1)$ . Los conjuntos  $\tilde{\Lambda}_{it} = \{(x, y) \in \tilde{\Gamma}_{11} \times \mathbb{R} : \tilde{P}(x, y) = 0\}$  son de la forma

▪ Si  $k$  es par:

$$\tilde{\Lambda}_{11} = \tilde{\xi}_{11}^{(1)}, \quad \tilde{\Lambda}_{2k-1,j} = \tilde{\xi}_{2k-1,j}^{(1)} \cup \tilde{\xi}_{2k-1,j}^{(2)} \tilde{\xi}_{2k-1,j}^{(3)}, j = 1, 2$$

donde

- Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{11}$ :

$$\tilde{\xi}_{11}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{11} \ni x \rightarrow 0 \in \mathbb{R},$$

- Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{2k-1,j}$ ,  $j = 1, 2$ :

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_{2k-1,j}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{2k-1,j} \ni x \rightarrow -(x^2)^{1/(k-1)} \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\xi}_{2k-1,j}^{(2)} : \tilde{\Gamma}_{2k-1,j} \ni x \rightarrow -(\frac{1}{k}x^2)^{1/(k-1)} \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\xi}_{2k-1,j}^{(3)} : \tilde{\Gamma}_{2k-1,j} \ni x \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

- Si  $k$  es impar:

$$\tilde{\Lambda}_{11} = \tilde{\xi}_{11}^{(1)}, \quad \tilde{\Lambda}_{2k-1,j} = \tilde{\xi}_{2k-1,j}^{(1)} \cup \tilde{\xi}_{2k-1,j}^{(2)} \cup \tilde{\xi}_{2k-1,j}^{(3)} \cup \tilde{\xi}_{2k-1,j}^{(4)} \cup \tilde{\xi}_{2k-1,j}^{(5)}, j = 1, 2,$$

donde

- Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{11}$ :

$$\tilde{\xi}_{11}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{11} \ni x \rightarrow 0 \in \mathbb{R},$$

- Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{2k-1,j}$ ,  $j = 1, 2$ :

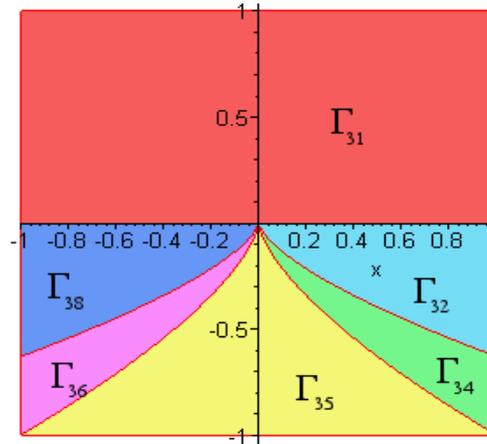
$$\begin{cases} \tilde{\xi}_{2k-1,j}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{2k-1,j} \ni x \rightarrow -(-x^2)^{1/(k-1)} \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\xi}_{2k-1,j}^{(2)} : \tilde{\Gamma}_{2k-1,j} \ni x \rightarrow -(-\frac{1}{k}x^2)^{1/(k-1)} \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\xi}_{2k-1,j}^{(3)} : \tilde{\Gamma}_{2k-1,j} \ni x \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\xi}_{2k-1,j}^{(4)} : \tilde{\Gamma}_{2k-1,j} \ni x \rightarrow (-\frac{1}{k}x^2)^{1/(k-1)} \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\xi}_{2k-1,j}^{(5)} : \tilde{\Gamma}_{2k-1,j} \ni x \rightarrow (-x^2)^{1/(k-1)} \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Tomemos  $Q' = Q'' \times (-1, 1)$ . Finalmente, sea

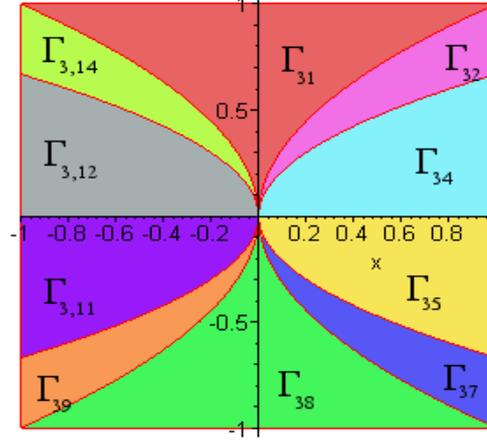
$$C' = \{\tilde{\xi}_{it}^j\} \cup \{\text{componentes conexas de } Q' \setminus \bigcup \tilde{\xi}_{it}^j\}$$

nuestra estratificación distinguida, la cual representamos en el siguiente dibujo:

- Si  $k$  es par:



- Si  $k$  es impar:



Si siguiendo la notación del teorema obtenemos que

- Si  $k$  es par:

$$\begin{cases} A_1 = \Gamma_{11} \cup \Gamma_{12} \cup \Gamma_{13} \cup \Gamma_{14} \cup \Gamma_{15}, \\ A_3 = \bigcup_{j=1}^8 \Gamma_{3j}, \end{cases}$$

donde  $\Gamma_{3j}$ ,  $j \in \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$ , son los de los dibujos y  $\Gamma_{11} = \tilde{\xi}_{11}^{(1)}$ ,  $\Gamma_{12} = \tilde{\xi}_{2k-1,2}^{(3)}$ ,  $\Gamma_{13} = \tilde{\xi}_{2k-1,2}^{(1)}$ ,  $\Gamma_{14} = \tilde{\xi}_{2k-1,1}^{(1)}$ ,  $\Gamma_{15} = \tilde{\xi}_{2k-1,1}^{(3)}$ ,  $\Gamma_{33} = \tilde{\xi}_{2k-1,2}^{(2)}$  y  $\Gamma_{37} = \tilde{\xi}_{2k-1,1}^{(2)}$ .

- Si  $k$  es impar:

$$\begin{cases} A_1 = \bigcup_{j=1}^7 \Gamma_{1j}, \\ A_3 = \bigcup_{j=1}^{14} \Gamma_{3j}, \end{cases}$$

donde  $\Gamma_{3j}$ ,  $j \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14\}$  son los de los dibujos y  $\Gamma_{11} = \tilde{\xi}_{11}^{(1)}$ ,  $\Gamma_{12} = \tilde{\xi}_{2k-1,2}^{(1)}$ ,  $\Gamma_{13} = \tilde{\xi}_{2k-1,2}^{(3)}$ ,  $\Gamma_{14} = \tilde{\xi}_{2k-1,2}^{(5)}$ ,  $\Gamma_{15} = \tilde{\xi}_{2k-1,1}^{(1)}$ ,  $\Gamma_{16} = \tilde{\xi}_{2k-1,1}^{(3)}$ ,  $\Gamma_{17} = \tilde{\xi}_{2k-1,1}^{(5)}$ ,  $\Gamma_{33} = \tilde{\xi}_{2k-1,2}^{(4)}$ ,  $\Gamma_{36} = \tilde{\xi}_{2k-1,2}^{(2)}$ ,  $\Gamma_{3,10} = \tilde{\xi}_{2k-1,1}^{(2)}$  y  $\Gamma_{3,13} = \tilde{\xi}_{2k-1,1}^{(4)}$ .

En lo que sigue utilizaremos la notación que se emplea en la estratificación de los conjuntos  $A_i$ . Tenemos que los conjuntos  $\Lambda_{st} = \{(x, y, z) \in \Gamma_{st} \times \mathbb{R} : P(x, y, z) = 0\}$  son de la forma

- Si  $k$  es par:

$$\begin{cases} \Lambda_{1j} = \xi_{1j}^{(1)}, 1 \leq j \leq 5, \\ \Lambda_{3j} = \xi_{3j}^{(1)} \cup \xi_{3j}^{(2)} \cup \xi_{3j}^{(3)}, j = 1, 5, \\ \Lambda_{3j} = \xi_{3j}^{(1)}, j \in \{2, 3, 4, 6, 7, 8\}, \end{cases}$$

donde

- Grafos asociados a  $\Gamma_{1j}$ ,  $1 \leq j \leq 5$ :

$$\xi_{1j}^{(1)} : \Gamma_{1j} \ni x \rightarrow 0 \in \mathbb{R},$$

- Grafos asociados a  $\Gamma_{3j}$ ,  $j = 1, 5$ :

$$\begin{cases} \xi_{3j}^{(1)} : \Gamma_{3j} \ni (x, y) \rightarrow -\sqrt{yx^2 + (-1)^k y^k} \in \mathbb{R}, \\ \xi_{3j}^{(2)} : \Gamma_{3j} \ni (x, y) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \\ \xi_{3j}^{(3)} : \Gamma_{3j} \ni (x, y) \rightarrow \sqrt{yx^2 + (-1)^k y^k} \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

- Grafos asociados a  $\Gamma_{3j}$ ,  $j \in \{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ :

$$\xi_{3j}^{(1)} : \Gamma_{3j} \ni x \rightarrow 0 \in \mathbb{R}.$$

- Si  $k$  es impar:

$$\begin{cases} \Lambda_{1j} = \xi_{1j}^{(1)}, 1 \leq j \leq 7, \\ \Lambda_{3j} = \xi_{3j}^{(1)} \cup \xi_{3j}^{(2)} \cup \xi_{3j}^{(3)}, j \in \{2, 3, 4, 8, 12, 13, 14\}, \\ \Lambda_{3j} = \xi_{3j}^{(1)}, j \in \{1, 5, 7, 9, 11\} \end{cases}$$

donde

- Grafos asociados a  $\Gamma_{1j}$ ,  $1 \leq j \leq 7$ :

$$\xi_{1j}^{(1)} : \Gamma_{1j} \ni x \rightarrow 0 \in \mathbb{R},$$

- Grafos asociados a  $\Gamma_{3j}$ ,  $j \in \{2, 3, 4, 8, 12, 13, 14\}$ :

$$\begin{cases} \xi_{3j}^{(1)} : \Gamma_{3j} \ni (x, y) \rightarrow -\sqrt{yx^2 + (-1)^k y^k} \in \mathbb{R}, \\ \xi_{3j}^{(2)} : \Gamma_{3j} \ni (x, y) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \\ \xi_{3j}^{(3)} : \Gamma_{3j} \ni (x, y) \rightarrow \sqrt{yx^2 + (-1)^k y^k} \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

- Grafos asociados a  $\Gamma_{3j}$ ,  $j \in \{1, 5, 7, 9, 11\}$ :

$$\xi_{3j}^{(1)} : \Gamma_{3j} \ni x \rightarrow 0 \in \mathbb{R}.$$

Puesto que  $|\xi_{st}^{(t)}| < \sqrt{2}$ , fijamos el intervalo  $Q = Q' \times (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ . Finalmente tomamos la estratificación distinguida  $\mathcal{C}$  dada por

$$\mathcal{C} = \{\xi_{st}^j\} \cup \{\text{componentes conexas de } Q \setminus \bigcup \xi_{st}^j\}.$$

En particular, la deformación del paraguas de Whitney es la unión de los siguientes estratos

- Si  $k$  es par:

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \{(x, y, z) : z^2 - x^2 - y^k = 0\} = \\ &= \bigcup_{j=1}^5 \xi_{1j}^{(1)} \cup \xi_{31}^{(1)} \cup \xi_{31}^{(3)} \cup \xi_{35}^{(1)} \cup \xi_{35}^{(3)}. \end{aligned}$$

- Si  $k$  es impar:

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \{(x, y, z) : z^2 - x^2 - y^k = 0\} = \\ &= \bigcup_{j=1}^7 \xi_{1j}^{(1)} \cup \bigcup_{j \in \{2, 3, 4, 8, 12, 13, 14\}} (\xi_{3j}^{(1)} \cup \xi_{3j}^{(3)}). \end{aligned}$$

#### 5.1.4. La deformación del paraguas de Whitney como conjunto analítico complejo

En este ejemplo estudiaremos el conjunto analítico complejo  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : z^2 - yx^2 - (-1)^k y^k = 0\}$  en el punto  $(0, 0, 0)$ , es decir, el germen de dicho conjunto en el punto  $(0, 0, 0)$ . Para ello vamos a seguir el estudio que se realizó en la sección del teorema de los ceros de Hilbert. Observamos que  $E = \mathbf{V}(I)$ , donde  $I = (\mathbf{z}^2 - \mathbf{y}\mathbf{x}^2 - (-1)^k \mathbf{y}^k)$  es el ideal generado por  $\mathbf{z}^2 - \mathbf{y}\mathbf{x}^2 - (-1)^k \mathbf{y}^k$ , el germen de la función  $z^2 - yx^2 - (-1)^k y^k$  en el punto  $(0, 0, 0)$ , y el cual es primo. Dada  $f \in \mathcal{O}_3$ , denotaremos su clase en el cociente  $\mathcal{O}_3/I$  con  $\bar{f}$ . Tenemos que el sistema de coordenadas  $x, y, z$  es regular para el ideal  $I$  puesto que:

- i)  $I \cap \mathcal{O}_2 = (0)$ ,
- ii)  $\mathcal{O}_3/I = \mathcal{O}_2[\bar{z}]$  es entero sobre  $\mathcal{O}_2$  dado que  $\mathbf{q}(\bar{z}) = 0$ , para  $\mathbf{q}(T) = T^2 - \mathbf{y}\mathbf{x}^2 - (-1)^k \mathbf{y}^k \in \mathcal{O}_2[T]$ ,
- iii)  $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_2[\bar{z}]$ .

El discriminante de  $\mathbf{q}(T)$  es  $\mathbf{D} = 4(\mathbf{y}\mathbf{x}^2 + (-1)^k \mathbf{y}^k) \in \mathcal{O}_2$ . Sean los polidiscos  $\Delta = \Delta((0, 0, 0) : (1, 1, \sqrt{2}))$  y  $\Delta_2 = \Delta((0, 0) : (1, 1))$ . Sean  $q(T) = T^2 - yx^2 - (-1)^k y^k$  y  $D = 4(yx^2 + (-1)^k y^k)$  representantes de  $\mathbf{q}(T)$  y  $\mathbf{D}$  en el polidisco  $\Delta$ . Observamos que para todo  $(x, y) \in \Delta_2$  si  $q(z) = 0$  entonces  $|z| < \sqrt{2}$ . Por tanto, los elementos anteriormente descritos forman una representación admisible de  $I$ . Así pues, el conjunto

$$V \setminus V(D) = \{(x, y, z) \in \Delta : z^2 - yx^2 - (-1)^k y^k = 0, yx^2 + (-1)^k y^k \neq 0\}$$

es una subvariedad compleja conexa de dimensión 2 y la proyección natural

$$\pi : V \setminus V(D) \rightarrow \Delta_2 \setminus V(D)$$

es un recubrimiento finito de 2 hojas.

Sean  $U_1 = \{re^{i\theta} : 0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi\}$  y  $U_2 = \{re^{i\theta} : 0 < r < 1, -\pi < \theta < \pi\}$ . Sea  $g(x, y) = yx^2 + (-1)^k y^k$ . Tenemos entonces que

$$\Delta_2 \setminus V(D) = g^{-1}(U_1) \cup g^{-1}(U_2)$$

Consideremos las funciones holomorfas,

$$\begin{cases} f_1(re^{i\theta}) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}, (r, \theta) \in U_1, \\ f_2(re^{i\theta}) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}, (r, \theta) \in U_2. \end{cases}$$

Así pues, podemos describir ambas hojas en dos trozos,

$$\begin{cases} \varphi_1 : g^{-1}(U_1) \ni (x, y) \rightarrow (x, y, f_1(g(x, y))) \in g^{-1}(U_1) \times \mathbb{C}, \\ \varphi_2 : g^{-1}(U_1) \ni (x, y) \rightarrow (x, y, -f_1(g(x, y))) \in g^{-1}(U_1) \times \mathbb{C}, \\ \psi_1 : g^{-1}(U_2) \ni (x, y) \rightarrow (x, y, f_2(g(x, y))) \in g^{-1}(U_2) \times \mathbb{C}, \\ \psi_2 : g^{-1}(U_2) \ni (x, y) \rightarrow (x, y, -f_2(g(x, y))) \in g^{-1}(U_2) \times \mathbb{C}. \end{cases}$$

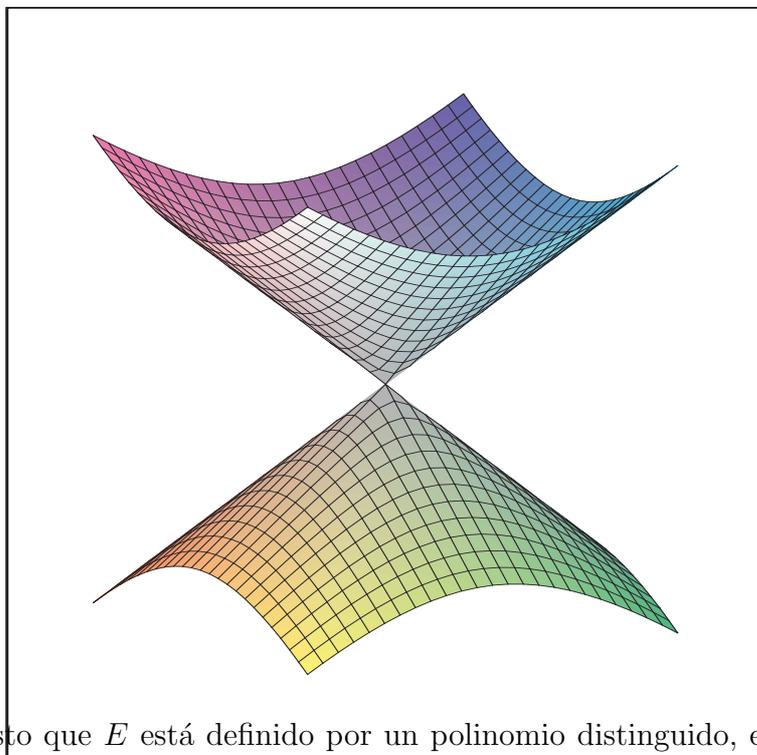
## 5.2. El cono

En esta sección estudiaremos localmente los conjuntos descritos por las siguientes ecuaciones desde el punto de vista real y desde el punto de vista complejo,

$$\text{El cono: } z^2 - x^2 - y^2 = 0.$$

### 5.2.1. El cono como conjunto analítico real

En este ejemplo aplicaremos el teorema de estratificaciones distinguidas al conjunto analítico real  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 = 0\}$  en el punto  $(0, 0, 0)$ .



Puesto que  $E$  está definido por un polinomio distinguido, en un primer momento no es necesario hacer un cambio lineal de coordenadas. Sea  $R = z^2 - x^2 - y^2$ . Entonces

$$P = \frac{1}{2}R \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{2}(z^2 - x^2 - y^2)2z = z(z^2 - x^2 - y^2) = z^3 - (x^2 + y^2)z.$$

Siguiendo la notación del teorema,  $c_3 = c_1 = 0$ ,  $c_2 = -x^2 - y^2$ . Sean  $A_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \#\{z : P(x, y, z) = 0\} = i\}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Utilizando un programa de ordenador obtenemos que

$$\begin{cases} D_0(T_1, T_2, T_3) = T_3(-27T_3 + 18T_1T_2 - 4T_1^3) + T_2^2(-4T_2 + T_1^2), \\ D_1(T_1, T_2, T_3) = -6T_2 + 2T_1^2. \end{cases}$$

Sean  $Z_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \#\{z : P(x, y, z) = 0\} \leq i\}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : D_0(c_1, c_2, c_3) = D_1(c_1, c_2, c_3) = 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : D_0(c_1, c_2, c_3) = 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\}. \end{aligned}$$

Así pues

$$\begin{cases} A_1 = Z_1 = \{x^2 + y^2 = 0\}, \\ A_2 = Z_2 \setminus Z_1 = \emptyset, \\ A_3 = \mathbb{R}^2 \setminus Z_2 = \{x^2 + y^2 \neq 0\}. \end{cases}$$

Por el teorema de estratificaciones distinguidas existe una estratificación  $\mathcal{C}'$  en un intervalo abierto  $Q'$  de  $0 \in \mathbb{R}^2$  compatible con  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ . Para hacer esta estratificación debemos volver a aplicar la demostración del teorema de estratificaciones distinguidas. Utilizaremos un tipo de letra más pequeño para diferenciarla de la estratificación que estamos llevando a cabo.

En primer lugar, tenemos que los conjuntos  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  están descrito por el polinomio distinguido  $\tilde{R} = x^2 + y^2$ . Como el polinomio  $\tilde{R}$  es distinguido, no es necesario hacer un cambio de coordenadas. Sea

$$\tilde{P} = \frac{1}{2} \tilde{R} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial y} = (x^2 + y^2)y = y^3 + x^2y.$$

Utilizando la notación del teorema, tenemos que  $c_1 = c_3 = 0$  y  $c_2 = x^2$ . Sean  $\tilde{A}_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \#\{z : \tilde{P}(x, y) = 0\} = i\}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Utilizando un programa de ordenador podemos calcular los discriminantes generalizados, que son los mismos que escribimos con anterioridad. Sean  $Z_i = \{x \in \mathbb{R} : \#\{z : \tilde{P}(x, y) = 0\} \leq i\}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{x \in \mathbb{R} : D_0(c_1, c_2, c_3) = D_1(c_1, c_2, c_3) = 0\} = \{x^2 = 0\}, \\ Z_2 &= \{x \in \mathbb{R} : D_0(c_1, c_2, c_3) = 0\} = \{x^2 = 0\}. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{cases} \tilde{A}_1 = Z_1 = \{x = 0\}, \\ \tilde{A}_2 = Z_2 \setminus Z_1 = \emptyset, \\ \tilde{A}_3 = Z_3 \setminus Z_2 = \{x \neq 0\}. \end{cases}$$

Obtener una estratificación  $\mathcal{C}''$  compatible con los  $\tilde{A}_i$  es inmediato. Vamos a tomar como intervalo  $Q'' = (-1, 1)$ . Sea  $\mathcal{C}'' = \{(-1, 0), \{0\}, (0, 1)\}$  y denotemos  $\tilde{\Gamma}_{11} = \{0\}$ ,  $\tilde{\Gamma}_{31} = (-1, 0)$  y  $\tilde{\Gamma}_{32} = (0, 1)$ . Los conjuntos  $\tilde{\Lambda}_{it} = \{(x, y) \in \tilde{\Gamma}_{it} \times \mathbb{R} : \tilde{P}(x, y) = 0\}$  son de la forma

$$\tilde{\Lambda}_{11} = \tilde{\xi}_{11}^{(1)}, \quad \tilde{\Lambda}_{31} = \tilde{\xi}_{31}^{(1)} \quad \tilde{\Lambda}_{32} = \tilde{\xi}_{32}^{(1)},$$

donde

- Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{11}$ :

$$\tilde{\xi}_{11}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{11} \ni x \rightarrow 0 \in \mathbb{R}$$

- Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{31}$ :

$$\tilde{\xi}_{31}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{31} \ni x \rightarrow 0 \in \mathbb{R}$$

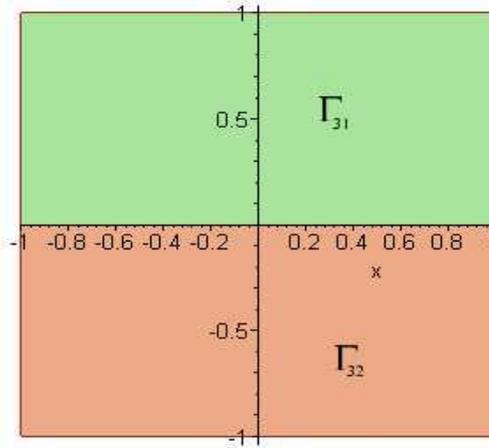
- Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{32}$ :

$$\tilde{\xi}_{32}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{32} \ni x \rightarrow 0 \in \mathbb{R}$$

Tomemos  $Q' = Q'' \times (-1, 1)$ . Finalmente, sea

$$C' = \{\tilde{\xi}_{it}^j\} \cup \{\text{componentes conexas de } Q' \setminus \bigcup \tilde{\xi}_{it}^j\}$$

nuestra estratificación distinguida, la cual representamos en el siguiente dibujo:



Siguiendo la notación del teorema,

$$\begin{cases} A_1 = \Gamma_{11}, \\ A_3 = \Gamma_{31} \cup \Gamma_{32} \cup \Gamma_{33} \cup \Gamma_{34}, \end{cases}$$

donde  $\Gamma_{31}$  y  $\Gamma_{32}$  son los de los dibujos y  $\Gamma_{11} = \tilde{\xi}_{11}^{(1)}$ ,  $\Gamma_{33} = \tilde{\xi}_{31}^{(1)}$  y  $\Gamma_{34} = \tilde{\xi}_{32}^{(1)}$ .

En lo que sigue utilizaremos la notación que se emplea en la estratificación de los conjuntos  $A_i$ . Tenemos que los conjuntos  $\Lambda_{st} = \{(u, v, z) \in \Gamma_{st} \times \mathbb{R} : P(u, v, z) = 0\}$  son de la forma

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} &= \xi_{11}^{(1)}, & \Lambda_{31} &= \xi_{31}^{(1)} \cup \xi_{31}^{(2)} \cup \xi_{31}^{(3)}, & \Lambda_{32} &= \xi_{32}^{(1)} \cup \xi_{32}^{(2)} \cup \xi_{32}^{(3)}, \\ \Lambda_{33} &= \xi_{33}^{(1)} \cup \xi_{33}^{(2)} \cup \xi_{33}^{(3)}, & \Lambda_{34} &= \xi_{34}^{(1)} \cup \xi_{34}^{(2)} \cup \xi_{34}^{(3)}, \end{aligned}$$

donde

- Grafos asociados a  $\Gamma_{11}$ :

$$\xi_{11}^{(1)} : \Gamma_{11} \ni (x, y) \rightarrow 0 \in \mathbb{R},$$

- Grafos asociados a  $\Gamma_{31}$ :

$$\begin{cases} \xi_{31}^{(1)} : \Gamma_{31} \ni (x, y) \rightarrow -\sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}, \\ \xi_{31}^{(2)} : \Gamma_{31} \ni (x, y) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \\ \xi_{31}^{(3)} : \Gamma_{31} \ni (x, y) \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

- Grafos asociados a  $\Gamma_{32}$ :

$$\begin{cases} \xi_{32}^{(1)} : \Gamma_{32} \ni (x, y) \rightarrow -\sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}, \\ \xi_{32}^{(2)} : \Gamma_{32} \ni (x, y) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \\ \xi_{32}^{(3)} : \Gamma_{32} \ni (x, y) \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

- Grafos asociados a  $\Gamma_{33}$ :

$$\begin{cases} \xi_{33}^{(1)} : \Gamma_{33} \ni (x, y) \rightarrow -\sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}, \\ \xi_{33}^{(2)} : \Gamma_{33} \ni (x, y) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \\ \xi_{33}^{(3)} : \Gamma_{33} \ni (x, y) \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

- Grafos asociados a  $\Gamma_{34}$ :

$$\begin{cases} \xi_{34}^{(1)} : \Gamma_{34} \ni (x, y) \rightarrow -\sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}, \\ \xi_{34}^{(2)} : \Gamma_{34} \ni (u, v) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \\ \xi_{34}^{(3)} : \Gamma_{34} \ni (u, v) \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Puesto que  $|\xi_{st}^{(t)}| < \sqrt{2}$ , fijamos el intervalo  $Q = Q' \times (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ . Finalmente tomamos la estratificación distinguida  $\mathcal{C}$  dada por

$$\mathcal{C} = \{\xi_{st}^j\} \cup \{\text{componentes conexas de } Q \setminus \bigcup \xi_{st}^j\}.$$

En particular, el par de planos es la unión de los siguientes estratos

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \{(x, y, z) : z^2 - x^2 - y^2 = 0\} = \\ &= \xi_{11}^{(1)} \cup \xi_{31}^{(1)} \cup \xi_{31}^{(3)} \cup \xi_{32}^{(1)} \cup \xi_{32}^{(3)} \cup \xi_{33}^{(1)} \cup \xi_{33}^{(3)} \cup \xi_{34}^{(1)} \cup \xi_{34}^{(3)}. \end{aligned}$$

### 5.2.2. El cono como conjunto analítico complejo

En este ejemplo estudiaremos el conjunto analítico complejo  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : z^2 - x^2 - y^2 = 0\}$  en el punto  $(0, 0, 0)$ , es decir, el germen de dicho conjunto en el punto  $(0, 0, 0)$ . Para ello vamos a seguir el estudio que se realizó en la sección del teorema de los ceros de Hilbert. Observamos que  $E = \mathbf{V}(I)$ , donde  $I = (\mathbf{z}^2 - \mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2)$  es el ideal generado por  $\mathbf{z}^2 - \mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2$ , el germen de la función  $z^2 - x^2 - y^2$  en el punto  $(0, 0, 0)$ , y el cual es primo. Dada  $f \in \mathcal{O}_3$ , denotaremos su clase en el cociente  $\mathcal{O}_3/I$  con  $\bar{f}$ . Tenemos que el sistema de coordenadas  $x, y, z$  es regular para el ideal  $I$  puesto que:

- $I \cap \mathcal{O}_2 = (0)$ ,
- $\mathcal{O}_3/I = \mathcal{O}_2[\bar{\mathbf{z}}]$  es entero sobre  $\mathcal{O}_2$  dado que  $\mathbf{q}(\bar{\mathbf{z}}) = 0$ , para  $\mathbf{q}(T) = T^2 - \mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2 \in \mathcal{O}_2[T]$ ,
- $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_2[\bar{\mathbf{z}}]$ .

El discriminante de  $\mathbf{q}(T)$  es  $\mathbf{D} = 4(\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2) \in \mathcal{O}_2$ . Sean los polidiscos  $\Delta = \Delta((0, 0, 0) : (1, 1, \sqrt{2}))$  y  $\Delta_2 = \Delta((0, 0) : (1, 1))$ . Sean  $q(T) = T^2 - x^2 - y^2$  y  $D = 4(x^2 + y^2)$  representantes de  $\mathbf{q}(T)$  y  $\mathbf{D}$  en el polidisco  $\Delta$ . Observamos que para todo  $(x, y) \in \Delta_2$  si  $q(z) = 0$  entonces  $|z| < \sqrt{2}$ . Por tanto, los elementos anteriormente descritos forman una representación admisible de  $I$ . Así pues, el conjunto

$$V \setminus V(D) = \{(x, y, z) \in \Delta : z^2 - x^2 - y^2 = 0, x^2 + y^2 \neq 0\}$$

es una subvariedad compleja conexa de dimensión 2 y la proyección natural

$$\pi : V \setminus V(D) \rightarrow \Delta_2 \setminus V(D)$$

es un recubrimiento finito de 2 hojas.

Sean  $U_1 = \{re^{i\theta} : 0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi\}$  y  $U_2 = \{re^{i\theta} : 0 < r < 1, -\pi < \theta < \pi\}$ . Sea  $g(x, y) = x^2 + y^2$ . Tenemos entonces que

$$\Delta_2 \setminus V(D) = g^{-1}(U_1) \cup g^{-1}(U_2)$$

Consideremos las funciones holomorfas,

$$\begin{cases} f_1(re^{i\theta}) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}, (r, \theta) \in U_1, \\ f_2(re^{i\theta}) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}, (r, \theta) \in U_2. \end{cases}$$

Así pues, podemos describir ambas hojas en dos trozos,

$$\begin{cases} \varphi_1 : g^{-1}(U_1) \ni (x, y) \rightarrow (x, y, f_1(g(x, y))) \in g^{-1}(U_1) \times \mathbb{C}, \\ \varphi_2 : g^{-1}(U_1) \ni (x, y) \rightarrow (x, y, -f_1(g(x, y))) \in g^{-1}(U_1) \times \mathbb{C}, \\ \psi_1 : g^{-1}(U_2) \ni (x, y) \rightarrow (x, y, f_2(g(x, y))) \in g^{-1}(U_2) \times \mathbb{C}, \\ \psi_2 : g^{-1}(U_2) \ni (x, y) \rightarrow (x, y, -f_2(g(x, y))) \in g^{-1}(U_2) \times \mathbb{C}. \end{cases}$$

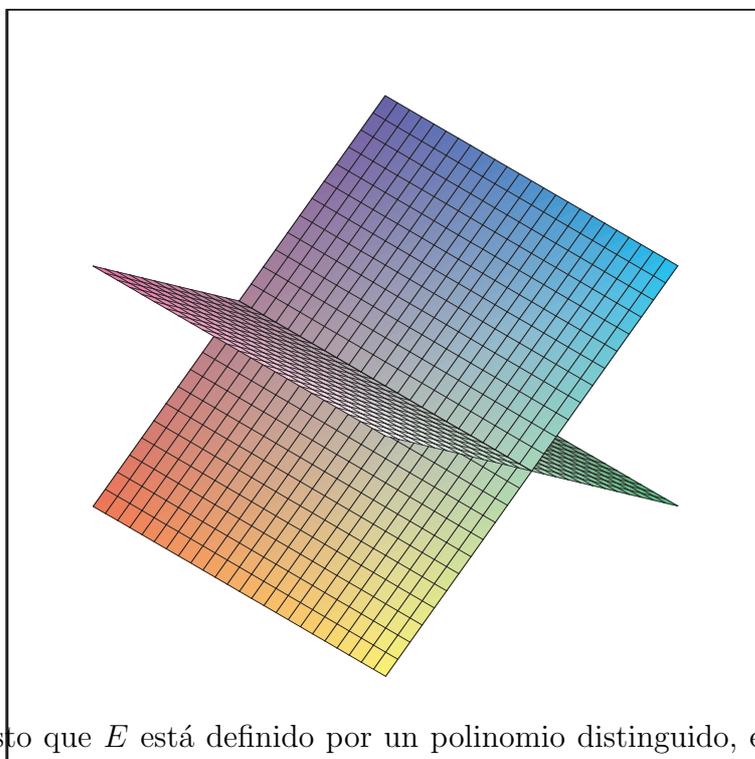
### 5.3. El par de planos y sus deformaciones

En esta sección estudiaremos localmente los conjuntos descritos por las siguientes ecuaciones desde el punto de vista real y desde el punto de vista complejo,

$$\begin{cases} \text{Par de planos: } z^2 - x^2 = 0, \\ \text{Deformaciones del par de planos: } z^2 - x^2 - y^k = 0, k \geq 3. \end{cases}$$

#### 5.3.1. El par de planos como conjunto analítico real

En este ejemplo aplicaremos el teorema de estratificaciones distinguidas al conjunto analítico real  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 = 0\}$  en el punto  $(0, 0, 0)$ .



Puesto que  $E$  está definido por un polinomio distinguido, en un primer momento no es necesario hacer un cambio lineal de coordenadas. Sea  $R = z^2 - x^2$ . Entonces

$$P = \frac{1}{2}R \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{2}(z^2 - x^2)2z = z(z^2 - x^2) = z^3 - x^2z.$$

Siguiendo la notación del teorema,  $c_3 = c_1 = 0$ ,  $c_2 = -x^2$ . Sean  $A'_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \# \{z : P(x, y, z) = 0\} = i\}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Utilizando un programa de ordenador obtenemos que

$$\begin{cases} D_0(T_1, T_2, T_3) = T_3(-27T_3 + 18T_1T_2 - 4T_1^3) + T_2^2(-4T_2 + T_1^2), \\ D_1(T_1, T_2, T_3) = -6T_2 + 2T_1^2. \end{cases}$$

Sean  $Z_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \#\{z : P(x, y, z) = 0\} \leq i\}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : D_0(c_1, c_2, c_3) = D_1(c_1, c_2, c_3) = 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : D_0(c_1, c_2, c_3) = 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}. \end{aligned}$$

Así pues

$$\begin{cases} A'_1 = Z_1 = \{x = 0\}, \\ A'_2 = Z_2 \setminus Z_1 = \emptyset, \\ A'_3 = \mathbb{R}^2 \setminus Z_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}. \end{cases}$$

Por el teorema de estratificaciones distinguidas existe una estratificación  $\mathcal{C}'$  en un intervalo abierto  $Q'$  de  $0 \in \mathbb{R}^2$  compatible con  $A'_1$ ,  $A'_2$  y  $A'_3$ . Para hacer esta estratificación debemos volver a aplicar la demostración del teorema de estratificaciones distinguidas. Utilizaremos un tipo de letra más pequeño para diferenciarla de la estratificación que estamos llevando a cabo.

En primer lugar, tenemos que los conjuntos  $A'_1$ ,  $A'_2$  y  $A'_3$  están descritos por el polinomio  $\tilde{R} = x^2$ . Como el polinomio  $\tilde{R}$  no es distinguido, debemos hacer un cambio de coordenadas adecuado para que dicho polinomio lo sea. Escojamos el cambio lineal dado por

$$(u, v) = H(x, y) = (y, x).$$

Obtenemos que  $\tilde{R} = v^2$ . Sea

$$\tilde{P} = \frac{1}{2} \tilde{R} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial v} = v^3.$$

Utilizando la notación del teorema, tenemos que  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ . Sean  $\tilde{A}_i = \{(u, v) \in \mathbb{R} : \#\{z : \tilde{P}(u, v) = 0\} = i\}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Utilizando un programa de ordenador podemos calcular los discriminantes generalizados, que son los mismos que escribimos con anterioridad. Sean  $Z_i = \{u \in \mathbb{R} : \#\{z : \tilde{P}(u, v) = 0\} \leq i\}$ ,  $1 \leq i \leq 2$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{u \in \mathbb{R} : D_0(c_1, c_2, c_3) = D_1(c_1, c_2, c_3) = 0\} = \mathbb{R}, \\ Z_2 &= \{u \in \mathbb{R} : D_0(c_1, c_2, c_3)\} = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{cases} \tilde{A}_1 = Z_1 = \mathbb{R}, \\ \tilde{A}_2 = Z_2 \setminus Z_1 = \emptyset, \\ \tilde{A}_3 = Z_3 \setminus Z_2 = \emptyset. \end{cases}$$

Obtener una estratificación  $\mathcal{C}''$  compatible con los  $\tilde{A}_i$  es inmediato. Vamos a tomar como intervalo  $Q'' = (-1, 1)$ . Sea  $\mathcal{C}'' = \{(-1, 1)\}$  y denotemos  $\tilde{\Gamma}_{11} = (-1, 1)$ . El conjunto  $\tilde{\Lambda}_{11} = \{(u, v) \in \tilde{\Gamma}_{11} \times \mathbb{R} : \tilde{P}(u, v) = 0\}$  es de la forma

$$\tilde{\Lambda}_{11} = \tilde{\xi}_{11}^{(1)}$$

donde

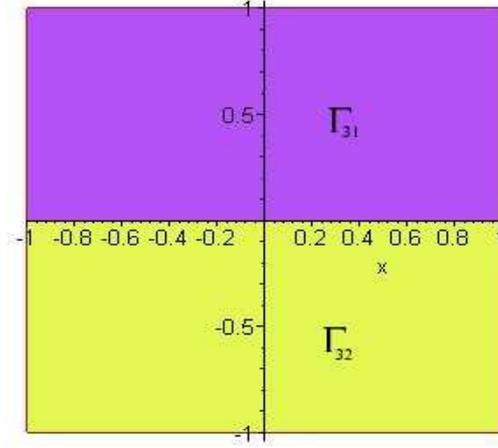
- Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{11}$ :

$$\tilde{\xi}_{11}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{11} \ni u \rightarrow 0 \in \mathbb{R}.$$

Tomemos  $Q' = Q'' \times (-1, 1)$ . Finalmente, sea

$$\mathcal{C}' = \{\tilde{\xi}_{it}^j\} \cup \{\text{componentes conexas de } Q' \setminus \bigcup \tilde{\xi}_{it}^j\}$$

nuestra estratificación distinguida, la cual representamos en el siguiente dibujo:



Si denotamos con  $A_i$  a los conjuntos  $H(A'_i)$ , tenemos que, siguiendo la notación del teorema,

$$\begin{cases} A_1 = \Gamma_{11}, \\ A_3 = \Gamma_{31} \cup \Gamma_{32}, \end{cases}$$

donde  $\Gamma_{31}$  y  $\Gamma_{32}$  son los de los dibujos y  $\Gamma_{11} = \tilde{\xi}_{11}^{(1)}$ .

En lo que sigue utilizaremos la notación que se emplea en la estratificación de los conjuntos  $A_i$ . Tenemos que los conjuntos  $\Lambda_{st} = \{(u, v, z) \in \Gamma_{st} \times \mathbb{R} : P(u, v, z) = 0\}$  son de la forma

$$\Lambda_{11} = \xi_{11}^{(1)}, \quad \Lambda_{31} = \xi_{31}^{(1)} \cup \xi_{31}^{(2)} \cup \xi_{31}^{(3)}, \quad \Lambda_{32} = \xi_{32}^{(1)} \cup \xi_{32}^{(2)} \cup \xi_{32}^{(3)},$$

donde

- Grafos asociados a  $\Gamma_{11}$ :

$$\xi_{11}^{(1)} : \Gamma_{11} \ni u \rightarrow 0 \in \mathbb{R},$$

- Grafos asociados a  $\Gamma_{31}$ :

$$\begin{cases} \xi_{31}^{(1)} : \Gamma_{31} \ni (u, v) \rightarrow -v \in \mathbb{R}, \\ \xi_{31}^{(2)} : \Gamma_{31} \ni (u, v) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \\ \xi_{31}^{(3)} : \Gamma_{31} \ni (u, v) \rightarrow v \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

- Grafos asociados a  $\Gamma_{32}$ :

$$\begin{cases} \xi_{32}^{(1)} : \Gamma_{32} \ni (u, v) \rightarrow v \in \mathbb{R}, \\ \xi_{32}^{(2)} : \Gamma_{32} \ni (u, v) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \\ \xi_{32}^{(3)} : \Gamma_{32} \ni (u, v) \rightarrow -v \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Observamos que  $|\xi_{st}^{(t)}| < \sqrt{2}$  y por tanto fijamos el intervalo  $Q = Q' \times (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ . Finalmente tomamos la estratificación distinguida  $\mathcal{C}$  dada por

$$\mathcal{C} = \{\xi_{st}^j\} \cup \{\text{componentes conexas de } Q \setminus \bigcup \xi_{st}^j\}.$$

En particular, el par de planos es la unión de los siguientes estratos

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \{(u, v, z) : z^2 - v^3 - vu^3 = 0\} = \\ &= \xi_{11}^{(1)} \cup \xi_{31}^{(1)} \cup \xi_{31}^{(3)} \cup \xi_{32}^{(1)} \cup \xi_{32}^{(3)}. \end{aligned}$$

El dibujo del par de planos es esencialmente el mismo tras el cambio de coordenadas puesto que lo único que hemos aplicado es un giro alrededor del eje  $z$  de ángulo  $\frac{\pi}{2}$ .

### 5.3.2. El par de planos como conjunto analítico complejo

En este ejemplo estudiaremos el conjunto analítico complejo  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : z^2 - x^2 = 0\}$  en el punto  $(0, 0, 0)$ , es decir, el germen de dicho conjunto en el punto  $(0, 0, 0)$ . Para ello vamos a seguir el estudio que se realizó en la sección del teorema de los ceros de Hilbert. Observamos que  $E = \mathbf{V}(I_1) \cup \mathbf{V}(I_2)$ , donde  $I_1 = (\mathbf{z} - \mathbf{x})$  es el ideal primo generado por  $\mathbf{z} - \mathbf{x}$ , el germen de la función  $z - x$  en el punto  $(0, 0, 0)$ , y  $I_2 = (\mathbf{z} + \mathbf{x})$  es el ideal primo generado por  $\mathbf{z} + \mathbf{x}$ , el germen de la función  $z + x$  en el punto  $(0, 0, 0)$ . Dada  $f \in \mathcal{O}_3$ , denotaremos su clase en el cociente  $\mathcal{O}_3/I$  con  $\bar{f}$ . Tenemos que el sistema de coordenadas  $x, y, z$  es regular para el ideal  $I_j$  puesto que:

- $I_j \cap \mathcal{O}_2 = (0)$ ,
- $\mathcal{O}_3/I_j = \mathcal{O}_2[\bar{\mathbf{z}}]$  es entero sobre  $\mathcal{O}_2$  dado que  $\mathbf{q}(\bar{\mathbf{z}}) = 0$ , para  $\mathbf{q}(T) = T + (-1)^j \mathbf{x} \in \mathcal{O}_2[T]$ ,
- $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_2[\bar{\mathbf{z}}]$ .

El discriminante de  $\mathbf{q}_j(T)$  es  $\mathbf{D}_j = \mathbf{1} \in \mathcal{O}_2$ . Sean los polidiscos  $\Delta = \Delta((0, 0, 0) : (1, 1, 1))$  y  $\Delta_2 = \Delta((0, 0) : (1, 1))$ . Sean  $q_j(T) = T + (-1)^j x$  y  $D = 1$  representantes de  $\mathbf{q}_j(T)$  y  $\mathbf{D}$  en el polidisco  $\Delta$ . Observamos que para todo  $(x, y) \in \Delta_2$  si  $q_j(z) = 0$  entonces  $|z| < 1$ . Por tanto, los elementos anteriormente descritos forman una representación admisible de  $I_j$ . Así pues, el conjunto

$$V \setminus V(D_j) = \{(x, y, x) \in \Delta : z + (-1)^j x = 0\}$$

es una subvariedad compleja conexa de dimensión 2 y la proyección natural

$$\pi : V \setminus V(D_j) \rightarrow \Delta_2 \setminus V(D_j)$$

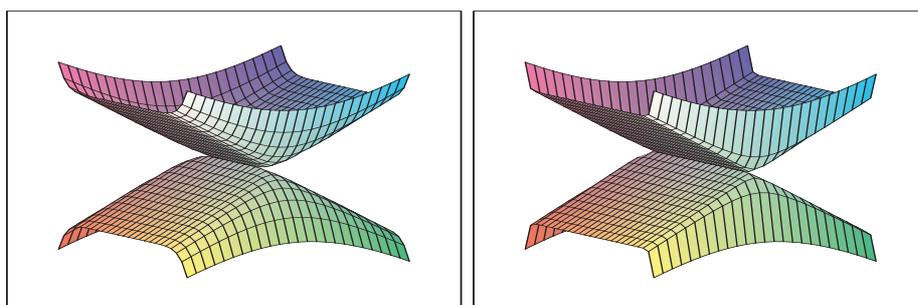
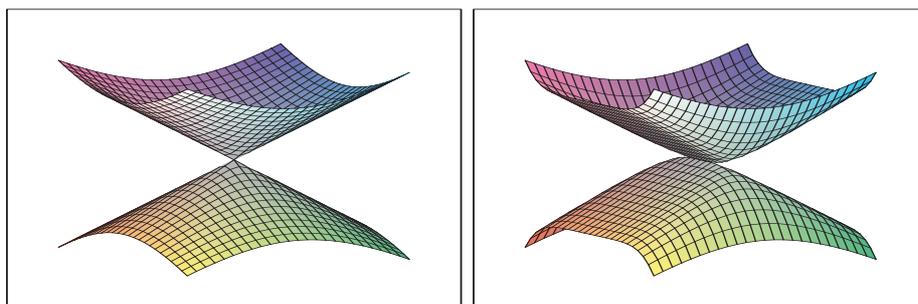
es un recubrimiento finito de 1 hoja. Dichas hojas viene dadas por

$$\begin{cases} \varphi_1 : \Delta_2 \ni (x, y) \rightarrow (x, y, x) \in \Delta_2 \times \mathbb{C}, \\ \varphi_2 : \Delta_2 \ni (x, y) \rightarrow (x, y, -x) \in \Delta_2 \times \mathbb{C}. \end{cases}$$

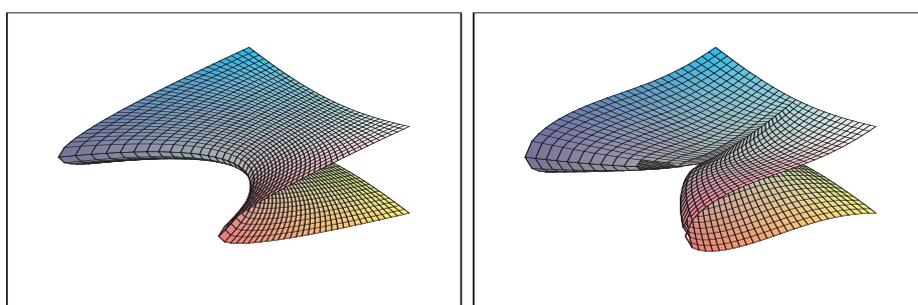
### 5.3.3. La deformación del par de planos como conjunto analítico real

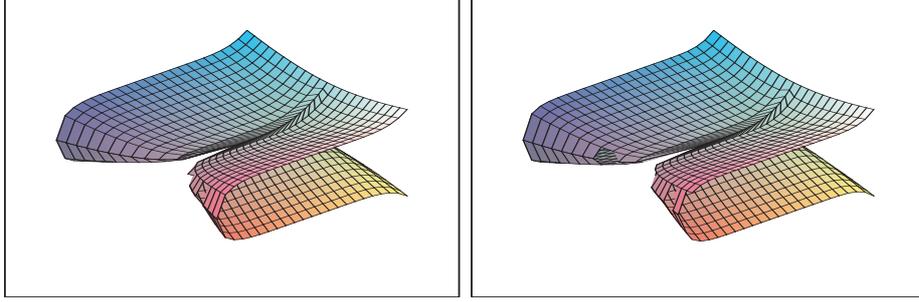
En este ejemplo aplicaremos el teorema de estratificaciones distinguidas al conjunto analítico real  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^k = 0\}$  en el punto  $(0, 0, 0)$ .

- Si  $k$  es par:



- Si  $k$  es impar:





Puesto que  $E$  está definido por un polinomio distinguido, en un primer momento no es necesario hacer un cambio lineal de coordenadas. Sea  $R = z^2 - x^2 - y^k$ . Entonces

$$P = \frac{1}{2}R \frac{\partial R}{\partial z} = z(z^2 - x^2 - y^k) = z^3 - (x^2 + y^k)z.$$

Siguiendo la notación del teorema,  $c_3 = c_1 = 0$ ,  $c_2 = -x^2 - y^k$ . Sean  $A_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \#\{z : P(x, y, z) = 0\} = i\}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Utilizando un programa de ordenador obtenemos que

$$\begin{cases} D_0(T_1, T_2, T_3) = T_3(-27T_3 + 18T_1T_2 - 4T_1^3) + T_2^2(-4T_2 + T_1^2), \\ D_1(T_1, T_2, T_3) = -6T_2 + 2T_1^2. \end{cases}$$

Sean  $Z_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \#\{z : P(x, y, z) = 0\} \leq i\}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : D_0(c_1, c_2, c_3) = D_1(c_1, c_2, c_3) = 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^k = 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : D_0(c_1, c_2, c_3) = 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^k = 0\}. \end{aligned}$$

Así pues

$$\begin{cases} A_1 = Z_1 = \{x^2 + y^k = 0\}, \\ A_2 = Z_2 \setminus Z_1 = \emptyset, \\ A_3 = \mathbb{R}^2 \setminus Z_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^k \neq 0\}. \end{cases}$$

Por el teorema de estratificaciones distinguidas existe una estratificación  $\mathcal{C}'$  en un intervalo abierto  $Q'$  de  $0 \in \mathbb{R}^2$  compatible con  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ . Para hacer esta estratificación debemos volver a aplicar la demostración del teorema de estratificaciones distinguidas. Utilizaremos un tipo de letra más pequeño para diferenciarla de la estratificación que estamos llevando a cabo.

En primer lugar, tenemos que los conjuntos  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  están descrito por el polinomio distinguido  $\tilde{R} = x^2 + y^k$ . Sea

$$\tilde{P} = \frac{1}{C} \tilde{R} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial y} \dots \frac{\partial^{k-1} \tilde{R}}{\partial y^{k-1}} = (x^2 + y^k)y^m = x^2y^m + y^{k+m},$$

donde  $C = k^{k-1}(k-1)^{k-2} \dots 2$  y  $m = \frac{k(k-1)}{2}$ . Utilizando la notación del teorema, tenemos que  $c_i = 0$ ,  $i \neq k$ , y  $c_k = x^2$ . Sean  $\tilde{A}_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \#\{z : \tilde{P}(x, y) =$

$0\} = i\}$ ,  $1 \leq i \leq m+k$ . Vamos a prescindir de los discriminantes generalizados puesto que el cálculo de estos resulta costoso para una variable indeterminada  $k$ . Sean  $Z_i = \{x \in \mathbb{R} : \#\{z : \tilde{P}(x, y) = 0\} \leq i\}$ ,  $1 \leq i \leq k+m-1$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} Z_j &= \{x \in \mathbb{R} : x = 0\}, j = 1, \dots, k \\ Z_j &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}, j = k+1, \dots, k+m-1 \end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{cases} \tilde{A}_1 = Z_1 = \{x = 0\}, \\ \tilde{A}_j = Z_j \setminus Z_{j-1} = \emptyset, j = 2, \dots, k, \\ \tilde{A}_{k+1} = Z_{k+1} \setminus Z_k = \{x \neq 0\}, \\ \tilde{A}_j = Z_j \setminus Z_{j-1} = \emptyset, j = k+2, \dots, k+m. \end{cases}$$

Obtener una estratificación  $\mathcal{C}''$  compatible con los  $\tilde{A}_i$  es inmediato. Vamos a tomar como intervalo  $Q'' = (-1, 1)$ . Sea  $\mathcal{C}'' = \{(-1, 0), \{0\}, (0, 1)\}$  y denotemos  $\tilde{\Gamma}_{11} = \{0\}$ ,  $\tilde{\Gamma}_{k+1,1} = (-1, 0)$  y  $\tilde{\Gamma}_{k+1,2} = (0, 1)$ . Los conjuntos  $\tilde{\Lambda}_{it} = \{(x, y) \in \tilde{\Gamma}_{11} \times \mathbb{R} : \tilde{P}(x, y) = 0\}$  son de la forma

▪ Si  $k$  es par:

$$\tilde{\Lambda}_{11} = \tilde{\xi}_{11}^{(1)}, \quad \tilde{\Lambda}_{k+1,1} = \tilde{\xi}_{k+1,1}^{(1)}, \quad \tilde{\Lambda}_{k+1,2} = \tilde{\xi}_{k+1,2}^{(1)}$$

donde

• Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{11}$ :

$$\tilde{\xi}_{11}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{11} \ni x \rightarrow 0 \in \mathbb{R},$$

• Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{k+1,j}$ :

$$\tilde{\xi}_{k+1,1}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{k+1,1} \ni x \rightarrow 0 \in \mathbb{R},$$

• Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{k+1,2}$ :

$$\tilde{\xi}_{k+1,2}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{k+1,2} \ni x \rightarrow 0 \in \mathbb{R}.$$

▪ Si  $k$  es impar:

$$\tilde{\Lambda}_{11} = \tilde{\xi}_{11}^{(1)}, \quad \tilde{\Lambda}_{k+1,1} = \tilde{\xi}_{k+1,1}^{(1)} \cup \tilde{\xi}_{k+1,1}^{(2)}, \quad \tilde{\Lambda}_{k+1,2} = \tilde{\xi}_{k+1,2}^{(1)} \tilde{\xi}_{k+1,2}^{(2)}$$

donde

• Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{11}$ :

$$\tilde{\xi}_{11}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{11} \ni x \rightarrow 0 \in \mathbb{R},$$

• Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{k+1,1}$ :

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_{k+1,1}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{k+1,1} \ni x \rightarrow -(x^2)^{\frac{1}{k}} \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\xi}_{k+1,1}^{(2)} : \tilde{\Gamma}_{k+1,1} \ni x \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

• Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{k+1,2}$ :

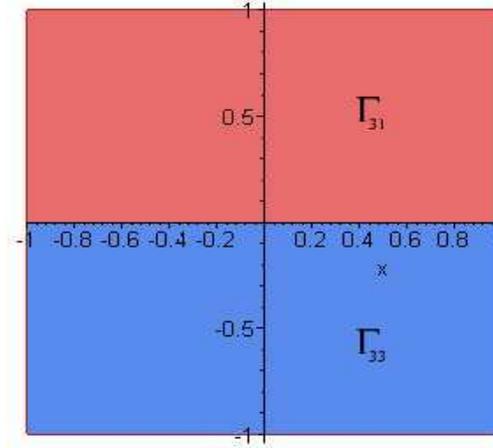
$$\begin{cases} \tilde{\xi}_{k+1,2}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{k+1,2} \ni x \rightarrow -(x^2)^{\frac{1}{k}} \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\xi}_{k+1,2}^{(2)} : \tilde{\Gamma}_{k+1,2} \ni x \rightarrow 0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Tomemos  $Q' = Q'' \times (-1, 1)$ . Finalmente, sea

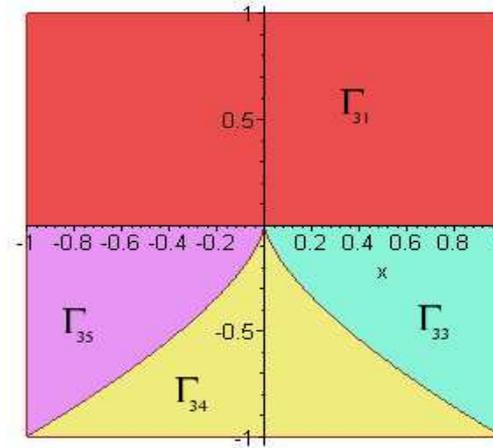
$$\mathcal{C}' = \{\tilde{\xi}_{it}^j\} \cup \{\text{componentes conexas de } Q' \setminus \bigcup \tilde{\xi}_{it}^j\}$$

nuestra estratificación distinguida, la cual representamos en el siguiente dibujo:

▪ Si  $k$  es par:



- Si  $k$  es impar:



Seguindo la notación del teorema obtenemos que

- Si  $k$  es par:

$$\begin{cases} A_1 = \Gamma_{11}, \\ A_3 = \Gamma_{31} \cup \Gamma_{32} \cup \Gamma_{33} \cup \Gamma_{34}, \end{cases}$$

donde  $\Gamma_{31}$  y  $\Gamma_{33}$  son los de los dibujos y  $\Gamma_{11} = \tilde{\xi}_{11}^{(1)}$ ,  $\Gamma_{32} = \tilde{\xi}_{k+1,1}^{(1)}$  y  $\Gamma_{34} = \tilde{\xi}_{k+1,2}^{(1)}$ .

- Si  $k$  es impar:

$$\begin{cases} A_1 = \Gamma_{11} \cup \Gamma_{12} \cup \Gamma_{13}, \\ A_3 = \Gamma_{31} \cup \Gamma_{32} \cup \Gamma_{33} \cup \Gamma_{34} \cup \Gamma_{35} \cup \Gamma_{36}. \end{cases}$$

donde  $\Gamma_{31}$ ,  $\Gamma_{33}$ ,  $\Gamma_{34}$  y  $\Gamma_{35}$  son los de los dibujos y  $\Gamma_{11} = \tilde{\xi}_{11}^{(1)}$ ,  $\Gamma_{12} = \tilde{\xi}_{k+1,1}^{(1)}$ ,  $\Gamma_{13} = \tilde{\xi}_{k+1,2}^{(1)}$ ,  $\Gamma_{32} = \tilde{\xi}_{k+1,1}^{(2)}$  y  $\Gamma_{36} = \tilde{\xi}_{k+1,2}^{(2)}$ .

En lo que sigue utilizaremos la notación que se emplea en la estratificación de los conjuntos  $A_i$ . Tenemos que los conjuntos  $\Lambda_{st} = \{(x, y, z) \in \Gamma_{st} \times \mathbb{R} : P(x, y, z) = 0\}$  son de la forma

- Si  $k$  es par:

$$\begin{cases} \Lambda_{11} = \xi_{11}^{(1)}, \\ \Lambda_{3j} = \xi_{3j}^{(1)} \cup \xi_{3j}^{(2)} \cup \xi_{3j}^{(3)}, 1 \leq j \leq 4, \end{cases}$$

donde

- Grafos asociados a  $\Gamma_{11}$ :

$$\xi_{11}^{(1)} : \Gamma_{11} \ni x \rightarrow 0 \in \mathbb{R},$$

- Grafos asociados a  $\Gamma_{3j}$ ,  $1 \leq j \leq 4$ :

$$\begin{cases} \xi_{3j}^{(1)} : \Gamma_{3j} \ni (x, y) \rightarrow -\sqrt{x^2 + y^k} \in \mathbb{R}, \\ \xi_{3j}^{(2)} : \Gamma_{3j} \ni (x, y) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \\ \xi_{3j}^{(3)} : \Gamma_{3j} \ni (x, y) \rightarrow \sqrt{x^2 + y^k} \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

- Si  $k$  es impar:

$$\begin{cases} \Lambda_{11} = \xi_{11}^{(1)} \cup \xi_{11}^{(2)} \cup \xi_{11}^{(3)}, \\ \Lambda_{3j} = \xi_{3j}^{(1)} \cup \xi_{3j}^{(2)} \cup \xi_{3j}^{(3)}, j \in \{1, 2, 3, 5, 6\}, \\ \Lambda_{34} = \xi_{34}^{(1)}. \end{cases}$$

donde

- Grafos asociados a  $\Gamma_{1j}$ ,  $1 \leq j \leq 3$ :

$$\xi_{1j}^{(1)} : \Gamma_{1j} \ni x \rightarrow 0 \in \mathbb{R},$$

- Grafos asociados a  $\Gamma_{3j}$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 5, 6\}$ :

$$\begin{cases} \xi_{3j}^{(1)} : \Gamma_{3j} \ni (x, y) \rightarrow -\sqrt{x^2 + y^k} \in \mathbb{R}, \\ \xi_{3j}^{(2)} : \Gamma_{3j} \ni (x, y) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \\ \xi_{3j}^{(3)} : \Gamma_{3j} \ni (x, y) \rightarrow \sqrt{x^2 + y^k} \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

- Grafos asociados a  $\Gamma_{34}$ :

$$\xi_{34}^{(1)} : \Gamma_{34} \ni x \rightarrow 0 \in \mathbb{R},$$

Puesto que  $|\xi_{st}^{(t)}| < \sqrt{2}$ , fijamos el intervalo  $Q = Q' \times (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ . Finalmente tomamos la estratificación distinguida  $\mathcal{C}$  dada por

$$\mathcal{C} = \{\xi_{st}^j\} \cup \{\text{componentes conexas de } Q \setminus \bigcup \xi_{st}^j\}.$$

En particular, la deformación del par de planos es la unión de los siguientes estratos

- Si  $k$  es par:

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= \{(x, y, z) : z^2 - x^2 - y^k = 0\} = \\ &= \xi_{11}^{(1)} \cup \bigcup_{j=1}^4 \xi_{3j}^{(1)} \cup \xi_{3j}^{(3)}.\end{aligned}$$

- Si  $k$  es impar:

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= \{(x, y, z) : z^2 - x^2 - y^k = 0\} = \\ &= \bigcup_{j=1}^3 \xi_{1j}^{(1)} \cup \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq 4}}^6 (\xi_{3j}^{(1)} \cup \xi_{3j}^{(3)}).\end{aligned}$$

### 5.3.4. La deformación del par de planos como conjunto analítico complejo

En este ejemplo vamos a estudiar el conjunto analítico complejo  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : z^2 - x^2 - y^k = 0\}$  en el punto  $(0, 0, 0)$ , es decir, el germen de dicho conjunto en el punto  $(0, 0, 0)$ . Para ello vamos a seguir el estudio que se realizó en la sección del teorema de los ceros de Hilbert. Observamos que  $E = \mathbf{V}(I)$ , donde  $I = (\mathbf{z}^2 - \mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^k)$  es el ideal generado por  $\mathbf{z}^2 - \mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^k$ , el germen de la función  $z^2 - x^2 - y^k$  en el punto  $(0, 0, 0)$ , y el cual es primo. Dada  $f \in \mathcal{O}_3$ , denotaremos su clase en el cociente  $\mathcal{O}_3/I$  con  $\bar{f}$ . Tenemos que el sistema de coordenadas  $x, y, z$  es regular para el ideal  $I$  puesto que:

- $I \cap \mathcal{O}_2 = (0)$ ,
- $\mathcal{O}_3/I = \mathcal{O}_2[\bar{z}]$  es entero sobre  $\mathcal{O}_2$  dado que  $\mathbf{q}(\bar{z}) = 0$ , para  $\mathbf{q}(T) = T^2 - \mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^k \in \mathcal{O}_2[T]$ ,
- $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_2[\bar{z}]$ .

El discriminante de  $\mathbf{q}(T)$  es  $\mathbf{D} = 4(\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^k) \in \mathcal{O}_2$ . Sean los polidiscos  $\Delta = \Delta((0, 0, 0) : (1, 1, \sqrt{2}))$  y  $\Delta_2 = \Delta((0, 0) : (1, 1))$ . Sean  $q(T) = T^2 - x^2 - y^k$  y  $D = 4(x^2 + y^k)$  representantes de  $\mathbf{q}(T)$  y  $\mathbf{D}$  en el polidisco  $\Delta$ . Observamos que para todo  $(x, y) \in \Delta_2$  si  $q(z) = 0$  entonces  $|z| < \sqrt{2}$ . Por tanto, los elementos anteriormente descritos forman una representación admisible de  $I$ . Así pues, el conjunto

$$V \setminus V(D) = \{(x, y, z) \in \Delta : z^2 - x^2 - y^k = 0, x^2 + y^k \neq 0\}$$

es una subvariedad compleja conexa de dimensión 2 y la proyección natural

$$\pi : V \setminus V(D) \rightarrow \Delta_2 \setminus V(D)$$

es un recubrimiento finito de 2 hojas.

Sean  $U_1 = \{re^{i\theta} : 0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi\}$  y  $U_2 = \{re^{i\theta} : 0 < r < 1, -\pi < \theta < \pi\}$ . Sea  $g(x, y) = x^2 + y^k$ . Tenemos entonces que

$$\Delta_2 \setminus V(D) = g^{-1}(U_1) \cup g^{-1}(U_2)$$

Consideremos las funciones holomorfas,

$$\begin{cases} f_1(re^{i\theta}) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}, (r, \theta) \in U_1, \\ f_2(re^{i\theta}) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}, (r, \theta) \in U_2. \end{cases}$$

Así pues, podemos describir ambas hojas en dos trozos,

$$\begin{cases} \varphi_1 : g^{-1}(U_1) \ni (x, y) \rightarrow (x, y, f_1(g(x, y))) \in g^{-1}(U_1) \times \mathbb{C}, \\ \varphi_2 : g^{-1}(U_1) \ni (x, y) \rightarrow (x, y, -f_1(g(x, y))) \in g^{-1}(U_1) \times \mathbb{C}, \\ \psi_1 : g^{-1}(U_2) \ni (x, y) \rightarrow (x, y, f_2(g(x, y))) \in g^{-1}(U_2) \times \mathbb{C}, \\ \psi_2 : g^{-1}(U_2) \ni (x, y) \rightarrow (x, y, -f_2(g(x, y))) \in g^{-1}(U_2) \times \mathbb{C}. \end{cases}$$

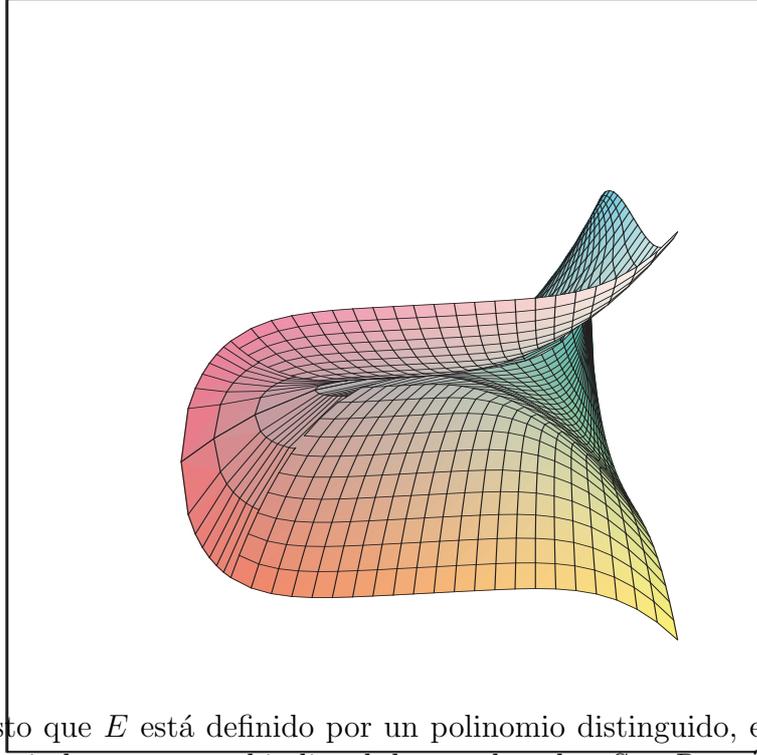
## 5.4. La singularidad de Brieskorn y sus explosiones

En esta sección estudiaremos localmente los conjuntos descritos por las siguientes ecuaciones desde el punto de vista real y desde el punto de vista complejo,

$$\begin{cases} \text{Singularidad de Brieskorn: } z^2 - x^3 - y^5 = 0, \\ \text{Explosión A de la singularidad de Brieskorn: } z^2 - x^3 - xy^3 = 0, \\ \text{Explosión B de la singularidad de Brieskorn: } z^2 - x^3 - y^4 = 0. \end{cases}$$

### 5.4.1. La singularidad de Brieskorn como conjunto analítico real

En este ejemplo aplicaremos el teorema de estratificaciones distinguidas al conjunto analítico real  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^3 - y^5 = 0\}$  en el punto  $(0, 0, 0)$ .



Puesto que  $E$  está definido por un polinomio distinguido, en un primer momento no es necesario hacer un cambio lineal de coordenadas. Sea  $R = z^2 - x^3 - y^5$ . Entonces

$$P = \frac{1}{2}R \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{2}(z^2 - x^3 + y^5)2z = z(z^2 - x^3 - y^5) = z^3 - (x^3 + y^5)z.$$

Denotamos  $c_3 = c_1 = 0$ ,  $c_2 = -x^3 - y^5$ . Sean

$$\begin{cases} A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \#\{z : P(x, y, z) = 0\} = 1\}, \\ A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \#\{z : P(x, y, z) = 0\} = 2\}, \\ A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \#\{z : P(x, y, z) = 0\} = 3\}. \end{cases}$$

Utilizando un programa de ordenador obtenemos que

$$\begin{cases} D_0(T_1, T_2, T_3) = T_3(-27T_3 + 18T_1T_2 - 4T_1^3) + T_2^2(-4T_2 + T_1^2), \\ D_1(T_1, T_2, T_3) = -6T_2 + 2T_1^2. \end{cases}$$

Sean  $Z_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \#\{z : P(x, y, z) = 0\} \leq i\}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : D_0(c_1, c_2, c_3) = D_1(c_1, c_2, c_3) = 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^5 = 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : D_0(c_1, c_2, c_3) = 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^5 = 0\}. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{cases} A_1 = Z_1 = \{x^3 + y^5 = 0\}, \\ A_2 = Z_2 \setminus Z_1 = \emptyset, \\ A_3 = \mathbb{R}^2 \setminus Z_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^5 \neq 0\}. \end{cases}$$

Por el teorema de estratificaciones distinguidas existe una estratificación  $\mathcal{C}'$  en un intervalo abierto  $Q'$  de  $0 \in \mathbb{R}^2$  compatible con  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ . Para hacer esta estratificación debemos volver a aplicar la demostración del teorema de estratificaciones distinguidas. Utilizaremos un tipo de letra más pequeño para diferenciarla de la estratificación que estamos llevando a cabo.

En primer lugar, tenemos que los conjuntos  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  están descritos por el polinomio distinguido  $\tilde{R} = x^3 + y^5$ . Como el polinomio  $\tilde{R}$  es distinguido, no hace falta hacer un cambio de coordenadas. Sea

$$\tilde{P} = \frac{1}{2}\tilde{R}\frac{\partial\tilde{R}}{\partial y} = (x^3 + y^5)y^{10}.$$

Sean  $\tilde{A}_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \#\{z : \tilde{P}(x, y) = 0\} = i\}$  para  $i = 1, \dots, 50$ . Tenemos que  $c_{40} = x^3$  y  $c_i = 0$  para  $i \neq 40$ . Llegados a este punto, el cálculo de los discriminantes generalizados resulta tedioso incluso con el ordenador. Por eso vamos a calcular los  $\tilde{A}_i$  directamente. Sean  $Z_i = \{u \in \mathbb{R} : \#\{z : \tilde{P}(u, v) = 0\} \leq i\}$ ,  $1 \leq i \leq 50$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{x \in \mathbb{R} : x = 0\} \\ Z_2 &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} \\ Z_i &= \mathbb{R}^2, \forall i \geq 3 \end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$\begin{cases} \tilde{A}_1 = Z_1 = \{x = 0\}, \\ \tilde{A}_2 = Z_2 \setminus Z_1 = \{x \neq 0\}, \\ \tilde{A}_i = \emptyset, \forall i \geq 3. \end{cases}$$

Obtener una estratificación  $\mathcal{C}''$  compatible con los  $\tilde{A}_i$  es inmediato. Vamos a tomar como intervalo  $Q'' = (-1, 1)$ . Tomemos  $\mathcal{C}'' = \{(-1, 0), \{0\}, (0, 1)\}$ . Tenemos entonces que  $\tilde{A}_1 = \{0\} = \tilde{\Gamma}_{11}$  y  $\tilde{A}_2 = (-1, 0) \cup (0, 1) = \tilde{\Gamma}_{21} \cup \tilde{\Gamma}_{22}$ . Los conjuntos  $\tilde{\Lambda}_{it} = \{(x, y) \in \tilde{\Gamma}_{it} \times \mathbb{R} : \tilde{P}(x, y) = 0\}$  son de la forma

$$\tilde{\Lambda}_{11} = \tilde{\xi}_{11}^{(1)}, \quad \tilde{\Lambda}_{21} = \tilde{\xi}_{21}^{(1)} \cup \tilde{\xi}_{21}^{(2)}, \quad \tilde{\Lambda}_{22} = \tilde{\xi}_{22}^{(1)} \cup \tilde{\xi}_{22}^{(2)},$$

donde

- Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{11}$ :

$$\tilde{\xi}_{11}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{11} \ni 0 \rightarrow 0 \in \mathbb{R}$$

- Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{21}$ :

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_{21}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{21} \ni x \rightarrow 0 \in \mathbb{R} \\ \tilde{\xi}_{21}^{(2)} : \tilde{\Gamma}_{21} \ni x \rightarrow -x^{3/5} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

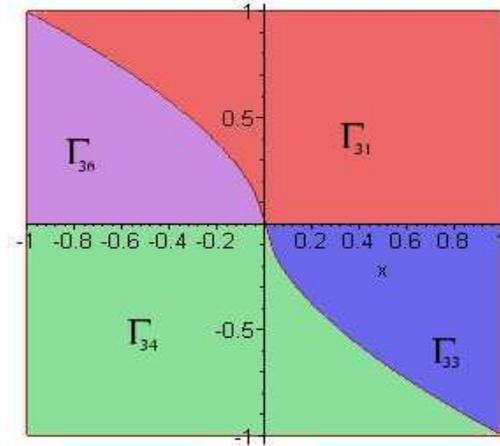
- Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{22}$ :

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_{22}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{22} \ni x \rightarrow -x^{3/5} \in \mathbb{R} \\ \tilde{\xi}_{22}^{(2)} : \tilde{\Gamma}_{22} \ni x \rightarrow 0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Tomemos  $Q' = Q'' \times (-1, 1)$ . Finalmente, sea

$$C' = \{\tilde{\xi}_{it}^j\} \cup \{\text{componentes conexas de } Q' \setminus \bigcup \tilde{\xi}_{it}^j\}$$

nuestra estratificación distinguida, la cual representamos en el siguiente dibujo:



Siguiendo la notación del teorema obtenemos que

$$\begin{cases} A_1 = \Gamma_{11} \cup \Gamma_{12} \cup \Gamma_{13} \\ A_3 = \Gamma_{31} \cup \Gamma_{32} \cup \Gamma_{33} \cup \Gamma_{34} \cup \Gamma_{35} \cup \Gamma_{36}. \end{cases}$$

donde  $\Gamma_{31}$ ,  $\Gamma_{33}$ ,  $\Gamma_{34}$  y  $\Gamma_{36}$  son los de los dibujos y  $\Gamma_{32} = \tilde{\xi}_{22}^{(2)}$ ,  $\Gamma_{35} = \tilde{\xi}_{21}^{(1)}$ ,  $\Gamma_{11} = \tilde{\xi}_{11}^{(1)}$ ,  $\Gamma_{12} = \tilde{\xi}_{21}^{(1)}$  y  $\Gamma_{13} = \tilde{\xi}_{22}^{(2)}$ .

En lo que sigue utilizaremos la notación que se emplea en la estratificación de los conjuntos  $A_i$ . Tenemos que los conjuntos  $\Lambda_{st} = \{(u, v, z) \in \Gamma_{st} \times \mathbb{R} : P(u, v, z) = 0\}$  son de la forma

$$\Lambda_{11} = \xi_{11}^{(1)}, \quad \Lambda_{12} = \xi_{12}^{(1)}, \quad \Lambda_{13} = \xi_{13}^{(1)}, \quad \begin{cases} \Lambda_{31} = \xi_{31}^{(1)} \cup \xi_{31}^{(2)} \cup \xi_{31}^{(3)} \\ \Lambda_{32} = \xi_{32}^{(1)} \cup \xi_{32}^{(2)} \cup \xi_{32}^{(3)} \\ \Lambda_{33} = \xi_{33}^{(1)} \cup \xi_{33}^{(2)} \cup \xi_{33}^{(3)} \end{cases},$$

donde

- Grafos asociados a  $\Gamma_{11}$ :  
 $\xi_{11}^{(1)} : \Gamma_{11} \ni 0 \rightarrow 0 \in \mathbb{R}$ ,
- Grafos asociados a  $\Gamma_{12}$ :  
 $\xi_{12}^{(1)} : \Gamma_{12} \ni 0 \rightarrow 0 \in \mathbb{R}$ ,
- Grafos asociados a  $\Gamma_{13}$ :  
 $\xi_{13}^{(1)} : \Gamma_{13} \ni 0 \rightarrow 0 \in \mathbb{R}$ ,
- Grafos asociados a  $\Gamma_{31}$ :  

$$\begin{cases} \xi_{31}^{(1)} : \Gamma_{31} \ni (x, y) \rightarrow -\sqrt{x^3 + y^5} \in \mathbb{R}, \\ \xi_{31}^{(2)} : \Gamma_{31} \ni (x, y) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \\ \xi_{31}^{(3)} : \Gamma_{31} \ni (x, y) \rightarrow \sqrt{x^3 + y^5} \in \mathbb{R}, \end{cases}$$
- Grafos asociados a  $\Gamma_{32}$ :  

$$\begin{cases} \xi_{32}^{(1)} : \Gamma_{32} \ni (x, y) \rightarrow -\sqrt{x^3 + y^5} \in \mathbb{R}, \\ \xi_{32}^{(2)} : \Gamma_{32} \ni (x, y) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \\ \xi_{32}^{(3)} : \Gamma_{32} \ni (x, y) \rightarrow \sqrt{x^3 + y^5} \in \mathbb{R}, \end{cases}$$
- Grafos asociados a  $\Gamma_{33}$ :  

$$\begin{cases} \xi_{33}^{(1)} : \Gamma_{33} \ni (x, y) \rightarrow -\sqrt{x^3 + y^5} \in \mathbb{R}, \\ \xi_{33}^{(2)} : \Gamma_{33} \ni (x, y) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \\ \xi_{33}^{(3)} : \Gamma_{33} \ni (x, y) \rightarrow \sqrt{x^3 + y^5} \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Puesto que  $|\xi_{st}^{(t)}| < \sqrt{2}$ , fijamos el intervalo  $Q = Q' \times (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ . Finalmente tomamos la estratificación distinguida  $\mathcal{C}$  dada por

$$\mathcal{C} = \{\xi_{st}^j\} \cup \{\text{componentes conexas de } Q \setminus \bigcup \xi_{st}^j\}.$$

En particular, la singularidad de Brieskorn es la unión de los siguientes estratos

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \{(x, y, z) : z^2 - x^3 - y^5 = 0\} = \\ &= \xi_{11}^{(1)} \cup \xi_{12}^{(1)} \cup \xi_{13}^{(1)} \cup \xi_{31}^{(1)} \cup \xi_{31}^{(3)} \cup \xi_{32}^{(1)} \cup \xi_{32}^{(3)} \cup \xi_{33}^{(1)} \cup \xi_{33}^{(3)}. \end{aligned}$$

#### 5.4.2. La singularidad de Brieskorn como conjunto analítico complejo

En este ejemplo estudiaremos el conjunto analítico complejo  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : z^2 - x^3 - y^5 = 0\}$  en el punto  $(0, 0, 0)$ , es decir, el germen de dicho conjunto en el punto  $(0, 0, 0)$ . Para ello vamos a seguir el estudio que se realizó en la sección del teorema de los ceros de Hilbert. Observamos que  $E = \mathbf{V}(I)$ , donde  $I = (\mathbf{z}^2 - \mathbf{x}^3 - \mathbf{y}^5)$  es el ideal generado por  $\mathbf{z}^2 - \mathbf{x}^3 - \mathbf{y}^5$ , el germen de la función  $z^2 - x^3 - y^5$  en el punto  $(0, 0, 0)$ , y el cual es primo. Dada  $f \in \mathcal{O}_3$ , denotaremos su clase en el cociente  $\mathcal{O}_3/I$  con  $\bar{f}$ . Tenemos que el sistema de coordenadas  $x, y, z$  es regular para el ideal  $I$  puesto que:

- i)  $I \cap \mathcal{O}_2 = (0)$ ,
- ii)  $\mathcal{O}_3/I = \mathcal{O}_2[\bar{z}]$  es entero sobre  $\mathcal{O}_2$  dado que  $\mathbf{q}(\bar{z}) = 0$ , para  $\mathbf{q}(T) = T^2 - \mathbf{x}^3 - \mathbf{y}^5 \in \mathcal{O}_2[T]$ ,
- iii)  $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_2[\bar{z}]$ .

El discriminante de  $\mathbf{q}(T)$  es  $\mathbf{D} = 4(\mathbf{x}^3 + \mathbf{y}^5) \in \mathcal{O}_2$ . Sean los polidiscos  $\Delta = \Delta((0, 0, 0) : (1, 1, \sqrt{2}))$  y  $\Delta_2 = \Delta((0, 0) : (1, 1))$ . Sean  $q(T) = T^2 - x^3 - y^5$  y  $D = 4(x^3 + y^5)$  representantes de  $\mathbf{q}(T)$  y  $\mathbf{D}$  en el polidisco  $\Delta$ . Observamos que para todo  $(x, y) \in \Delta_2$  si  $q(z) = 0$  entonces  $|z| < \sqrt{2}$ . Por tanto, los elementos anteriormente descritos forman una representación admisible de  $I$ . Así pues, el conjunto

$$V \setminus V(D) = \{(x, y, z) \in \Delta : z^2 - x^3 - y^5 = 0, x^3 + y^5 \neq 0\}$$

es una subvariedad compleja conexa de dimensión 2 y la proyección natural

$$\pi : V \setminus V(D) \rightarrow \Delta_2 \setminus V(D)$$

es un recubrimiento finito de 2 hojas.

Sean  $U_1 = \{re^{i\theta} : 0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi\}$  y  $U_2 = \{re^{i\theta} : 0 < r < 1, -\pi < \theta < \pi\}$ . Sea  $g(x, y) = x^3 + y^5$ . Tenemos entonces que

$$\Delta_2 \setminus V(D) = g^{-1}(U_1) \cup g^{-1}(U_2)$$

Consideremos las funciones holomorfas,

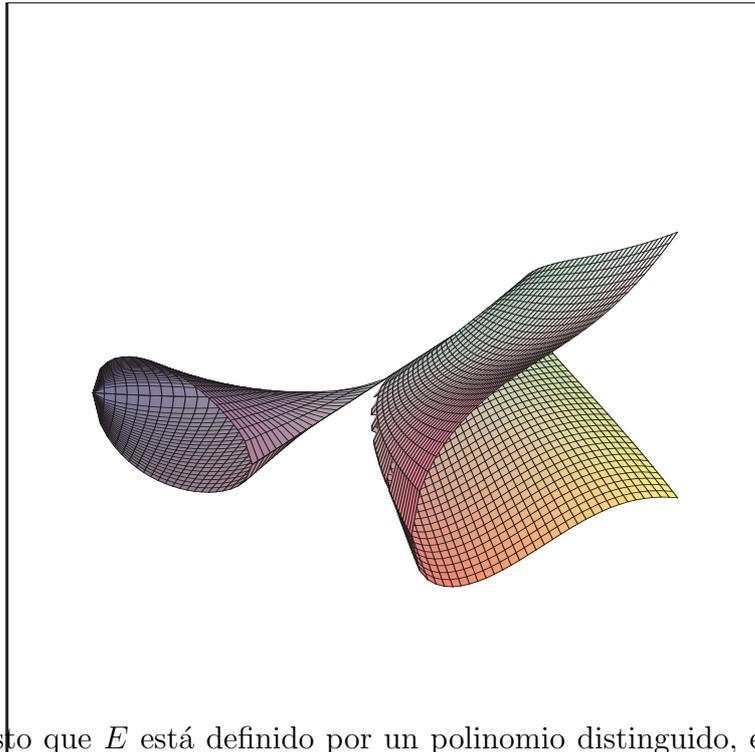
$$\begin{cases} f_1(re^{i\theta}) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}, (r, \theta) \in U_1, \\ f_2(re^{i\theta}) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}, (r, \theta) \in U_2. \end{cases}$$

Así pues, podemos describir ambas hojas en dos trozos,

$$\begin{cases} \varphi_1 : g^{-1}(U_1) \ni (x, y) \rightarrow (x, y, f_1(g(x, y))) \in g^{-1}(U_1) \times \mathbb{C}, \\ \varphi_2 : g^{-1}(U_1) \ni (x, y) \rightarrow (x, y, -f_1(g(x, y))) \in g^{-1}(U_1) \times \mathbb{C}, \\ \psi_1 : g^{-1}(U_2) \ni (x, y) \rightarrow (x, y, f_2(g(x, y))) \in g^{-1}(U_2) \times \mathbb{C}, \\ \psi_2 : g^{-1}(U_2) \ni (x, y) \rightarrow (x, y, -f_2(g(x, y))) \in g^{-1}(U_2) \times \mathbb{C}. \end{cases}$$

### 5.4.3. La explosión A de la singularidad de Brieskorn como conjunto analítico real

En este ejemplo aplicaremos el teorema de estratificaciones distinguidas al caso particular del conjunto analítico  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^3 - xy^3 = 0\}$  en el punto  $(0, 0, 0)$ .



Puesto que  $E$  está definido por un polinomio distinguido, en un primer momento no es necesario hacer un cambio lineal de coordenadas. Sea  $R = z^2 - x^3 - xy^3$ . Entonces

$$P = \frac{1}{2}R\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{2}(z^2 - x^3 - xy^3)2z = z(z^2 - x^3 - xy^3) = z^3 - (x^3 + xy^3)z.$$

Siguiendo la notación del teorema,  $c_3 = c_1 = 0$ ,  $c_2 = -x^3 - xy^3$ . Sean

$$\begin{cases} A'_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \#\{z : P(x, y, z) = 0\} = 1\}, \\ A'_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \#\{z : P(x, y, z) = 0\} = 2\}, \\ A'_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \#\{z : P(x, y, z) = 0\} = 3\}. \end{cases}$$

Utilizando un programa de ordenador obtenemos que

$$\begin{cases} D_0(T_1, T_2, T_3) = T_3(-27T_3 + 18T_1T_2 - 4T_1^3) + T_2^2(-4T_2 + T_1^2), \\ D_1(T_1, T_2, T_3) = -6T_2 + 2T_1^2. \end{cases}$$

Sean  $Z_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \#\{z : P(x, y, z) = 0\} \leq i\}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : D_0(c_1, c_2, c_3) = D_1(c_1, c_2, c_3) = 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + xy^3 = 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : D_0(c_1, c_2, c_3) = 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + xy^3 = 0\}. \end{aligned}$$

Así pues

$$\begin{cases} A'_1 = Z_1 = \{x^3 + xy^3 = 0\}, \\ A'_2 = Z_2 \setminus Z_1 = \emptyset, \\ A'_3 = \mathbb{R}^2 \setminus Z_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + xy^3 \neq 0\}. \end{cases}$$

Por el teorema de estratificaciones distinguidas existe una estratificación  $\mathcal{C}'$  en un intervalo abierto  $Q'$  de  $0 \in \mathbb{R}^2$  compatible con  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ . Para hacer esta estratificación debemos volver a aplicar la demostración del teorema de estratificaciones distinguidas. Utilizaremos un tipo de letra más pequeño para diferenciarla de la estratificación que estamos llevando a cabo.

En primer lugar, tenemos que los conjuntos  $A'_1$ ,  $A'_2$  y  $A'_3$  está descrito por el polinomio distinguido  $\tilde{R} = x^3 + xy^3$ . Como el polinomio  $\tilde{R}$  no es distinguido, debemos hacer un cambio de coordenadas adecuado para que dicho polinomio sea distinguido. Escojamos el cambio lineal dado por

$$(u, v) = H(x, y) = (y, x).$$

Obtenemos que  $\tilde{R} = u^3v + v^3$ . Sea

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \frac{1}{18} \tilde{R} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial v} \frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial v^2} = \\ &= \frac{1}{18} (u^3v + v^3)(u^3 + 3v^2)(6v). \end{aligned}$$

Utilizando la notación del teorema, tenemos que  $c_1 = c_3 = c_5 = c_6 = 0$ ,  $c_2 = \frac{4}{3}u^3$ ,  $c_4 = \frac{1}{3}u^6$ . Sean  $\tilde{A}_i = \{(u, v) \in \mathbb{R} : \#\{z : \tilde{P}(u, v) = 0\} = i\}$ . Utilizando un programa de ordenador podemos calcular los discriminantes generalizados. Si sustituimos en dichos discriminantes nuestros coeficientes  $c_i$  obtenemos

$$\begin{aligned} D_0(c_1, \dots, c_6) = 0, \quad D_1(c_1, \dots, c_6) &= \frac{512}{2187}u^{30}, \quad D_2(c_1, \dots, c_6) = \frac{896}{243}u^{18}, \\ D_3(c_1, \dots, c_6) &= -\frac{448}{27}u^9, \quad D_4(c_1, \dots, c_6) = -16u^3. \end{aligned}$$

Sean  $Z_i = \{u \in \mathbb{R} : \#\{z : \tilde{P}(u, v) = 0\} \leq i\}$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{u \in \mathbb{R} : D_0(c_1, \dots, c_6) = \dots = D_4(c_1, \dots, c_6) = 0\} = \{u \in \mathbb{R} : u = 0\}, \\ Z_2 &= \{u \in \mathbb{R} : D_0(c_1, \dots, c_6) = \dots = D_3(c_1, \dots, c_6) = 0\} = \{u \in \mathbb{R} : u = 0\}, \\ Z_3 &= \{u \in \mathbb{R} : D_0(c_1, \dots, c_6) = \dots = D_2(c_1, \dots, c_6) = 0\} = \{u \in \mathbb{R} : u = 0\} \\ Z_4 &= \{u \in \mathbb{R} : D_0(c_1, \dots, c_6) = D_1(c_1, \dots, c_6) = 0\} = \{u \in \mathbb{R} : u = 0\}, \\ Z_5 &= \{u \in \mathbb{R} : D_0(c_1, \dots, c_6) = 0\} = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{cases} \tilde{A}_1 = Z_1 = \{u = 0\}, \\ \tilde{A}_2 = Z_2 \setminus Z_1 = \emptyset, \\ \tilde{A}_3 = Z_3 \setminus Z_2 = \emptyset, \\ \tilde{A}_4 = Z_4 \setminus Z_3 = \emptyset, \\ \tilde{A}_5 = Z_5 \setminus Z_4 = \{u \neq 0\}, \\ \tilde{A}_6 = \mathbb{R} \setminus Z_5 = \emptyset \end{cases}$$

Obtener una estratificación  $\mathcal{C}''$  compatible con los  $\tilde{A}_i$  es inmediato. Vamos a tomar como intervalo  $Q'' = (-1, 1)$ . Sea  $\mathcal{C}'' = \{(-1, 0), \{0\}, (0, 1)\}$  y denotemos  $\tilde{\Gamma}_{11} = \{0\}$ ,  $\tilde{\Gamma}_{51} = (-1, 0)$  y  $\tilde{\Gamma}_{52} = (0, 1)$ . Los conjuntos  $\tilde{\Lambda}_{it} = \{(u, v) \in \tilde{\Gamma}_{it} \times \mathbb{R} : \tilde{P}(u, v) = 0\}$  son de la forma

$$\begin{cases} \tilde{\Lambda}_{11} = \tilde{\xi}_{11}^{(1)}, \\ \tilde{\Lambda}_{51} = \tilde{\xi}_{51}^{(1)} \cup \tilde{\xi}_{51}^{(2)} \cup \tilde{\xi}_{51}^{(3)} \cup \tilde{\xi}_{51}^{(4)} \cup \tilde{\xi}_{51}^{(5)}, \\ \tilde{\Lambda}_{52} = \tilde{\xi}_{52}^{(1)}, \end{cases}$$

donde

- *Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{11}$ :*

$$\tilde{\xi}_{11}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{11} \ni u \rightarrow 0 \in \mathbb{R},$$

- *Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{51}$ :*

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_{51}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{51} \ni u \rightarrow -\sqrt{-u^3} \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\xi}_{51}^{(2)} : \tilde{\Gamma}_{51} \ni u \rightarrow -\sqrt{-\frac{u^3}{3}} \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\xi}_{51}^{(3)} : \tilde{\Gamma}_{51} \ni u \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\xi}_{51}^{(4)} : \tilde{\Gamma}_{51} \ni u \rightarrow \sqrt{-\frac{u^3}{3}} \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\xi}_{51}^{(5)} : \tilde{\Gamma}_{51} \ni u \rightarrow \sqrt{-u^3} \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

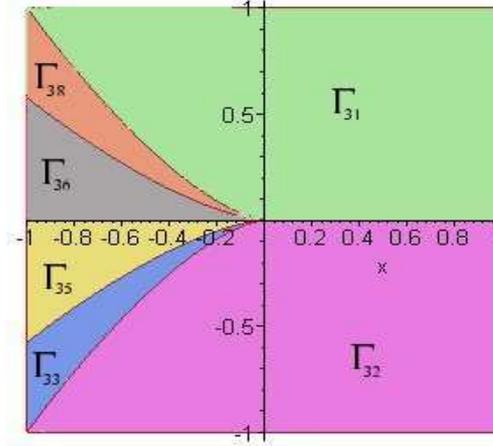
- *Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{52}$ :*

$$\tilde{\xi}_{52}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{52} \ni u \rightarrow 0 \in \mathbb{R}.$$

Tomemos  $Q' = Q'' \times (-1, 1)$ . Finalmente, sea

$$\mathcal{C}' = \{\tilde{\xi}_{it}^j\} \cup \{\text{componentes conexas de } Q' \setminus \bigcup \tilde{\xi}_{it}^j\}$$

nuestra estratificación distinguida, la cual representamos en el siguiente dibujo:



Si denotamos con  $A_i$  a los conjuntos  $H(A'_i)$ , tenemos que, siguiendo la notación del teorema,

$$\begin{cases} A_1 = \Gamma_{11} \cup \Gamma_{12} \cup \Gamma_{13} \cup \Gamma_{14}, \\ A_3 = \Gamma_{31} \cup \Gamma_{32} \cup \Gamma_{33} \cup \Gamma_{34} \cup \Gamma_{35} \cup \Gamma_{36} \cup \Gamma_{37}, \end{cases}$$

donde  $\Gamma_{31}, \Gamma_{32}, \Gamma_{33}, \Gamma_{35}, \Gamma_{36}, \Gamma_{38}$  son los de los dibujos y  $\Gamma_{34} = \tilde{\xi}_{51}^{(2)}, \Gamma_{37} = \tilde{\xi}_{51}^{(4)}, \Gamma_{11} = \tilde{\xi}_{52}^{(1)}, \Gamma_{12} = \tilde{\xi}_{51}^{(1)}, \Gamma_{13} = \tilde{\xi}_{52}^{(3)}, \Gamma_{14} = \tilde{\xi}_{51}^{(5)}$ .

En lo que sigue utilizaremos la notación que se emplea en estratificación de los conjuntos  $A_i$ . Tenemos que los conjuntos  $\Lambda_{st} = \{(u, v, z) \in \Gamma_{st} \times \mathbb{R} : P(u, v, z) = 0\}$  son de la forma

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} &= \xi_{11}^{(1)}, & \Lambda_{12} &= \xi_{12}^{(1)}, & \Lambda_{13} &= \xi_{13}^{(1)}, & \Lambda_{14} &= \xi_{14}^{(1)}, \\ & & & & & & & \left\{ \begin{aligned} \Lambda_{31} &= \xi_{31}^{(1)} \cup \xi_{31}^{(2)} \cup \xi_{31}^{(3)}, \\ \Lambda_{32} &= \xi_{32}^{(1)}, \\ \Lambda_{33} &= \xi_{33}^{(1)} \cup \xi_{33}^{(2)} \cup \xi_{33}^{(3)}, \\ \Lambda_{34} &= \xi_{34}^{(1)} \cup \xi_{34}^{(2)} \cup \xi_{34}^{(3)}, \\ \Lambda_{35} &= \xi_{35}^{(1)} \cup \xi_{35}^{(2)} \cup \xi_{35}^{(3)}, \\ \Lambda_{36} &= \xi_{36}^{(1)}, \\ \Lambda_{37} &= \xi_{37}^{(1)}, \\ \Lambda_{38} &= \xi_{38}^{(1)}, \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

donde

- *Grafos asociados a  $\Gamma_{11}$ :*  $\xi_{11}^{(1)} : \Gamma_{11} \ni (u, v) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}$ ,
- *Grafos asociados a  $\Gamma_{12}$ :*  $\xi_{12}^{(1)} : \Gamma_{12} \ni (u, v) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}$ ,
- *Grafos asociados a  $\Gamma_{13}$ :*  $\xi_{13}^{(1)} : \Gamma_{13} \ni (u, v) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}$ ,

- Grafos asociados a  $\Gamma_{14}$ :

$$\xi_{14}^{(1)} : \Gamma_{14} \ni (u, v) \rightarrow 0 \in \mathbb{R},$$

- Grafos asociados a  $\Gamma_{31}$ :

$$\begin{cases} \xi_{31}^{(1)} : \Gamma_{31} \ni (u, v) \rightarrow -\sqrt{v^3 + vu^3} \in \mathbb{R}, \\ \xi_{31}^{(2)} : \Gamma_{31} \ni (u, v) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \\ \xi_{31}^{(3)} : \Gamma_{31} \ni (u, v) \rightarrow \sqrt{v^3 + vu^3} \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

- Grafos asociados a  $\Gamma_{32}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{32}^{(1)} : \Gamma_{32} \ni (u, v) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \end{array} \right.$$

- Grafos asociados a  $\Gamma_{33}$ :

$$\begin{cases} \xi_{33}^{(1)} : \Gamma_{33} \ni (u, v) \rightarrow -\sqrt{v^3 + vu^3} \in \mathbb{R}, \\ \xi_{33}^{(2)} : \Gamma_{33} \ni (u, v) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \\ \xi_{33}^{(3)} : \Gamma_{33} \ni (u, v) \rightarrow \sqrt{v^3 + vu^3} \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

- Grafos asociados a  $\Gamma_{34}$ :

$$\begin{cases} \xi_{34}^{(1)} : \Gamma_{34} \ni (u, v) \rightarrow -\sqrt{v^3 + vu^3} \in \mathbb{R}, \\ \xi_{34}^{(2)} : \Gamma_{34} \ni (u, v) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \\ \xi_{34}^{(3)} : \Gamma_{34} \ni (u, v) \rightarrow \sqrt{v^3 + vu^3} \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

- Grafos asociados a  $\Gamma_{35}$ :

$$\begin{cases} \xi_{35}^{(1)} : \Gamma_{35} \ni (u, v) \rightarrow -\sqrt{v^3 + vu^3} \in \mathbb{R}, \\ \xi_{35}^{(2)} : \Gamma_{35} \ni (u, v) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \\ \xi_{35}^{(3)} : \Gamma_{35} \ni (u, v) \rightarrow \sqrt{v^3 + vu^3} \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

- Grafos asociados a  $\Gamma_{36}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{36}^{(1)} : \Gamma_{36} \ni (u, v) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \end{array} \right.$$

- Grafos asociados a  $\Gamma_{37}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{37}^{(1)} : \Gamma_{37} \ni (u, v) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \end{array} \right.$$

- Grafos asociados a  $\Gamma_{38}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{38}^{(1)} : \Gamma_{38} \ni (u, v) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Observamos que  $|\xi_{st}^{(t)}| < \sqrt{2}$  y por tanto fijamos el intervalo  $Q = Q' \times (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ . Finalmente tomamos la estratificación distinguida  $\mathcal{C}$  dada por

$$\mathcal{C} = \{\xi_{st}^j\} \cup \{\text{componentes conexas de } Q \setminus \bigcup \xi_{st}^j\}.$$

En particular, esta explosión de la singularidad de Brieskorn es la unión de los siguientes estratos

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \{(x, y, z) : z^2 - v^3 - vu^3 = 0\} = \\ &= \xi_{11}^{(1)} \cup \xi_{12}^{(1)} \cup \xi_{13}^{(1)} \cup \xi_{14}^{(1)} \cup \xi_{31}^{(1)} \cup \xi_{31}^{(3)} \cup \xi_{33}^{(1)} \cup \xi_{33}^{(3)} \cup \xi_{34}^{(1)} \cup \xi_{34}^{(3)} \cup \xi_{35}^{(1)} \cup \xi_{35}^{(3)}. \end{aligned}$$

El dibujo de la explosión de la singularidad de Brieskorn es esencialmente el mismo tras el cambio de coordenadas puesto que lo único que hemos hecho es un giro alrededor del eje  $z$  de ángulo  $\frac{\pi}{2}$ .

#### 5.4.4. La explosión A de la singularidad de Brieskorn como conjunto analítico complejo

En este ejemplo estudiaremos el conjunto analítico complejo  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : z^2 - x^3 - xy^3 = 0\}$  en el punto  $(0, 0, 0)$ , es decir, el germen de dicho conjunto en el punto  $(0, 0, 0)$ . Para ello vamos a seguir el estudio que se realizó en la sección del teorema de los ceros de Hilbert. Observamos que  $E = \mathbf{V}(I)$ , donde  $I = (\mathbf{z}^2 - \mathbf{x}^3 - \mathbf{xy}^3)$  es el ideal generado por  $\mathbf{z}^2 - \mathbf{x}^3 - \mathbf{xy}^3$ , el germen de la función  $z^2 - x^3 - xy^3$  en el punto  $(0, 0, 0)$ , y el cual es primo. Dada  $f \in \mathcal{O}_3$ , denotaremos su clase en el cociente  $\mathcal{O}_3/I$  con  $\bar{f}$ . Tenemos que el sistema de coordenadas  $x, y, z$  es regular para el ideal  $I$  puesto que:

- i)  $I \cap \mathcal{O}_2 = (0)$ ,
- ii)  $\mathcal{O}_3/I = \mathcal{O}_2[\bar{z}]$  es entero sobre  $\mathcal{O}_2$  dado que  $\mathbf{q}(\bar{z}) = 0$ , para  $\mathbf{q}(T) = T^2 - \mathbf{x}^3 - \mathbf{xy}^3 \in \mathcal{O}_2[T]$ ,
- iii)  $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_2[\bar{z}]$ .

El discriminante de  $\mathbf{q}(T)$  es  $\mathbf{D} = 4(\mathbf{x}^3 + \mathbf{xy}^3) \in \mathcal{O}_2$ . Sean los poldiscos  $\Delta = \Delta((0, 0, 0) : (1, 1, \sqrt{2}))$  y  $\Delta_2 = \Delta((0, 0) : (1, 1))$ . Sean  $q(T) = T^2 - x^3 - xy^3$  y  $D = 4(x^3 + xy^3)$  representantes de  $\mathbf{q}(T)$  y  $\mathbf{D}$  en el poldisco  $\Delta$ . Observamos que para todo  $(x, y) \in \Delta_2$  si  $q(z) = 0$  entonces  $|z| < \sqrt{2}$ . Por tanto, los elementos anteriormente descritos forman una representación admisible de  $I$ . Por tanto el conjunto

$$V \setminus V(D) = \{(x, y, x) \in \Delta : z^2 - x^3 - xy^3 = 0, x^3 + xy^3 \neq 0\}$$

es una subvariedad compleja conexa de dimensión 2 y la proyección natural

$$\pi : V \setminus V(D) \rightarrow \Delta_2 \setminus V(D)$$

es un recubrimiento finito de 2 hojas.

Sean  $U_1 = \{re^{i\theta} : 0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi\}$  y  $U_2 = \{re^{i\theta} : 0 < r < 1, -\pi < \theta < \pi\}$ . Sea  $g(x, y) = x^3 + xy^3$ . Tenemos entonces que

$$\Delta_2 \setminus V(D) = g^{-1}(U_1) \cup g^{-1}(U_2)$$

Consideremos las funciones holomorfas,

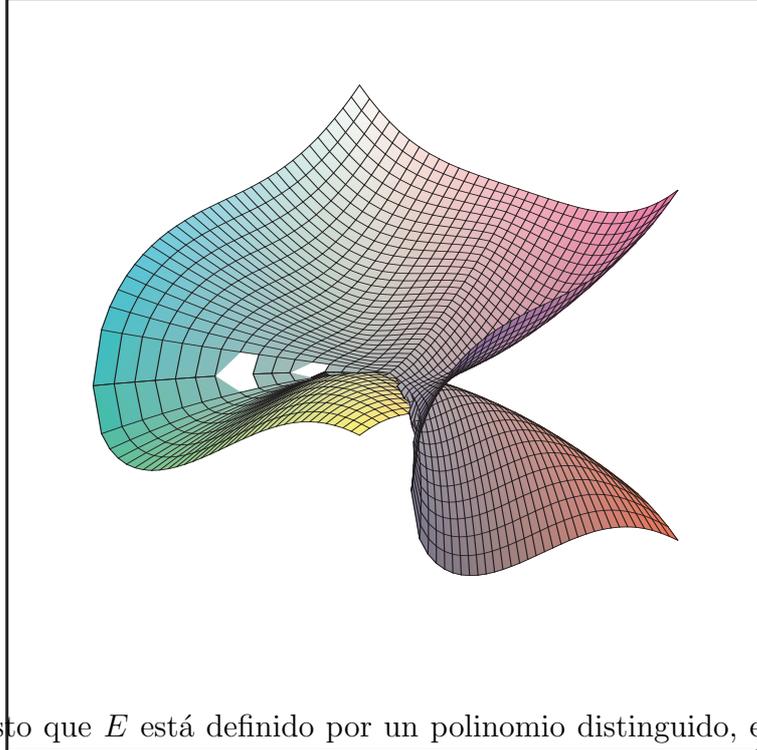
$$\begin{cases} f_1(re^{i\theta}) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}, (r, \theta) \in U_1, \\ f_2(re^{i\theta}) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}, (r, \theta) \in U_2. \end{cases}$$

Así pues, podemos describir ambas hojas en dos trozos,

$$\begin{cases} \varphi_1 : g^{-1}(U_1) \ni (x, y) \rightarrow (x, y, f_1(g(x, y))) \in g^{-1}(U_1) \times \mathbb{C}, \\ \varphi_2 : g^{-1}(U_1) \ni (x, y) \rightarrow (x, y, -f_1(g(x, y))) \in g^{-1}(U_1) \times \mathbb{C}, \\ \psi_1 : g^{-1}(U_2) \ni (x, y) \rightarrow (x, y, f_2(g(x, y))) \in g^{-1}(U_2) \times \mathbb{C}, \\ \psi_2 : g^{-1}(U_2) \ni (x, y) \rightarrow (x, y, -f_2(g(x, y))) \in g^{-1}(U_2) \times \mathbb{C}. \end{cases}$$

### 5.4.5. La explosión B de la singularidad de Brieskorn como conjunto analítico real

En este ejemplo aplicaremos el teorema de estratificaciones distinguidas al caso particular del conjunto analítico  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^3 - y^4 = 0\}$  en el punto  $(0, 0, 0)$ .



Puesto que  $E$  está definido por un polinomio distinguido, en un primer momento no es necesario hacer un cambio lineal de coordenadas. Sea  $R = z^2 - x^3 - y^4$ . Entonces

$$P = \frac{1}{2}R \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{2}(z^2 - x^3 - y^4)2z = z(z^2 - x^3 - y^4) = z^3 - (x^3 + y^4)z.$$

Siguiendo la notación del teorema,  $c_3 = c_1 = 0$ ,  $c_2 = -x^3 - y^4$ . Sean  $A_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \#\{z : P(x, y, z) = 0\} = i\}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Utilizando un programa de ordenador obtenemos que

$$\begin{cases} D_0(T_1, T_2, T_3) = T_3(-27T_3 + 18T_1T_2 - 4T_1^3) + T_2^2(-4T_2 + T_1^2), \\ D_1(T_1, T_2, T_3) = -6T_2 + 2T_1^2. \end{cases}$$

Sean  $Z_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \#\{z : P(x, y, z) = 0\} \leq i\}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : D_0(c_1, c_2, c_3) = D_1(c_1, c_2, c_3) = 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^4 = 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : D_0(c_1, c_2, c_3) = 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^4 = 0\}. \end{aligned}$$

Así pues

$$\begin{cases} A_1 = Z_1 = \{x^3 + y^4 = 0\}, \\ A_2 = Z_2 \setminus Z_1 = \emptyset, \\ A_3 = \mathbb{R}^2 \setminus Z_2 = \{x^3 + y^4 \neq 0\}. \end{cases}$$

Por el teorema de estratificaciones distinguidas existe una estratificación  $\mathcal{C}'$  en un intervalo abierto  $Q'$  de  $0 \in \mathbb{R}^2$  compatible con  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ . Para hacer esta estratificación debemos volver a aplicar la demostración del teorema de estratificaciones distinguidas. Utilizaremos un tipo de letra más pequeño para diferenciarla de la estratificación que estamos llevando a cabo.

En primer lugar, tenemos que los conjuntos  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  están descrito por el polinomio distinguido  $\tilde{R} = x^3 + y^4$ . Como el polinomio  $\tilde{R}$  es distinguido, no es necesario hacer un cambio de coordenadas. Sea

$$\tilde{P} = \frac{1}{2} \tilde{R} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial y} = (x^3 + y^4)y = y^5 + x^3y.$$

Utilizando la notación del teorema, tenemos que  $c_1 = c_2 = c_3 = c_5 = 0$  y  $c_4 = x^3$ . Sean  $\tilde{A}_i = \{(x, y) \in \mathbb{R} : \#\{z : \tilde{P}(x, y) = 0\} = i\}$ ,  $1 \leq i \leq 5$ . Utilizando un programa de ordenador podemos calcular los discriminantes generalizados, que son los mismos que escribimos con anterioridad. Si sustituimos nuestros coeficientes  $c_i$  en dichos discriminantes obtenemos

$$D_0(c_1, \dots, c_5) = 256x^{15}, \quad D_1(c_1, \dots, c_5) = 320x^9,$$

$$D_2(c_1, \dots, c_5) = 0, \quad D_3(c_1, \dots, c_5) = 0.$$

Sean  $Z_i = \{x \in \mathbb{R} : \#\{z : \tilde{P}(x, y) = 0\} \leq i\}$ ,  $1 \leq i \leq 4$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{x \in \mathbb{R} : D_0(c_1, \dots, c_5) = \dots = D_3(c_1, \dots, c_5) = 0\} = \{x = 0\}, \\ Z_2 &= \{x \in \mathbb{R} : D_0(c_1, \dots, c_5) = \dots = D_2(c_1, \dots, c_5) = 0\} = \{x = 0\}, \\ Z_3 &= \{x \in \mathbb{R} : D_0(c_1, \dots, c_5) = D_1(c_1, \dots, c_5) = 0\} = \{x = 0\}, \\ Z_4 &= \{x \in \mathbb{R} : D_0(c_1, \dots, c_5) = 0\} = \{x = 0\}. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{cases} \tilde{A}_1 = Z_1 = \{x = 0\}, \\ \tilde{A}_2 = Z_2 \setminus Z_1 = \emptyset, \\ \tilde{A}_3 = Z_3 \setminus Z_2 = \emptyset, \\ \tilde{A}_4 = Z_4 \setminus Z_3 = \emptyset, \\ \tilde{A}_5 = \mathbb{R} \setminus Z_4 = \{x \neq 0\}. \end{cases}$$

Obtener una estratificación  $\mathcal{C}''$  compatible con los  $\tilde{A}_i$  es inmediato. Vamos a tomar como intervalo  $Q'' = (-1, 1)$ . Sea  $\mathcal{C}'' = \{(-1, 0), \{0\}, (0, 1)\}$  y denotemos  $\tilde{\Gamma}_{11} = \{0\}$ ,  $\tilde{\Gamma}_{51} = (-1, 0)$  y  $\tilde{\Gamma}_{52} = (0, 1)$ . Los conjuntos  $\tilde{\Lambda}_{it} = \{(x, y) \in \tilde{\Gamma}_{it} \times \mathbb{R} : \tilde{P}(x, y) = 0\}$  son de la forma

$$\tilde{\Lambda}_{11} = \tilde{\xi}_{11}^{(1)}, \quad \tilde{\Lambda}_{51} = \tilde{\xi}_{31}^{(1)} \cup \tilde{\xi}_{31}^{(2)} \cup \tilde{\xi}_{31}^{(3)}, \quad \tilde{\Lambda}_{52} = \tilde{\xi}_{52}^{(1)},$$

donde

- Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{11}$ :

$$\tilde{\xi}_{11}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{11} \ni x \rightarrow 0 \in \mathbb{R}$$

- Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{51}$ :

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_{51}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{51} \ni x \rightarrow -\sqrt[4]{-x^3} \in \mathbb{R} \\ \tilde{\xi}_{51}^{(2)} : \tilde{\Gamma}_{51} \ni x \rightarrow 0 \in \mathbb{R} \\ \tilde{\xi}_{51}^{(3)} : \tilde{\Gamma}_{51} \ni x \rightarrow \sqrt[4]{-x^3} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

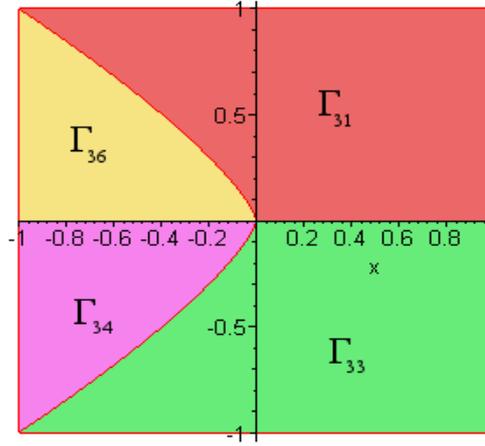
- Grafos asociados a  $\tilde{\Gamma}_{52}$ :

$$\tilde{\xi}_{52}^{(1)} : \tilde{\Gamma}_{52} \ni x \rightarrow 0 \in \mathbb{R}$$

Tomemos  $Q' = Q'' \times (-1, 1)$ . Finalmente, sea

$$\mathcal{C}' = \{\tilde{\xi}_{it}^j\} \cup \{\text{componentes conexas de } Q' \setminus \bigcup \tilde{\xi}_{it}^j\}$$

nuestra estratificación distinguida, la cual representamos en el siguiente dibujo:



En lo que sigue utilizaremos la notación que se emplea en la estratificación de los conjuntos  $A_i$ . Tenemos que los conjuntos  $\Lambda_{st} = \{(u, v, z) \in \Gamma_{st} \times \mathbb{R} : P(u, v, z) = 0\}$  son de la forma

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} &= \xi_{11}^{(1)}, & \Lambda_{12} &= \xi_{12}^{(1)}, & \Lambda_{13} &= \xi_{13}^{(1)}, & \Lambda_{31} &= \xi_{31}^{(1)} \cup \xi_{31}^{(2)} \cup \xi_{31}^{(3)}, & \Lambda_{32} &= \xi_{32}^{(1)} \cup \xi_{32}^{(2)} \cup \xi_{32}^{(3)}, \\ \Lambda_{33} &= \xi_{33}^{(1)} \cup \xi_{33}^{(2)} \cup \xi_{33}^{(3)}, & \Lambda_{34} &= \xi_{34}^{(1)}, & \Lambda_{35} &= \xi_{35}^{(1)}, & \Lambda_{36} &= \xi_{36}^{(1)}, \end{aligned}$$

donde

- Grafos asociados a  $\Gamma_{11}$ :

$$\xi_{11}^{(1)} : \Gamma_{11} \ni (x, y) \rightarrow 0 \in \mathbb{R},$$

- Grafos asociados a  $\Gamma_{12}$ :

$$\xi_{11}^{(1)} : \Gamma_{12} \ni (x, y) \rightarrow 0 \in \mathbb{R},$$

- Grafos asociados a  $\Gamma_{13}$ :

$$\xi_{11}^{(1)} : \Gamma_{13} \ni (x, y) \rightarrow 0 \in \mathbb{R},$$

- *Grafos asociados a  $\Gamma_{31}$ :*

$$\begin{cases} \xi_{31}^{(1)} : \Gamma_{31} \ni (x, y) \rightarrow -\sqrt{x^3 + y^4} \in \mathbb{R}, \\ \xi_{31}^{(2)} : \Gamma_{31} \ni (x, y) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \\ \xi_{31}^{(3)} : \Gamma_{31} \ni (x, y) \rightarrow \sqrt{x^3 + y^4} \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

- *Grafos asociados a  $\Gamma_{32}$ :*

$$\begin{cases} \xi_{32}^{(1)} : \Gamma_{32} \ni (x, y) \rightarrow -\sqrt{x^3 + y^4} \in \mathbb{R}, \\ \xi_{32}^{(2)} : \Gamma_{32} \ni (x, y) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \\ \xi_{32}^{(3)} : \Gamma_{32} \ni (x, y) \rightarrow \sqrt{x^3 + y^4} \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

- *Grafos asociados a  $\Gamma_{33}$ :*

$$\begin{cases} \xi_{33}^{(1)} : \Gamma_{33} \ni (x, y) \rightarrow -\sqrt{x^3 + y^4} \in \mathbb{R}, \\ \xi_{33}^{(2)} : \Gamma_{33} \ni (x, y) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \\ \xi_{33}^{(3)} : \Gamma_{33} \ni (x, y) \rightarrow \sqrt{x^3 + y^4} \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

- *Grafos asociados a  $\Gamma_{34}$ :*

$$\xi_{34}^{(1)} : \Gamma_{34} \ni (x, y) \rightarrow 0 \in \mathbb{R},$$

- *Grafos asociados a  $\Gamma_{35}$ :*

$$\xi_{35}^{(1)} : \Gamma_{35} \ni (x, y) \rightarrow 0 \in \mathbb{R},$$

- *Grafos asociados a  $\Gamma_{36}$ :*

$$\xi_{36}^{(1)} : \Gamma_{36} \ni (x, y) \rightarrow 0 \in \mathbb{R},$$

Puesto que  $|\xi_{st}^{(t)}| < \sqrt{2}$ , fijamos el intervalo  $Q = Q' \times (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ . Finalmente tomamos la estratificación distinguida  $\mathcal{C}$  dada por

$$\mathcal{C} = \{\xi_{st}^j\} \cup \{\text{componentes conexas de } Q \setminus \bigcup \xi_{st}^j\}.$$

En particular, la deformación de la singularidad de Brieskorn es la unión de los siguientes estratos

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \{(x, y, z) : z^2 - x^3 - y^4 = 0\} = \\ &= \xi_{11}^{(1)} \cup \xi_{12}^{(1)} \cup \xi_{13}^{(1)} \cup \xi_{31}^{(1)} \cup \xi_{31}^{(3)} \cup \xi_{32}^{(1)} \cup \xi_{32}^{(3)} \cup \xi_{33}^{(1)} \cup \xi_{33}^{(3)}. \end{aligned}$$

Siguiendo la notación del teorema,

$$\begin{cases} A_1 = \Gamma_{11} \cup \Gamma_{12} \cup \Gamma_{13}, \\ A_3 = \Gamma_{31} \cup \Gamma_{32} \cup \Gamma_{33} \cup \Gamma_{34} \cup \Gamma_{35} \cup \Gamma_{36}, \end{cases}$$

donde  $\Gamma_{31}, \Gamma_{33}, \Gamma_{34}, \Gamma_{36}$  son los de los dibujos y  $\Gamma_{11} = \tilde{\xi}_{11}^{(1)}, \Gamma_{12} = \tilde{\xi}_{51}^{(1)}, \Gamma_{13} = \tilde{\xi}_{51}^{(3)}, \Gamma_{32} = \tilde{\xi}_{52}^{(1)}$  y  $\Gamma_{35} = \tilde{\xi}_{51}^{(2)}$ .

### 5.4.6. La explosión B de la singularidad de Brieskorn como conjunto analítico complejo

En este ejemplo estudiaremos el conjunto analítico complejo  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : z^2 - x^3 - y^4 = 0\}$  en el punto  $(0, 0, 0)$ , es decir, el germen de dicho conjunto en el punto  $(0, 0, 0)$ . Para ello vamos a seguir el estudio que se realizó en la sección del teorema de los ceros de Hilbert. Observamos que  $E = \mathbf{V}(I)$ , donde  $I = (\mathbf{z}^2 - \mathbf{x}^3 - \mathbf{y}^4)$  es el ideal generado por  $\mathbf{z}^2 - \mathbf{x}^3 - \mathbf{y}^4$ , el germen de la función  $z^2 - x^3 - y^4$  en el punto  $(0, 0, 0)$ , y el cual es primo. Dada  $f \in \mathcal{O}_3$ , denotaremos su clase en el cociente  $\mathcal{O}_3/I$  con  $\bar{f}$ . Tenemos que el sistema de coordenadas  $x, y, z$  es regular para el ideal  $I$  puesto que:

- i)  $I \cap \mathcal{O}_2 = (0)$ ,
- ii)  $\mathcal{O}_3/I = \mathcal{O}_2[\bar{z}]$  es entero sobre  $\mathcal{O}_2$  dado que  $\mathbf{q}(\bar{z}) = 0$ , para  $\mathbf{q}(T) = T^2 - \mathbf{x}^3 - \mathbf{y}^4 \in \mathcal{O}_2[T]$ ,
- iii)  $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_2[\bar{z}]$ .

El discriminante de  $\mathbf{q}(T)$  es  $\mathbf{D} = 4(\mathbf{x}^3 + \mathbf{y}^4) \in \mathcal{O}_2$ . Sean los polidiscos  $\Delta = \Delta((0, 0, 0) : (1, 1, \sqrt{2}))$  y  $\Delta_2 = \Delta((0, 0) : (1, 1))$ . Sean  $q(T) = T^2 - x^3 - y^4$  y  $D = 4(x^3 + y^4)$  representantes de  $\mathbf{q}(T)$  y  $\mathbf{D}$  en el polidisco  $\Delta$ . Observamos que para todo  $(x, y) \in \Delta_2$  si  $q(z) = 0$  entonces  $|z| < \sqrt{2}$ . Por tanto, los elementos anteriormente descritos forman una representación admisible de  $I$ . Así pues, el conjunto

$$V \setminus V(D) = \{(x, y, z) \in \Delta : z^2 - x^3 - y^4 = 0, x^3 + y^4 \neq 0\}$$

es una subvariedad compleja conexa de dimensión 2 y la proyección natural

$$\pi : V \setminus V(D) \rightarrow \Delta_2 \setminus V(D)$$

es un recubrimiento finito de 2 hojas.

Sean  $U_1 = \{re^{i\theta} : 0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi\}$  y  $U_2 = \{re^{i\theta} : 0 < r < 1, -\pi < \theta < \pi\}$ . Sea  $g(x, y) = x^3 + y^4$ . Tenemos entonces que

$$\Delta_2 \setminus V(D) = g^{-1}(U_1) \cup g^{-1}(U_2)$$

Consideremos las funciones holomorfas,

$$\begin{cases} f_1(re^{i\theta}) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}, (r, \theta) \in U_1, \\ f_2(re^{i\theta}) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}, (r, \theta) \in U_2. \end{cases}$$

Así pues, podemos describir ambas hojas en dos trozos,

$$\begin{cases} \varphi_1 : g^{-1}(U_1) \ni (x, y) \rightarrow (x, y, f_1(g(x, y))) \in g^{-1}(U_1) \times \mathbb{C}, \\ \varphi_2 : g^{-1}(U_1) \ni (x, y) \rightarrow (x, y, -f_1(g(x, y))) \in g^{-1}(U_1) \times \mathbb{C}, \\ \psi_1 : g^{-1}(U_2) \ni (x, y) \rightarrow (x, y, f_2(g(x, y))) \in g^{-1}(U_2) \times \mathbb{C}, \\ \psi_2 : g^{-1}(U_2) \ni (x, y) \rightarrow (x, y, -f_2(g(x, y))) \in g^{-1}(U_2) \times \mathbb{C}. \end{cases}$$

## Referencias

- [A-M] M.F. Atiyah y I.G Macdonald, **Introducción al álgebra conmutativa**, Reverte, 1980.
- [C] Allan Clark, **Elements of abstract algebra**, Dover, 1984.
- [MC] James R. Munkres, **Topology**, Prentice Hall, 2000.