Grupos definibles en cuerpos locales y cuerpos pseudo-finitos

Elías Baro González

Trabajo de investigación dirigido por

Margarita Otero Domínguez

UAM Septiembre de 2006

Introducción

Este trabajo está basado en el artículo de Ehud Hrushovski y Anand Pillay, *Groups definable in local fields and pseudo-finite fields*, Israel Journal of Mathematics, Vol. 85, pags. 203-262, 1994.

Un grupo definible es un conjunto definible $G \subset K^n$ junto con unas operaciones $\cdot : G \times G \to G$ y ${}^{-1} : G \to G$ cuyos grafos son también conjuntos definibles y que le confieren a G estructura de grupo. En las estructuras de cuerpo $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}_p$ los conjuntos definibles son especialmente simples. En $\mathbb{R}$ son los conjuntos semi-algebraicos, es decir, combinaciones booleanas de igualdades y desigualdades polinómicas. En $\mathbb{Q}_p$ la clase de los conjuntos definibles es la menor clase que contiene a los conjuntos algebraicos, a los conjuntos del tipo $\{x | \exists y f(x) = y^n\}$ donde f es un polinomio y $n > 0$, y es cerrada para operaciones booleanas.

Una variedad de Nash real (respectivamente p-ádica) es una variedad analítica cuyas cartas son homeomorfas a abiertos definibles de $\mathbb{R}$ (respectivamente de $\mathbb{Q}_p$) y cuyos cambios de coordenadas son definibles en $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{Q}_p$). Un ejemplo sencillo de grupo de Nash es $SO_2(\mathbb{R})$. En general, los puntos $\mathbb{R}$-racionales de un grupo algebraico conexo definido sobre $\mathbb{R}$ serán grupos de Nash afines, es decir, grupos de Nash tales que existe una inmersión inyectiva entre ellos y algún $\mathbb{R}^m$. Anand Pillay demuestra en los artículos [P] y [P1] que los grupos definibles en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}_p$ están dotados de una estructura de grupos de Nash que además es única. De hecho, en el caso real, como ya veremos, cualquier variedad de Nash es a su vez definible, lo cual no tiene por qué ser cierto en el caso p-ádico.

Una parte importante de la teoría de modelos es el estudio de las estructuras definibles de los modelos de ciertas teorías con buenas propiedades. En particular, dicho estudio se centra en aquellas estructuras definibles de mayor relevancia como puedan ser los grupos definibles. Los resultados antes mencionados sobre grupos definibles en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}_p$ de Pillay son un buen ejemplo de ello. Otro conocido ejemplo, el cual será de especial importancia para el trabajo, es el siguiente teorema demostrado por Ehud Hrushovski(véase [Bo1]),

Teorema 1. *Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y sea G un grupo definible en K. Entonces G es definiblemente isomorfo a un grupo algebraico sobre K.*

Este teorema está motivado por el resultado de André Weil en [W] en el que se establece que si V es una variedad irreducible sobre un cuerpo algebraicamente cerrado junto con una operación binaria con buenas propiedades, es decir, asociativa y racional, sobre un subconjunto "grande"de V entonces existe un grupo algebraico sobre K que es biracionalmente equivalente a V y cuya operación de grupo es una extensión de la operación binaria de V.

Los dos resultados principales del trabajo son

Teorema A. *Sea $F = \mathbb{R}$ (resp. $F = \mathbb{Q}_p$) y sea G un grupo de Nash (resp. un grupo de Nash definible) sobre F. Entonces existe una grupo algebraico H definido sobre F y un isomorfismo de Nash entre un entorno del elemento identidad de G y un entorno del elemento identidad de $H(F)$.*

Teorema B. *Sea G un grupo de Nash conexo afín sobre $\mathbb{R}$. Entonces existe un grupo algebraico H definido sobre $\mathbb{R}$ tal que G es Nash isógeno con la componente conexa de $H(\mathbb{R})$.*

Estos teoremas se pueden entender como una generalización del teorema 1 para los cuerpo locales $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}_p$. En la sección 4 comprobaremos que el isomorfismo local del teorema A en general no es posible extenderlo globalmente. El teorema B establece bajo qué condiciones dicha extensión es posible.

Al comienzo del artículo de Pillay y Hrushovski se enumeran una serie de hechos relevantes y necesarios para la demostración de los teoremas A y B. La sección 1 del trabajo es una completación de estos resultados elaborada a partir de diversos libros y artículos. En algunas ocasiones las demostraciones han debido ser modificadas al contexto del artículo. En la sección 2 se consideran un tipo de estructuras denominada *subestructuras geométricas*, se comprueba que los cuerpos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_p$ y los cuerpos pseudo-finitos son subestructuras geométricas (de sus clausuras algebraicas) y en la sección 3 se prueba una versión del teorema de configuración de grupo de Hrushovski para estas nuevas estructuras. Finalmente, en la sección 4 desarrollamos el concepto de variedad de Nash y terminamos probando los teorema A y B.

De entre las distintas citas que se incluyen en la bibliografía del final del trabajo, aquellas que están marcadas con un asterisco han sido estudiadas con especial detenimiento. Las citas que no poseen asterisco, se presentan como referencia de resultados concretos utilizados a lo largo del trabajo.

Índice

1. Resultados básicos de teoría de modelos

1.1. Tipos y saturación

Definición 1.1. *Sea $\mathcal{M}$ una L-estructura y $A \subset M$. Un* ***tipo parcial*** *$p(\bar{x})$* ***sobre*** *A es un conjunto de fórmulas en L_A cuyas variables libres son $\bar{x}$ y tales que $p(\bar{c}) \cup te(\mathcal{M}_{A\cup\bar{c}})$, $\bar{c}$ nuevas constantes, es satisfactible. Si $p(\bar{x})$ satisface que para toda fórmula $F(\bar{x}) \in For(L_A)$ tenemos que o bien $F \in p$ o bien $\neg F \in p$, entonces decimos que es un* ***tipo completo****. $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ denotará el conjunto de tipos completos sobre A. Un elemento $\bar{a}$* ***realiza*** *un tipo parcial $p(\bar{x})$ si para toda $F(\bar{x}) \in p(\bar{x})$, $\mathcal{M} \models F(\bar{a})$. Dada una upla $\bar{a} \in M^n$, definimos* ***el tipo completo de*** *$\bar{a}$ como*

$$tp_n^{\mathcal{M}}(\bar{a}|A) = \{F(\bar{x}) \in For(L_A) : \mathcal{M} \models F(\bar{a})\}.$$

Si $\mathcal{M}$ y n se deducen del contexto simplemente escribiremos $S(A)$ y $tp(\bar{a}|A)$. Es posible definir una topología en el conjunto $S(A)$ declarando como abiertos básicos a los conjuntos

$$[F(\bar{x})] = \{p(\bar{x}) \in S_n(A) : F \in p\}.$$

Dicha topología, la cual denominaremos ***topología de Stone****, es compacta y totalmente disconexa.*

Definición 1.2. *Se dice que $\mathcal{M}$ es κ-**saturada**, $\kappa \geq \omega$, si para todo subconjunto $A \subset M$ tal que $|A| < \kappa$ tenemos que dado un tipo completo $p(\bar{x}) \in S(A)$, existe una upla en M que lo realiza. Decimos que $\mathcal{M}$ es* ***saturada*** *si es $|M|$-saturada.*

Proposición 1.3. *Sea $\mathcal{M}$ saturada y sea $A \subset M$, $|A| < |M|$. Dadas dos n-uplas $\bar{a}$ y $\bar{b}$, $tp(\bar{a}|A) = tp(\bar{b}|A)$ si y sólo si existe $\varphi \in Aut_A(\mathcal{M})$ tal que $\varphi(\bar{a}) = \bar{b}$.*

Demostración. Por la proposición 4.3.3, pag.138, [Ma*], $\mathcal{M}$ es homogénea. Por la proposición 4.2.13, pag.133, [Ma*], si $tp(\bar{a}|A) = tp(\bar{b}|A)$ entonces existe un automorfismo $f \in Aut_A(\mathcal{M})$ tal que $f(\bar{a}) = \bar{b}$. El recíproco es obvio. □

Definición 1.4. *Decimos que un subconjunto X de M^n es* ***definible*** *si existe una fórmula $F(\bar{x}) \in For(L_M)$ tal que $X = \{\bar{c} \in M^n : \mathcal{M} \models F(\bar{c})\}$. Si la fórmula anterior puede ser tomada en L_A entonces decimos que X es A-definible y si podemos tomarla en L entonces decimos que es $\emptyset$-definible.*

Proposición 1.5. *Sea $\mathcal{M}$ saturada, $X \subset M^n$ un subconjunto definible y $A \subset M$ con $|A| < |M|$. Entonces X es A-definible si y sólo si X queda fijado como conjunto por todo automorfismo de $\mathcal{M}$ que fija A punto a punto.*

Demostración. Véase Proposición 4.3.25, pag.146, [Ma*]. □

1.2. El teorema de Svenonius

Teorema 1.6. *Sea $\mathcal{M}$ una L-estructura y sea $A \subset M$. Sea $\mathcal{M}_0$ el reducto de $\mathcal{M}$ a $L_0 \subset L$ y sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ dos n-uplas. Si $tp_n^{\mathcal{M}_0}(\bar{a}|A) = tp_n^{\mathcal{M}_0}(\bar{b}|A)$ entonces existe una extensión elemental $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ y un automorfismo $\varphi \in Aut_A(\mathcal{N}_0)$ tal que $\varphi(\bar{a}) = \bar{b}$.*

Demostración. Esta proposición es similar a la Proposición 4.1.5, pag.117, [Ma*]. A continuación describiremos los cambios que son necesarios realizar en la prueba de la referencia anterior para obtener nuestro resultado. El enunciado del lema 4.1.6 se puede sustituir por

> *Sean las L-estructuras $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ y sean $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{N}_0$ sus reductos a un lenguaje $L_0 \subset L$. Sea $f : B \longrightarrow \mathcal{N}_0$ una aplicación elemental parcial, $B \subset M$. Entonces, dado $b \in M$, existe una extensión elemental $\mathcal{N}'$ de $\mathcal{N}$ y una aplicación elemental parcial $g : B \cup \{b\} \longrightarrow \mathcal{N}'_0$ que extiende a f.*

Para demostrar este resultado basta cambiar en la demostración del lema 4.1.6 el conjunto de fórmulas Γ por el conjunto de fórmulas

$$\Gamma = \{\phi(v, f(a_1), \ldots, f(a_n)) : \mathcal{M}_0 \models \phi(b, f(a_1), \ldots, f(a_n))\} \cup Diag_{el}(\mathcal{N})$$

y comprobar que es satisfactible. El enunciado del corolario 4.1.7 se puede sustituir por

> *Sean las L-estructuras $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ y sean $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{N}_0$ sus reductos a un lenguaje $L_0 \subset L$. Sea $f : B \longrightarrow \mathcal{N}_0$ una aplicación elemental parcial, $B \subset M$. Entonces existe una extensión elemental $\mathcal{N}'$ de $\mathcal{N}$ y extensión elemental $g : \mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathcal{N}'_0$ que extiende a f.*

Utilizando la modificación del lema 4.1.6, la demostración de la modificación del corolario 4.1.7 es inmediata. Por último, aplicando las modificaciones del lema 4.1.6 y del corolario 4.1.7 a la demostración de la proposición 4.1.5 obtenemos nuestro resultado. $\square$

Observación 1.7. Dada $\mathcal{M}$ una L-estructura y una relación $E \subset M^n$ definible en $\mathcal{M}$ por una fórmula $F(\bar{x}) \in For(L)$ tenemos que $(\mathcal{M}, E) \models \forall\bar{x}(R(\bar{x}) \leftrightarrow F(\bar{x}))$, donde $(\mathcal{M}, E)$ es la expansión natural de $\mathcal{M}$ al lenguaje $L \cup \{R\}$, siendo R símbolo de relación n-aria.

Teorema 1.8. ***(de Svenonius)*** *Sea $\mathcal{M}$ una L-estructura y $E \subset M^n$ una relación que no es definible en $\mathcal{M}$. Entonces existe una extensión elemental $(\mathcal{M}', E')$ de $(\mathcal{M}, E)$ y un automorfismo $\varphi \in Aut(\mathcal{M}')$ que no preserva la relación E'.*

Demostración(Teorema 9.2, pag.184,[Po*]). Supongamos que para cualquier tipo $p(\bar{x}) \in S_n^{(\mathcal{M},E)}(\emptyset)$ tal que $R(\bar{x}) \in p(\bar{x})$ tenemos que $\pi(\bar{x}) \models R(\bar{x})$, donde $\pi(\bar{x})$ son las fórmulas de $p(\bar{x})$ en el lenguaje L. Tenemos entonces que $te((\mathcal{M},E)) \cup \pi(\bar{c}) \cup \{\neg R(\bar{c})\}$ es insatisfactible. Por compacidad, existe $F_p(\bar{c}) \in \pi(\bar{c})$ tal que $te((\mathcal{M},E)) \cup \{\neg R(\bar{c})\} \cup \{F_p(\bar{c})\}$ es insatisfactible y por tanto $(\mathcal{M},E) \models \forall \bar{x}(F_p(\bar{x}) \to R(\bar{x}))$. Observamos que

$$[R(\bar{x})] = \bigcup_{\substack{p(\bar{x}) \in S_n^{(\mathcal{M},E)}(\emptyset) \\ R(\bar{x}) \in p(\bar{x})}} [F_p(\bar{x})].$$

Puesto que $[R(\bar{x})]$ es compacto por ser un cerrado dentro de un compacto, tenemos que

$$[R(\bar{x})] = \bigcup_{i=1}^{s} [F_{p_i}(\bar{x})] = [F_{p_1}(\bar{x}) \vee \cdots \vee F_{p_s}(\bar{x})].$$

Sea $G(\bar{x}) : F_{p_1}(\bar{x}) \vee \cdots \vee F_{p_s}(\bar{x})$. Tenemos que

$$(\mathcal{M},E) \models \forall \bar{x}(R(\bar{x}) \leftrightarrow G(\bar{x})),$$

lo cual es una contradicción ya que E no es definible en $\mathcal{M}$. Por tanto existe $p(\bar{x}) \in S_n^{(\mathcal{M},E)}(\emptyset)$ con $R(\bar{x}) \in p(\bar{x})$ y tal que $\pi(\bar{x}) \not\models R(\bar{x})$. Sean $(\mathcal{M}_1, E_1) \succ (\mathcal{M},E)$ y $\bar{a} \in \mathcal{M}_1^n$ que realice $\pi(\bar{x})$ y tal que $\bar{a} \notin E_1$. Puesto que

$$p(\bar{x}) \in S_n^{(\mathcal{M},E)}(\emptyset) = S_n^{(\mathcal{M}_1,E_1)}(\emptyset),$$

existe una extensión elemental $(\mathcal{M}_2, E_2) \succ (\mathcal{M}_1, E_1)$ y una n-upla $\bar{b} \in \mathcal{M}_2^n$ que realiza $p(\bar{x})$. Así pues, tenemos que $\pi(\bar{x}) = tp_n^{\mathcal{M}_2}(\bar{a}) = tp_n^{\mathcal{M}_2}(\bar{b})$ con $\bar{a} \notin E_2$ y $\bar{b} \in E_2$. Por el teorema anterior, existe $(\mathcal{M}', E') \succ (\mathcal{M}_2, E_2)$ y $\varphi \in Aut(\mathcal{M}')$ tal que $\varphi(\bar{a}) = \bar{b}$. □

1.3. Definibilidad y algebraicidad, $\mathcal{M}^{eq}$ y la eliminación de imaginarios

Definición 1.9. *Sea $\mathcal{M}$ una L-estructura y sea A un subconjunto de M. Decimos que $a \in M$ está en la* ***clausura algebraica*** *de A (en M), escrito $a \in acl(A)$, si existe una fórmula $F(x) \in For(L_A)$ tal que $\mathcal{M} \models F(a)$ y sólo existen un número finito de elementos de M que satisfacen dicha fórmula. Decimos que $a \in M$ está en la* ***clausura definible*** *de A (en M), escrito $a \in dcl(A)$, si existe una fórmula $F(x) \in For(L_A)$ tal que a es él único elemento de M que satisface dicha fórmula.*

Dado un conjunto $B \subset M$ decimos es que ***algebraicamente independiente sobre*** *A si para todo $b \in B$, $b \notin acl(A \cup B \setminus \{b\})$.*

Definición 1.10. *Sean L un lenguaje y S un conjunto. Una* ***L-estructura $\mathcal{N}$ de varias clases*** *S viene dada por los siguientes elementos:*

i) un conjunto no vacío N llamado universo de $\mathcal{N}$ para el cual existe una partición disjunta $\{N_s : s \in S\}$,

ii) una función $f^{\mathcal{N}} : N_{s_1} \times \cdots \times N_{s_m} \to N_{s_0}$ para cada símbolo de función n-aria $f \in L$,

iii) un conjunto $R^{\mathcal{N}} \subset N_{s_1} \times \cdots \times N_{s_m}$ para cada símbolo de relación n-aria $R \in L$,

iv) un elemento $c^{\mathcal{N}} \in N$ para cada símbolo de constante $c \in L$.

Sea $\mathcal{M}$ una L-estructura y sea

$$S = \{s_E : E \text{ relación de equivalencia } \emptyset\text{-definible en } M^n \text{ para algún } n\}.$$

Sea $L^{eq} = L \cup \{f_E : s_E \in S\}$. $\mathcal{M}^{\mathbf{eq}}$ es una L^{eq}-estructura de varias clases S definida como sigue. El universo M^{eq} es la union disjunta de $M_{s_E} = M^n/E$ para cada $s_E \in S$. Puesto que $=$ es una relación de equivalencia $\emptyset$-definible en M, podemos identificar $M_{s_=}$ con M. Para todo símbolo de función $f \in L$, de relación $R \in L$ y de constante $c \in L$ interpretamos $f^{\mathcal{M}^{eq}}$, $R^{\mathcal{M}^{eq}}$ y $c^{\mathcal{M}^{eq}}$ como funciones, relaciones y constantes sobre $M_{s_=}$ de la forma natural. Para cada símbolo de función f_{s_E}, E relación de equivalencia en M^n, interpretamos $f_{S_E}^{\mathcal{M}^{eq}} : M_{s_=} \times \overset{n}{\dots} \times M_{s_=} \ni \bar{x} \longrightarrow \bar{x}/E \in M_{s_E}$.

Definición 1.11. *Decimos que una teoría T tiene* ***eliminación de imaginarios*** *si para todo fórmula $F(\bar{x}, \bar{a})$ con parámetros $\bar{a} \in M^n$, donde $\mathcal{M} \models T$, existe una m-upla $\bar{b}$ en M de forma que para toda extensión elemental $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ y para todo $\varphi \in Aut(\mathcal{N})$,*

$$\varphi(X) = X \Leftrightarrow \varphi\bar{b} = \bar{b}$$

donde $X = \{\bar{c} \in N^n : \mathcal{N} \models F(\bar{c}, \bar{a})\}$.

Teorema 1.12. *T tiene eliminación de imaginarios si y solo si para toda fórmula $F(\bar{x}, \bar{a})$ con $\bar{a} \in M^m$, $\mathcal{M} \models T$, existe una fórmula $G(\bar{x}, \bar{z})$ asociada y una única s-upla $\bar{b}$ en M de forma que $\mathcal{M} \models \forall\bar{x}(F(\bar{x}, \bar{a}) \leftrightarrow G(\bar{x}, \bar{b}))$.*

Demostración(Teorema 16.14, pag.323,[Po*]). Veamos que la condición descrita implica la eliminación de imaginarios. Sea $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ y sea $\varphi \in Aut(\mathcal{N})$. Supongamos que $\varphi(b_i) = b_i$, $1 \leq i \leq s$. Entonces

$$\mathcal{N} \models F(\bar{c}, \bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models G(\bar{c}, \bar{b}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models G(\varphi\bar{c}, \varphi\bar{b}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{N} \models G(\varphi\bar{c}, \bar{b}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models F(\varphi\bar{c}, \bar{a}),$$

y por tanto $\varphi(X) = X$. Supongamos ahora que $\varphi(X) = X$. Tenemos entonces que

$$\mathcal{N} \models G(\bar{c}, \varphi\bar{b}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models G(\varphi^{-1}\bar{c}, \bar{b}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{N} \models F(\varphi^{-1}\bar{c}, \bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models F(\bar{c}, \bar{a}),$$

y por tanto $\mathcal{M} \models \forall\bar{x}(F(\bar{x}, \bar{a}) \leftrightarrow G(\bar{x}, \varphi\bar{b}))$. Puesto que $\bar{b}$ era único, obtenemos que $\varphi(b_i) = b_i$, $1 \leq i \leq s$.

Supongamos que T admite eliminación de imaginarios. Sea $F(\bar{x}, \bar{a})$ una fórmula con parámetros en $\mathcal{M}$ y sea $\bar{b}$ su s-upla asociada. Para toda extensión elemental $\mathcal{N}_{\bar{b}}$ de $\mathcal{M}_{\bar{b}}$ y para todo $\varphi \in Aut(\mathcal{N}_{\bar{b}})$, puesto que $\varphi(b_i) = b_i$, $1 \leq i \leq s$, tenemos que $\varphi(X) = X$. Por el teorema de Svenonius, X es definible en $\mathcal{M}_{\bar{b}}$, es decir, existe una fórmula $\tilde{G}(\bar{x}, \bar{b})$ tal que

$$\mathcal{M} \models \forall\bar{x}(F(\bar{x}, \bar{a}) \leftrightarrow \tilde{G}(\bar{x}, \bar{b})).$$

Supongamos que $\tilde{p}(\bar{z}) = tp_s^{\mathcal{M}}(\bar{b}|\emptyset) \cup \{\bar{z} \neq \bar{b}\} \cup \{\forall\bar{x}(\tilde{G}(\bar{x}, \bar{b}) \leftrightarrow \tilde{G}(\bar{x}, \bar{z}))\}$ es un tipo parcial. Entonces existe una extensión elemental $\mathcal{N}_0$ de $\mathcal{M}$ y $\bar{b}_0 \in N_0$ que realiza $\tilde{p}(\bar{z})$, pero eso es una contradicción ya que en ese caso existiría un automorfismo $\varphi \in Aut(\mathcal{N}_0)$ tal que $\varphi(X) = X$ y $\varphi(\bar{b}_0) = \bar{b}$.

Por tanto $\tilde{p}(\bar{z})$ no es un tipo parcial es decir, $\tilde{p}(\bar{d}) \cup te(\mathcal{M}_{\bar{b}})$, donde $\bar{d}$ son nuevas constantes, no es satisfactible. Por compacidad, existe una fórmula $H(\bar{z}) \in tp_s^{\mathcal{M}}(\bar{b}|\emptyset)$ de forma que

$$te(\mathcal{M}_{\bar{b}}) \cup \{H(\bar{d})\} \cup \{\bar{d} \neq \bar{b}\} \cup \{\forall\bar{x}(\tilde{G}(\bar{x}, \bar{b}) \leftrightarrow \tilde{G}(\bar{x}, \bar{d}))\}$$

no es satisfactible. Así pues

$$\mathcal{M} \models \forall\bar{z}((H(\bar{z}) \wedge \forall\bar{x}(\tilde{G}(\bar{x}, \bar{b}) \leftrightarrow \tilde{G}(\bar{x}, \bar{z}))) \rightarrow \bar{z} = \bar{b})$$

y por tanto basta tomar la fórmula $G(\bar{x}, \bar{z}) : H(\bar{z}) \wedge \tilde{G}(\bar{x}, \bar{z})$. □

Observación 1.13. Si toda relación de equivalencia E en M^n definible (sin parámetros) es de la forma $\bar{y}E\bar{z} \Leftrightarrow f_E(\bar{y}) = f_E(\bar{z})$, donde $f_E : M^n \to M^m$ es una función definible, entonces $te(\mathcal{M})$ tiene eliminación de imaginarios. Sea $F(\bar{x}, \bar{a})$ una fórmula con parámetros en M y sea E la relación de equivalencia dada por

$$E(\bar{y}, \bar{z}) \Leftrightarrow \forall\bar{x}(F(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow F(\bar{x}, \bar{z})).$$

Sea $f_E : M^n \to M^m$ la función definible antes descrita y sea $G(\bar{x}, \bar{w}) : \exists\bar{z}(f_E(\bar{z}) = \bar{w} \wedge F(\bar{x}, \bar{z}))$. Tenemos entonces que $f_E(\bar{a})$ es la única upla tal que $\mathcal{M} \models \forall\bar{x}(G(\bar{x}, f_E(\bar{a})) \leftrightarrow F(\bar{x}, \bar{a}))$.

Teorema 1.14. *Si T admite eliminación de imaginarios y existen dos elementos distintos en $dcl(\emptyset)$ entonces toda relación de equivalencia E en M^n, definible en $\mathcal{M}$, donde $\mathcal{M} \models T$, es de la forma $\bar{y}E\bar{z} \Leftrightarrow f_E(\bar{y}) = f_E(\bar{z})$, donde $f_E : M^n \to M^m$ es una función definible en $\mathcal{M}$.*

Demostración(Teorema 16.16, pag.324,[Po*]). Denotemos con 0 y 1 los dos elementos de $dcl(\emptyset)$. Probemos en primer lugar que dada una fórmula $F(\bar{x}, \bar{a})$, $\bar{a} \in M$, la fórmula $G(\bar{x}, \bar{z})$ asociada según el teorema 1.18 depende tan sólo de $F(\bar{x}, \bar{y})$ y no de sus parámetros. Sea $F(\bar{x}, \bar{a})$, $\bar{a} \in M^s$, una fórmula con parámetros en M. Consideremos la teoría $T' = T \cup \{\neg\exists!\bar{z}\forall\bar{x}(F(\bar{x}, \bar{b}) \leftrightarrow G(\bar{x}, \bar{z})) : G(\bar{x}, \bar{z}) \in For(L)\}$, donde $\bar{b}$ son símbolos de nuevas constantes. Puesto que T tiene eliminación de imaginarios, por la proposición 1.12 la teoría T' no es satisfactible. Así pues, existen $G_1(\bar{x}, \bar{z}), \ldots, G_k(\bar{x}, \bar{z})$ tales que para todo $\bar{a} \in M^s$ existe j_0 tal que $\mathcal{M} \models \exists!\bar{z}\forall\bar{x}(F(\bar{x}, \bar{a}) \leftrightarrow G_{j_0}(\bar{x}, \bar{z}))$. Hemos podido suponer que la longitud de $\bar{z}$ es la misma en todas las fórmulas exigiendo en aquellas que sean cortas que las últimas coordenadas sean 0. Sea $H(\bar{x}, \bar{u}, \bar{z})$, donde $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_k)$, la fórmula que dice

- todos los u_i son igual a 0 excepto uno que es igual a 1,
- si $u_i = 1$ entonces $\forall\bar{t}(\forall\bar{x}(G_i(\bar{x}, \bar{z}) \leftrightarrow G_i(\bar{x}, \bar{t})) \to \bar{t} = \bar{z})$ y para todo $j < i$ o bien no existe $\bar{t}$ tal que $\forall\bar{x}(G_i(\bar{x}, \bar{z}) \leftrightarrow G_i(\bar{x}, \bar{t}))$ o bien existen al menos dos $\bar{t}$ tales que $\forall\bar{x}(G_j(\bar{x}, \bar{t}) \leftrightarrow G_i(\bar{x}, \bar{z}))$.

De la propia definición de H se deduce que existe un único $(\bar{e}, \bar{b})$ tal que $\mathcal{M} \models \forall\bar{x}(F(\bar{x}, \bar{a}) \leftrightarrow H(\bar{x}, \bar{e}, \bar{b}))$.

Sea E una relación de equivalencia en M^n definible por una fórmula $F(\bar{x}, \bar{y})$. La fórmula $F(\bar{x}, \bar{y})$ tiene asociada una fórmula $G(\bar{x}, \bar{z})$ de forma que para todo $\bar{a} \in M^n$ existe un único $\bar{b} \in M^m$ tal que $\mathcal{M} \models \forall\bar{x}(F(\bar{x}, \bar{a}) \leftrightarrow G(\bar{x}, \bar{b}))$. Así pues, sea $f_E : M^n \to M^m$ la función definible que manda $\bar{a}$ en $\bar{b}$. $\square$

Observación 1.15. La existencia de los dos elementos 0 y 1 es necesaria en el teorema anterior. Sea $\mathcal{M}$ una L-estructura que satisfaga la condición descrita en la última observación. Sea E la relación de equivalencia dada por

$$(y_1, y_2)E(z_1, z_2) \Leftrightarrow (y_1 = y_2 \land z_1 = z_2) \lor (y_1 \neq y_2 \land z_1 \neq z_2).$$

Sabemos que existe una función definible $f_E : M^2 \to M^m$ tal que

$$(y_1, y_2)E(z_1, z_2) \Leftrightarrow f_E(y_1, y_2) = f_E(z_1, z_2).$$

Sean $\bar{a}_1$ y $\bar{a}_2$ los dos elementos de M^m que corresponden a la imagen de las dos clases de E por f_E. Puesto que $\bar{a}_1 \neq \bar{a}_2$, existe una coordenada que es distinta. Denotemos con 0 y 1 los elementos de dicha coordenada. Tenemos entonces que dichos elementos son definibles sin parámetros.

Definición 1.16. *Decimos que una teoría T tiene* ***eliminación débil de imaginarios*** *si para toda fórmula $F(\bar{x}, \bar{a})$ con parámetros $\bar{a} \in M^m$, $\mathcal{M} \models T$, existe un subconjunto $A \subset M$ algebraicamente cerrado mínimo tal que $F(\bar{x}, \bar{a})$ es definible en A, es decir, es equivalente a una fórmula con parámetros en A.*

Observación 1.17.

- La eliminación fuerte de imaginarios implica la eliminación débil de imaginarios. El recíproco no es cierto.

- Sea T con eliminación débil de imaginarios y sea $A \subset M$ el mínimo conjunto algebraicamente cerrado de definición de $F(\bar{x}, \bar{a})$, $\bar{a} \in M^m$, $\mathcal{M} \models T$. Sea $\mathcal{N}$ una extensión elemental de $\mathcal{M}$ y sea $\tilde{A} \subset N$ el mínimo conjunto algebraicamente cerrado de definición de $F(\bar{x}, \bar{a})$. Observamos que $\tilde{A} \subset A$ y por tanto $\tilde{A} = A$.

Teorema 1.18. *T tiene eliminación débil de imaginarios si y solo si para toda fórmula $F(\bar{x}, \bar{a})$, $\bar{a} \in M^m$, $\mathcal{M} \models T$, existe una fórmula $G(\bar{x}, \bar{z})$ asociada y un número finito de uplas $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_k$ en M, $k > 0$, de forma que dichas uplas son las únicas tales que $\mathcal{M} \models \forall \bar{x}(F(\bar{x}, \bar{a}) \leftrightarrow G(\bar{x}, \bar{b}_i))$, $1 \leq i \leq k$.*

Demostración(Teorema 16.15, pag.323,[Po*]). Supongamos cierta la última condición y veamos que entonces tenemos eliminación débil de imaginarios. Sea $F(\bar{x}, \bar{a})$, $\bar{a} \in M^m$, $\mathcal{M} \models T$. Comprobemos que el conjunto $acl(B)$, $B = \{\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_k\}$, es el mínimo conjunto algebraicamente cerrado de definición. Sea $H(\bar{x}, \bar{c})$, $\bar{c} \in M$, equivalente a la fórmula $F(\bar{x}, \bar{a})$. Sea R un nuevo símbolo de relación 1-aria y sea $(\mathcal{M}'_{\bar{c}}, B')$ una extensión elemental de $(\mathcal{M}_{\bar{c}}, B)$. Para todo $\varphi \in Aut(\mathcal{M}'_{\bar{c}})$, puesto que φ fija la upla $\bar{c}$, tenemos que $F(\bar{x}, \bar{a})$ queda fija y por tanto $G(\bar{x}, \varphi(b_i))$ define $F(\bar{x}, \bar{a})$. Si existiera i_0 tal que $\varphi(b_{i_0}) \neq b_j$, $1 \leq j \leq k$, entonces habría al menos $k+1$ uplas en $\mathcal{M}'$ que sustituidas en G serían equivalentes $F(\bar{x}, \bar{a})$. Está propiedad la podemos expresar con una fórmula en $L_{\bar{a}}$, y por tanto $\mathcal{M}$ también la satisfacería, lo cual es una contradicción. Así pues $\{\varphi(\bar{b}_1), \ldots, \varphi(\bar{b}_k)\} = \{\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_k\}$. Eso implica que $\varphi(B) = B$ y, por el teorema de Svenonius, B es definible en $\mathcal{M}_{\bar{c}}$. Por tanto $b_i \in acl(\bar{c})$, $1 \leq i \leq k$, lo cual implica que $acl(B) \subset acl(\bar{c})$.

Comprobemos ahora que si T admite eliminación débil de imaginarios entonces se satisface la condición del teorema. Sea $F(\bar{x}, \bar{a})$, $\bar{a} \in M^m$, $\mathcal{M} \models T$. Sea B el conjunto algebraicamente cerrado mínimo de definición de $F(\bar{x}, \bar{a})$ y sea $\tilde{G}(\bar{x}, \bar{b})$, $\bar{b} \in B^s$, la fórmula equivalente a $F(\bar{x}, \bar{a})$. Sea $\psi(\bar{w}) : \forall \bar{x}(\tilde{G}(\bar{x}, \bar{w}) \leftrightarrow \tilde{G}(\bar{x}, \bar{b}))$. Supongamos que hay infinitos $\bar{b}_i$ tales que $\mathcal{M} \models \psi(\bar{b}_i)$ y tienen el mismo tipo que $\bar{b}$. Entonces, por inducción y compacidad, para todo ordinal α podemos encontrar una extensión elemental $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ y una sucesión $\{\bar{b}_\lambda : \lambda < \alpha\}$ de s-uplas distintas en N tales que tienen el mismo tipo que

$\bar{b}$ y satisfacen $\psi(\bar{w})$. Así pues, como $\#acl(\bar{b}) = |L|$, podemos encontrar una extensión y una upla $\bar{b}_1$ que tenga el mismo tipo que $\bar{b}$, que satisfaga $\psi(\bar{w})$ y que no sea algebraico sobre $\bar{b}$. Puesto que $B \subset acl(\bar{b}_1)$, $\bar{b}$ debe ser algebraico sobre $\bar{b}_1$. Podemos suponer que su última coordenada es algebraica sobre $\bar{b}_1$ y por tanto satisface la fórmula $\tilde{\psi}(b_s, \bar{b}_1)$ dada por

$$\tilde{F}(y, \bar{b}_1) \wedge \{\text{existe un número finito de elementos que satisfacen } \tilde{F}(y, \bar{b}_1)\ \},$$

para alguna fórmula $\tilde{F}(y, \bar{b}_1) \in For(L_{\bar{b}_1})$. Consideremos el conjunto de fórmulas

$$\Gamma(\bar{w}) = \{\psi(\bar{w})\} \cup \{\bar{b} \notin acl(\bar{w})\} \cup \{\tilde{\psi}(w_s, \bar{b})\}.$$

Puesto que $\bar{b}_1$ y $\bar{b}$ tienen el mismo tipo, $\Gamma(\bar{w})$ es un tipo parcial. Así pues, existe una extensión elemental $\mathcal{N}_2$ y una s-upla $\bar{b}_2$ que satisface el tipo, es decir, que $\bar{b}$ no es algebraica sobre $\bar{b}_2$, que $\bar{b}_2$ es algebraica sobre $\bar{b}$ y tal que $\tilde{G}(\bar{x}, \bar{b})$ es equivalente a $\tilde{G}(\bar{x}, \bar{b}_2)$. Sin embargo, por hipótesis, $B \subset acl(\bar{b}_2)$, lo cual es una contradicción. Por tanto no hay infinitos $\bar{b}_i$ tales que $\mathcal{M} \models \psi(b_i)$ y que tengan el mismo tipo que $\bar{b}$. Si para toda $H(\bar{x}) \in tp_s^{\mathcal{M}}(\bar{b}|\emptyset)$ y para todo $N \in \mathbb{N}$ tenemos que $\mathcal{M} \models \exists \bar{w}_1 \cdots \exists \bar{w}_N (\bigwedge_{i=1}^{N} (\psi(\bar{w}_i) \wedge H(\bar{w}_i)))$ entonces se contradiría lo anterior. Así pues, existe $H(\bar{x}) \in tp_s^{\mathcal{M}}(\bar{b}|\emptyset)$ y $N_0 \in \mathbb{N}$ tales que sólo hay N_0 s-uplas que satisfacen H. Finalmente, tomamos $G(\bar{x}, \bar{w})$: $\tilde{G}(\bar{x}, \bar{w}) \wedge H(\bar{w})$. $\square$

Observación 1.19. Las siguientes observaciones sobre la eliminación de imaginarios se deducen directamente de los resultado anteriores:

i) M tiene eliminación de imaginarios si y sólo si para todo $c \in M^{eq}$ existe una upla $\bar{b}$ de M tal que en $\mathcal{M}^{eq}$, $c \in dcl(\bar{b})$ y $\bar{b} \in dcl(c)$ (se dice que $\bar{b}$ y c son **interdefinibles**).

ii) M tiene eliminación débil de imaginarios si y sólo si para todo $c \in M^{eq}$ existe una upla $\bar{b}$ de M tal que en $\mathcal{M}^{eq}$, $c \in dcl(\bar{b})$ y $\bar{b} \in acl(c)$.

iii) La eliminación débil de imaginarios es equivalente a que para toda fórmula $F(\bar{x}, \bar{a})$, $\bar{a} \in M$, donde $\mathcal{M} \models T$, existe un conjunto finito A de uplas en M de la misma longitud tales que para toda extensión elemental $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ y todo automorfismo $\varphi \in Aut(\mathcal{N})$, $\varphi(X) = X$ si y solo si $\varphi(A) = A$, para X el conjunto que define $F(\bar{x}, \bar{a})$ en N.

iv) Si M tiene eliminación de imaginarios, para cualquier conjunto definible de $\mathcal{M}^{eq}$ existe una biyección definible con un subconjunto de M^m para algún m.

Para terminar, probemos que la eliminación débil de imaginarios es equivalente a la eliminación de imaginarios si somos capaces de codificar un número finito de uplas.

Definición 1.20. *Decimos que T* ***codifica conjuntos finitos*** *si para todo modelo $\mathcal{M}$ de T y cualquier conjunto finito de uplas $A = \{\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_m\}$ de M de la misma longitud existe $\bar{c} \in M$ tal que para toda extensión elemental $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ y todo $\varphi \in Aut(\mathcal{N})$, $\varphi(\bar{c}) = \bar{c}$ si y solo si $\varphi(A) = A$.*

Proposición 1.21. *La eliminación de imaginarios es equivalente a la eliminación débil de imaginarios junto con la codificación de conjuntos finitos.*

Demostración(Teorema 1.7, pag.128,[C-F*]). Supongamos que T tiene eliminación débil de imaginarios y codificación de conjuntos finitos. Sea $F(\bar{x}, \bar{a}) \in For(L_{\bar{a}})$ y sea A el número finito de uplas en M de la misma longitud que nos asegura la observación 1.19 *iii*). Por la codificación de conjuntos finitos sabemos que existe una upla $\bar{b} \in M$ tal que toda extensión elemental $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ y todo $\varphi \in Aut(\mathcal{N})$, $\varphi(\bar{c}) = \bar{c}$ si y solo si $\varphi(A) = A$. Por tanto para toda extensión elemental $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ y todo $\varphi \in Aut(\mathcal{N})$, $\varphi(X) = X$ si y solo si $\varphi(\bar{c}) = \bar{c}$, donde X es el conjunto que define $F(\bar{x}, \bar{a})$ en N.

Supongamos ahora que T tiene eliminación de imaginarios. Veamos que entonces T codifica conjuntos finitos. Sea $A = \{\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_m\}$ un conjunto finito de uplas de la misma longitud. Observamos que la fórmula

$$F(\bar{x}) : \bigvee_{i=1}^{m} (\bar{y} = \bar{c}_i)$$

define el conjunto A. Por la eliminación de imaginarios existe una upla $\bar{c} \in M$ tal que para todo $\varphi \in Aut(\mathcal{M})$, $\varphi(A) = A$ si y solo si $\varphi(\bar{c}) = \bar{c}$. □

1.4. Teorías fuertemente minimales

Definición 1.22. *Una estructura $\mathcal{M}$ se dice* ***fuertemente minimal*** *si para toda extensión elemental $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$, cualquier conjunto X definible es finito o cofinito.*

En lo que resta de la sección $\mathcal{M}$ denotará una estructura fuertemente minimal.

Proposición 1.23 (Ley de intercambio)**.** *Sea $\mathcal{M}$ una estructura fuertemente minimal y sean $A \subset M$, $a, b \in M$. Si $b \in acl(A \cup \{a\}) \setminus acl(A)$ entonces $a \in acl(A \cup \{b\})$.*

Demostración(Lema 6.1.4, pag.209,[Ma*]). Sea $F(x, \bar{c}, a)$, $\bar{c} \in A$, la fórmula que satisface b y tan sólo un número finito n de elementos de M. Observamos que el elemento a debe aparecer en la fórmula puesto que en caso contrario b pertenecería a $acl(A)$. Sea $H(w)$ la fórmula que dice que existen exactamente n elementos que satisfacen $F(x, \bar{c}, w)$. Sea

$$X_0 = \{d \in M : \mathcal{M} \models H(d)\}.$$

El conjunto X_0 es cofinito ya que en caso contrario a pertenecería a $acl(A)$ y por tanto también lo haría b. Consideremos el conjunto

$$X_1 = \{h \in M : \mathcal{M} \models F(b, \bar{c}, h) \wedge H(h)\}.$$

Veamos que X_1 no es cofinito. Consideremos el conjunto

$$X_2 = \{e \in M : \mathcal{M} \models G(e, \bar{c})\},$$

donde $G(x, \bar{c})$ es la fórmula que dice que el número de elementos que no satisfacen $F(x, \bar{c}, w) \wedge H(w)$ es exactamente igual al cardinal de $M \setminus X_1$. Tenemos que X_2 es cofinito puesto que en caso contrario b pertenecería a $acl(A)$. Elijamos $b_1, \ldots, b_{n+1} \in M$ distintos tales que $\mathcal{M} \models G(b_i, \bar{c})$. Puesto que los conjuntos $D_i = \{h \in M : \mathcal{M} \models F(b_i, \bar{c}, h) \wedge H(h)\}$ son cofinitos, sabemos que existe un elemento $d \in \bigcap_{i=1}^{n+1} D_i$. Puesto que $\mathcal{M} \models H(d)$ tenemos que el número de elementos que satisfacen $F(x, \bar{c}, d)$ es exactamente n, pero eso es una contradicción ya que $\mathcal{M} \models F(b_i, \bar{c}, d)$, $1 \leq i \leq n+1$. Por tanto X_1 es finito, lo cual implica que $a \in acl(A \cup \{b\})$. $\square$

Observación 1.24. Esta ley de intercambio nos proporciona una noción de dimensión en estructuras fuertemente minimales. Observamos que la clausura algebraica satisface las siguiente propiedades:

i) $A \subset B \Rightarrow acl(A) \subset acl(B)$,

ii) si $a \in acl(A)$ entonces existe un subconjunto finito $A' \subset A$ tal que $a \in acl(A')$,

iii) $A \subset acl(A)$

iv) $acl(acl(A)) = acl(A)$,

v) (Ley de intercambio) $b \in acl(A \cup \{a\}) \setminus acl(A) \Rightarrow a \in acl(A \cup \{b\})$.

Dadas estas propiedades, el operador

$$acl : \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M)$$

recibe un tratamiento similar al que recibe la clausura linear en el caso de los espacio vectoriales. Por ello, la noción de dimensión está bien definida. Si fijamos un subconjunto $A \subset M$, podemos definir el operador $acl_A : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ dado por $acl_A(B) = acl(A \cup B)$, el cual sigue satisfaciendo las mismas propiedades.

Proposición 1.25. *Sea T una teoría fuertemente minimal tal que para todo modelo $\mathcal{M}$, o equivalentemente para alguno, $acl(\emptyset) \cap M$ es infinito. Entonces T tiene eliminación débil de imaginarios.*

Demostración(Lema 1.6, pag.63,[Bo*]). Sea $\mathcal{M}$ un modelo saturado de T. Sea $e \in M^{eq}$. Sea $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in M$ alguna upla tal que $e \in dcl(\bar{b})$. Tal upla existe puesto que por definición $e = f_E(\bar{b})$ para alguna relación de equivalencia E definible sin parámetros y para alguna upla $\bar{b}$. Sea f una función $\emptyset$-definible tal que $f(\bar{b}) = e$. Sea $M_0 = acl(e) \cap M$, el cual es infinito por nuestras hipótesis. Veamos que existen $c_1, \ldots, c_n \in M_0$ tales que $f(\bar{c}) = e$. Supongamos que hemos encontrado $c_1, \ldots, c_{i-1} \in M_0$ tales que para algunos $a_i, \ldots, a_n \in M$, $e = f(c_1, \ldots, c_{i-1}, a_i, \ldots, a_n)$. Consideremos la fórmula $F(x_i) : \exists x_{i+1} \cdots \exists x_n e = f(c_1, \ldots, c_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Si la fórmula F es satisfecha tan sólo por un número finito de elementos de M, que debe ser mayor o igual que uno dado que a_i la satisface, entonces dichos elementos pertenecen a $acl(e, c_1, \ldots, c_{i-1}) \cap M = acl(e) \cap M = M_0$ y por tanto basta tomar c_i igual a uno de ellos. Si la fórmula F no es satisfecha por un número finito de elementos de M entonces tan sólo existe un número finito de elementos que no la satisfacen. Puesto que M_0 es infinito, existen infinitos elementos de M_0 que satisfacen F y por tanto podemos tomar c_i igual a alguno de ellos. En cualquier caso, la fórmula F se satisface en algún $c_i \in M_0$. Finalmente tenemos que $e \in dcl(\bar{c})$ y $\bar{c} \in acl(e)$. Por la observación 1.19 *ii)*, M tiene eliminación de imaginarios. $\square$

1.5. Dimensión

Sea $\mathcal{M}$ una L-estructura fuertemente minimal y saturada.

Definición 1.26. *Dada una n-upla $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in M$, definimos su **dimensión sobre** A, la cual denotamos con $dim(\bar{a}|A)$, como el número máximo de coordenadas de $\bar{a}$ que son independientes respecto del operador acl_A definido en la observación 1.24.*

Observación 1.27. *i)* La dimensión de una upla $\bar{a}$ sobre A coincide con la dimensión del conjunto $acl_A(a_1, \ldots, a_n)$, es decir, con el cardinal de una base de dicho conjunto.

ii) La dimensión de una n-upla $\bar{a}$ depende exclusivamente del tipo $p(\bar{x}) = tp_n^{\mathcal{M}}(\bar{a}|A)$. Efectivamente, si $dim(\bar{a}|A) = s$, entonces existirán $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_s}\}$ independientes sobre A y por tanto para toda fórmula $F(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}) \in For(L_A)$ la fórmula $G(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_s})$ que dice que existen N elementos que satisfacen $F(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}, x_{i_k}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_s})$, para cualquier N y cualquier k, pertenece a $p(\bar{x})$. De la misma manera, para todo subconjunto $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_l}\}$, $l > s$, existe una fórmula que los relaciona algebraicamente y que por tanto pertenecerá a $p(\bar{x})$. Así pues, todas las realizaciones de $p(\bar{x})$ tienen la misma dimensión.

Definición 1.28. *Definimos la* **dimensión de un tipo** $p(\bar{x}) \in S(A)$, $A \subset M$, *como la dimensión de una upla que lo realice.*

Proposición 1.29. $dim(\bar{a}, \bar{b}|A) = dim(\bar{a}|A, \bar{b}) + dim(\bar{b}|A)$.

Demostración. Lo demostramos por inducción sobre la longitud de la upla $\bar{b}$. Probemos que para cualquier upla $\bar{a} \in M$ y para cualquier $b \in M$, $dim(\bar{a}b|A) = dim(\bar{a}|Ab) + dim(b|A)$. Si $dim(b|A) = 0$ entonces la igualdad anterior es trivial ya que $acl(Ab) \subset acl(A)$. Si $dim(b|A) = 1$ entonces existen $a_{i_1}, \ldots, a_{i_s}$ tales que $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_s}, b\}$ son A-algebraicamente independientes y $dim(\bar{a}b|A) = s + 1$. Así pues, $dim(\bar{a}|Ab) = dim(\bar{a}|A) = s$. Supongámoslo cierto para $n-1$ y probémoslo para n. Tenemos que

$$\begin{aligned} dim(\bar{a}\bar{b}|A) &= dim(\bar{a}\bar{b}'|Ab_n) + dim(b_n|A) = \\ &= dim(\bar{a}|A\bar{b}) + dim(\bar{b}'|Ab_n) + dim(b_n|A) = \\ &= dim(\bar{a}|A\bar{b}) + dim(\bar{b}'|Ab_n) + dim(\bar{b}|A) - dim(\bar{b}'|Ab_n) = \\ &= dim(\bar{a}|A\bar{b}) + dim(\bar{b}|A). \end{aligned}$$

□

Definición 1.30. *Dados dos subconjuntos $A, B \subset M$, $A \subset B$, decimos que $tp_n^{\mathcal{M}}(\bar{a}|B)$* ***no bifurca*** *sobre A si $dim(\bar{a}|B) = dim(\bar{a}|A)$. Equivalentemente, dados $p \in S(A)$ y $q \in S(B)$, $A \subset B$, decimos que q es una extensión de p que no bifurca sobre A si $p \subset q$ y $dim(q) = dim(p)$. Decimos que $\bar{a}$ es* ***independiente*** *de B sobre A si $dim(\bar{a}|B) = dim(\bar{a}|A)$.*

Proposición 1.31 (Simetría)**.** *Si $\bar{a}$ es independiente de $\bar{b}$ sobre A entonces $\bar{b}$ es independiente de $\bar{a}$ sobre A.*

Demostración. Se deduce directamente de la proposición 1.29. □

Proposición 1.32. *Sean $\bar{a}, \bar{b} \in M^n$ tales que $dim(\bar{a}|A) = dim(\bar{b}|A) = n$. Entonces $tp_n^{\mathcal{M}}(\bar{a}|A) = tp_n^{\mathcal{M}}(\bar{b}|A)$.*

Demostración. Lo demostramos por inducción sobre n.

- Para $n = 1$: Sean $a, b \in M$ tales que $a, b \notin acl(A)$. Sea $F(x) \in tp(a|A)$. Si el conjunto $\{c \in M : \mathcal{M} \models F(c)\}$ fuera finito entonces tendríamos que $a \in acl(A)$. Así pues, es cofinito. Si b no satisficiera la fórmula F entonces tendríamos que $b \in acl(A)$. Por tanto $F(x) \in tp(b|A)$.

- Para n suponiendo que es cierto para $n-1$: Puesto que $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son A-algebraicamente independientes, tenemos que tanto $\bar{a}' = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ como $\bar{b}' = (b_1, \ldots, b_{n-1})$ también lo son. Por hipótesis de inducción, $tp(\bar{a}'|A) = tp(\bar{b}'|A)$. Sea $F(\bar{x}) \in tp(\bar{a}'|A)$. Tenemos que la fórmula $\exists x_n F(\bar{x}', x_n)$ pertenece a $tp(\bar{a}'|A) = tp(\bar{b}'|A)$. Si el conjunto $\{c \in M : \mathcal{M} \models F(\bar{a}', c))\}$ fuera finito, entonces tendríamos que $a_n \in acl(A \cup \{a_1, \ldots, a_{n-1}\})$, lo cual no es posible. Por tanto es cofinito. Sea N el número de elementos que no satisfacen $F(\bar{a}', x_n)$ y sea $G(\bar{x}')$ la fórmula que expresa que existen exactamente N elementos que no satisfacen $F(\bar{x}', x_n)$. Dicha fórmula está en el tipo de $\bar{a}'$ y por tanto en el de $\bar{b}'$. Por tanto $\bar{b}$ satisface la fórmula $F(\bar{x})$, ya que en caso contrario b_n pertenecería a $acl(B \cup \{b_1, \ldots, b_{n-1}\})$. □

Proposición 1.33. *Sea $A \subset M$ y sea $p(\bar{x}) \in S(A)$. Entonces cualquier tipo $q(\bar{x}) \in S(acl(A))$ que extienda a $p(\bar{x})$ no bifurca sobre $acl(A)$.*

Demostración. Podemos suponer que $|A| < |M|$ ya que en caso contrario bastaría trabajar en una extensión elemental de M suficientemente saturada. Sea $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_m) \in M$ una upla que realice $q(\bar{x})$. Supongamos que la proposición no es cierta, es decir, que $dim(\bar{a}|A) > dim(\bar{a}|acl(A))$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $dim(\bar{a}|A) = dim(\bar{a}'|A) = n$ y que $a_1 \in acl(\bar{a}, \bar{b})$, donde $\bar{a}' = (a_1, \ldots, a_n)$, $\bar{a}'' = (a_2, \ldots, a_n)$ y $\bar{b} \in acl(A)$. Por la proposición 1.29 tenemos que

$$\begin{aligned} 0 = dim(a_1|\bar{a}'', \bar{b}, A) &= dim(a_1, \bar{b}|\bar{a}'', A) - dim(\bar{b}|\bar{a}'', A) = \\ &= dim(\bar{b}|\bar{a}', A) + dim(a_1|\bar{a}'', A) - 0 = \\ &= 0 + 1 = 1, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. □

Proposición 1.34. *Toda L-fórmula $F(x, \bar{y})$ tiene asociada una L-fórmula $\delta(\bar{y})$ de forma que para todo $\bar{b} \in M$, $F(x, \bar{b})$ define un conjunto infinito si y sólo si $\mathcal{M} \models \delta(\bar{b})$.*

Demostración. Supongamos que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe una upla $\bar{y} \in M$ tal que $\#\{c \in M : \mathcal{M} \models F(x, \bar{y})\} > k$ y $\#\{c \in M : \mathcal{M} \models \neg F(x, \bar{y})\} > k$. Sea $G_k(\bar{y})$ la fórmula que dice que $\#\{c \in M : \mathcal{M} \models F(x, \bar{y})\} > k$ y $\#\{c \in M : \mathcal{M} \models \neg F(x, \bar{y})\} > k$. Por lo dicho anteriormente, $\{G_k(\bar{y})\}$ es un tipo parcial y por ser $\mathcal{M}$ saturada, existe $\bar{y}_0 \in M$ que realiza el tipo. Tenemos que $\{c \in M : \mathcal{M} \models F(c, \bar{y}_0)\}$ no es finito ni cofinito, lo cual es una contradicción. Por tanto, existe un número k_0 tal que para todo $\bar{y} \in M$ tenemos que $\#\{c \in M : \mathcal{M} \models F(c, \bar{y})\} \leq k_0$ o $\#\{c \in M : \mathcal{M} \models \neg F(c, \bar{y})\} \leq k_0$. Finalmente, tomamos la fórmula $\delta(\bar{y})$ que dice que al menos existen $k_0 + 1$ elementos que realizan $F(x, \bar{y})$. $\square$

Proposición 1.35. *Dada una L-fórmula $F(x_1, \ldots, x_n, \bar{y})$, existe una fórmula $\delta(\bar{y}) \in For(L)$ de forma que para todo $\bar{b} \in M$ existe infinitos x_1 para los cuales existen infinitos x_2 para lo cuales ... para los cuales existen infinitos x_n tales que se satisface $F(\bar{x}, \bar{b})$ si y sólo si $\mathcal{M} \models \delta(\bar{b})$.*

Demostración. Procedemos por inducción en n. Para $n = 1$ está demostrado en la proposición anterior. Supongámoslo cierto para $n - 1$ y veamos que es cierto para n. Por la proposición anterior sabemos que existe un fórmula $\delta_n(\bar{x}', \bar{y})$ tal que para cualesquiera $\bar{c}', d \in M$ el conjunto que define $F(\bar{c}', x, \bar{d})$ es infinito si y sólo si se satisface $\delta_n(\bar{c}', \bar{d})$. Por hipótesis de inducción, existe una fórmula $\delta_{n-1}(\bar{y})$ asociada a $\delta_n(\bar{x}', \bar{y})$ con la propiedad del enunciado. Finalmente, basta tomar como $\delta(\bar{y})$ la misma $\delta_{n-1}(\bar{y})$. $\square$

Notación 1.36. Dada una fórmula $F(\bar{x}, \bar{y})$, denominaremos a la fórmula $\delta(\bar{y})$ cuya existencia nos asegura la proposición anterior como la *fórmula asociada a la dimensión de $F(\bar{x}, \bar{y})$.*

Proposición 1.37. *Sea $F(\bar{x}, \bar{y})$ una fórmula, $\bar{x}$ una n-upla de variables, y sea $\delta(\bar{y})$ la fórmula asociada a su dimensión. Sea $\bar{b} \in M$ y $B \subset M$, $|B| < |M|$, $b_i \in B$. Entonces $\mathcal{M} \models \delta(\bar{b})$ si y sólo si existe $\bar{a} \in M^n$ tal que $\mathcal{M} \models F(\bar{a}, \bar{b})$ y $dim(\bar{a}|B) = n$.*

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Por inducción sobre n. Para $n = 1$, supongamos que no es cierto, es decir, que para todo $a \in M$ si $\mathcal{M} \models F(a, \bar{b})$ entonces existe una fórmula $G_a(x, \bar{b}_a)$, $\bar{b}_a \in B$, tal que $\mathcal{M} \models G_a(a, \bar{b}_a)$ y $G_a(x, \bar{b}_a)$ define un conjunto finito en M. Consideremos el conjunto de fórmulas $p(x) = \{\neg G_a(x, \bar{b}_a) : a \in M, \mathcal{M} \models F(a, \bar{b})\} \cup \{F(x, \bar{b}\}$. Si $p(x)$ fuera un tipo parcial sobre B entonces por saturación existiría $\tilde{a} \in M$ que lo realizaría, lo cual sería absurdo puesto que entonces $\mathcal{M} \models \neg G_{\tilde{a}}(\tilde{a}, \bar{b}_{\tilde{a}}) \wedge G_{\tilde{a}}(\tilde{a}, \bar{b}_{\tilde{a}})$. Así pues $p(x)$ no es un tipo parcial y por tanto existe un subconjunto finito de $p(x)$ que no se realiza en $\mathcal{M}$. Puesto cualquier conjunto finito de $\{\neg G_a(x, \bar{b}_a) : a \in M, \mathcal{M} \models F(a, \bar{b})\}$ se realiza en M ya que los conjunto que definen $\neg G_a(x, \bar{b}_a)$ en M son cofinitos y puesto que $F(x, \bar{b})$ se realiza en M, existen $G_{a_1}(x, \bar{b}_{a_1}), \ldots, G_{a_l}(x, \bar{b}_{a_l})$ tales que $\mathcal{M} \models \forall x(F(x, \bar{b}) \rightarrow \bigvee_{i=1}^{l} G_{a_i}(x, \bar{b}_{a_i}))$. Por tanto el conjunto que define $F(x, \bar{b})$ es finito por estar contenido en el conjunto que define $\bigvee_{i=1}^{l} G_{a_i}(x, \bar{b}_{a_i})$, lo cual contradice que $\mathcal{M} \models \delta(\bar{b})$. Supongamos cierto el resultado para $n-1$ y probémoslo para n. Sea $\delta_{n-1}(\bar{x}', \bar{y})$ asociada a la dimensión de $F(\bar{x}', x_n, \bar{b})$ y sea $\tilde{\delta}(\bar{y})$ la asociada a la dimensión $\delta(\bar{x}', \bar{y})$. Observamos que $\mathcal{M} \models \tilde{\delta}(\bar{b})$ ya que $\mathcal{M} \models \delta(\bar{b})$. Por hipótesis de inducción, existe $\bar{a}' \in M$ tal que $\mathcal{M} \models \delta_{n-1}(\bar{a}', \bar{b})$ y $dim(\bar{a}'|B) = n-1$. Aplicando el caso $n = 1$ a la fórmula $F(\bar{a}', x, \bar{b})$ y al conjunto $\tilde{B} = B \cup \bar{a}'$, obtenemos que puesto que $\mathcal{M} \models \delta_{n-1}(\bar{a}', \bar{b})$, existe $a \in M$ tal que $\mathcal{M} \models F(\bar{a}', a, \bar{b})$ y $dim(a|B \cup \bar{a}') = 1$. Finalmente, si denotamos $\bar{a} = (\bar{a}', a)$, tenemos que $\mathcal{M} \models F(\bar{a}\bar{b})$ y $dim(\bar{a}|B) = n$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $\bar{a}$ tal que $\mathcal{M} \models F(\bar{a}, \bar{b})$ y $dim(\bar{a}|B) = n$. Observamos que existe infinitos elementos $c \in M$ tales que $\mathcal{M} \models F(\bar{a}', c, \bar{b})$. Así pues, $\mathcal{M} \models \delta(\bar{a}', \bar{b})$, donde δ es la fórmula asociada a $F(\bar{a}', x, \bar{b})$. Tenemos que existen infinitos elementos $c \in M$ tales que $\mathcal{M} \models \delta(\bar{a}'', c, \bar{b})$. Siguiendo este proceso demostramos que existe infinitos x_1 para los cuales existen infinitos x_2 para lo cuales ... para los cuales existen infinitos x_n tales que se satisface $F(\bar{x}, \bar{b})$ y por tanto $\mathcal{M} \models \delta(\bar{b})$. $\square$

Definición 1.38. *Sea $F(\bar{x}, \bar{y}) \in For(L)$, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, y sea $\bar{b} \in M$. Decimos que la **dimensión de** $F(\bar{x}, \bar{b})$ es n y la denotamos con $dim(F(\bar{x}, \bar{b})) = n$ si existe $\bar{a} \in M$ tal que $\mathcal{M} \models F(\bar{a}, \bar{b})$ y $dim(\bar{a}|\bar{b}) = n$. Equivalentemente, decimos que la **dimensión de** X es n, $dim(X) = n$, donde X es el conjunto de M^n que describe $F(x, \bar{b})$.*

*En general, definimos **la dimensión de** $F(\bar{x}, \bar{b})$ como el mayor $k \leq n$ para el cual existen subíndices $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ de forma que la fórmula $\tilde{F}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) : \exists x_{j_1} \cdots \exists x_{j_{n-k}} F(\bar{x}, \bar{b})$, donde $1 \leq j_1 < \ldots < j_{n-k} \leq n$ son los subíndices tales que $\{i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{n-k}\} = \{1, \ldots, n\}$, tiene dimensión k. Equivalentemente, podemos decir que la dimensión de X, $dim(X)$, donde X es el conjunto de M^n que describe $F(x, \bar{b})$, es el mayor k para el que existe alguna proyección Y de X en M^k tal que $dim(Y) = k$.*

Observación 1.39. Por la proposición 1.37, dada una fórmula $F(\bar{x}, \bar{y}) \in For(L)$, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, y $\bar{b} \in M$, la dimensión de $F(\bar{x}, \bar{b})$ es n si y sólo si $\mathcal{M} \models \delta(\bar{b})$, donde $\delta(\bar{y})$ es la fórmula asociada a la dimensión de $F(\bar{x}, \bar{y})$. En adelante, utilizaremos ambas definiciones indistintamente.

Notación 1.40. Dado un conjunto de índices $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ como en la definición anterior, denotaremos con $1 \leq j_1 < \ldots < j_{n-k} \leq n$ a los subíndices tales que $\{i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{n-k}\} = \{1, \ldots, n\}$. Denotaremos con $I^{(k)}$ el conjunto de subíndices $\{i_1, \ldots, i_k\}$ tales que $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$. Dada una n-upla $(c_1, \ldots, c_n)$ denotaremos con $\hat{c}_k$ a la $(n-1)$-upla dada por $(c_1, \ldots, c_{k-1}, c_{k+1}, \ldots, c_n)$.

Proposición 1.41. *Para toda $F(\bar{x}, \bar{y}) \in For(L)$, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $1 \leq$*

$k \leq n$, existe un fórmula $\delta(\bar{y}) \in For(L)$, que depende de F y de k, tal que $\mathcal{M} \models \delta(\bar{b})$ si y sólo si $dim(F(\bar{x}, \bar{b})) = k$.

Demostración. Para cualquier $1 \leq k \leq n$, denotemos $S = \{i_1, \ldots, i_k\} \in I^{(k)}$ y consideremos las fórmulas $F_S(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, \bar{y}) : \exists x_{j_1} \cdots \exists x_{j_{n-k}} F(\bar{x}, \bar{y})$ junto con sus fórmulas $\delta_S(\bar{y})$ asociadas. Basta considerar la fórmula

$$\delta(\bar{y}) : \left(\bigvee_{S \in I^{(k)}} \delta_S(\bar{y}) \right) \wedge \left(\bigwedge_{S \in I^{(k+1)}} \neg \delta_S(\bar{y}) \right).$$

□

Observación 1.42. Dada una fórmula $F(\bar{x}, \bar{b})$, $\bar{b} \in M$, su dimensión en una extensión elemental de $\mathcal{M}$ será la misma.

Proposición 1.43. *Sea $X \subset M^n$ un conjunto definible. Entonces, si X es A-definible, $|A| < |M|$,*

$$dim(X) = max\{dim(\bar{a}|A) : \bar{a} \in X\}.$$

Demostración. Utilizaremos la notación de la demostración de la proposición anterior. Sea $F(\bar{x}, \bar{b})$, $\bar{b} \in A$, la fórmula que define X. Si la dimensión de X es k, entonces existe $S \in I^{(k)}$ tal que $\mathcal{M} \models \delta_S(\bar{b})$. Por la proposición 1.37, sabemos que existe $\bar{a}_S \in M^k$ tal que $\mathcal{M} \models F_S(\bar{a}_S, \bar{b})$ y $dim(\bar{a}_S|A) = k$. Entonces, existe $\bar{a} \in X$ tal que $dim(\bar{a}|A) \geq k$. Así pues, $dim(X) \leq max\{dim(\bar{a}|A) : \bar{a} \in X\}$. Supongamos que existe $\bar{a} \in X$ tal que $dim(\bar{a}|A) > k$. Para simplificar la notación, podemos suponer que $(a_1, \ldots, a_{k+1})$ son A-algebraicamente independientes. Puesto que existe un número infinito de elementos que satisfacen $\exists x_{k+2} \cdots \exists x_n F(a_1, \ldots, a_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n, \bar{b})$, tenemos que $\mathcal{M} \models \delta(a_1, \ldots, a_k, \bar{b})$, donde $\delta(x_1, \ldots, x_k, \bar{y})$ es la fórmula asociada a la dimensión de $\exists x_{k+2} \cdots \exists x_n F(\bar{x}, \bar{y})$. Dado que existen infinitos elementos que satisfacen $\delta(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, \bar{b})$, tenemos que $\mathcal{M} \models \delta_1(a_1, \ldots, a_{k-1}, \bar{b})$, donde $\delta_1(x_1, \ldots, x_{k-1}, \bar{y})$ es la fórmula asociada a la dimensión de la fórmula $\delta(x_1, \ldots, x_k, \bar{b})$. Siguiendo este proceso, llegamos a que $\mathcal{M} \models \delta_2(\bar{b})$, donde $\delta_2(\bar{y})$ es la fórmula asociada a la dimensión de la formula

$$\exists x_{k+2} \cdots \exists x_n F(a_1, \ldots, a_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n, \bar{b}).$$

Por tanto $dim(X) \geq k + 1$, lo cual es una contradicción. □

Definición 1.44. *Decimos que $\bar{a}$ es un* ***punto genérico*** *de X sobre A si X es A-definible y $\bar{a} \in X$ con $dim(\bar{a}|A) = dim(X)$. Al tipo de un punto genérico de un conjunto A-definible sobre A lo llamamos* ***tipo genérico*** *de X sobre A.*

Proposición 1.45. *La dimensión de una disjunción finita de fórmulas es el máximo de las dimensiones de cada una de ellas.*

Proposición 1.46. *Sea $p(\bar{x}) \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$, $A \subset M$. Entonces*

$$dim(p) = min\{dim(F) : F \in p\}.$$

Demostración. Podemos suponer que $|A| < |M|$ ya que en caso contrario bastaría trabajar en un extensión elemental suficientemente saturada. Por saturación, existe $\bar{a} \in M^n$ que realiza el tipo, es decir, $p(\bar{x}) = tp(\bar{a}|A)$. Por definición, $dim(p) = dim(\bar{a}|A)$. Por la proposición 1.43, para toda fórmula $F(\bar{x})$ de $p(\bar{x})$ tenemos que $dim(F) \geq dim(\bar{a}|A)$ de lo cual deducimos que $dim(p) \leq min\{dim(F) : F \in p\}$. Para probar la otra desigualdad, sea $dim(p) = k$. Si $k = n$ entonces hemos terminado. Si $k < n$ basta probar que existe $F \in p(\bar{x})$ con $dim(F) \leq k$. Como $dim(\bar{a}|A) = k$, para todo $S = \{i_1, \ldots, i_{k+1}\} \in I^{(k+1)}$ existe $i_{j(S)} \in S$ tal que $a_{i_{j(S)}} \in acl(A \cup \{a_{i_j} : j \neq j(S)\})$. Sea $F_S(x_{i_{j(S)}}, \hat{x}_{i_{j(S)}}, \bar{b})$, $\bar{b} \in A$, una fórmula tal que tan sólo existen un número finito de elementos en M que satisfacen $F_S(x_{i_{j(S)}}, \hat{a}_{i_{j(S)}}, \bar{b})$ y tal que uno de ellos es $a_{i_{j(S)}}$. Sea $\delta_S(\hat{x}_{i_{j(S)}}, \bar{y})$ la fórmula asociada a la dimensión uno de la fórmula $F_S(x_{i_{j(S)}}, \hat{x}_{i_{j(S)}}, \bar{y})$. Tenemos entonces que $\mathcal{M} \models \neg\delta_S(\hat{a}_{i_{j(S)}}, \bar{b})$. Por último, tomemos la fórmula $F(\bar{x}, \bar{b}) : \bigwedge_{S \in I^{(k+1)}}(F_S(x_{i_{j(S)}}, \hat{x}_{i_{j(S)}}, \bar{b}) \wedge \neg\delta_S(\hat{x}_{i_{j(S)}}, \bar{b}))$. Por construcción, $F(\bar{x}) \in p(\bar{x})$ y $dim(F) \leq k$. $\square$

Proposición 1.47. *Sea $p(\bar{x}) \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$, $A \subset M$. Dado $B \subset M$ con $A \subset B$, existe $\bar{b}$ en alguna extensión elemental que realiza p y que es independiente de B sobre A, es decir, tal que $dim(\bar{b}|B) = dim(\bar{b}|A)$ (o lo que es lo mismo, $tp(\bar{b}|B)$ es una extensión de p que no bifurca sobre A).*

Demostración. Podemos suponer que $|B| < |M|$, ya que en caso contrario bastaría trabajar en una extensión elemental suficientemente saturada. Lo probamos por inducción sobre $k = dim(p)$. Sea $\bar{a} \in M$ tal que $p(\bar{x}) = tp_n^{\mathcal{M}}(\bar{a}|A)$. Podemos suponer que $\bar{a}' = (a_1, \ldots, a_k)$ son A-algebraicamente independientes. Sea $\bar{a}'' = (a_1, \ldots, a_{k-1})$. Por hipótesis de inducción, sabemos que existe $\bar{b}'' = (b_1, \ldots, b_{k-1}) \in M$ que realiza el tipo $tp(\bar{a}''|A)$ y tal que $dim(\bar{b}''|B) = k - 1$. Sea $p'(x)$ el conjunto de fórmulas $\{F(b'', x) : \mathcal{M} \models F(\bar{a}'), F(\bar{x}') \in For(L_A)\}$ y las fórmulas que expresan que $x \notin acl(B \cup \bar{b}'')$. Veamos que $p'(x)$ es un tipo parcial. Tomemos $\Gamma(x) = \Gamma_1(x) \cup \Gamma_2(x)$ un subconjunto finito de $p(x)$, donde $\Gamma_2(x)$ son fórmulas que expresan que $x \notin acl(B \cup \bar{b}'')$. Sean $X_1 = \{c \in M : \mathcal{M} \models \Gamma_1(c)\}$ y $X_2 = \{c \in M : \mathcal{M} \models \Gamma_2(c)\}$. Por el tipo de fórmula que aparecen en Γ_2 sabemos que X_2^c es finito. Si tuviéramos que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ entonces X_1 sería finito y la dimensión de $\bar{a}'$ no podría ser k. Así pues, $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ y $\Gamma(x)$ se satisface en M. Por compacidad

$p'(x)$ es un tipo parcial y por saturación existe b_k que lo realiza. Tenemos que $tp(\bar{b}'|A) = tp(\bar{a}'|A)$ y $dim(\bar{b}'|B) = k$, donde $\bar{b}' = (b_1, \ldots, b_k)$.

Consideremos el conjunto de fórmulas $p(\bar{x}^*) = \{F(\bar{b}', \bar{x}^*) : \mathcal{M} \models F(\bar{a})\}$, donde $\bar{x}^* = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Observamos que dado un número finito de fórmulas $F_1, \ldots, F_m$ de $p(\bar{x}^*)$ tenemos que $\mathcal{M} \models \exists x_{k+2} \cdots \exists x_n \bigwedge_{i=1}^m F_i(\bar{a}', \bar{x}^*)$. Dado que $\bar{a}'$ y $\bar{b}'$ tienen el mismo tipo, $\mathcal{M} \models \exists x_{k+2} \cdots \exists x_n \bigwedge_{i=1}^m F_i(\bar{b}', \bar{x}^*)$. Por compacidad $p(\bar{x}^*)$ es un tipo parcial. Por saturación existe un elemento $\bar{b}^* \in M$ que realiza el tipo. Así pues, $(b_1, \ldots, b_n)$ y $(a_1, \ldots, a_n)$ tienen el mismo tipo y la dimensión de $(b_1, \ldots, b_n)$ sobre B sigue siendo k. $\square$

Lema 1.48. *Sea $X \subset M^n$ un subconjunto A-definible de M y sea $f : X \to M^m$ una función A-definible e inyectiva. Entonces*

i) para todo $\bar{a} \in X$, $dim(\bar{a}|A) = dim(f(\bar{a})|A)$,

ii) $dim(X) = dim(f(X))$.

Demostración. i) Como $f(\bar{a}) \in acl(A, \bar{a})$ y por la inyectividad de la función $\bar{a} \in acl(A, f(\bar{a}))$, tenemos que $acl(A, \bar{a}) = acl(A, f(\bar{a})))$. Por tanto, $dim(\bar{a}|A) = dim(f(\bar{a})|A)$.

ii) Por i) tenemos que

$$\begin{aligned} dim(X) &= max\{dim(\bar{a}|A) : \bar{a} \in X\} = \\ &= max\{dim(f(\bar{a})|A) : \bar{a} \in X\} = \\ &= dim(f(X)). \end{aligned}$$

$\square$

1.6. Multiplicidad

Sea $\mathcal{M}$ una L-estructura fuertemente minimal y saturada.

Proposición 1.49. *Sea $p(\bar{x}) \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$. Dado $B \subset M$ con $A \subset B$, el cardinal del conjunto*

$$\{tp(\bar{b}|B) : \bar{b} \text{ realiza } p(\bar{x}), dim(\bar{b}|B) = dim(p)\},$$

es finito. Es más, dicho cardinal está acotado por un número que depende de p y pero no de B.

Demostración. Por la proposición 1.47 existe una upla $\bar{a}$ en alguna extensión elemental que realiza $p(\bar{x})$ y tal que $dim(\bar{a}|B) = dim(\bar{a}|A) = dim(p) = k$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\bar{a}' = (a_1, \ldots, a_k)$ son algebraicamente independientes sobre B. En particular, tendremos que $\bar{a}'$ también son algebraicamente independientes sobre A. Para cada $j = k+1, \ldots, n$ existe una fórmula $F_j(x_j, \bar{a}', \bar{b})$, $\bar{b} \in A$, tal que $\mathcal{M}$ satisface que existen exactamente $N_j \in \mathbb{N}$ elementos que satisfacen F_j y uno de ellos es a_j. Así pues, el número N de uplas que satisfacen la fórmula $H(\bar{a}', \bar{x}'', \bar{b}) : \bigwedge_{j=k+1}^{n} F_j(x_j, \bar{a}', \bar{b})$, $\bar{x}'' = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$, es menor que $N_{k+1} \cdots N_n + 1$. De entre las uplas que satisfacen la fórmula anterior seleccionamos las uplas $\bar{a}''_1, \ldots, \bar{a}''_m$ tales que realizan el tipo $p(\bar{a}', \bar{x}'')$. Sean $\bar{a}_1 = \bar{a}, \bar{a}_2 = (\bar{a}', \bar{a}''_2), \ldots, \bar{a}_m = (\bar{a}, \bar{a}''_m)$. Obsérvese que para cada upla que satisface $H(\bar{a}', \bar{x}'', \bar{b})$ pero que no realiza $p(\bar{a}', \bar{x}'')$ podemos encontrar una formula de $p(\bar{a}', \bar{x}'')$ que dicha upla no satisface. Sean estas fórmulas $\tilde{F}_1(\bar{a}', \bar{x}''), \ldots, \tilde{F}_{N-m}(\bar{a}', \bar{x}'') \in p(\bar{a}', \bar{x}'')$ y sea $\tilde{H}(\bar{x}) : \bigwedge_{i=1}^{N-m} \tilde{F}_i(\bar{x})$. Observamos que si una upla cuyas k primeras coordenadas es $\bar{a}'$ satisface $H(\bar{x}) \wedge \tilde{H}(\bar{x})$ entonces es alguna de las $\bar{a}_i$. Consideremos los tipos $\{q_1(\bar{x}), \ldots, q_s(\bar{x}))\} = \{tp(\bar{a}_j|B) : 1 \leq j \leq m\}$. Obsérvese que en general $s \leq m$. Sean $G_i(\bar{x})$, $1 \leq i \leq s$, tales que $G_i(\bar{x}) \in q_j(\bar{x})$ si y sólo si $i = j$. Tenemos entonces que

i) la fórmula que dice que todo $\bar{x}''$ que satisfaga $H(\bar{x}', \bar{x}'') \wedge \tilde{H}(\bar{x}', \bar{x}'')$ satisface exactamente una de las $G_i(\bar{x}', \bar{x}'')$ es una fórmula de $tp(\bar{a}'|B)$,

ii) la fórmula que dice que todo $\bar{x}''$ que satisfaga $H(\bar{x}', \bar{x}'') \wedge \tilde{H}(\bar{x}', \bar{x}'') \wedge G_{i_0}(\bar{x}', \bar{x}'')$ satisface $G(\bar{x})$, donde $G(\bar{x})$ es cualquier fórmula de $q_{i_0}(\bar{x})$, es una fórmula de $tp(\bar{a}'|B)$.

Sea $\bar{d}$ una upla en alguna extensión elemental que realice $p(\bar{x})$ y tal que $dim(\bar{d}|B) = dim(\bar{d}|A) = dim(p) = k$, donde $\bar{d}' = (d_1, \ldots, d_k)$ son B-algebraicamente independientes. Por la proposición 1.32 tenemos que

$$tp(\bar{a}'|B) = tp(\bar{d}'|B).$$

Por $i)$, y puesto que se satisface la fórmula $H(\bar{d}) \wedge \tilde{H}(\bar{d})$, para algún i_0 se satisface $G_{i_0}(\bar{d})$. Por $ii)$, $tp(\bar{d}|B) = q_{i_0}(\bar{x})$. Obsérvese que el número s dependerá de B, pero en cualquier caso nunca podrá exceder la cota m, la cual tan sólo depende de A. □

Definición 1.50. *Sea $p(\bar{x}) \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$. Definimos la **multiplicidad de p** como*

$$mult(p(\bar{x})) = max\{C(B) : A \subset B \subset M\},$$

*donde $C(B) = \#\{tp(\bar{b}|B) : \bar{b} \text{ realiza } p(\bar{x}), dim(\bar{b}|B) = dim(p)\}$, es decir, $C(B)$ es el número de extensiones de p en $S(B)$ que no bifurcan sobre A. Decimos que un tipo $p(\bar{x}) \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$ es **estacionario** si $mult(p(\bar{x})) = 1$.*

Observación 1.51. 1) La multiplicidad de $p(\bar{x})$ coincide con el número de tipos globales que extienden a p y que tienen $dim(p)$.

2) Dada la definición 1.50, surge una pregunta natural: ¿para una extensión elemental de $\mathcal{M}$ la multiplicidad de un tipo de $S(A)$, $A \subset M$, sigue siendo la misma? Veremos que así es en la observación 1.57.

Lema 1.52. *Sea $X \subset M^n$ un conjunto A-definible y sean X_α, $\alpha < \omega$, subconjuntos A-definibles de X disjuntos dos a dos tales que $dim(X_\alpha) \geq 0$. Entonces $dim(X) \geq 1$. Es decir, todo conjunto X infinito A-definible tiene dimensión mayor o igual que* 1.

Demostración. Sea $F(\bar{x}) \in For(L_A)$ la fórmula que define X. Supongamos que $dim(X) = 0$. Entonces para todo $\bar{a} \in X$ existe una fórmula $G_{\bar{a}}(\bar{x}) \in For(L_A)$ tal que $\mathcal{M} \models G_{\bar{a}}(\bar{x})$ y existen un número finito de uplas en M^n que la satisfacen. Consideremos el conjunto de fórmulas $p(\bar{x}) = \{\neg G_{\bar{a}}(\bar{x}) : \bar{a} \in X\} \cup \{F(\bar{x})\}$. Tomemos un subconjunto finito $\Gamma_0(\bar{x}) = \{\neg G_{a_i}(\bar{x}) : i = 1 \leq i \leq l\} \cup \{F(\bar{x})\}$, $\bar{a}_i \in X$. Puesto que por hipótesis X tiene infinitos elementos y tan sólo existe un número finito de elementos que satisfacen $G_{a_1} \vee \cdots \vee G_{a_l}$, $\Gamma_0(\bar{x})$ se satisface en M. Por compacidad $p(\bar{x})$ es un tipo y por saturación existe $\bar{a} \in M^n$ que lo realiza, lo cual no es posible ya que entonces $\mathcal{M} \models G_{\bar{a}}(\bar{a}) \wedge \neg G_{\bar{a}}(\bar{a})$.

□

Proposición 1.53. *Sea X un conjunto definible en M. Entonces $dim(X) \geq r+1$ si y sólo si existe una colección de conjuntos definibles $\{X_\alpha : \alpha < \omega\}$, disjuntos dos a dos, $X_\alpha \subset X$, $dim(X_\alpha) \geq r$.*

Demostración. $\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que X y X_α son A-definibles. Sean F y F_α las fórmulas que definen los conjuntos X y X_α, respectivamente. Sean $\bar{b}^\alpha \in X_\alpha$ tales que $dim(\bar{b}^\alpha|A) \geq r$. Por tanto para cada α existen subíndices $(i_1(\alpha), \ldots, i_r(\alpha))$ tales que $(b^\alpha_{i_1(\alpha)}, \ldots, b^\alpha_{i_r(\alpha)})$ son algebraicamente independientes sobre A. Haciendo un par de reducciones podemos simplificar el problema.

- Podemos suponer que $(i_1(\alpha), \ldots, i_r(\alpha)) = (1, \ldots, r)$ para todo α. Efectivamente, existen unos subíndices $(i_1, \ldots, i_r)$ que se repiten infinitas veces, ya que en caso contrario el número de conjuntos X_α sería finito. Reordenando las variables podemos suponer que $(i_1, \ldots, i_r) = (1, \ldots, r)$. Sin pérdida de generalidad, prescindimos de todos los conjuntos X_α tales que $(i_1(\alpha), \ldots, i_r(\alpha))$ es distinto de $(1, \ldots, r)$.

- Denotemos $\bar{b}^\alpha = (\bar{b}^\alpha_0, \bar{c}^\alpha)$, donde $\bar{b}^\alpha_0 = (b^\alpha_1, \ldots, b^\alpha_r)$. Observamos que por la proposición 1.32 y dado que $dim(\bar{b}^\alpha_0|A) = r$ para todo $\alpha < \omega$, tenemos que $tp(\bar{b}_0^\alpha|A) = tp(\bar{b}_0^\beta|A)$, $\alpha, \beta < \omega$. Fijemos $\bar{b}_0 = \bar{b}_0^\alpha$ para algún $\alpha < \omega$. Para cada $\beta < \omega$ sea $\varphi_\beta \in Aut_A(\mathcal{M})$ tal que $\varphi_\beta(\bar{b}_0^\beta) = \bar{b}_0$. Dicho automorfismo existe por la proposición 1.3. Puesto que φ fija punto a punto el conjunto A, $\varphi(X_\beta) = X_\beta$. Así pues, podemos suponer que $\bar{b}_0^\beta = \bar{b}_0$ para todo $\beta < \omega$.

Dadas estas dos reducciones, consideremos los conjuntos $\tilde{X} = \{\bar{c} : F(\bar{b}_0, \bar{c})\}$ y $\tilde{X}_\alpha = \{\bar{c} : F_\alpha(\bar{b}_0, \bar{c})\}$. Ambos conjuntos son $A \cup \{b_1, \ldots, b_r\}$-definibles y $dim(\tilde{X}_\alpha) \geq 0$. Por el lema 1.52 $dim(\tilde{X}) \geq 1$ y por tanto $dim(X) \geq r + 1$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $F(\bar{x}) \in For(L_A)$ la fórmula que define el conjunto X. Sabemos que existe una n-upla $\bar{b} \in X$ tal que $dim(\bar{b}|A) \geq r + 1$. Podemos suponer que $(b_1, \ldots, b_{r+1})$ son A-algebraicamente independientes. Así pues, existen infinitos $b_\alpha \in M$ tales que $\mathcal{M} \models \exists x_{r+2} \cdots \exists x_n F(b_1, \ldots, b_r, b_\alpha, x_{r+2}, \ldots, x_n)$. Consideremos los conjuntos $X_\alpha \subset X$ definidos por la fórmula $F(\bar{x}) \wedge (x_{r+1} = b_\alpha)$. Tenemos que los X_α son disjuntos dos a dos, son definibles y $dim(X_\alpha) \geq r$.

$\square$

Definición 1.54. *Sea X un conjunto definible de M^n con $dim(X) = m$. Definimos la* ***multiplicidad de*** *X, la cual denotamos con $mult(X)$, como el máximo k para el cual existe una partición de X en k conjuntos definibles de dimensión m.*

Observación 1.55. 1)La multiplicidad de un conjunto X es finita. En caso contrario, sería posible encontrar infinitos subconjuntos definibles X_n disjuntos dos a dos con la misma dimensión que X, lo cual contradiría la proposición 1.53.

2) Dada una fórmula $F(\bar{x}, \bar{a})$, $\bar{a} \in M$, la multiplicidad es la misma en cualquier extensión elemental $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$. Denotemos con $mult^{\mathcal{M}}(F) = m$ y $mult^{\mathcal{N}}(F) = \tilde{m}$ ambas multiplicidades. Es evidente que $mult^{\mathcal{M}}(F) \leq mult^{\mathcal{N}}(F)$. Sean $G_1(\bar{x}, \bar{b}), \ldots, G_{\tilde{m}}(\bar{x}, \bar{b})$ tales que los conjuntos que definen en N son disjuntos dos a dos, tienen dimensión $dim(F(\bar{x}, \bar{a}))$ y su unión es igual al conjunto que define $F(\bar{x}, \bar{a})$. Sea la fórmula que dice que existe una upla $\bar{y}$ tal que $G_1(\bar{x}, \bar{y}), \ldots, G_{\tilde{m}}(\bar{x}, \bar{y})$ tales que los conjuntos que definen en N son disjuntos dos a dos, tienen dimensión $dim(F(\bar{x}, \bar{a}))$ y su unión es igual al conjunto que define $F(\bar{x}, \bar{a})$. Puesto que esta fórmula se satisface en $\mathcal{N}$, también se satisface en $\mathcal{M}$. Así pues, $\tilde{m} \leq m$.

Proposición 1.56. *Sea $p(\bar{x}) \in S(A)$, $dim(p) = m$. Entonces*

$$mult(p) = min\{mult(F(\bar{x})) : F(\bar{x}) \in p(\bar{x}), dim(F(\bar{x})) = m\}.$$

Demostración. Sea $F(\bar{x},\bar{b}) \in p(\bar{x})$, $\bar{a} \in M$, con $dim(F(\bar{x},\bar{b})) = m$. Veamos que $mult(p) \leq mult(F(\bar{x},\bar{b}))$. Sea $B \subset M$ tal que el número de tipos en $S(B)$ que extienden a $p(\bar{x})$ y no bifurcan sobre A es $k = mult(p)$. Sean $p_1(\bar{x}),\ldots,p_k(\bar{x}) \in S(B)$ dichos tipos y sean $F_j(\bar{x},\bar{b}_j)$, $\bar{b}_j \in B$, tales que $F_j \in p_j$ y $F_j \notin p_i$ si $i \neq j$. Consideremos las fórmulas $G_j(\bar{x}) : F(\bar{x},\bar{b}) \wedge F_j(\bar{x},\bar{b}_j) \wedge \bigwedge_{i\neq j} \neg F_i(\bar{x},\bar{b}_i)$ para $j = 1,\ldots,k$. Sean $X_j = G_j(M)$, $j = 1,\ldots,k$, y $\tilde{X}_k = \{\bar{a} \in M^n : \mathcal{M} \models F(\bar{x},\bar{b}) \wedge \bigwedge_{j=1}^{k} \neg F_j(\bar{a},\bar{b}_j)\}$. Obsérvese que los conjuntos $X_1,\ldots,X_{k-1},X_k \cup \tilde{X}_k$ son disjuntos dos a dos y que $dim(X_1) = \ldots = dim(X_{k-1}) = dim(X_k \cup \tilde{X}_k) = m$. Como dichos conjuntos constituyen una partición de $F(\bar{x},\bar{b})$ deducimos que $k \leq mult(F(\bar{x},\bar{b}))$.

Sea $F(\bar{x}) \in p(\bar{x})$, $dim(F) = m$ y $mult(F) = d$, donde d es la multiplicidad mínima de las fórmulas de p. Sean $G_1,\ldots,G_d \in For(L_B)$, $A \subset B \subset M$, $dim(G_i) = m$ de forma que $F(M)$ sea unión disjunta de los subconjuntos $G_i(M)$. La multiplicidad de las fórmulas G_i es 1 porque en caso contrario la multiplicidad de F sería mayor que d. Consideremos el conjunto de fórmulas

$$q_i(\bar{x}) = \{H(\bar{x}) \in For(L_B) : dim(H \wedge G_i) = m\}.$$

Dado que $mult(G_i) = 1$, si $H_1, H_2 \in q_i$ entonces $H_1 \wedge H_2 \in q_i(\bar{x})$ y por tanto q_i es un tipo. Para toda fórmula $H(\bar{x}) \in For(L_B)$, puesto que $dim(G_i) = m$, o bien $H \in q_i(\bar{x})$ o bien $\neg H \in q_i(\bar{x})$ y por tanto q_i es completo. Como el conjunto de fórmulas $p(\bar{x}) \cup \{G_i(\bar{x})\}$ es un tipo parcial y $mult(F \wedge G_i) = 1$, tenemos que la única extensión en $S(B)$ que no bifurca sobre A es q_i. Por tanto los q_i son extensiones de p que no bifurcan sobre A. Finalmente, por ser los tipos $q_1,\ldots,q_d$ distintos dos a dos, obtenemos que $mult(p) \leq d$. □

Observación 1.57. Veamos que dado un tipo $p(\bar{x}) \in S(A)$, $A \subset M$, la multiplicidad de dicho tipo es la misma para cualquier extensión elemental $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$. Es consecuencia directa de la proposición anterior y de la observación 1.55, ya que

$$\begin{aligned} mult^{\mathcal{M}}(p) &= min\{mult^{\mathcal{M}}(F) : F \in p, dim(F) = dim(p)\} = \\ &= min\{mult^{\mathcal{N}}(F) : F \in p, dim(F) = dim(p)\} = \\ &= mult^{\mathcal{N}}(p). \end{aligned}$$

Proposición 1.58. *Sea X un conjunto A-definible con $dim(X) = m$ y $mult(X) = 1$. Entonces, dados dos puntos genéricos $\bar{a}$ y $\bar{b}$ de X tenemos que $tp(\bar{a}|A) = tp(\bar{b}|A)$.*

Demostración. Sea $F(\bar{x}) \in For(L_A)$ la fórmula que define X. Supongamos que existe $G(\bar{x}) \in tp(\bar{a}|A)$ tal que $G \notin tp(\bar{b}|A)$. Observamos que $X = X_1 \cup X_2$, donde $X_1 = \{\bar{c} : \mathcal{M} \models F(\bar{x}) \wedge G(\bar{x})\}$ y $X_2 = \{\bar{c} : \mathcal{M} \models F(\bar{x}) \wedge \neg G(\bar{x})\}$. Dado que $mult(X) = 1$, X_1 y X_2 son disjuntos, son definibles y tienen dimensión m, deducimos que $X_1 = X_2$, lo cual es una contradicción. □

1.7. Bases canónicas

Sea $p(\bar{x}) \in S(A)$, $A \subset M$, un tipo estacionario y sea $F(\bar{x}, \bar{b}) \in p(\bar{x})$ tal que $dim(F(\bar{x}, \bar{b})) = dim(p) = m$ y $mult(F(\bar{x}, \bar{b})) = 1$. Sea la $\delta(\bar{y})$ la fórmula asociada a la dimensión de $F(\bar{x}, \bar{y})$ y consideremos la fórmula $G(\bar{y})$ dada por

$$\delta(\bar{y}) \wedge \forall \bar{z}(\delta(\bar{z}) \rightarrow (dim(F(\bar{x}, \bar{y}) \wedge F(\bar{x}, \bar{z})) \neq m \vee dim(F(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \neg F(\bar{x}, \bar{z})) \neq m).$$

Obsérvese que para todo $\bar{b}'$ tal que $dim(F(\bar{x}, \bar{b}')) = m$ y $mult(F(\bar{x}, \bar{b}')) = 1$ se satisface $G(\bar{b}')$. Sea la relación de equivalencia $\emptyset$-definible dada por

$$\bar{b}_1 E \bar{b}_2 \Leftrightarrow (\bar{b}_1 = \bar{b}_2) \vee (G(\bar{b}_1) \wedge G(\bar{b}_2) \wedge dim(F(\bar{x}, \bar{b}_1) \wedge F(\bar{x}, \bar{b}_2)) = m).$$

La única comprobación no trivial de que esta relación es de equivalencia es la propiedad transitiva entre elementos que satisfacen la fórmula G: sean $\bar{b}_1, \bar{b}_2$ y $\bar{b}_3$ que satisfagan G y tales que $\bar{b}_1 E \bar{b}_2$ y $\bar{b}_2 E \bar{b}_3$. Observamos que $dim(F(\bar{x}, \bar{b}_1) \wedge F(\bar{x}, \bar{b}_2) \wedge \neg F(\bar{x}, \bar{b}_3)) < m$, ya que $dim(F(\bar{x}, \bar{b}_2) \wedge \neg F(\bar{x}, \bar{b}_3)) < m$. Puesto que $dim(F(\bar{x}, \bar{b}_1) \wedge F(\bar{x}, \bar{b}_2)) = m$, tenemos que $dim(F(\bar{x}, \bar{b}_1) \wedge F(\bar{x}, \bar{b}_2) \wedge F(\bar{x}, \bar{b}_3)) = m$ y por tanto $dim(F(\bar{x}, \bar{b}_1) \wedge F(\bar{x}, \bar{b}_3)) = m$.

Definición 1.59. *Sea $p(\bar{x}) \in S(A)$ un tipo estacionario y sean $\bar{b}$ y E como en el párrafo anterior. La **base canónica** de p, la cual denotamos con $Cb(p)$, es el elemento $f_E(\bar{b}) \in M^{eq}$*

Observación 1.60. $Cb(p)$ es el único elemento que satisface la fórmula $\tilde{F}(y) : f_E(\bar{b}) = y$, donde $\bar{b}$ y E son los de la definición anterior, y por tanto tenemos que $Cb(p) \in dcl(A)$.

Proposición 1.61. *Cualesquiera dos bases canónicas de un tipo son interdefinibles.*

Demostración. Sea un tipo $p(\bar{x}) \in S(A)$ y sean $F(\bar{x}, \bar{b}), H(\bar{x}, \bar{c}) \in p(\bar{x})$ un par de fórmulas tales que $dim(H(\bar{x}, \bar{c})) = dim(F(\bar{x}, \bar{b})) = dim(p) = m$ y $mult(H(\bar{x}, \bar{c})) = mult(F(\bar{x}, \bar{b})) = 1$. Sean E y E' las relaciones de equivalencia utilizadas para definir la base canónica con las fórmulas $F(\bar{x}, \bar{b})$ y $H(\bar{x}, \bar{c})$ respectivamente. Por simetría basta probar que $f_E(\bar{b}) \in dcl(f_{E'}(\bar{c}))$. Denotemos $b = f_E(\bar{b})$ y $c = f_{E'}(\bar{c})$. Se considera la siguiente fórmula de L^{eq}

$$\widetilde{F}(y) : \exists \bar{y} \exists \bar{z}(G(\bar{y}) \wedge f_E(\bar{y}) = y \wedge f_{E'}(\bar{z}) = c \wedge dim(F(\bar{x}, \bar{y}) \wedge H(\bar{x}, \bar{z})) = m).$$

Veamos que b es el único elemento que la satisface. Sea $\tilde{b} \in M^{eq}$ que satisfaga la fórmula. Tenemos entonces que existen $\bar{b}_1$ y $\bar{c}_1$ tales que $dim(F(\bar{x}, \bar{b}_1) \wedge H(\bar{x}, \bar{c}_1)) = m$, $f_{E'}(\bar{c}_1) = c$ y $f_E(\bar{b}_1) = b$. Puesto que $dim(H(\bar{x}, \bar{c}_1) \wedge H(\bar{x}, \bar{c})) = m$ tenemos que $dim(H(\bar{x}, \bar{c}_1) \wedge \neg H(\bar{x}, \bar{c})) < m$ y por tanto $dim(F(\bar{x}, \bar{b}_1) \wedge$

$H(\bar{x},\bar{c}_1)\wedge\neg H(\bar{x},\bar{c})) < m$. Deducimos entonces que $dim(F(\bar{x},\bar{b}_1)\wedge H(\bar{x},\bar{c}_1)\wedge H(\bar{x},\bar{c})) = m$ y en particular $dim(F(\bar{x},\bar{b}_1)\wedge H(\bar{x},\bar{c})) = m$. Por otro lado, tenemos que $dim(F(\bar{x},\bar{b})\wedge H(\bar{x},\bar{c})) = m$. Como $dim(\neg F(\bar{x},\bar{b})\wedge H(\bar{x},\bar{c})) < m$, tenemos que $dim(\neg F(\bar{x},\bar{b})\wedge H(\bar{x},\bar{c})\wedge H(\bar{x},\bar{c}_1)) < m$ y por tanto $dim(F(\bar{x},\bar{b})\wedge H(\bar{x},\bar{c})\wedge H(\bar{x},\bar{c}_1)) = m$.En particular $dim(F(\bar{x},\bar{b})\wedge F(\bar{x},\bar{b}_1)) = m$. Finalmente, $f_E(\bar{b}_1) = b = \tilde{b}$. $\square$

Proposición 1.62. *Sea $p(\bar{x}) \in S(A)$, $A \subset M$, un tipo estacionario. Dado $C \subset M$,*

1) *$Cb(p) \in acl(C)$ si y sólo si existe $\bar{a}$ en alguna extensión elemental que realiza $p(\bar{x})$ y tal que $dim(\bar{a}|A\cup C) = dim(\bar{a}|C) = dim(p)$,*

2) *$Cb(p) \in dcl(C)$ si y sólo si existe $\bar{a}$ que realiza $p(\bar{x})$ y tal que $dim(\bar{a}|A\cup C) = dim(\bar{a}|C) = dim(p)$ y $mult(tp(\bar{a}|C)) = 1$.*

Demostración. 1) Supongamos que existe tal $\bar{a}$. Entonces $tp(\bar{a}|C)$ tienen dimensión $m = din(p)$. Sea $H(\bar{x},\bar{c}) \in tp(\bar{a}|C)$ tal que $dim(H(\bar{x},\bar{c})) = m$ y $mult(H(\bar{x},\bar{c})) = mult(tp(\bar{a}|C))$. Sea $F(\bar{x},\bar{b}) \in p(\bar{x})$ tal que $dim(F(\bar{x},\bar{b})) = m$ y $mult(F(\bar{x},\bar{b})) = 1$ y sean la relación de equivalencia E y la fórmula G utilizadas en la definición de la base canónica. Consideremos la fórmula

$$H(y) : \exists\bar{y}(f_E(\bar{y}) = y \wedge G(\bar{y}) \wedge dim(F(\bar{x},\bar{y})\wedge H(\bar{x},\bar{c})) = m).$$

Es evidente que $\mathcal{M} \models H(Cb(p))$ ya que $dim(\bar{a}|A\cup C) = m$. Supongamos que existen distintos $b_1,\ldots,b_k \in M^{eq}$ que satisfacen la fórmula. Sean $\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_k \in M$ tales que $f_E(\bar{b}_j) = b_j$, $\mathcal{M} \models G(\bar{b}_j)$ y $dim(F(\bar{x},\bar{b}_j)\wedge H(\bar{x},\bar{c})) = m$. Puesto los elementos $f_E(\bar{b}_j)$ son distintos dos a dos, deducimos que $dim(F(\bar{x},\bar{b}_i)\wedge F(\bar{x},\bar{b}_j)) \neq m$ para $i \neq j$. Consideremos las fórmulas $H_j(\bar{x}) : H(\bar{x},\bar{c})\wedge F(\bar{x},\bar{b}_j)\wedge\bigwedge_{i\neq j}\neg F(\bar{x},\bar{b}_i)$, $j = 1,\ldots,k$. Puesto que $dim(F(\bar{x},\bar{b}_j)\wedge H(\bar{x},\bar{c})) = m$, por la proposición 1.43 existe una upla $\bar{a}$ que satisface la fórmula $F(\bar{x},\bar{b}_j)\wedge H(\bar{x},\bar{c})$ y tal que $dim(\bar{a}|\bar{c},\bar{b}_1,\cdots,\bar{b}_k) = m$. Si $\bar{a}$ satisficiese la fórmula $F(\bar{x},\bar{b}_i)$, $i \neq j$, entonces tendríamos que la dimensión de $F(\bar{x},\bar{b}_i)\wedge F(\bar{x},\bar{b}_j)$ es m, lo cual es una contradicción. Por tanto $\bar{a}$ satisface la fórmula $\neg F(\bar{x},\bar{b}_i)$ para todo $i \neq j$, de lo que se deduce que $dim(H_j) = m$. Así pues, los conjuntos $H_j(M)$, $j = 1,\ldots,k$ son disjuntos dos a dos y tienen dimensión m. Sea $\tilde{H}_k(\bar{x}) : H(\bar{x},\bar{c})\wedge\neg H_1(\bar{x})\wedge\cdots\wedge\neg H_k(\bar{a})\}$. Como $H_k(M) \subset H_k(M)\cup\tilde{H}_k(M) \subset H(M)$, tenemos que $dim(H_k(M)\cup\tilde{H}_k(M)) = m$. Por tanto $H(M)$ es la union disjunta de $H_1(M),\cdots,H_{k-1}(M), H_k(M)\cup\tilde{H}_k(M)$, los cuales tienen dimensión m, de lo que deducimos que $mult(H(\bar{x},\bar{c})) \geq k$. Así pues, el número de elementos que satisface $H(y)$ es menor o igual que $mult(H(\bar{x},\bar{c}))$. Por tanto $Cb(p) \in acl(C)$. Obsérvese que en particular si $mult(H(\bar{x},\bar{c})) = 1$ entonces $Cb(p) \in dcl(C)$.

Probemos la otra implicación. Por la proposición 1.47, existe una upla $\bar{a}$ que realiza el tipo $p(\bar{x})$ tal que $dim(\bar{a}|A \cup C) = dim(p)$. Consideremos el conjunto $B = \bigcup_{\varphi \in Aut_C(\mathcal{M})} \varphi(A \cup C)$. Obsérvese que para todo $\varphi \in Aut_C(\mathcal{M})$ tenemos que $\varphi(B) = B$. Podemos suponer que $|B| < |M|$, ya que en caso contrario bastaría trabajar en una extensión $|M|^+$-saturada. Supongamos que $dim(\bar{a}|C) > dim(p)$. Veamos que existen infinitos tipos $q_\alpha = tp(\bar{a}_\alpha|B) \in S(B)$, $\alpha < \omega$, $mult(q_\alpha) = 1$, $dim(q_\alpha) = dim(p)$, que extienden a $tp(\bar{a}|C)$ y que son distintos dos a dos. Efectivamente, sea $F(\bar{x}) \in tp(\bar{a}|C)$ tal que $dim(F) = dim(tp(\bar{a}|C))$ y $mult(F) = 1$. Por la proposición 1.53 existen fórmulas F_α, $\alpha < \omega$, $dim(F_\alpha) = dim(p)$, tales que los conjuntos que definen forman una partición disjunta del conjunto que define F. Así pues, cada una de estas fórmulas nos proporciona un tipo q_α como los que queremos. Podemos suponer que $dim(\bar{a}|B) = dim(p)$ ya que en caso contrario bastaría sustituir $\bar{a}$ por una upla adecuada. Observamos que para todo $\alpha < \omega$ existe $\varphi_\alpha \in Aut_C(\mathcal{M})$ tal que $\varphi_\alpha \bar{a} = \bar{a}_\alpha$. Sea $F(\bar{x}, \bar{b}) \in tp(\bar{a}|A)$ tal que $dim(F(\bar{x}, \bar{b})) = dim(p)$ y $mult(F(\bar{x}, \bar{b})) = 1$. Tenemos que $F(\bar{x}, \varphi_\alpha \bar{b}) \in q_\alpha$, $dim(F(\bar{x}, \varphi_\alpha \bar{b})) = dim(p)$ y $mult(F(\bar{x}, \varphi_\alpha \bar{b})) = 1$. Así pues, si E es la relación de equivalencia utilizada para definir la base canónica de p utilizando la fórmula $F(\bar{x}, \bar{b})$, entonces $\neg \varphi_\alpha \bar{b} E \varphi_\beta \bar{b}$, para cualesquiera $\alpha \neq \beta$. Por tanto $\#\{\varphi_\alpha(Cb(p)) : \alpha < \omega\} = \omega$ y por tanto $Cb(p) \notin acl(C)$.

2) La implicación de derecha a izquierda la hemos visto en la demostración de 1). Probemos la otra implicación. Si no existe $\bar{a}$ que realiza $p(\bar{x})$ y tal que $dim(\bar{a}|A \cup C) = dim(\bar{a}|C) = dim(p)$ entonces por la observación anterior $Cb(p) \notin acl(C) \supset dcl(C)$. Supongamos que existe $\bar{a}$ que realiza $p(\bar{x})$ y tal que $dim(\bar{a}|A \cup C) = dim(\bar{a}|C) = dim(p)$ y $mult(tp(\bar{a}|C)) = k > 1$. Sea $B = \bigcup_{\varphi \in Aut_C(\mathcal{M})} \varphi(A \cup C)$. Podemos suponer que $|B| < |M|$, ya que en caso contrario bastaría trabajar en una extensión $|M|^+$-saturada. Puesto que $mult(tp(\bar{a}|C)) = k > 1$, existen $p_1, \ldots, p_l \in S(B)$, $l \leq k$, distintos dos a dos que extienden a $tp(\bar{a}|C)$ y $dim(p_i) = dim(p)$. Podemos suponer que $l = k$ y que por tanto $mult(p_i) = 1$. Podemos suponer también que $dim(\bar{a}|B) = dim(p)$ ya que en caso contrario bastaría con sustituir $\bar{a}$ por una upla adecuada. Denotemos con $\bar{a}_i$ a una upla que realiza el tipo p_i. Observamos que para $i = 1, \ldots, k$ existe $\varphi_i \in Aut_C(\mathcal{M})$ tal que $\varphi_i \bar{a} = \bar{a}_i$. Sea $F(\bar{x}, \bar{b}) \in tp(\bar{a}|A)$ tal que $dim(F(\bar{x}, \bar{b})) = dim(p)$ y $mult(F(\bar{x}, \bar{b})) = 1$. Tenemos que $F(\bar{x}, \varphi_i \bar{b}) \in p_i$ y $dim(F(\bar{x}, \varphi_i \bar{b})) = dim(p)$ y $mult(F(\bar{x}, \varphi_i \bar{b})) = 1$. Así pues, si E es la relación de equivalencia utilizada para definir la base canónica de p, entonces $\neg \varphi_i \bar{b} E \varphi_j \bar{b}$, $\forall i \neq j$. Finalmente $Cb(p) \notin dcl(C)$ ya que $\varphi_i(Cb(p)) \neq Cb(p)$, $i = 1, \ldots, k$. $\square$

Proposición 1.63. *Supongamos que $\mathcal{M}$ tiene eliminación débil de imaginarios. Entonces cualquier $p \in S(A)$ sobre un subconjunto A de M algebraica-*

mente cerrado es estacionario.

Demostración. Sea $q \in S(M)$ una extensión de p que no bifurca sobre A. Puesto que $mult(q) = 1$, podemos considerar su base canónica $Cb(q)$. Por la eliminación débil de imaginarios, existe $\bar{c} \in M$ tal que $Cb(q) \in dcl(\bar{c})$ y $\bar{c} \in acl(Cb(q))$. Observamos que puesto que $dim(q) = dim(p)$, por 1.62 tenemos que $Cb(q) \in acl(A)$. Así pues,

$$\bar{c} \in acl(Cb(q)) \subset acl(acl(A)) = acl(A) = A.$$

Por 1.62 y puesto que $Cb(q) \in dcl(\bar{c})$, existe $\bar{a} \in M$ que realiza p tal que $dim(\bar{a}|\bar{c}) = dim(p)$ y $mult(tp(\bar{a}|\bar{c})) = 1$. Como $\bar{c} \in A$, tenemos que $mult(p) = 1$. $\square$

Definición 1.64. *Decimos que dos tipos $p_1 \in S(A)$ y $p_2 \in S(B)$, $dim(p_1) = dim(p_2)$, son* ***paralelos****, y lo denotaremos con $p_1||p_2$, si existe una extensión de p_1 y p_2 que no bifurca sobre A.*

Proposición 1.65. *Sea $p(\bar{x}) \in S(A)$, $A \subset M$, un tipo estacionario. Sea $\mathcal{N}$ extensión elemental de $\mathcal{M}$. Entonces, para todo $\varphi \in Aut(\mathcal{N})$, $\varphi(Cb(p)) = Cb(p)$ si y sólo si p^φ es paralelo a p, donde $p^\varphi(\bar{x}) = \{F(\bar{x}, \varphi\bar{a}) : F(\bar{x}, \bar{a}) \in p(\bar{x})\}$.*

Demostración. Sea $F(\bar{x}, \bar{b}) \in p$ tal que $dim(F(\bar{x}, \bar{b})) = dim(p) = m$ y $mult(F(\bar{x}, \bar{b})) = 1$ y sea E la relación de equivalencia utilizada para definir la base canónica. Observamos que para todo $\varphi \in Aut(\mathcal{N})$, $dim(p^\varphi) = dim(p)$, $mult(p^\varphi) = mult(p)$, $dim(F(\bar{x}, \varphi\bar{b})) = dim(p)$ y $mult(F(\bar{x}, \varphi\bar{b})) = 1$. Si $\varphi(Cb(p)) = Cb(p)$ entonces $\varphi\bar{b}E\bar{b}$ y por tanto $dim(F(\bar{x}, \varphi\bar{b}) \wedge F(\bar{x}, \bar{b})) = m$. Veamos que dado $B \subset N$ con $A \cup \varphi(A) \subset B$, existe un tipo $q \in S(B)$ tal que $F(\bar{x}, \varphi\bar{b}) \wedge F(\bar{x}, \bar{b}) \in q$ y $dim(q) = m$. Sea el conjunto de fórmulas formado por $F(\bar{x}, \varphi\bar{b}) \wedge F(\bar{x}, \bar{b})$ y por las fórmulas que expresan que $\bar{x}$ tiene dimensión m sobre $\{\bar{b}, \varphi\bar{b}\}$. Dicho conjunto de fórmulas es un tipo parcial puesto que $dim(F(\bar{x}, \varphi\bar{b}) \wedge F(\bar{x}, \bar{b})) = m$ y por tanto está incluido en un tipo completo $q_0 \in S(\bar{b}, \varphi\bar{b})$ cuya dimensión deberá ser m. Por la proposición 1.47, existe un tipo completo $q \in S(B)$ que extiende a q_0 y que no bifurca sobre $\{\bar{b}, \varphi\bar{b}\}$. Como $F(\bar{x}, \varphi\bar{b}) \in q|_{\varphi(A)}$ y $F(\bar{x}, \bar{b}) \in q|_A$ tenemos que $dim(q|_A) = dim(q|_{\varphi(A)}) = m$. Obsérvese que si $q|_A \neq p$ y $q|_{\varphi(A)} \neq p^\varphi$ entonces $mult(F(\bar{x}, \varphi\bar{b})) = mult(F(\bar{x}, \bar{b})) > 1$. Por tanto deducimos que $q|_A = p$ y $q|_{\varphi(A)} = p^\varphi$. Así pues p y p^φ son paralelos. Por otro lado, si p y p^φ son paralelos entonces existe $q \in S(B)$, $B \subset N$, tal que $q|A = p$ y $q|_{\varphi(A)} = p^\varphi$ y $dim(q) = m$. En particular $F(\bar{x}, \varphi\bar{b}) \wedge F(\bar{x}, \bar{b}) \in q$ y por tanto $\varphi\bar{b}E\bar{b}$. $\square$

1.8. Cuerpos algebraicamente cerrados, tipos y variedades

La teoría de cuerpos algebraicamente cerrados la denotaremos con CAC. En esta sección $\mathcal{F}$ denotará un modelo de CAC y F_0 su cuerpo primo. Dado un subcuerpo K, denotaremos por $\overline{K}$ a su clausura algebraica. Reservaremos el nombre de variedad para los conjuntos algebraicos irreducibles. La teoría CAC tiene eliminación de cuantificadores sobre $L = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$. Este hecho tiene como consecuencia que muchas de las nociones de teoría de modelos sobre cuerpos algebraicamente cerrados coincidan con las nociones algebraicas. Es más, como cualquier extensión elemental $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ vuelve a ser algebraicamente cerrada y cualquier conjunto $X \subset F'$ definible se puede definir con una fórmula sin cuantificadores, tenemos que X es finito o cofinito. Por tanto $\mathcal{F}$ es fuertemente minimal.

Notación 1.66. En esta sección utilizaremos las letras ψ, φ y ϕ para designar fórmulas y reservaremos las letras F y G para denotar cuerpos y grupos respectivamente.

Proposición 1.67. *Sean $A \subset F$ y $a \in F$. Entonces*

$$a \in acl(A) \Leftrightarrow a \in \overline{F_0(A)}.$$

Demostración. Veamos que si $a \in acl(A)$ entonces $a \in \overline{F_0(A)}$. Sea $\psi \in For(L_A)$ tal que $\mathcal{F} \models \psi(a)$ y el número de elementos de F que la satisfacen es finito. Por eliminación de cuantificadores, podemos suponer que ψ es una fórmula sin cuantificadores. Así pues, sin pérdida de generalidad también podemos suponer que $\psi(x) : (\bigwedge_1^m P_i(x) = 0) \wedge (Q(x) \neq 0)$, donde $P_i(x), Q(x) \in F[x]$. Si tuviéramos que $\psi(x) : Q(x) \neq 0$, entonces existirían infinitos elementos que satisfarían ψ, lo cual es una contradicción. Por tanto existe $P_{i_0} \in K[x]$ tal que $P_{i_0}(a) = 0$. El recíproco es trivial. □

Observación 1.68. En la demostración anterior la fórmula $P(x) = 0$, donde $P(x)$ es el polinomio mínimo de a sobre $F_0(A)$, aísla el tipo de a sobre A. Efectivamente, podemos suponer que la fórmula $P(x) = 0$ es equivalente a una fórmula $\psi(x)$ con parámetros en A y por tanto pertenece a $tp(a|A)$. Sea b un elemento en alguna extensión elemental tal que $\psi(x) \in tp(b|A)$. Para determinar el tipo de b es suficiente saber los polinomios con coeficientes en $F_0(A)$ que anula. Puesto que P es irreducible y $P(b) = 0$ tenemos que para todo $Q(x) \in F_0(A)[x]$, $Q(b) = 0$ si y sólo si P divide a Q. Por tanto $Q(b) = 0$ si y sólo si $Q(a) = 0$. Así pues $tp(a|A) = tp(b|A)$.

Corolario 1.69. *Sea $A \subset F$ y $\bar{a} \in F$. La dimensión de $\bar{a}$ sobre A es igual al grado de transcendencia de $F_0(A)(\bar{a})$ sobre $F_0(A)$.*

Demostración. Sea $k = dim(\bar{a}|A)$. Podemos suponer que $\bar{a}' = (a_1, \ldots, a_k)$ son A-algebraicamente independientes. Tenemos entonces que los elementos $a_1, \ldots, a_k$ son transcendentes sobre $F_0(A)$. Por la proposición 1.67, para $j = k+1, \ldots, n$, tenemos que, como $a_j \in acl(A \cup \bar{a}')$, entonces $a_j \in \overline{F_0(A, \bar{a}')}$, de lo cual deducimos que $F_0(A)(\bar{a})$ es una extensión algebraica de $F_0(A)(\bar{a}')$ y por tanto el grado de transcendencia de $F_0(A)(\bar{a})$ sobre $F_0(A)$ es k. □

Definición 1.70. *Sea F cuerpo. Si $char(F) = p$, definimos F_{ins} como el cuerpo que generan sobre F las raíces p^n-ésimas de los elementos de F. Si $char(F) = 0$, definimos $F_{ins} = F$.*

Proposición 1.71. *Sea A un subconjunto de F. Entonces*

i) si $char(F) = 0$, $dcl(A) = F_0(A)$ y

ii) si $char(F) = p$, $dcl(A) = \{p^n - \text{raíces de elementos de } F_0(A) : n < \omega\}$.

Demostración. *i)* Sea $a \in dcl(A)$ y sea $\psi \in FSQ(L_A)$ tal que $\mathcal{F} \models \psi(a)$ y $\mathcal{F} \models \exists! x\psi(x)$. Dado que el único elemento que satisface ψ es a, quizá simplificando, tenemos que $\psi(x) : x - a = 0$. Así pues, $a \in A$ ó $a \in dcl(\emptyset)$. En cualquier caso, $a \in F_0(A)$. Supongamos ahora que $a \in F_0(A)$. Por la propia construcción de $F_0(A)$ sabemos que existe $t_1, t_2 \in Ter(L_A)$ tales que a es el único elemento que satisface la fórmula $F(x) : x \cdot t_2 = t_1$.

ii) Sea $a \in dcl(A)$ y sea $\psi(x) \in FSQ(L_A)$ tal que $\mathcal{F} \models \psi(a)$ y $\mathcal{F} \models \exists! x\psi(x)$. Tenemos entonces que $\psi(x) : (x-a)^{mp^n} = 0$, para algún m y n con $(m, p) = 1$. Podemos suponer que $(x-a)^{mp^n}$ es irreducible. Si $m > 1$ entonces $P(y) = (y - a^{p^n})^m$ sería separable, ya que $P'(y) \neq 0$, y por tanto tendría m raíces distintas, lo cual no es posible. Así pues $m = 1$ y por tanto $a^{p^n} \in F_0(A)$. Sea ahora $a \in F$ una raíz p^n-ésima de un elemento de a, es decir, $a^{p^n} - b = 0$ para algún $b \in A$. Entonces a es el único elemento que satisface $\psi(x) : x^{p^n} - b = 0$, ya que $x^{p^n} - b = x^{p^n} - a^{p^n} = (x-a)^{p^n}$. □

Proposición 1.72. *Sea κ un cardinal infinito. Entonces F es κ-saturado si y sólo si el grado de transcendencia de F sobre F_0 es mayor o igual que κ.*

Demostración. Veamos que si F es κ-saturado entonces el grado de transcendencia de F sobre F_0 es mayor o igual que κ. Supongamos que no es así. Entonces existe $A \subset F$, $|A| < \kappa$ de forma que la extensión F sobre $F(A)$ es algebraica. Consideremos el tipo $p(x) = \{Q(x) \neq 0 : Q \in F_0(A)[x]\}$. Puesto que $|F_0(A)| < \kappa$, por saturación existe $b \in F$ que realiza el tipo, lo cual es una contradicción.

Veamos ahora el recíproco. Basta probar que para toda $A \subset F$, $|A| < \kappa$, cualquier tipo $p(x) \in S_1(A)$ se realiza en F. Por la eliminación de cuantificadores, podemos suponer que $p(x)$ está formado por fórmulas sin cuantificadores. Podemos suponer también sin pérdida de generalidad que las fórmulas de p son de la forma $\bigwedge_{i=1}^{s} P_i(x) = 0 \wedge Q(x) \neq 0$, con $P_i(x), Q(x) \in F_0(A)[x]$. Entonces se pueden dar dos casos,

a) existe una fórmula en p que, escrita de la forma anterior, satisface que $s \geq 1$ y que para algún i_0 tenemos que $P_{i_0}(T) \not\equiv 0$, o

b) todas las fórmulas de p son de la forma $Q(x) \neq 0$.

Supongamos que estamos en el caso a). Sabemos que existe una extensión elemental $\mathcal{K}$ de $\mathcal{F}$ que realiza el tipo. Por ser F algebraicamente cerrado cualquier elemento que realice el tipo pertenecerá a F por ser un cero de P_{i_0}. Por tanto F realiza p. Supongamos ahora que estamos en el caso b). Como $|A|$ es menor que el grado de transcendencia, la extensión F sobre $F_0(A)$ no puede ser algebraica. Así pues, existe $b \in F$ que es transcendente sobre $F_0(A)$ y por tanto satisface el tipo. □

Proposición 1.73. *Sea $V \subset F^n$ una variedad afín. La dimensión de V como conjunto definible coincide con su dimensión algebraica.*

Demostración(Corolario 6.2.23, pag.226,[Ma*]). Denotaremos con $dim_d(V)$ a la dimensión definible y con $dim_a(V)$ a la dimensión algebraica. Lo probamos por inducción en $k = dim_a(V)$. Si $k = 0$ entonces V es un punto y $dim_d(V) = 0$. Supongamos que $k > 0$. Sea $\psi(\bar{x}) \in For(L_F)$ la fórmula que define V. Sea $\mathcal{K}$ una extensión elemental $|F|^+$-saturada y sea $\bar{a} \in K$ tal que $\mathcal{K} \models \psi(\bar{a})$. Consideremos los ideales primos $I_{\bar{a}} = \{P(\bar{x}) \in K[\bar{x}] : P(\bar{a}) = 0\}$ y $\tilde{I}_{\bar{a}} = I_{\bar{a}} \cap F[\bar{x}]$ y la variedad $\tilde{V}_{\bar{a}} = V(\tilde{I}_{\bar{a}})$. Tenemos dos posibilidades: $\tilde{V}_{\bar{a}} \subsetneq V$, en cuyo caso probaremos que $dim(\bar{a}|F) < dim_a(V)$, o $\tilde{V}_{\bar{a}} = V$, que en cuyo caso probaremos que $dim(\bar{a}|F) = dim_a(V)$. Supongamos que $\tilde{V}_{\bar{a}} \subsetneq V$. Entonces, por ser V irreducible, $dim_a(\tilde{V}_{\bar{a}}) < dim_a(V)$. Por hipótesis de inducción, $dim_a(\tilde{V}_{\bar{a}}) = dim_d(\tilde{V}_{\bar{a}}) \geq dim(\bar{a}|F)$. Si $\tilde{V}_{\bar{a}} = V$ entonces $F[\bar{a}] = F[V]$. Tenemos entonces que el grado de transcendencia de $F(V)$ sobre F es igual al grado de transcendencia de $F(\bar{a})$ sobre F, el cual coincide con $dim(\bar{a}|F)$. Así pues $dim_a(V) = dim(\bar{a}|F) \leq dim_d(V)$. Por la Proposición 1.43, basta probar que existe $\bar{a}$ tal que $\mathcal{K} \models \psi(\bar{a})$ y $\tilde{V}_{\bar{a}} = V$. Comprobemos que $p(\bar{x}) = \{P(\bar{x}) \neq 0 : P(\bar{v}) \notin I\} \cup \{\psi(\bar{x})\}$ es un tipo parcial. Sea $\Gamma(\bar{x}) = \{P_i(\bar{x}) \neq 0 : i = 1, \ldots, l\} \cup \{\psi(\bar{x})\} \subset p(\bar{x})$, donde $P_i(\bar{v}) \notin I$. Denotemos $V_i = V(P_i)$. Supongamos que $V \cap (V_1 \cup \cdots \cup V_m)^c = \emptyset$. Entonces $V \subset V_1 \cup \cdots \cup V_m$ y por ser V irreducible existe j_0 tal que $V \subset V_{j_0}$, lo cual es una contradicción puesto que $P_{j_0} \notin I$. Así pues, $V \cap (V_1 \cup \cdots \cup V_l)^c \neq \emptyset$ y por tanto existe una upla en F que satisface Γ. Por compacidad p es un tipo y por saturación existe $\bar{a} \in K$ tal que $\tilde{V}_{\bar{a}} = V$. □

Definición 1.74. *Sea K cuerpo y sea $I \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal. Decimos que $k \subset K$ es un cuerpo de definición para I si I posee una base como K-espacio vectorial incluida en $k[\bar{x}]$.*

Proposición 1.75. *Sea $I \subset K[\bar{x}]$ un ideal. Entonces existe un cuerpo minimal de definición de I. Es decir, existe $k_0 \subset K$ tal que*

i) I tiene una base en k_0, y

ii) si I tiene una base en k entonces $k_0 \subset k$.

El cuerpo minimal de definición de I satisface las siguientes propiedades,

a) para todo $f \in Aut(K)$, $I^f = I$ si y sólo si $\sigma(x) = x$, $\forall x \in k_0$, y

b) es finitamente generado sobre el cuerpo primo de K.

Demostración(Teorema 7, pag.62,[L*]). □

Proposición 1.76. *Sea V un conjunto algebraico y sea $k \subset F$ un subcuerpo. Entonces V está definido sobre k en el sentido de teoría de modelos si y solo si V está definido sobre k_{ins} en el sentido algebraico.*

Demostración(Corolario 2.7, pag.68,[Bo*]). Si V está definido sobre k_{ins} en el sentido algebraico entonces, por la proposición 1.71, V está definido sobre k en el sentido de teoría de modelos de forma evidente. Supongamos que V está definido sobre k en el sentido de teoría de modelos. Sea k_0 el cuerpo minimal de definición de V. Veamos que para todo automorfismo $f \in Aut_k(\mathcal{K})$, $\mathcal{K}$ extensión elemental de $\mathcal{F}$, el cuerpo minimal k_0 de $I(V)$ queda fijo punto a punto. Sea $\psi(\bar{x}, \bar{a})$, $\bar{a} \in k$, la fórmula que define V en F. Sea $I(V) = (P_1, \ldots, P_l)$, $P_i \in k_0[\bar{x}]$, el ideal de V. Obsérvese que $\mathcal{F} \models \forall \bar{x}(\psi(\bar{x}, \bar{a}) \leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{l} P_i(\bar{x}) = 0)$ y por tanto

$$\mathcal{K} \models \forall \bar{x}(\psi(\bar{x}, \bar{a}) \leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{l} P_i(\bar{x}) = 0). \tag{$\star$}$$

Sea V_K el conjunto que define $\psi(\bar{x}, \bar{a})$ en K. Observamos que por $(\star)$, V_K es un conjunto algebraico cuyo ideal $I(V_K)$ es el radical del ideal que generan $P_1(\bar{x}), \ldots, P_l(\bar{x})$ en $K[\bar{x}]$. Como el ideal que generan $P_1(\bar{x}), \ldots, P_l(\bar{x})$ en $F[\bar{x}]$ es radical por ser el ideal de un conjunto algebraico y por ser $\mathcal{K}$ extensión elemental de $\mathcal{F}$, el ideal que generan $P_1(\bar{x}), \ldots, P_l(\bar{x})$ en $K[\bar{x}]$ también es radical. Por tanto $I(V_K)$ es el ideal que generan $P_1(\bar{x}), \ldots, P_l(\bar{x})$ en $K[\bar{x}]$. Dado que $I(V_K)$ tiene una base en k_0 como K-espacio vectorial, su cuerpo mínimo de definición $\tilde{k}_0$ está incluido en k_0. Sea B una base de

$I(V_K)$ incluida en $\tilde{k}_0[\bar{x}]$. Puesto que para todo $P \in B$ se satisface la fórmula $\mathcal{K} \models \exists \bar{y}_1 \cdots \exists \bar{y}_l(P = Q_1P_1 + \ldots + Q_lP_l)$, donde Q_i son ciertos polinomios cuyos coeficientes son $\bar{y}_i$, tenemos que dicha fórmula se satisface también en F y por tanto $B \subset I(V)$. Como los elementos de la base B son linealmente independientes sobre K entonces también lo son sobre F y por tanto, dado que $I(V)$ y $I(V_K)$ tienen dimensión $\aleph_0$, B es base de $I(V)$ sobre F. Puesto que $I(V)$ tiene una base sobre $\tilde{k}_0$, el cuerpo mínimo de definición k_0 de $I(V)$ está incluido en $\tilde{k}_0$. Así pues, $\tilde{k}_0 = k_0$. Dado un automorfismo $f \in Aut_k(\mathcal{K})$, f deja fijo V_K por estar definido sobre k y por tanto f deja fijo punto a punto $\tilde{k}_0 = k_0$.

Finalmente, por el teorema de Svenonius, tenemos que $k_0 \subset dcl(k) = k_{ins}$ y por tanto como V es definible sobre k_0 en el sentido algebraico, también lo es sobre k_{ins}. □

Proposición 1.77. *Sea $V \subset F^n$ una variedad. Entonces V tiene multiplicidad 1. Además, si V está definida en un subcuerpo K de F entonces existe un único tipo genérico de V sobre K.*

Demostración. Supongamos que existen dos conjuntos definibles $V_1, V_2 \subset V$ tales que $dim(V_1) = dim(V_2) = dim(V)$, $V = V_1 \cup V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Podemos suponer que $V_1 = (\bigwedge_{i=1}^{l} P_i(x) = 0) \wedge (Q(x) \neq 0)$, $P_i, Q \in F[\bar{x}]$. Denotemos $X = V(P_1, \ldots, P_l)$ y $U = V(Q)^c$. Observamos que $X \cap U \subset V \Rightarrow \overline{X \cap U} = \overline{X} \cap \overline{U} = X \cap F^n = X \subset \overline{V} = V$. Además, $dim(V) \leq dim(V_1) \leq dim(X) \leq dim(V)$, es decir, $dim(X) = dim(V)$. Puesto que V es irreducible, $X = V$. Finalmente, como $V_2 = V_1^c \cap V = V \cap U^c$ es un conjunto algebraico y $dim(V_2) = dim(V)$ entonces, por ser V irreducible, $V_2 = V$, lo cual es una contradicción.

Por último, si V está definido sobre K por una fórmula $\psi(\bar{x}) \in For(L_K)$ entonces, por lo demostrado anteriormente, $mult(\psi(\bar{x})) = 1$. Por tanto sólo puede existir un tipo $p(\bar{x}) \in S(K)$ que contenga a $\psi(\bar{x})$ y tal que $dim(p) = dim(\psi)$ ya que en caso contrario $\psi(\bar{x})$ no tendría multiplicidad 1. □

Observación 1.78. i) Sea V una variedad definida sobre K. Sea $p(\bar{x}) \in S(K)$ el único tipo genérico de V sobre K. Si $\bar{a}$ realiza dicho tipo entonces V es la variedad generada por $\bar{a}$ sobre K, es decir,

$$V = \{\bar{c} \in F : \bar{c} \in V(I_{\bar{a}})\},$$

donde $I_{\bar{a}} = \{P \in K[\bar{x}] : P(\bar{a}) = 0\}$.

ii) El cuerpo mínimo k_0 de definición de $I(V)$ es la base canónica de p. Sea $f \in Aut(\mathcal{K})$, $\mathcal{K}$ extensión de $\mathcal{F}$, y sea V_K la variedad del ideal I_K, es decir, el ideal que generan en $K[\bar{x}]$ los polinomios que generan V en

F. Por la demostración de la proposición 1.76, el cuerpo de definición de V_K es precisamente k_0 y por tanto

$$f(k_0) = k_0 \Leftrightarrow I_K = I_K^f \Leftrightarrow p||p^f \Leftrightarrow f(Cb(q)) = Cb(q).$$

Es más, puesto que k_0 es finitamente generada sobre F_0 existe $\bar{c} \in F$ tal que $k_0 = F_0(\bar{c})$ y por tanto $\bar{c}$ es la base canónica de p.

Teorema 1.79. *La teoría CAC admite eliminación de imaginarios.*

Demostración(Lema 1.7, pag.64,[Bo*]). Por la proposición 1.25, F tiene eliminación débil de imaginarios ya que $acl(\emptyset)$ es infinito. Veamos que CAC tiene codificación de conjuntos finitos y así, por la proposición 1.21, quedará demostrado el teorema. Sean $A = \{\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_m\}$ un conjunto finito de uplas de la misma longitud. Denotemos $\bar{c}_i = (c_{i1}, \ldots, c_{in})$ y consideremos el polinomio

$$P_{\bar{c}_1,\ldots,\bar{c}_m}(Z, T_1, \ldots, T_m) = (Z+c_{11}T_1+\cdots+c_{1n}T_n)\cdots(Z+c_{m1}T_1+\cdots+c_{mn}T_n).$$

Sea $\bar{d}$ los coeficientes de dicho polinomio. Es evidente que $\bar{d} \in dcl(A)$. Veamos que A es $\bar{d}$-definible. Sea $\widetilde{\psi}(\bar{y})$ la fórmula que expresa que existen $\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ tales que $\bar{d}$ son los coeficientes de $P_{\bar{y},\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_m}$. Puesto que $F[T_1, \ldots, T_n]$ es dominio de factorización única, las únicas uplas que satisfacen $\widetilde{\psi}$ son las que pertenecen a A. Por tanto para todo $f \in Aut(\mathcal{K})$, $\mathcal{K}$ extensión elemental de $\mathcal{F}$, $f(A) = A$ si y sólo si $f(\bar{d}) = \bar{d}$. $\square$

Definición 1.80. *Un conjunto V es una **variedad** (abstracta) si existen subconjuntos $V_1, \ldots, V_m$ de V y aplicaciones biyectivas $f_i : V_i \longrightarrow U_i$, U_i conjunto algebraico afín, tales que*

i) $U_{ij} = f_i(V_i \cap V_j)$ *es un abierto de* U_i,

ii) $f_j \cdot f_i^{-1}$ *es un isomorfismo entre las variedades quasi-afines* U_{ij} *y* U_{ji}.

*La topología de Zariski de V es aquella en la que $U \subset V$ es abierto si $f_i(U \cap U_i)$ es abierto en U_i para todo $i = 1, \ldots, m$. Un **morfismo** entre dos variedades (V, V_i, f_i) y (W, W_i, g_i) es una aplicación $f : V \longrightarrow W$ continua tal que para cualesquiera i y j la aplicación*

$$g_j \circ f \circ f_i^{-1} : f_i(f^{-1}(W_j) \cap V_i) \longrightarrow g_j(W_j)$$

es un morfismo entre las variedades quasi-afines $f_i(f^{-1}(W_j))$ y $g_j(W_j)$.

Observación 1.81. i) Sea $f : U \longrightarrow K$ una función regular, donde U es una variedad quasi-afín, es decir, un abierto Zariski de un conjunto algebraico afín. Veamos que es definible. Por definición, para todo $\bar{a} \in U$ existe un abierto $U_{\bar{a}} \subset U$ conteniendo a $\bar{a}$ y polinomios $P, Q \in K[\bar{x}]$ tales que Q es distinto de cero en $U_{\bar{a}}$ y $f = P/Q$ en $U_{\bar{a}}$. Puesto que $K[\bar{x}]$ es noetheriano , podemos tomar $U_{\bar{a}_1}, \ldots, U_{\bar{a}_m}$ tales que $U = \bigcup_{i=1}^{m} U_{\bar{a}_i}$. Podemos definir f con la fórmula que dice que si $\bar{a}$ pertenece a $U_{\bar{a}_i}$ entonces $f(\bar{a}) = P_i(\bar{a})/Q_i(\bar{a})$. En particular, los morfismos entre variedades quasi-afines son definibles.

ii) Veamos que una variedad V es interpretable en F. Sean $U_i \subset F^{n_i}$, $1 \leq i \leq m$, los conjunto algebraicos afines asociados a la variedad V. Sea $n = max\{n_1, \ldots, n_m\}$. Vamos a definir una relación de equivalencia E en F^{n+m} por medio de la cual interpretaremos V. Observamos primero que es posible incluir de forma natural el conjunto algebraico U_i en el hiperplano $F^n \times \{0\} \times \cdots \times \{1\} \times \cdots \times \{0\}$ de F^{n+m}. La relación de equivalencia E relaciona los abiertos U_{ij} y U_{ji} por medio del isomorfismo definible f_{ij}. El resto de los puntos de F^{n+m} que no están en $U_1 \cup \ldots \cup U_m$ sólo están relacionados consigo mismo. De esta forma somos capaces de interpretar V. Quizá habría que destacar el detalle de que las funciones f_{ij}, los conjuntos algebraicos U_i y los abiertos U_{ij} puede que sean definibles con parámetros $\bar{c} \in F^s$ y por tanto la relación E no tiene por qué ser $\emptyset$-definible. Sin embargo, podemos definir la relación de equivalencia en el espacio F^{s+n+1} convirtiendo los parámetros en variables. Así pues E sería $\emptyset$-definible. Finalmente podemos interpretar V como un conjunto definible en M^{eq} con parámetros.

iii) Diremos que una variedad V está definida sobre un subcuerpo K de F si los conjuntos afines U_i, los conjuntos quasi-afines U_{ij} y los morfismos f_{ij} están definidos sobre K. Observamos que en ese caso tiene sentido hablar de los puntos K-racionales de V, $V(K)$, ya que si un punto pertenece a K en una carta entonces pertenecerá a K en todas las cartas. Si K es definible en F entonces $V(K)$ será interpretable en F.

iv) A menudo trabajaremos con los puntos de V como si fueran puntos de F^n, ya que a trozos podemos identificar V con alguno de sus conjuntos afines U_i. De hecho, por la eliminación de imaginarios de F, existe una biyección definible de V con un conjunto definible W de F^m para algún m.

39

2. Estructuras, subestructuras y cuerpos geométricos

Definición 2.1. *Una estructura infinita $\mathcal{M}$ es una **estructura geométrica** si*

i) para todo modelo $\mathcal{N}$ de $Te(M)$, la aplicación $acl(-)$ satisface la ley de intercambio, es decir, si dados $a, b \in N$ y $A \subset N$ tales que $b \in acl(A, a) \setminus acl(A)$ tenemos que $a \in acl(A, b)$,

ii) para cualquier fórmula $F(\bar{x}, \bar{y})$ existe un número n tal que para cualquier upla $\bar{b} \in M$ el conjunto que define $F(\bar{x}, \bar{b})$ en M es finito si y sólo si su cardinal es menor o igual que n.

Observación 2.2. *1)* La propiedad ii) se satisface para cualquier modelo de $Te(M)$.

2) Las únicas propiedades esenciales de las estructuras fuertemente minimales que son necesarias para probar los enunciados de las secciones 1.4 y 1.5, exceptuando la proposición 1.32, son precisamente i) y ii). Por tanto todo lo dicho en la secciones 1.4 y 1.5 se puede aplicar a las estructuras geométricas. Así pues, la noción de dimensión para las estructuras geométricas está bien definida y su desarrollo se realiza de la misma manera que para las estructuras fuertemente minimales.

3) Para demostrar la proposición 1.32 de la sección 1.5 es imprescindible la propiedad de la finitud o cofinitud de los conjuntos definibles de las estructuras fuertemente minimales, que es mucho más fuerte que las propiedades i) y ii). La demostración de la proposición 1.49, la cual nos asegura la finitud de la multiplicidad de los tipos completos, utiliza la proposición 1.32. Por tanto, aunque todavía podemos definir la multiplicidad de un tipo completo en una estructura geométrica como el supremo de los tipos que lo extienden sin bifurcar, dicha multiplicidad no será finita en general.

Definición 2.3. *Sea M una estructura y $A \subset M$. Dada una upla $\bar{a} \in M^n$ definimos el **tipo completo de $\bar{a}$ sin cuantificadores**, $qftp(\bar{a}|A)$, como el conjunto de fórmulas en L_A sin cuantificadores que satisface $\bar{a}$ en $\mathcal{M}$. Decimos que $a \in M$ está en la **clausura algebraica sin cuantificadores** de A (en M), escrito $a \in qfacl(A)$, si existe una fórmula $F(x) \in FSQ(L_A)$ tal que $\mathcal{M} \models F(a)$ y sólo existen un número finito de elementos de M que satisfacen dicha fórmula. Decimos que $a \in M$ está en la **clausura definible sin cuantificadores** de A (en M), escrito $a \in qfdcl(A)$, si existe una fórmula $F(x) \in FSQ(L_A)$ tal que a es él único elemento de M que satisface dicha fórmula.*

Notación 2.4. En las definiciones que siguen trabajaremos con varias estructuras al mismo tiempo y por tanto será conveniente distinguir en cada momento en cual de ellas se está trabajando. Así pues, dada una estructura $\mathcal{M}$, un subconjunto $A \subset M$ y una upla $\bar{a} \in M$, denotaremos con $acl^M(A)$, $dcl^M(A)$, $qfacl^M(A)$, $qfdcl^M(A)$, $tp^M(\bar{a}|A)$ y $qftp^M(\bar{a}|A)$ en el caso de que pueda haber confusión.

Definición 2.5. *Sea $\mathcal{D}$ una L-estructura fuertemente minimal que admite eliminación de cuantificadores. Sea $\mathcal{F}$ una subestructura de $\mathcal{D}$. Diremos que $\mathcal{F}$ es una **subestructura geométrica** de $\mathcal{D}$ si*

i) *$\mathcal{F}$ es una L-estructura geométrica,*

ii) *F es definiblemente cerrado en D, y*

iii) *para cualquier modelo (D_1, F_1) de la $L \cup \{R\}$-teoría $Te(D, F)$, R nuevo símbolo de relación 1-aria, tenemos que para todo $A \subset F_1$ y $a \in F_1$, si $a \in acl^{F_1}(A)$, entonces existe una fórmula sin cuantificadores $H(x) \in For(L_A)$ tal que $D_1 \models H(a)$ y tan sólo existen un número finito de elementos en D_1 que satisfacen H, es decir, $a \in qfacl^{D_1}(A)$.*

Observación 2.6. Sea $\mathcal{D}$ una L-estructura fuertemente minimal que admite eliminación de cuantificadores y sea $\mathcal{F}$ una subestructura geométrica de $\mathcal{D}$. Sea (D_1, F_1) modelo de la $L \cup \{R\}$-teoría $Te(D, F)$. Entonces,

1) Por ser F_1 subestructura de D_1, dados $A \subset F_1$ y $\bar{a} \in F_1$ tenemos que,

- $qftp^{F_1}(\bar{a}|A) = qftp^{D_1}(\bar{a}|A)$,
- $qfacl^{D_1}(A) \cap F_1 \subset qfacl^{F_1}(A)$,
- $qfdcl^{D_1}(A) \cap F_1 \subset qfdcl^{F_1}(A)$.

2) Puesto que D_1 tiene eliminación de cuantificadores, deducimos que $acl^{D_1}(A) = qfacl^{D_1}(A)$.

3) Observamos que la condición *iii*) de la definición es equivalente a $acl^{F_1}(A) \subset F_1 \cap qfacl^{D_1}(A)$, y puesto que F_1 es una subestructura de D_1, tenemos que $acl^{F_1}(A) = F_1 \cap qfacl^{D_1}(A)$. Es más,

$$acl^{F_1}(A) = F_1 \cap qfacl^{D_1}(A) = qfacl^{F_1}(A).$$

4) Por ser F definiblemente cerrado en D, para cualquier $A \subset F$ tenemos que $qfdcl^F(A) = dcl^D(A)$. Efectivamente, por ser F definiblemente cerrado en D tenemos que $dcl^D(A) \subset F$ y por tanto $dcl^D(A) = qfdcl^D(A) = qfdcl^D(A) \cap F = qfdcl^F(A)$.

5) Sean $A \subset F$ y $\bar{a} \in F$. Veamos que $dim^F(\bar{a}|A) = dim^D(\bar{a}|A)$. Podemos suponer que $dim^F(a_1, \ldots, a_s|A) = dim^F(\bar{a}|A)$. Observamos que puesto que $a_i \notin acl^F(A \cup \{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_s\})$, la condición *iii)* nos asegura que $a_i \notin acl^D(A \cup \{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_s\})$, $1 \leq i \leq s$. Así pues, tenemos que $dim^D(a_1, \ldots, a_s|A) \geq s$. Como $a_j \in acl^F(A \cup \{a_1, \ldots, a_s\})$, $s+1 \leq j \leq n$, y por *iii)* tenemos entonces que $a_j \in acl^D(A \cup \{a_1, \ldots, a_s\})$, $s+1 \leq j \leq n$, deducimos que $dim^D(a_1, \ldots, a_s|A) = s$.

6) Sean $A \subset F$ y $\bar{a} \in F$. Veamos que $dim^F(\bar{a}|A)$ depende tan sólo de $qftp^F(\bar{a}|A)$. Por tener D eliminación de cuantificadores, existe una correspondencia uno a uno entre los tipos $tp^D(\bar{a}|A)$ y $qftp^D(\bar{a}|A)$. Así pues, $dim^D(\bar{a}|A)$ depende de $qftp^D(\bar{a}|A)$. Por 5), $dim^F(\bar{a}|A)$ depende de $dim^D(\bar{a}|A)$ y por lo dicho anteriormente $dim^D(\bar{a}|A)$ depende de $qftp^D(\bar{a}|A) = qftp^F(\bar{a}|A)$.

*7)*Sea $X \subset D^n$ un subconjunto definible con parámetros en F. Entonces $X(F) = X \cap F^n$ es definible en F. Efectivamente, X es definible en D con una fórmula sin cuantificadores y con parámetros en F, la cual definirá también a $X(F)$ en F.

Definición 2.7. *Sea A un subconjunto de M. Denotaremos con $SSQ(A)$ al conjunto de los tipos parciales $\widetilde{p}$ sobre A compuestos de fórmulas sin cuantificadores tales que para toda fórmula $F(\bar{x}) \in FSQ(L_A)$ o bien $F \in \widetilde{p}$ o bien $\neg F \in \widetilde{p}$ y a los cuales llamaremos* ***tipos completos sin cuantificadores****.*

Lo primero que debemos hacer es dotar de un concepto de dimensión a estos tipos completos sin cuantificadores. La siguiente definición se referirá a todos los tipos parciales aunque nosotros estemos interesados tan sólo en los tipos completos sin cuantificadores.

Definición 2.8. *Sea $\tilde{p}(\bar{x})$ un tipo parcial sobre A, $A \subset M$. Definimos*

$$dim_A(\tilde{p}) = max\{dim(p(\bar{x})) : p(\bar{x}) \in S(A), \tilde{p}(\bar{x}) \subset p(\bar{x})\}.$$

El siguiente lema nos asegura que la dimensión de un tipo parcial no depende del conjunto sobre el cual está definido y por tanto podremos escribir simplemente $dim(\tilde{p})$.

Lema 2.9. *Sean $A \subset B \subset M$ y $\tilde{p}(\bar{x})$ un tipo parcial sobre A. Entonces $dim_A(\tilde{p}) = dim_B(\tilde{p})$.*

Demostración. Sea $p(\bar{x}) \in S(A)$ tal que $dim_A(\tilde{p}) = dim(p)$. Por la proposición existe un tipo $q(\bar{x}) \in S(B)$ tal que $dim(p) = dim(q)$. Por tanto $dim_A(\tilde{p}) \leq dim_B(\tilde{p})$. Sea $q(\bar{x}) \in S(B)$ tal que $dim_B(\tilde{p}) = dim(q)$. Entonces $dim_A(\tilde{p}) \geq dim(q|A) \geq dim(q)$. Así pues $dim_A(\tilde{p}) \geq dim_B(\tilde{p})$. $\square$

Lema 2.10. *Sea F una subestructura geométrica de D teniendo D eliminación débil de imaginarios. Sea $A \subset F$ algebraicamente cerrado en F, es decir, $acl^F(A) = A$, y sea $\bar{a}$ una upla de F. Entonces $qftp^D(\bar{a}|A)$ es estacionario.*

Demostración. Por la proposición 1.33 tenemos que $q = tp^D(\bar{a}|acl^D(A))$ es una extensión de $p = tp^D(\bar{a}|A)$ que no bifurca sobre $acl^D(A)$. Puesto que $acl^D(A)$ es algebraicamente cerrado, por el lema 2.10 tenemos que q es estacionario. Sea $Cb(q)$ la base canónica de q. Como D tiene eliminación de imaginarios, existe una upla $\bar{c} \in D$ tal que $\bar{c} \in dcl^D(Cb(q))$ y $Cb(q) \in dcl^D(\bar{c})$. Demostremos que $\bar{c} \in dcl^D(\bar{a}, A)$. Sea D' una extensión elemental de D y sea un automorfismo $f \in Aut_{\bar{a},A}(\mathcal{D}')$. Como $q^f = tp(f(\bar{a})|f(acl(A))) = tp(\bar{a}|acl(A)) = q$ tenemos que $q^f||q$ y por tanto, por la proposición 1.65, $f(Cb(q)) = Cb(q)$. En particular, $f(\bar{c}) = \bar{c}$. Por el teorema de Svenonius, $\bar{c} \in dcl^D(\bar{a}, A)$. Puesto que $\bar{c} \in dcl^D(\bar{a}, A) \subset F$ y $\bar{c} \in dcl^D(Cb(q)) \subset dcl^D(acl^D(A)) = acl^D(A)$, deducimos $\bar{c} \in acl^D(A) \cap F = acl^F(A) = A$. Así pues, por la proposición 1.62 tenemos que p es estacionario. $\square$

Definición 2.11. *Sea F un cuerpo visto como L-estructura, donde $L = \{+, \cdot, 0, 1, -\}$. Decimos que F es un* ***cuerpo geométrico*** *si F es una subestructura geométrica de $\overline{F}$, donde $\overline{F}$ es la clausura algebraica de F.*

Proposición 2.12. *Un cuerpo F es geométrico si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades*

(a) F es perfecto,

(b) para cualquier modelo F_1 de $Te(F)$ y subconjunto $A \subset F_1$ la clausura algebraica de A en el sentido de teoría de modelos y en el sentido algebraico coinciden, y

(c) para cada fórmula $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ existe un número $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier modelo F_1 de $Te(F)$ y para cualquier upla $\bar{b} \in F_1$, si $\psi(\bar{x}, \bar{b})$ define un conjunto finito entonces dicho conjunto tiene como mucho N_0 elementos.

Demostración. Supongamos que F es cuerpo geométrico y comprobemos que satisface las tres propiedades.

(a) Si la característica de F es cero entonces F es perfecto. Si F tiene característica p entonces basta comprobar que para todo $b \in F$ existe $a \in F$ tal que $a^p = b$. Pero eso se deduce directamente del hecho de que F es definiblemente cerrado en D.

(b) Veamos que si $a \in acl^{F_1}(A)$ entonces a es algebraica sobre $F_0(A)$. La condición $iii)$ de la definición de subestructura geométrica implica que $acl^{F_1}(A) = qfacl^{F_1}(A)$. Por la estructura de las fórmulas sin cuantificadores deducimos que a debe ser algebraico sobre $F_0(A)$.

(c) Es la condición $ii)$ de la definición de estructura geométrica y puesto que F es estructura geométrica por ser subestructura geométrica de $\overline{F}$, se cumple.

Veamos ahora que si se satisfacen las tres condiciones entonces F satisface las propiedades necesarias para ser cuerpo geométrico:

i) F es estructura geométrica: La condición $ii)$ de estructura geométrica se deduce directamente de $c)$. Comprobemos la condición $i)$ de estructura geométrica. Sea F' un modelo de $Te(F)$ y sean $a, b \in F'$ y $A \subset F'$ tales que $b \in acl^{F'}(A, a) \setminus acl^{F'}(A)$. Por $b)$ existe $p(x, y) \in F_0'(A)[x, y]$ tal que $p(b, a) = 0$. Si el grado de p en la variable y es cero, entonces $b \in acl(A)$ lo cual no es posible. Por tanto $a \in acl(A, b)$.

ii) F es definiblemente cerrado en $\overline{F}$: Sea $a \in dcl(F)$ y sea $\psi(x)$ la fórmula que define a en $\overline{F}$. Puesto que $\overline{F}$ tiene eliminación de cuantificadores por ser un cuerpo algebraicamente cerrado, podemos suponer que $\psi(x)$ no tiene cuantificadores. Puesto que ψ define en F un conjunto con un sólo elemento, podemos suponer que $\psi(x) : p(x) = 0$, donde $p(x) \in F[x]$ es el polinomio mínimo de a sobre F. Dado que F es perfecto y p tiene una sola raíz, deducimos que el grado de p es 1 y por tanto $a \in F$.

iii) Sea (D', F') un modelo de $Te(\overline{F}, F)$. Tenemos que comprobar que $acl^{F'}(A) \subset F' \cap qfacl^{D'}(A)$. Sea $c \in acl^{F'}(A)$. Por $b)$ existe $p(x) \in F_0'(A)[x]$ tal que $p(c) = 0$. Por tanto $c \in F' \cap qfacl^{D'}(A)$.

$\square$

Proposición 2.13. *Los siguientes cuerpos son cuerpos geométricos:*

1) el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$*,*

2) el cuerpo de los números p-ádicos $\mathbb{Q}_p$*,*

3) los cuerpos pseudofinitos.

Demostración. Para probar la proposición veremos en cada uno de los casos que se satisfacen las condiciones de la proposición 2.12.

1) Sean $L_{or} = L \cup \{<\}$ y $CORC$ el lenguaje y la teoría respectivamente de los cuerpos ordenados realmente cerrados. $CORC$ tiene eliminación de cuantificadores en el lenguaje L_{or} (véase Teorema 3.3.15, pag.97, [Ma*]). Utilicemos este hecho para probar nuestro resultado.

(a) $\mathbb{R}$ tiene característica 0 y por tanto es perfecto.

(b) Sea $F \models Te(\mathbb{R})$ y $A \subset F$. Comprobemos que cualquier $a \in acl^F(A)$ es algebraico sobre $F_0(A)$. Sea $\psi(x) \in For(L_A)$ una fórmula que satisfaga a y que defina un conjunto finito en F. Por lo dicho al comienzo, existe una fórmula $\varphi(x)$ en el lenguaje L_{or} sin cuantificadores y con parámetros en A equivalente a $\psi(x)$. Podemos suponer que esa fórmula es de la forma $\varphi(x) : (\bigwedge_{i=1}^{l} p_i(x) > 0) \wedge (q(x) = 0)$, donde $p_i(x), q(x) \in F_0(A)[x]$. Observamos que $q(x) \not\equiv 0$ porque en caso contrario el conjunto que definiría φ sería infinito. Por tanto a es algebraico sobre $F_0(A)$.

(c) Sea $F(x, \bar{y}) \in For(L)$ y sea $G(x, \bar{y}) \in FSQ(L_{or})$ una fórmula equivalente a $F(x, \bar{y})$. Podemos suponer que

$$G(x, \bar{y}) : \bigvee_{i=1}^{l} \left((\bigwedge_{j=1}^{m^i} p_j^i(x, \bar{y}) > 0) \wedge (q^i(x, \bar{y}) = 0) \right),$$

dado que un conjunción de igualdades polinómicas la podemos simplificar expresándola como una suma de cuadrados. Observamos que dada una upla $\bar{b} \in F$, donde $F \models Te(\mathbb{R})$, si existe un $i_0 = 1, \ldots, l$ tal que $q_k^{i_0}(x, \bar{b}) \equiv 0$ entonces el conjunto que define $H(x, \bar{b})$ es infinito. Así pues, para todo $\bar{b} \in F$, si el conjunto que define $H(x, \bar{b})$ es finito entonces para todo $i = 1, \ldots, l$ tenemos que $q_k^i(x, \bar{b}) \not\equiv 0$ y por tanto deducimos que si $H(x, \bar{b})$ es finito entonces tiene menos de

$$N = \sum_{i=1}^{l} max\{\partial q_k^i(x, \bar{y}) : k = 1, \ldots, m_2^i\}$$

elementos, donde $\partial q_k^i(x, \bar{y})$ es el grado del polinomio $q_k^i(x, \bar{y})$ en la variable x.

2) Véase el apéndice A para un presentación general del cuerpo $\mathbb{Q}_p$.

(a) $\mathbb{Q}_p$ tiene característica 0 y por tanto es perfecto.

(b) Sea $F \models Te(\mathbb{Q}_p)$ y $A \subset F$. Comprobemos que cualquier $a \in acl^F(A)$ es algebraico sobre $F_0(A)$. Sea $\psi(x) \in For(L_A)$ una fórmula que satisfaga a y que defina un conjunto finito en F. Podemos suponer que $\psi(x)$ es una fórmula sin cuantificadores en el lenguaje $\mathcal{L}_{Mac}$. Puesto que $\psi(x)$ define un subconjunto finito podemos suponer que $\varphi(x) : P(x) = 0$, con $P(x) \in F_0(A)[x]$, ya que $\varphi(x) : P_n(P(x))$ no define un subconjunto finito.

(c) Sea una fórmula $\psi(x, \bar{y})$, la cual podemos suponer sin cuantificadores en el lenguaje $\mathcal{L}_{Mac}$. Entonces

$$\psi(x, \bar{y}) : \bigvee_{i=1}^{l} (\psi_{1i}(x, \bar{y}) \wedge \psi_{2i}(x, \bar{y}) \wedge \psi_{3i}(x, \bar{y}) \wedge \psi_{4i}(x, \bar{y})),$$

donde $\psi_{1i}(x, \bar{y}) : \bigwedge_{j=1}^{m_1^i} q_j^{1i}(x, \bar{y}) \neq 0$, $\psi_{2i}(x, \bar{y}) : \bigwedge_{k=1}^{m_2^i} q_k^{2i}(x, \bar{y}) = 0$, $\psi_{3i}(x, \bar{y}) : \bigwedge_{k=1}^{m_3^i} P_{n_i}(q_k^{3i}(x, \bar{y}))$ y $\psi_{4i}(x, \bar{y}) : \bigwedge_{k=1}^{m_4^i} \neg P_{n_i}(q_k^{4i}(x, \bar{y}))$. Observamos que dada una upla $\bar{b} \in F$, donde $F \models Te(\mathbb{Q}_p)$, si existe un $i_0 = 1, \ldots, l$ tal que para todo $k = 1, \ldots, m_2^{i_0}$ tenemos que $q_k^{2i_0}(x, \bar{b}) \equiv 0$ entonces el conjunto que define $\psi(x, \bar{b})$ es infinito. Así pues, para todo $\bar{b} \in F$, si el conjunto que define $\psi(x, \bar{b})$ es finito entonces para todo $i = 1, \ldots, l$ existe un $k = 1, \ldots, m_2^i$ tal que $q_k^{2i}(x, \bar{b}) \not\equiv 0$ y por tanto deducimos que si $\psi(x, \bar{b})$ es finito entonces tiene menos de

$$N = \sum_{i=1}^{l} max\{\partial q_k^{2i}(x, \bar{y}) : k = 1, \ldots, m_2^i\}$$

elementos, donde $\partial q_k^{2i}(x, \bar{y})$ es el grado del polinomio $q_k^{2i}(x, \bar{y})$ en la variable x.

3) La mayor parte de lo que utilizamos en lo que sigue está demostrado en [C*].

(a) Los cuerpos pseudo-finitos son perfectos por definición.

(b) Véase el corolario (5.7) de [C-D-M*].

(c) Esta condición se deduce del teorema (7.1) y de la observación (7.2.4), páginas 33 y 34 respectivamente, de [C*]. Sea F_1 un modelo de $Te(F)$, que por tanto será un cuerpo pseudo-finito. Dada una fórmula $G(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{x}$ una n-upla de variables, existe un conjunto finito $D \subset \{0, 1 \ldots, n\} \times \mathbb{Q}^{>0} \cup \{(0, 0)\}$ y unas fórmulas $H_{d,\mu}(\bar{y})$ para cada $(d, \mu) \in D$ de forma que para todo $\bar{a} \in F$ existe un único $(d, \mu) \in D$ tal que $F_1 \models H_{d,\mu}(\bar{a})$, los cuales denotamos $d = d(\bar{a})$ y $\mu = \mu(\bar{a})$. Sea $H(\bar{y})$ la fórmula que dice que si se satisface $H_{d,\mu}(\bar{y})$ entonces existen N uplas distintas que satisfacen la fórmula $G(\bar{x}, \bar{y})$, donde N es la parte entera de $q^d(\mu - Cq^{-\frac{1}{2}})$ para un cierta potencia q de un primo suficientemente grande como para que $q^d(\mu - Cq^{-\frac{1}{2}})$ sea mayor o igual que 1. Por el teorema (7.1) dicha fórmula se satisface para toda potencia de un primo mayor que q y por tanto se satisface en los cuerpos pseudo-finitos. Observamos que si $d > 0$ entonces podemos hacer el número N tan grande como queramos y por tanto si, $d(\bar{a}) \neq 0$, el conjunto que define $G(\bar{x}, \bar{a})$ en F_1 es infinito. Sea $\tilde{H}(\bar{y})$ la fórmula que dice que si se satisface $H_{0,\mu}(\bar{y})$ entonces existen como mucho M uplas distintas que satisfacen la fórmula $G(\bar{x}, \bar{y})$, donde M es la parte entera de μ. Esta fórmula se satisface para cualquier potencia q de un primo suficientemente grande, y por tanto si $d(\bar{a}) = 0$ entonces el conjunto que define $G(\bar{x}, \bar{a})$ en F_1 tiene como mucho M elementos.

$\square$

Proposición 2.14. *Sea F un cuerpo geométrico y sea F_0 su cuerpo primo.Entonces para cualquier $A \subset M$ y $\bar{a} \in F^n$, $dim(\bar{a}|A)$ es igual al grado de transcendencia de $F_0(A)(\bar{a})$ sobre $F_0(A)$.*

Demostración. Se deduce directamente de la observación 2.6.*5)* y del corolario 1.69. $\square$

La siguiente definición hace referencia a un par de propiedades de las estructuras fuertemente minimales cercanas a la noción de la multiplicidad pero de un carácter más débil que, como veremos más adelante, son ciertas en algunas estructuras geométricas que no son fuertemente minimales.

Definición 2.15. *Sea M una estructura geométrica saturada.*

*i) M tiene la **propiedad** $(\mathbf{E})$ si para todo $X \subset M^n$ definible no existe una relación de equivalencia definible E en X con infinitas clases de equivalencia de dimensión $dim(X)$.*

*ii) M tiene la **propiedad** $(\mathbf{S_1})$ si para todo $X \subset M^n$ definible y para toda fórmula $F(\bar{x}, \bar{y})$ no existe una familia de uplas $\bar{b}_i$, $i < \omega$, tal que $dim(X \cap F(\bar{x}, \bar{b}_i)) = m$ y $dim(F(\bar{x}, \bar{b}_i)) \cap F(\bar{x}, \bar{b}_j)) < m$ para $i \neq j$.*

iii) Una estructura geométrica no saturada tiene la propiedad (E) o (S_1) si alguna extensión elemental saturada tiene la propiedad (E) o (S_1) respectivamente.

Observación 2.16. La propiedad (S_1) implica la propiedad (E).

En la siguiente proposición estudiaremos las propiedades (E) y (S_1) en las estructuras que nos son de especial interés.

Proposición 2.17. 1) $\mathbb{R}$ *tiene la propiedad* (E) *pero no la propiedad* (S_1)*,*

2) $\mathbb{Q}_p$ *no tiene la propiedad* (E) *y por tanto tampoco tiene la propiedad* (S_1)*,*

3) *cualquier cuerpo pseudo-finito tiene la propiedad* (S_1)*.*

Demostración. 1) En [P3], proposición 2.1, se encuentra la demostración de la propiedad (E) para estructuras O-minimales en general.

2) Véase el apéndice A para una presentación general del cuerpo $\mathbb{Q}_p$. Sea E la relación de equivalencia definible en $\mathbb{Q}_p$ dada por xEy si y solo si $\nu(x) = \nu(y)$. Observamos que existen infinitas clases de equivalencia ya que $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$ y que todas ellas tienen dimensión 1 por tener infinitos elementos dado que existen infinitas unidades en el anillo de valoración.

3) Véase (7.6) de [C*]. □

Proposición 2.18. *Sea* F *o bien* $\mathbb{R}$ *o bien* $\mathbb{Q}_p$*. Sean* $A \subset F$*,* $|A| \leq \omega$*, y* X *un subconjunto de* F^n *definible sobre* A*. Entonces existe* $\bar{a} \in X$ *tal que* $dim(\bar{a}|A) = dim(X)$*, es decir,* X *contiene un punto genérico sobre* A*.*

Demostración. En la demostración de esta proposición haremos uso del teorema de Baire cuya demostración podemos encontrar en la proposición 48.2 de [Mu*],

> *Todo espacio métrico completo no vacío es un espacio de Baire, es decir, cualquier unión numerable de cerrados de interior vacío tiene también interior vacío.*

Obsérvese que los cuerpos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}_p$ son espacio métricos completos con la métrica euclídea y p-ádica respectivamente. Denotemos con $dim(X) = k$. Por la proposición 4.1 existe una proyección $\pi : F^n \to F^k$ tal que existe un abierto U incluido en $\pi(X)$. Supongamos que para todo $\bar{b} \in \pi(X)$ tenemos que $dim(\bar{b}|A) < k$. Entonces para todo $\bar{b} \in \pi(X)$ existe una fórmula $\varphi_{\bar{b}}(\bar{x}, \bar{a}_{\bar{b}})$, $\bar{a}_{\bar{b}} \in A$, tal que $dim(\varphi_{\bar{b}}(\bar{x}, \bar{a}_{\bar{b}})) < k$. En particular, $dim(\neg\varphi_{\bar{b}}(\bar{x}, \bar{a}_{\bar{b}})) = k$. Consideremos el subconjunto cerrado y definible $X_{\bar{b}} = int(\neg\varphi_{\bar{b}}(\bar{x}, \bar{a}_{\bar{b}}))^c$, el cual satisface $dim(X_{\bar{b}}) = max\{dim(\varphi_{\bar{b}}(\bar{x}, \bar{a}_{\bar{b}})), dim(\neg\varphi_{\bar{b}}(\bar{x}, \bar{a}_{\bar{b}}) \setminus int(\neg\varphi_{\bar{b}}(\bar{x}, \bar{a}_{\bar{b}})))\} < k$. Como $dim(X_{\bar{b}}) < k$, de nuevo por la proposición 4.1 tenemos que $int(X_{\bar{b}}) = \emptyset$. Observamos que el número de fórmulas con parámetros en A es numerable y por tanto la familia de subconjuntos $X_{\bar{b}}$ también lo es. Finalmente, $U \subset \pi(X) \subset \bigcup_{\bar{b} \in \pi(X)} X_{\bar{b}}$, lo cual contradice el teorema de Baire. Así pues, existe $\bar{b} \in \pi(X)$ tal que $dim(\bar{b}|A) = k$ y por tanto basta tomar $\bar{a} \in X$ tal que $\pi(\bar{a}) = \bar{b}$. □

3. Grupos definibles, grupos algebraicos y el teorema de configuración de grupo

3.1. Grupos definibles en estructuras fuertemente minimales y grupos algebraicos

En esta sección $\mathcal{M}$ denotará una estructura fuertemente minimal y saturada.

Definición 3.1. *Un grupo G definible en M es* ***definiblemente conexo*** *si $mult(G) = 1$.*

Los siguientes resultados nos ayudarán a demostrar la proposición 3.10 la cual nos proporciona una caracterización de grupo definiblemente conexo. Véase pag. 48,49 y 50, [Bo*].

Lema 3.2. *Sean $H < H' < G$ grupos definibles en M. Entonces*

i) Para todo $a \in G$, $dim(H) = dim(aH)$,

ii) Si $[H' : H]$ es finito, entonces $mult(H') = [H' : H] \cdot mult(H)$ y $dim(H) = dim(H')$.

Demostración. $i)$ Se deduce del lema 1.48 ya que $f_a(x) = ax$, $x \in H$, es definible e inyectiva.

$ii)$ Si $[H' : H]$ es finito entonces H' es la unión disjunta de $a_1H, \ldots, a_sH$ para ciertos a_i. Por la proposición 1.45, $dim(H') = max\{dim(a_iH) : i = 1, \ldots, s\} = dim(H)$. Es evidente que $mult(H') \geq [H' : H] \cdot mult(H)$. Supongamos que $l = mult(H') > [H' : H] \cdot mult(H)$. Entonces existen X_j definibles con $dim(X_j) = dim(H') = m$ disjuntos tales que $H' = X_1 \cup \cdots \cup X_l$. Tenemos que $X_j = \bigcup_{i=1}^{s} X_j^i$, donde $X_j^i = \{c \in X_j : c \in a_iH\}$. Puesto que para todo j existe algún i tal que $dim(X_j^i) = dim(X_j) = m$ y $l > [H' : H] \cdot mult(H)$, existe un subíndice i_0 para el cual el número de j tales que $dim(X_j^{i_0}) = m$ es estrictamente mayor que $mult(H)$. Así pues, $mult(H) = mult(a_{i_0}H) > mult(H)$, lo cual no es posible. $\square$

Notación 3.3. Sea $G \subset M^n$ un grupo definible. Dado $p(\bar{x}) \in S_n(M)$ diremos que es un *tipo en G* si "$\bar{x} \in G$" $\in p(\bar{x})$. Obsérvese que en particular todo tipo en G es estacionario por ser global.

Definición 3.4. *Sea $G \subset M^n$ un grupo definible. El grupo G actúa sobre los tipos en G mediante siguiente acción: dados $\bar{g} \in G$ y p un tipo en G,*

$$\bar{g}p(\bar{x}) = tp(\bar{g}\bar{a}|M),$$

donde $\bar{a}$ es una upla de alguna extensión elemental de M que realiza p. Obsérvese que dicha acción está bien definida, es decir, que si tomamos otro $\bar{b}$ que realiza p entonces $tp(\bar{g}\bar{a}|M) = tp(\bar{g}\bar{b}|M)$. Dado un tipo p en G, el ***estabilizador de*** *p es el subgrupo*

$$stab_p = \{\bar{g} \in G : \bar{g}p = p\}.$$

Proposición 3.5. 1. *Para todo tipo p en G, $stab_p$ es un subgrupo definible de G.*

2. *Sea $\mathcal{N}$ una extensión elemental de $\mathcal{M}$ y sea $G' \subset N^n$ el grupo definido por la misma fórmula que define G. Sea un tipo p en G y sea p' su única extensión en $S(N)$ que no bifurca sobre M. Entonces $stab_{p'}$ está definido en N por la misma fórmula que define el subgrupo $stab_p$ en M.*

Demostración(Proposición 3.2, pags. 48-49, [Bo*]). 1. Sea F una fórmula de p tal que $dim(F) = dim(p)$ y $mult(F) = mult(p) = 1$. Veamos que para todo $\bar{g} \in G$,

$$\bar{g}p = p \Leftrightarrow F(\bar{g}\bar{x}) \in p.$$

Sea $\bar{a}$ una realización de p. Si $tp(\bar{a}|M) = tp(\bar{g}\bar{a}|M)$, entonces $F(\bar{x}) \in tp(\bar{g}\bar{a}|M)$ y por tanto $\bar{a}$ satisface $F(\bar{g}\bar{x})$. Por el contrario, si $F(\bar{g}\bar{x}) \in p$ entonces $F(\bar{x}) \in \bar{g}p$ y puesto que $mult(F) = 1$ y $dim(p) = dim(\bar{g}p)$, $\bar{g}p = p$. Sea $H(\bar{y})$ la fórmula que expresa $dim(F(\bar{y}\bar{x}) \wedge F(\bar{x})) = m$. Observamos que para todo $\bar{g} \in G$, $\bar{g}p = p \Leftrightarrow F(\bar{g}\bar{x}) \in p \Leftrightarrow \mathcal{M} \models H(\bar{g})$. Por tanto la fórmula H define el estabilizador de p.

2. Sea deduce directamente del hecho de que la fórmula F del apartado 1. también pertenece a p', $dim(F) = dim(p') = dim(p)$ y $mult(F) = mult(p') = mult(p) = 1$ y por tanto $stab_{p'}$ viene definido por la fórmula H. □

Proposición 3.6. *Para todo tipo p en G, $dim(stab_p) \leq dim(p)$.*

Demostración(Proposición 3.3, pag. 49, [Bo*]). Sea $\mathcal{M}'$ una extensión elemental de $\mathcal{M}$ saturada y con $|M| < |M'|$. Sea p' la única extensión de p a $S(M')$ que no bifurca sobre M. Sea $\bar{b} \in M'$ una upla que satisfaga la fórmula $stab_p$, es decir, la fórmula que define el estabilizador de p, tal que $dim(\bar{b}|M) = dim(stab_p)$. Consideremos $\mathcal{N}$ una extensión elemental de $\mathcal{M}'$ para la que existe una upla $\bar{a} \in N$ que realiza p, $dim(tp(\bar{a}|M')) = dim(p)$ y tal que $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son independientes sobre M (dicha extensión y upla existen ya que las propiedades anteriores se puede expresar mediante un tipo adecuado). Como $\bar{b} \in M'$ satisface $stab_p(\bar{x})$, por la proposición 3.5, $\bar{b} \in Stab_{p'}$ y por tanto $\bar{b}p' = p'$. En particular obtenemos que $tp(\bar{b}\bar{a}|M) = tp(\bar{a}|M) = p$ y que $dim(\bar{b}\bar{a}|M) = dim(p)$. Por ser $\bar{a}$ y $\bar{b}$ independientes sobre M tenemos que

$$dim(\bar{b}\bar{a}|M, \bar{a}) = dim(\bar{b}|M, \bar{a}) = dim(\bar{b}|M).$$

Por otro lado,
$$dim(\bar{b}\bar{a}|M,\bar{a}) \leq dim(\bar{b}\bar{a}|M) = dim(p).$$
Así pues, $dim(stab_p) = dim(\bar{b}|M) \leq dim(p)$. $\square$

Definición 3.7. *Decimos que un tipo p en G es un* ***tipo genérico*** *si la dimensión de p es igual a la dimensión de G.*

Observación 3.8. Existen exactamente $mult(G)$ tipos genéricos. Si p es un tipo en G genérico entonces, para todo $\bar{g} \in G$, $\bar{g}p$ también lo es ya que $dim(p) = dim(\bar{g}p)$.

Proposición 3.9. *Un tipo p en G es genérico si y sólo si $stab_p$ tiene índice finito.*

Demostración(Teorema 4.2, pag. 49, [Bo*]). Supongamos que $[G : stab_p]$ es finito. Entonces por el lema 3.2, $dim(stab_p) = dim(G)$. Por la proposición 3.6, $dim(G) = dim(stab_p) \leq dim(p)$ y por tanto $dim(G) = dim(p)$. Supongamos ahora que p es genérico. Puesto que tan sólo existen $mult(G)$ tipos genéricos, el conjunto $\{\bar{g}p : \bar{g} \in G\}$ debe ser finito. Dados $\bar{g}_1, \bar{g}_2 \in G$, $\bar{g}_1 p = \bar{g}_2 p \Leftrightarrow \bar{g}_2^{-1}\bar{g}_1 p = p \Leftrightarrow \bar{g}_2^{-1}\bar{g}_1 \in stab_p$. Por tanto $[G : stab_p] = \#\{\bar{g}p : \bar{g} \in G\} < \omega$. $\square$

Proposición 3.10. *Un grupo G definible en M es definiblemente conexo si y sólo si G no tiene subgrupos propios definibles de índice finito.*

Demostración(Lema 7.2.5, pag.256, [Ma*]). Supongamos que el grupo G es definiblemente conexo. Por el lema 3.2, si existe H subgrupo definible de G de índice finito entonces, dado que $1 = mult(G) = [G : H] \cdot mult(H)$, $[G : H] = 1$ y por tanto H no es propio. Supongamos ahora que G no tiene subgrupos propios definibles de índice finito. Sean p_1 y p_2 dos tipos genéricos. Por la proposición 3.9, $stab_{p_1}$ y $stab_{p_2}$ son subgrupos definibles de índice finito y por tanto $stab_{p_1} = stab_{p_2} = G$. Sean $\bar{a}_1$ y $\bar{a}_2$ dos realizaciones de p_1 y p_2 respectivamente e independientes sobre M en alguna extensión elemental. Sea $\mathcal{M}'$ una extensión elemental que contenga a $\bar{a}_2$ y sea G' el grupo en M' que define la fórmula que define el grupo G en M. Sea $q_1 \in S(M')$ la única extensión de p_1 que no bifurca sobre M' y sea $\bar{b}_1$ una realización de q_1. Puesto que $tp(\bar{a}_1|M, \bar{a}_2)$ no bifurca sobre M, tenemos que
$$tp(\bar{a}_1|M\bar{a}_2) = tp(\bar{b}_1|M\bar{a}_2). \tag{1}$$
Observamos que, como $stab_{p_1} = G$,
$$\mathcal{M} \models \forall \bar{x}(\bar{x} \in G \to stab_{p_1}(\bar{x})),$$

y por tanto

$$\mathcal{M}' \models \forall \bar{x}(\bar{x} \in G' \rightarrow stab_{q_1}(\bar{x})).$$

En particular tenemos que $\bar{a}_2 \in stab_{q_1}$ y por tanto $tp(\bar{a}_2\bar{b}_1|M) = tp(\bar{b}_1|M)$. Por (1), $tp(\bar{a}_2\bar{a}_1|M) = tp(\bar{a}_1|M) = p_1$. Repitiendo el argumento anterior de forma simétrica, $tp(\bar{a}_2\bar{a}_1|M) = tp(\bar{a}_2|M) = p_2$. Así pues, $p_1 = p_2$. □

Utilizando los resultados demostrados anteriormente podemos ver ciertas características de los grupos definibles en estructura fuertemente minimales.

Proposición 3.11. *Las grupos definibles en M tienen la propiedad de cadena descendente para subgrupos definibles.*

Demostración. Sea G_i, $i < \omega$, una familia de subgrupos definibles en M de G tales que $G_{i+1} < G_i$. Por el lema 3.2 tenemos que, en general, dados dos grupos definibles distintos H y H' en M con $H < H'$, si $[H' : H] = \omega$ entonces $dim(H) < dim(H')$ y si $[H' : H] < \omega$ entonces $dim(H) = dim(H')$ y $mult(H') > mult(H)$. Así pues, los pares $\eta_i = (dim(G_i), mult(G_i))$ están ordenados lexicográficamente de forma que $\eta_{i+1} < \eta_i$ y por tanto debe existir un mínimo, es decir, debe existir un i_0 tal que para todo $i \geq i_0$, $\eta_{i_0} = \eta_i$, lo cual implica que $G_{i_0} = G_i$. □

Proposición 3.12. *Sea H_i, $i \in I$, una colección de subgrupos definibles en M. Entonces existe $I_0 \subset I$ finito tal que $\cap_{i \in I} H_i = \cap_{i \in I_0} H_i$.*

Demostración. Si I es finito el resultado es inmediato. Si I es infinito y no existe subconjunto finito I_0 tal que $\cap_{i \in I} H_i = \cap_{i \in I_0} H_i$ entonces existe una sucesión de subíndices i_j, $j < \omega$ tal que $H'_n = \cap_{j=0}^{n} H_j$ es una cadena descendente de subgrupos definibles de H_0, lo cual contradice la proposición 3.11. □

En general, cuando trabajamos en una estructura que no es fuertemente minimal, dados un grupo definible G y un subconjunto $A \subset G$ definibles, el centralizador de A, es decir, $Z(A) = \{\bar{g} \in G : \bar{g}\bar{a} = \bar{a}\bar{g}, \forall \bar{a} \in A\}$, es un subgrupo definible de G. En el caso de estructuras fuertemente minimales, $Z(A)$ es definible aunque A no lo sea.

Proposición 3.13. *Sea G un grupo definibles y sea $A \subset G$. Entonces $Z(A)$ es un subgrupo definible de G.*

Demostración. Por definición, tenemos que $Z(A) = \cap_{\bar{a} \in A} Z(\bar{a})$. Como los subgrupos $Z(\bar{a})$ son definibles por serlo $\{\bar{a}\}$, por la proposición 3.12 tenemos que $Z(A) = \cap_{i=1}^{m} C(\bar{a}_i)$, para ciertos $\bar{a}_i \in A$, $1 \leq i \leq m$. Por tanto, $Z(A)$ es definible. □

Proposición 3.14. *Sea G un grupo definible en M con parámetros en $A \subset M$. Entonces existe un subgrupo definible G^0 de G de índice finito tal que para todo subgrupo definible H de G de índice finito tenemos que $G^0 \subset H$. Además, G^0 es normal y definible sobre A.*

Demostración. Sea I el conjunto formado por los subgrupos definibles de G de índice finito. Sea $G^0 = \cap_{H \in I} H$. Por 3.12, $G^0 = H_1 \cap \ldots \cap H_m$, para ciertos $H_i \in I$ y por tanto es definible. Como G^0 es una intersección finita de subgrupos de índice finito, también tiene índice finito. Por la propia definición de G^0 para todo subgrupo definible H de G de índice finito tenemos que $G^0 \subset H$. Puesto que para todo $h \in G$ tenemos que $h^{-1}G^0h$ es un subgrupo definible de índice finito y por tanto $G^0 \subset h^{-1}G^0h$, deducimos que $G^0 = h^{-1}G^0h$, es decir, G^0 es normal. Veamos que G^0 es A-definable. Denotemos con $[G : G^0] = n$. Sea $\psi(\bar{x}, \bar{c})$, $\bar{c} \in M$, una fórmula que defina G^0 en M y sea W el conjunto A-definable formado por la uplas $\bar{b}$ tales que $\psi(\bar{x}, \bar{b})$ define un subgrupo de G de índice n. Como para todo $\bar{b} \in W$ tenemos que $\psi(G, \bar{b}) = G^0$, entonces $G^0 = \{\bar{d} \in G : \exists \bar{y}(\text{"}\bar{y} \in W\text{"} \wedge \psi(\bar{d}, \bar{y}))\}$. $\square$

Definición 3.15. *Siguiendo la notación de la proposición 3.14, al subgrupo G^0 lo denominamos la* ***componente definiblemente conexa****.*

Una vez demostrada la existencia de G^0, podemos dar otra caracterización de los grupos definiblemente conexos.

Proposición 3.16. *Sea G un grupo definiblemente conexo y sea G^0 su subgrupo definible minimal de índice finito. Entonces G es definiblemente conexo si y sólo si $G^0 = G$.*

Demostración. Por la proposición 3.10 G es definiblemente conexo si y sólo si no tiene subgrupos definibles propios de índice finito, es decir, si y sólo si $G^0 = G$. $\square$

A continuación vamos a definir los grupos algebraicos y a enumerar una serie de propiedades. Recuérdese la noción de variedad descrita en la definición 1.80.

Definición 3.17. *Un* ***grupo algebraico*** *G es una variedad junto con dos morfismos $\cdot : G \times G \to G$ y $^{-1} : G \to G$ que dotan a G de estructura de grupo.*

Lema 3.18. *Un subgrupo definible de un grupo algebraico es cerrado.*

Demostración. Véase el lema 7.4.9 de [Ma*]. $\square$

Recuérdese que todo grupo algebraico G es interpetrable. Puesto que la teoría de cuerpos algebraicamente cerrados tiene eliminación de imaginarios, todo grupo algebraico es definible y por tanto podemos considerar la componente definiblemente conexa.

Corolario 3.19. *Sea G un grupo algebraico y sea G^0 su componente definiblemente conexa. Entonces G^0 es la componente conexa que contiene el elemento unidad.En particular, G es conexo si y solo si es definiblemente conexo.*

Demostración(Lema 7.4.10, pag.271,[Ma*]). Sea G un grupo algebraico y sea G^0 su componente definiblemente conexa. Puesto que G^0 es definible por el lema 3.18 tenemos que G^0 es cerrado. Sea $[G : G^0] = n$ y sean $a_1 = e, \ldots, a_n \in G$ tales que $G = G^0 \cup a_2G^0 \cup \ldots \cup a_nG^0$. Como la operación de grupo es continua tenemos que los subconjuntos a_iG^0 también son cerrados y por tanto G^0 es abierto, es decir, G^0 es conexo. De nuevo, dado que la operación de grupo es continua, los subconjutos a_iG^0 también son conexos y por tanto son las componentes conexas de G. □

Lema 3.20. *Todo grupo algebraico conexo es irreducible.*

Demostración(Lema 7.4.10, pag.271,[Ma*]). Sea G un grupo algebraico y sea $G = V_1 \cup \ldots V_m$ la descomposición de G en componentes irreducibles. Puesto que la operación de grupo de G es continua, para todo $g \in G$, gV_i es irreducible. Por tanto existe $j = 1, \ldots, m$ tal que $gV_i = V_j$. Sea el subgrupo definible $H = \{g \in G : gV_1 = V_1\}$. Por lo dicho anteriormente H tiene índice finito y por el corolario 3.19 tenemos que $H = G$. Si existiera más de una componente irreducible esto no podría ser cierto y por tanto $G = V_1$. □

Observación 3.21. Todos las variedades irreducibles son conexas pero, en general, el recíproco no es cierto. En el caso de grupos algebraicos ambas nociones son equivalentes.

3.2. La versión de teoría de modelos del teorema de Weil de pregrupos

Como ya dijimos en la introducción, existen varios resultados basados en el teorema de Weil. Las siguientes proposiciones, las cuales utilizaremos en la demostración de la proposición 3.25, son versiones de este teorema en el caso de estructuras fuertemente minimales.

Proposición 3.22. *Sea M un estructura saturada fuertemente minimal. Sea A un subconjunto de M con $|A| < |M|$. Sean $p(\bar{x})$ y $q(\bar{y})$ dos tipos estacionarios sobre A. Sean $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ y $g(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ dos funciones parciales definibles sobre A tales que* *i) para cualesquiera uplas $\bar{a}_1$ y $\bar{a}_2$ que realicen p independientes sobre A, $f(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ está definido, realiza p y es independientes tanto de $\bar{a}_1$ como de $\bar{a}_2$ sobre A,*

ii) para cualesquiera uplas $\bar{a}$ y $\bar{b}$ que realicen p y q respectivamente y sean independientes sobre A, $g(\bar{a}, \bar{b})$ está definido, realiza q y es independiente de $\bar{a}$ sobre A,

iii) para cualesquiera uplas $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ que realicen p y que sean independientes sobre A tenemos que $f(\bar{a}_1, f(\bar{a}_2, \bar{a}_3)) = f(f(\bar{a}_1, \bar{a}_2), \bar{a}_3)$,

iv) para cualesquiera uplas $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ que realicen p y $\bar{b}$ que realice q y que sean independientes sobre A, tenemos que $g(f(\bar{a}_1, \bar{a}_2), \bar{b}) = g(\bar{a}_1, g(\bar{a}_2, \bar{b}))$.

Entonces existe un grupo definiblemente conexo G interpretable en M con parámetros en A, un subconjunto $X \subset M^l$ definible sobre A con multiplicidad 1, una acción transitiva $*$ de G sobre X definible sobre A y unas funciones parciales invertibles h_1 y h_2 definibles sobre A tales que

v) para cualquier upla $\bar{a}$ que realice p, $h_1(\bar{a})$ está definido y realiza el tipo genérico de G,

vi) para cualquier upla $\bar{b}$ que realice q, $h_2(\bar{b})$ está definido y realiza el tipo genérico de X,

iii) para cualesquiera realizaciones $\bar{a}_1$ y $\bar{a}_2$ de p independientes sobre A, $h_1(f(\bar{a}_1, \bar{a}_2)) = h_1(\bar{a}_1)h_1(\bar{a}_2)$,

iv) para cualesquiera realizaciones $\bar{a}_1$ y $\bar{b}$ de p y q respectivamente e independientes sobre A, $h_2(g(\bar{a}_1, \bar{b})) = h_1(\bar{a}_1) * h_2(\bar{b})$.

Demostración. Véase [Bo1]. □

Proposición 3.23. *Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y sea G un grupo definiblemente conexo definido en K. Entonces existe un grupo algebraico H sobre K y un isomorfismo f definible sobre K entre G y H. Además, en el caso de que $char(K) = 0$ y G sea definible con parámetros en un subcuerpo k de K, entonces tanto H como f son definibles sobre k.*

Demostración. Véase [Bo1]. □

Observación 3.24. En particular, el grupo algebraico H del teorema 3.23 es conexo ya que G que es definiblemente conexo y ambos son isomorfos.

3.3. La versión del teorema de configuración de grupos para subestructuras geométricas y cuerpos geométricos

A lo largo de esta sección trabajaremos bajo las siguientes hipótesis

A) F es una subestructura geométrica de D, donde D es una estructura fuertemente minimal con eliminación de cuantificadores y de imaginarios,

B) todo subconjunto $X \subset F^n$ definible sobre un subconjunto finito A de F posee un punto genérico, es decir, existe $\bar{a} \in X$ tal que $dim(\bar{a}|A) = dim(X)$.

C) $G \subset F^s$ es un grupo definible en F.

Bajo estas hipótesis probaremos las siguientes proposiciones

Proposición 3.25. *Existe un subconjunto finito A de F sobre el cual G está definido, un grupo definiblemente conexo H definible sin cuantificadores sobre A en D, elementos $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in G$ y elementos $\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}' \in H(F)$ tales que*

i) $\bar{a}\bar{b} = \bar{c}$ *en* G *y* $\bar{a}'\bar{b}' = \bar{c}'$ *en* H,

ii) $acl^D(\bar{a}, A) = acl^D(\bar{a}', A)$, $acl^D(\bar{b}, A) = acl^D(\bar{b}', A)$, *y* $acl^D(\bar{c}, A) = acl^D(\bar{c}', A)$,

iii) $\bar{a}$ *y* $\bar{b}$ *son puntos* A*-genéricos de* G *y* $\bar{a}$ *es independiente de* $\bar{b}$ *sobre* A,

iv) $\bar{a}'$ *y* $\bar{b}'$ *son puntos* A*-genéricos de* H *y* $\bar{a}'$ *es independiente de* $\bar{b}'$ *sobre* A.

Proposición 3.26. *Sea F un cuerpo geométrico satisfaciendo la hipótesis B) del comienzo de la sección y sea G un grupo definible en F sobre un conjunto finito A_0. Entonces existe un conjunto finito A de F conteniendo A_0 y un grupo algebraico conexo H definido sobre $F_0(A)$ tal que existen puntos $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ de G y puntos $\bar{a}'$, $\bar{b}'$ y $\bar{c}'$ de $H(F)$ satisfaciendo las propiedades i), ii), iii) y iv) de la proposición 3.25.*

Sea A_0 un subconjunto finito de F sobre el cual están definidos tanto el grupo G como su operación de grupo. Sea $dim(G) = n$. Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ dos puntos genéricos de G sobre A_0 e independientes sobre A_0. Obsérvese que dichos puntos existen por la hipótesis *B)* del comienzo de la sección. Sea $\bar{c} = \bar{a}\bar{b}$. Observamos que

a) $dim^F(\bar{a}|A_0) = dim^F(\bar{b}|A_0) = n$, dado que son puntos genéricos de G sobre A_0,

b) $dim^F(\bar{a}, \bar{b}|A_0) = 2n$, ya que $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son independientes sobre A_0.

c) $dim^F(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}|A_0) = dim^F(\bar{c}|A_0, \bar{a}, \bar{b}) + dim^F(\bar{a}, \bar{b}|A_0) = 0 + 2n$,

d) $\bar{c} \in dcl^F(\bar{a}, \bar{b}, A_0)$ y $\bar{b} \in dcl^F(\bar{a}, \bar{c}, A_0)$.

e) $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ son independientes dos a dos y $dim(\bar{c}|A_0) = n$. Se debe a que $2n = dim(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}|A_0) = dim(\bar{a}, \bar{b}|A_0, \bar{c}) + dim(\bar{c}|A_0) = dim(\bar{a}|A_0, \bar{c}, \bar{b}) + dim(\bar{b}|A_0, \bar{c}) + dim(\bar{c}|A_0) = 0 + dim(\bar{b}|A_0, \bar{c}) + dim(\bar{c}|A_0)$. Por tanto $dim(\bar{b}|A_0, \bar{c}) = dim(\bar{c}|A_0) = n$.

Lema 3.27. *Existe un subconjunto finito $A_2 \subset F$, $A_0 \subset A_2$, $\bar{a}$ y $\bar{b}$ independientes sobre A_2, tal que existen uplas $\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1 \in F$ con $acl^D(\bar{a}_1, A_2) = acl^D(\bar{a}, A_2)$, $acl^D(\bar{b}_1, A_2) = acl^D(\bar{b}, A_2)$, $acl^D(\bar{c}_1, A_2) = acl^D(\bar{c}, A_2)$, $\bar{b}_1 \in qfdcl^D(A_2, \bar{a}_1, \bar{c}_1)$ y $\bar{c}_1 \in qfdcl^D(A_2, \bar{a}_1, \bar{b}_1)$.*

Demostración. A lo largo de la demostración frecuentemente será más cómodo trabajar en la estructura F, es decir, calcular dimensiones y tipos completos sin cuantificadores en dicha estructura, pero recordamos que ambas nociones son la misma para la estructura D por las observaciones hechas en 2.6.

Sea $\bar{x}' \in G$ un punto genérico sobre $A_0, \bar{a}, \bar{b}$, cuya existencia nos asegura la hipótesis *B)* del comienzo de la sección. Sean $\bar{y}' = \bar{x}'\bar{b}$ y $\bar{z}' = \bar{x}'\bar{a}^{-1}$. Observése que $\bar{z}'\bar{c}' = \bar{y}'$.

0) *Veamos que*

   i) $dim^F(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b}, \bar{y}', \bar{z}'|A_0) = 3n$,

   ii) $dim^F(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b}|A_0) = 2n$,

   iii) $dim^F(\bar{z}', \bar{c}, \bar{y}'|A_0) = 2n$.

   Probemos la igualdad $i)$,

$$\begin{aligned} dim^F(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b}, \bar{y}', \bar{z}'|A_0) &= dim^F(\bar{c}, \bar{y}'|A_0, \bar{a}, \bar{b}, \bar{z}') + dim^F(\bar{a}, \bar{b}, \bar{z}'|A_0) = \\ &= 0 + 3n = 3n. \end{aligned}$$

   Las igualdades $ii)$ y $iii)$ son consecuencia de que $\bar{c} = \bar{a}\bar{b}$ y $\bar{y}' = \bar{z}'\bar{c}$ respectivamente.

Para la demostración del lema será imprescindible el siguiente resultado.

1) *Sea $\bar{c}'$ una upla en D que satisface*

$$qftp^D(\bar{c}'|A_0,\bar{a},\bar{b},\bar{z}',\bar{y}') = qftp^D(\bar{c}|A_0,\bar{a},\bar{b},\bar{z}'\bar{y}').$$

Entonces $\bar{c}' \in acl^D(A_0,\bar{c})$.

Supongamos que no sea cierto y que por tanto $dim^F(\bar{c},\bar{c}'|A_0) = dim^D(\bar{c},\bar{c}'|A_0) \geq n+1$. Dado que $dim^D(\bar{c}|A_0,\bar{a},\bar{b}) = dim^F(\bar{c}|A_0,\bar{a},\bar{b}) = 0$, tenemos que $\bar{c} \in acl^D(A_0,\bar{a},\bar{b})$. Obsérvese que esto último no lo podemos deducir directamente de que $\bar{c} = \bar{a}\bar{b}$ porque dicha igualdad es cierta en F pero no tiene por qué ser cierta en D. Por la eliminación de cuantificadores de D y como $qftp^D(\bar{c}'|A_0,\bar{a},\bar{b}) = qftp^D(\bar{c}|A_0,\bar{a},\bar{b})$, deducimos que $\bar{c}' \in acl^D(A_0,\bar{a},\bar{b})$ y por tanto $dim^D(\bar{c}'|A_0,\bar{a},\bar{b}) = 0$. Es más, $dim^D(\bar{c},\bar{c}'|A_0,\bar{a},\bar{b}) = dim^D(\bar{c}'|A_0,\bar{a},\bar{b},\bar{c}) + dim^D(\bar{c}|A_0,\bar{a},\bar{b}) = 0$. De forma similar deducimos que $dim^D(\bar{c},\bar{c}'|A_0,\bar{z}',\bar{y}') = 0$. Por un lado tenemos que $dim^D(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{c}'|A_0) = dim^D(\bar{c},\bar{c}'|A_0,\bar{a},\bar{b}) + dim^D(\bar{a},\bar{b}|A_0) = 0 + 2n = 2n$ y por otro que $dim^D(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{c}'|A_0) = dim^D(\bar{a},\bar{b}|A_0,\bar{c},\bar{c}') + dim^D(\bar{c},\bar{c}'|A_0) \geq dim^D(\bar{a},\bar{b}|A_0,\bar{c},\bar{c}') + n + 1$. Así pues, deducimos que $n - 1 \geq dim^D(\bar{a},\bar{b}|A_0,\bar{c},\bar{c}')$. Finalmente,

$$\begin{aligned}
&dim^D(\bar{a},\bar{b},\bar{z}',\bar{y}',\bar{c},\bar{c}'|A_0) = \\
&= dim^D(\bar{a},\bar{b}|A_0,\bar{c},\bar{c}',\bar{z}',\bar{y}') + dim^D(\bar{c},\bar{c}',\bar{z}',\bar{y}'|A_0) \leq \\
&\leq dim^D(\bar{a},\bar{b}|A_0,\bar{c},\bar{c}') + dim^D(\bar{c},\bar{c}'|A_0,\bar{z}',\bar{y}') + dim^D(\bar{z}',\bar{y}'|A_0) \leq \\
&\leq n - 1 + 0 + 2n = 3n - 1,
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción ya que

$$3n = dim^D(\bar{a},\bar{c},\bar{b},\bar{y}',\bar{z}'|A_0) \leq dim^D(\bar{a},\bar{c},\bar{c}',\bar{b},\bar{y}',\bar{z}'|A_0).$$

Sean $X = \{\bar{d}_1 = \bar{c},\ldots,\bar{d}_r\}$ el conjunto de conjugados de $\bar{c}$ en D sobre $A_0,\bar{a},\bar{b},\bar{y}',\bar{z}'$, es decir,

$$X = \{\bar{d} \in D : tp^D(\bar{d}|A_0,\bar{a},\bar{b},\bar{y}',\bar{z}') = tp^D(\bar{c}|A_0,\bar{a},\bar{b},\bar{y}',\bar{z}')\}.$$

El conjunto X es finito debido a que $\bar{c} \in acl^D(A_0,\bar{a},\bar{b}) \subset acl^D(A_0,\bar{a},\bar{b},\bar{y}',\bar{z}')$. Consideremos la relación de equivalencia $\emptyset$-definible E que relaciona las permutaciones de r uplas de D^s. Por la eliminación de imaginarios de D existe una upla $\bar{c}_1 \in D$ tal que $\bar{c}_1 \in dcl^D(f_E(\bar{d}_1,\ldots,\bar{d}_r))$ y $f_E(\bar{d}_1,\ldots,\bar{d}_r) \in dcl^D(\bar{c}_1)$. Como $\bar{c} \in acl^D(A_0,\bar{a},\bar{b},\bar{y}',\bar{z}')$, podemos encontrar una fórmula con parámetros en $A_0,\bar{a},\bar{b},\bar{y}',\bar{z}'$ que sólo satisfagan los conjugados de $\bar{c}$ de forma que tenemos que $f_E(\bar{d}_1,\ldots,\bar{d}_r) \in dcl^D(A_0,\bar{a},\bar{b},\bar{y}',\bar{z}')$ y por tanto

$$\bar{c}_1 \in dcl^D(f_E(\bar{d}_1,\ldots,\bar{d}_r)) \subset dcl^D(A_0,\bar{a},\bar{b},\bar{y}',\bar{z}') \subset dcl^D(F) = F.$$

Denotemos $\bar{a}_1 = (\bar{a},\bar{z}') \in F$, $\bar{b}_1 = (\bar{b},\bar{y}') \in F$ y $A_1 = A_0 \cup \{x'\} \subset F$.

2) *Veamos que*

i) $acl^D(\bar{a}, A_1) = acl^D(\bar{a}_1, A_1)$,

ii) $acl^D(\bar{b}, A_1) = acl^D(\bar{b}_1, A_1)$,

iii) $acl^D(\bar{c}, A_1) = acl^D(\bar{c}_1, A_1)$,

iv) $\bar{c}_1 \in qfdcl^D(A_1, \bar{a}_1, \bar{b}_1)$.

Obsérvese que puesto que $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1 \in F$ y $A_1 \subset F$, *las igualdades anteriores se siguen cumpliendo en la estructura* F.

Las propiedades $i)$ y $ii)$ se deducen directamente de la definición de $\bar{a}_1$ y $\bar{b}_1$. Para demostrar $iii)$ basta observar que por 1) tenemos que $\bar{d}_i \in acl^D(\bar{c}, A_0)$ y por tanto $\bar{c}_1 \in dcl^D(f_E(\bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_r)) \subset acl^D(\bar{c}, A_0) \subset acl^D(\bar{c}, A_1)$. Por otro lado, $f_E(\bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_r) \in dcl^D(\bar{c}_1)$ lo cual implica que $\bar{d}_i \in acl^D(\bar{c}_1)$, $i = 1, \ldots, r$. En particular, $\bar{d}_1 = \bar{c} \in acl^D(\bar{c}_1)$. Por último, $iv)$ es consecuencia directa de que $c_1 \in dcl^D(A_0, \bar{a}, \bar{b}, \bar{y}', \bar{z}')$ y $qfdcl^D(A_0, \bar{a}, \bar{b}, \bar{y}', \bar{z}') \subset qfdcl^D(A_1, \bar{a}_1, \bar{b}_1)$.

Sea $\bar{z}_1 \in G$ un punto genérico sobre $A_1, \bar{a}, \bar{b}$, cuya existencia nos asegura la hipótesis $B)$ del comienzo de la sección. Sean $\bar{x}_1 = \bar{z}_1\bar{a}$ e $\bar{y}_1 = \bar{z}_1\bar{c}$. Observamos que $\bar{x}_1\bar{b} = \bar{y}_1$.

3) *Veamos que* $\bar{z}_1$ *y* $\bar{b}$ *son puntos genéricos de* G *sobre* A_0 *y que son independientes sobre* A_0.

Como $\bar{x}_1 = \bar{z}_1\bar{a}$ y $\bar{z}_1 = \bar{x}_1\bar{a}^{-1}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
dim^F(\bar{x}_1, \bar{z}_1, \bar{b}, \bar{a}|A_1) &= dim^F(\bar{x}_1|A_1, \bar{z}_1, \bar{b}, \bar{a}) + dim^F(\bar{z}_1, \bar{b}, \bar{a}|A_1) = \\
&= 0 + 3n, \\
dim^F(\bar{x}_1, \bar{z}_1, \bar{b}, \bar{a}|A_1) &= dim^F(\bar{z}_1|A_1, \bar{x}_1, \bar{b}, \bar{a}) + dim^F(\bar{x}_1, \bar{b}, \bar{a}|A_1) = \\
&= 0 + dim^F(\bar{x}_1, \bar{b}, \bar{a}|A_1).
\end{aligned}$$

Por tanto $dim^F(\bar{x}_1, \bar{b}, \bar{a}|A_1) = 3n$ y en particular $dim^F(\bar{x}_1|A_1, \bar{b}, \bar{a}) = n$. Finalmente, $dim^F(\bar{x}_1|A_0, \bar{b}) = dim^F(\bar{x}_1|A_0) = n$.

4) *Veamos que* $\{\bar{x}_1, \bar{b}\}$ *es independiente de* $\bar{x}'$ *sobre* A_0.

Se deduce directamente de que $dim^F(\bar{x}_1|A_1, \bar{b}, \bar{a}) = n$, igualdad demostrada en 3), ya que

$$dim(\bar{x}_1, \bar{b}, \bar{x}'|A_0) = dim(\bar{x}_1|\bar{b}, \bar{x}', A_0) + dim(\bar{b}, \bar{x}'|A_0) = n + 2n = 3n.$$

Observamos que a partir de tres puntos genéricos $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{x}'$ de G sobre A_0 e independientes dos a dos sobre A_0 hemos obtenido tres uplas $\bar{a}_1$, $\bar{b}_1$ y $\bar{c}_1$ tales que se satisface el punto 2). Por tanto, siguiendo el mismo proceso a partir de las puntos genéricos $\bar{x}_1$, $\bar{b}$ y $\bar{x}'$ de G sobre A_0 e independientes dos a dos sobre A_0 obtenemos tres uplas $\bar{x}_2$, $\bar{b}_2$ y $\bar{y}_2$ tales que se satisface el punto 2), es decir, tales que, denotando $\bar{y}_1 = \bar{x}_1\bar{b}$,

5) i) $acl^D(\bar{x}_1, A_1) = acl^D(\bar{x}_2, A_1)$,

ii) $acl^D(\bar{b}, A_1) = acl^D(\bar{b}_2, A_1)$,

iii) $acl^D(\bar{y}_1, A_1) = acl^D(\bar{y}_2, A_1)$,

iv) $\bar{y}_2 \in qfdcl^D(A_1, \bar{x}_2, \bar{b}_2)$.

6) *Veamos que* $\bar{b}_2 = \bar{b}_1 = (\bar{b}, \bar{y}')$ *y* $\bar{x}_2 = (x_1, \bar{x}'\bar{x}_1^{-1})$.

Ambas igualdades son consecuencia de la propia construcción.

7) *Veamos que*

i) $dim^F(\bar{a}_1, \bar{b}_2, \bar{c}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2|A_1) = 3n$,

ii) $dim^F(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{b}_2|A_1) = 2n$,

iii) $dim^F(\bar{a}_1, \bar{c}_1, \bar{b}_2|A_1) = 2n$.

Efectivamente,

i) Teniendo en cuenta las igualdades de 2), 5) y 6) deducimos que

$$dim^F(\bar{a}_1, \bar{b}_2, \bar{c}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2|A_1) =$$

$$\begin{aligned}
&= dim^F(\bar{c}_1|A_1, \bar{a}_1, \bar{b}_2, \bar{x}_2, \bar{y}_2) + dim^F(\bar{a}_1, \bar{b}_2, \bar{x}_2, \bar{y}_2|A_1) = \\
&= 0 + dim^F(\bar{y}_2|A_1, \bar{a}_1, \bar{b}_2, \bar{x}_2) + dim^F(\bar{a}_1, \bar{b}_2, \bar{x}_2|A_1) = \\
&= 0 + dim^F(\bar{a}, \bar{z}', \bar{b}, \bar{y}', \bar{x}_1, \bar{x}'\bar{x}_1^{-1}|A_1) = \\
&= dim^F(\bar{z}'|A_1, \bar{a}, \bar{y}', \bar{b}, \bar{x}_1, \bar{x}'\bar{x}_1^{-1}) + dim^F(\bar{a}, \bar{b}, \bar{y}', \bar{x}_1, \bar{x}'\bar{x}_1^{-1}|A_1) = \\
&= 0 + dim^F(\bar{y}'|A_1, \bar{a}, \bar{b}, \bar{x}_1, \bar{x}'\bar{x}_1^{-1}) + dim^F(\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}_1, \bar{x}'\bar{x}_1^{-1}|A_1) = \\
&= 0 + dim^F(\bar{x}'\bar{x}_1^{-1}|A_1, \bar{a}, \bar{b}, \bar{x}_1) + dim^F(\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}_1|A_1) = \\
&= 0 + 3n = 3n.
\end{aligned}$$

ii) Por las igualdades de 2), 5) y 6) tenemos que

$$
\begin{aligned}
&dim^F(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{b}_2|A_1) = \\
&\quad = \quad dim^F(\bar{y}_2|A_1, \bar{x}_2, \bar{b}_2) + dim^F(\bar{x}_2, \bar{b}_2|A_1) = \\
&\quad = \quad 0 + dim^F(\bar{x}_1, \bar{x}'\bar{x}_1^{-1}, \bar{b}, \bar{y}'|A_1) = \\
&\quad = \quad dim^F(\bar{y}'|A_1, \bar{x}_1, \bar{x}'\bar{x}_1^{-1}, \bar{b}) + dim^F(\bar{x}_1, \bar{x}'\bar{x}_1^{-1}, \bar{b}|A_1) = \\
&\quad = \quad 0 + dim^F(\bar{x}'\bar{x}_1^{-1}|A_1, \bar{x}_1, \bar{b}) + dim^F(\bar{x}_1, \bar{b}|A_1) = \\
&\quad = \quad 0 + 2n = 2n.
\end{aligned}
$$

iii) Teniendo en cuenta las igualdades de 2), 5) y 6) deducimos que

$$
\begin{aligned}
dim^F(\bar{a}_1, \bar{c}_1, \bar{b}_2|A_1) &= dim^F(\bar{c}_1|A_1, \bar{a}_1, \bar{b}_2) + dim^F(\bar{a}_1, \bar{b}_2|A_1) = \\
&= 0 + dim^F(\bar{a}_1, \bar{b}, \bar{y}'|A_1) = \\
&= dim^F(\bar{y}'|A_1, \bar{a}_1, \bar{b}) + dim^F(\bar{a}_1, \bar{b}|A_1) = \\
&= 0 + dim^F(\bar{a}, \bar{z}', \bar{b}|A_1) = \\
&= dim^F(\bar{z}'|A_1, \bar{a}, \bar{b}) + dim^F(\bar{a}, \bar{b}|A_1) = \\
&= 0 + 2n = 2n.
\end{aligned}
$$

Al comienzo de la demostración a partir de las uplas $\bar{a}$, $\bar{c}$, $\bar{b}$, $\bar{y}'$ y $\bar{z}'$ y del conjunto finito A_0, los cuales satisfacían 0), pudimos demostrar 1). Repitiendo el mismo proceso, a partir de las uplas $\bar{a}_1$, $\bar{c}_1$, $\bar{b}_2$, $\bar{y}_2$ y $\bar{x}'_2$ y del conjunto finito A_1, los cuales satisfacen 7), igualdades que son equivalentes a las de 0), se prueba la propiedad equivalente a 1), es decir,

8) *Sea $\bar{b}'_2$ un upla en D que satisface*

$$qftp^D(\bar{b}'_2|A_1, \bar{a}_1, \bar{c}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2) = qftp^D(\bar{b}_2|A_1, \bar{a}_1, \bar{c}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2).$$

Entonces $\bar{b}'_2 \in acl^D(A_1, \bar{b}_2)$.

Sea $A_2 = A_1 \cup \{\bar{z}_1\}$. En el siguiente punto veremos que no es difícil extender 8) al conjunto A_2,

9) *Sea $\bar{b}'_2$ un upla en D que satisface*

$$qftp^D(\bar{b}'_2|A_2, \bar{a}_1, \bar{c}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2) = qftp^D(\bar{b}_2|A_2, \bar{a}_1, \bar{c}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2).$$

Entonces $\bar{b}'_2 \in acl^D(A_2, \bar{b}_2)$.

Si $\bar{b}_2$ es una upla de D tal que

$$qftp^D(\bar{b}'_2|A_2, \bar{a}_1, \bar{c}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2) = qftp^D(\bar{b}_2|A_2, \bar{a}_1, \bar{c}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2).$$

entonces

$$qftp^D(\bar{b}'_2|A_1, \bar{a}_1, \bar{c}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2) = qftp^D(\bar{b}_2|A_1, \bar{a}_1, \bar{c}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2).$$

y por 8) tenemos que $\bar{b}'_2 \in acl^D(A_1, \bar{b}_2) \subset acl^D(A_2, \bar{b}_2)$.

Podemos razonar como lo hicimos después del punto 1). Es decir, podemos considerar el conjunto de conjugados de $\bar{b}_2$ en D sobre $A_2, \bar{a}_1, \bar{c}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2$, el cual es finito debido a que $\bar{b}_2 \in acl^D(A_2, \bar{y}', \bar{b}) \subset acl^D(A_2, \bar{x}_1, \bar{y}_1) \subset acl^D(A_2, \bar{a}_1, \bar{c}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2)$, la relación de equivalencia $\emptyset$-definible que relaciona las permutaciones de r uplas de D^s y, por la eliminación de imaginarios de D, podemos considerar por último una upla $\bar{b}_3 \in D$ interdefinible con la clase de equivalencia del conjunto de conjugados.

10) $\bar{b}_3 \in qfdcl^D(A_2, \bar{a}_1, \bar{c}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2)$ y por tanto $\bar{b}_3 \in F$.

    Se prueba de forma similar a como se hizo con $\bar{c}_1$ después del punto 1).

11) $acl^D(A_2, \bar{b}_3) = acl^D(A_2, \bar{b}_2)$.

    Se prueba de forma similar a como se demostró que $acl^D(A_1, \bar{c}_1) = acl^D(A_1, \bar{c})$ en el punto 2). De hecho, en la construcción de la upla $\bar{b}_3$ no es necesaria la utilización del punto 9). Sin embargo, 9) es esencial en la prueba de este apartado.

12) $\bar{y}_2, \bar{c}_1 \in qfdcl^D(A_2, \bar{a}_1, \bar{x}_2, \bar{b}_2)$.

    Es consecuencia directa de que $\bar{c}_1 \in qfdcl^D(A_1, \bar{a}_1, \bar{b}_1)$ y de que $\bar{y}_2 \in qfdcl^D(A_2, \bar{x}_2, \bar{b}_2)$.

Por el punto 12), existen dos funciones parciales f y g definibles sin cuantificadores sobre $A_2, \bar{a}_1, \bar{x}_2$ tales que $f(\bar{b}_2) = \bar{y}_2$ y $g(\bar{b}_2) = \bar{c}_1$. Observamos que si $\bar{b}_2' \in D$ tiene el mismo tipo completo sin cuantificadores sobre $A_2, \bar{a}_1, \bar{c}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2$ que $\bar{b}_2$, entonces tanto f como g están definidas sobre $\bar{b}_2'$ y $f(\bar{b}_2') = \bar{y}_2$ y $g(\bar{b}_2') = \bar{c}_1$.

13) $\bar{y}_2, \bar{c}_1 \in qfdcl^D(A_2, \bar{a}_1, \bar{x}_2, \bar{b}_3)$.

    Por la eliminación de cuantificadores de D basta comprobar que $\bar{y}_2, \bar{c}_1 \in dcl^D(A_2, \bar{a}_1, \bar{x}_2, \bar{b}_3)$. Sea $\widetilde{D}$ una extensión elemental de D y sea $\phi \in Aut(\widetilde{\mathcal{D}})$ un automorfismo que fija $A_2, \bar{a}_1, \bar{x}_2, \bar{b}_3$. Puesto que $\phi(\bar{b}_3) = \bar{b}_3$ tenemos que $\phi(\bar{b}_2)$ es un conjugado de b_2 sobre $A_2, \bar{a}_1, \bar{c}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2$. Por tanto, como f y g son definibles sobre $A_2, \bar{a}_1, \bar{x}_2$, tenemos que

$$\begin{aligned} \phi(\bar{c}_1) &= \phi(f(\bar{b}_2)) = f(\phi(\bar{b}_2)) = \bar{c}_1, \\ \phi(\bar{x}_2) &= \phi(g(\bar{b}_2)) = g(\phi(\bar{b}_2)) = \bar{x}_2. \end{aligned}$$

    Por el teorema de Svenonius, obtenemos nuestro resultado.

Para terminar la demostración del lema basta renombrar $(\bar{a}_1, \bar{x}_2)$ como $\bar{a}_1$, $(\bar{y}_2, \bar{c}_1)$ como $\bar{c}_1$ y $\bar{b}_3$ como $\bar{b}_1$. Efectivamente, comprobemos que dichas uplas satisfacen las propiedades que se requerían en el enunciado del lema,

- como z_1 es independiente de $\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}'$ sobre A y $\bar{x}'$ es independiente de $\bar{a}, \bar{b}$ sobre A, tenemos que $\bar{a}$ es independiente de $\bar{b}$ sobre A_2,

- como $dim^F(\bar{z}', \bar{x}'\bar{x}_1^{-1}, \bar{x}_1|A_1, \bar{a}, \bar{z}_1) = 0$, tenemos que $acl^D(\bar{a}_1, \bar{x}_2, A_2) = acl^D(\bar{a}, \bar{z}', \bar{x}_1, \bar{x}'\bar{x}_1^{-1}, \bar{z}_1, A_1) = acl^D(\bar{a}, \bar{x}_1, \bar{z}_1, A_1) = acl^D(\bar{a}, \bar{z}_1, A_1) = acl^D(\bar{a}, A_2)$,

- por 5)iii), porque $\bar{y}_1 = \bar{z}_1\bar{c}$ y por 2)iii) tenemos que $acl^D(\bar{y}_2, \bar{c}_1, A_2) = acl^D(\bar{y}_1, \bar{c}_1, A_2) = acl^D(\bar{c}_1, A_2) = acl^D(\bar{c}, A_2)$,

- por 11) y porque $\bar{y}' = \bar{x}'\bar{b}$ tenemos que $acl^D(\bar{b}_3, A_2) = acl^D(\bar{b}_2, A_2) = acl^D(\bar{b}, \bar{y}', A_2) = acl^D(\bar{b}, A_2)$,

- por 10), $\bar{b}_3 \in qfdcl^D(A_2, \bar{a}_1, \bar{c}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2)$,

- por 12), $(\bar{y}_2, \bar{c}_1) \in qfdcl^D(A_2, \bar{a}_1, \bar{x}_2, \bar{b}_2)$.

Obsérvese que los puntos del 9) al 13) podían haberse demostrado sobre A_1 en vez de sobre A_2. Sin embargo, la utilización de A_2 se justifica en estas últimas comprobaciones ya que ha sido esencial trabajar sobre dicho conjunto para poder realizarlas. $\square$

Sea $A = acl^F(A_2)$.

Proposición 3.28. *$qftp^D(\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1|A)$ y $qftp^D(\bar{b}_1, \bar{c}_1|A, \bar{a}_1)$ son estacionarios.*

Demostración. Por el lema 2.10 y puesto que $acl^F(A) = A$, tenemos que el tipo completo sin cuantificadores $qftp^D(\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1|A)$ es estacionario. Veamos que $qftp^D(\bar{b}_1, \bar{c}_1|A, \bar{a}_1)$ también es estacionario. En primer lugar demostremos que $\bar{a}_1$ es independiente de $\bar{b}_1$ sobre A. Efectivamente,

$$\begin{aligned} dim^F(\bar{a}_1, \bar{b}_1|A) &= dim^F(\bar{a}_1|A, \bar{b}_1) + dim^F(\bar{b}_1|A) = \\ &= dim^F(\bar{a}_1|A, \bar{b}) + n = \\ &= dim^F(\bar{a}_1, \bar{b}|A) - dim^F(\bar{b}|A) + n = \\ &= dim^F(\bar{b}|A, \bar{a}_1) - n + n = \\ &= dim^F(\bar{b}|A, \bar{a}) = n. \end{aligned}$$

Por el lema 2.10 y puesto que $acl^F(A) = A$, tenemos que $qftp^D(\bar{b}_1|A)$ es estacionario. Como $\bar{a}_1$ es independiente de $\bar{b}_1$ sobre A tenemos que $qftp^D(\bar{b}_1|A, \bar{a}_1)$ también es estacionario ya que en caso contrario tendría dos extensiones que no bifurcan sobre $A, \bar{a}_1$ las cuales serían a su vez dos extensiones de $qftp^D(\bar{b}_1|A)$ que no bifurcan sobre A. Finalmente $qftp^D(\bar{b}_1, \bar{c}_1|A, \bar{a}_1)$ es estacionario. En caso contrario, existirían dos extensiones $q_1(\bar{x}, \bar{x})$ y $q_2(\bar{x}, \bar{y})$

que no bifurcan sobre $A, \bar{a}_1$. Como $\bar{c}_1 \in qfdcl^D(A, \bar{a}_1, \bar{b}_1)$, existe una fórmula $\psi(\bar{x}, \bar{y}) \in For(L_{A,\bar{a}_1})$ tal que $\bar{c}_1$ es la única upla que satisface $\psi(\bar{b}_1, \bar{y})$. Las fórmulas tanto de $q_1(\bar{x}, \bar{y})$ como de $q_2(\bar{x}, \bar{y})$ que sólo involucran las variables asociadas a $\bar{b}_1$ forman dos extensiones $\tilde{q}_1(\bar{x})$ y $\tilde{q}_2(\bar{x})$ de $qftp^D(\bar{b}_1|A, \bar{a}_1)$ que no bifurcan sobre $A, \bar{a}_1$ y por tanto $\tilde{q}_1(\bar{x}) = \tilde{q}_2(\bar{x})$. Dada cualquier fórmula $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \in q_1(\bar{x}, \bar{y})$ tenemos que $\forall \bar{y}(\psi(\bar{x}, \bar{y}) \to \varphi(\bar{x}, \bar{y})) \in \tilde{q}_1(\bar{x})$. Como $\tilde{q}_1(\bar{x}) = \tilde{q}_2(\bar{x})$, deducimos que $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \in q_2(\bar{x}, \bar{y})$ y por tanto $q_1(\bar{x}, \bar{y}) = q_2(\bar{x}, \bar{y})$, lo cual es una contradicción. □

Sea $\bar{\sigma}$ una upla de D que sea interdefinible con la base canónica de $qftp^D(\bar{b}_1, \bar{c}_1|A, \bar{a}_1)$, cuya existencia tenemos asegurada por la eliminación de imaginarios de D. Observamos que $\bar{\sigma} \in dcl^D(A, \bar{a}_1) = qfdcl^D(A, \bar{a}_1) \subset F$ y por tanto $\bar{\sigma} \in F$. Sean $r = qftp^D(\bar{\sigma}|A)$, $q_1 = qftp^D(\bar{b}_1|A)$, $q_2 = qftp^D(\bar{c}_1|A)$. Por el lema 3.27 tenemos que $dim(q_1) = dim(q_2) = n$ y por el lema 2.10 tenemos que r, q_1 y q_2 son estacionarios.

Proposición 3.29. *Siguiendo la notación del párrafo anterior tenemos que*

i) $\bar{\sigma}$ *es independiente de* $\bar{b}_1$ *sobre* A*,*

ii) $\bar{\sigma}$ *es independiente de* $\bar{c}_1$ *sobre* A*,*

iii) $\bar{c}_1 \in qfdcl^D(A, \bar{\sigma}, \bar{b}_1)$*,*

iv) $\bar{b}_1 \in qfdcl^D(A, \bar{\sigma}, \bar{c}_1)$*,*

v) $dim^D(r) = n$*.*

Demostración. En la demostración de la proposición será útil el siguiente hecho: $\{\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1\}$ son independientes dos a dos sobre A. Esto se debe a que por el lema 3.27 tenemos que $\bar{c}_1 \in qfdcl^D(A_2, \bar{b}_1, \bar{a}_1)$ y a que $\bar{a}_1$ es independiente de $\bar{b}_1$ sobre A como se probó en 3.28.

i) Dado que $\bar{\sigma} \in qfdcl^D(A, \bar{a}_1)$, tenemos que

$$dim^D(\bar{b}_1|A, \bar{\sigma}) \geq dim^D(\bar{b}_1|A, \bar{\sigma}, \bar{a}_1) = dim^D(\bar{b}_1|A, \bar{a}_1) = n.$$

ii) Dado que $\bar{\sigma} \in qfdcl^D(A, \bar{a}_1)$, tenemos que

$$dim^D(\bar{c}_1|A, \bar{\sigma}) \geq dim^D(\bar{c}_1|A, \bar{\sigma}, \bar{a}_1) = dim^D(\bar{c}_1|A, \bar{a}_1) = n.$$

iii) Por la proposición 1.622) y dado que $\bar{\sigma} \in dcl^D(\bar{\sigma}, A)$ tenemos que existen $\bar{b}_1'$ y $\bar{c}_1'$ en alguna extensión elemental tal que $qftp^D(\bar{b}_1', \bar{c}_1'|A, \bar{a}_1, \bar{\sigma})$ es una extensión de $qftp^D(\bar{b}_1, \bar{c}_1|A, \bar{a}_1)$ que no bifurca sobre $A, \bar{a}_1$ y $qftp^D(\bar{b}_1', \bar{c}_1'|A, \bar{\sigma})$

es estacionario y su dimensión es igual a la de $qftp^D(\bar{b}_1, \bar{c}_1|A, \bar{a}_1)$, es decir, su dimensión es n. Puesto que

$$dim^D(\bar{b}_1, \bar{c}_1|A, \bar{a}_1, \bar{\sigma}) = n,$$

podemos tomar $\bar{b}'_1 = \bar{b}_1$ y $\bar{c}'_1 = \bar{c}_1$. En particular, $qftp^D(\bar{b}_1, \bar{c}_1|A, \bar{\sigma})$ es estacionario y su dimensión es igual a la de $qftp^D(\bar{b}_1, \bar{c}_1|A, \bar{a}_1)$, es decir, su dimensión es n. Sea $\widetilde{D}$ una extensión elemental de D y sea $\phi \in Aut(\widetilde{\mathcal{D}})$ un automorfismo que fija $A, \bar{\sigma}$ y $\bar{b}_1$. Veamos que $\phi\bar{c}_1 = \bar{c}_1$. Si mostramos que $dim^{\widetilde{D}}(\bar{b}_1, \bar{c}_1|A, \bar{\sigma}, \phi\bar{a}_1) = n$ entonces, como $qftp^D(\bar{b}_1, \bar{c}_1|A, \bar{\sigma})$ es estacionario tendremos que $qftp^D(\bar{b}_1, \bar{c}_1|A, \bar{\sigma}, \phi\bar{a}_1) = qftp^D(\bar{b}_1, \phi\bar{c}_1|A, \bar{\sigma}, \phi\bar{a}_1)$ y por tanto $\phi\bar{c}_1 = \bar{c}_1$, ya que tanto $\phi\bar{c}_1$ como $\bar{c}_1$ satisfacen una fórmula con parámetros en $A, \bar{\sigma}, \bar{b}_1$ que posee una única solución. Por el teorema de Svenonius tendremos que $\bar{c}_1 \in qfdcl^D(A, \bar{b}_1, \bar{\sigma})$. Para demostrar que $dim^{\widetilde{D}}(\bar{b}_1, \bar{c}_1|A, \bar{\sigma}, \phi\bar{a}_1) = n$ basta observar que

$$\begin{aligned}
n \geq\ & dim^{\widetilde{D}}(\bar{b}_1, \bar{c}_1|A, \bar{\sigma}, \phi\bar{a}_1) = \\
=\ & dim^{\widetilde{D}}(\bar{b}_1, \bar{c}_1, \bar{\sigma}, \phi\bar{a}_1|A) - dim^{\widetilde{D}}(\bar{\sigma}, \phi\bar{a}_1|A) = \\
=\ & dim^{\widetilde{D}}(\bar{c}_1, \bar{\sigma}|A, \phi\bar{a}_1, \bar{b}_1) + dim^{\widetilde{D}}(\phi\bar{a}_1, \bar{b}_1|A) - \\
& -dim^{\widetilde{D}}(\bar{\sigma}|A, \phi\bar{a}_1) - dim^{\widetilde{D}}(\phi\bar{a}_1|A) = \\
=\ & dim^{\widetilde{D}}(\bar{c}_1, \bar{\sigma}|A, \phi\bar{a}_1, \bar{b}_1) + dim^{\widetilde{D}}(\bar{b}_1|A, \phi\bar{a}_1) + dim^{\widetilde{D}}(\phi\bar{a}_1|A) - 0 - n = \\
=\ & dim^{\widetilde{D}}(\bar{c}_1, \bar{\sigma}|A, \phi\bar{a}_1, \bar{b}_1) + n + n - n = \\
=\ & dim^{\widetilde{D}}(\bar{c}_1, \bar{\sigma}|A, \phi\bar{a}_1, \bar{b}_1) + n \geq n.
\end{aligned}$$

Por tanto deducimos que $dim^{\widetilde{D}}(\bar{b}_1, \bar{c}_1|A, \bar{\sigma}, \phi\bar{a}_1) = n$.

iv) Similar a *iii*).

v) En el apartado *iii*) se probó que $dim^D(\bar{b}_1, \bar{c}_1|A, \bar{\sigma}) = n$. Entonces,

$$\begin{aligned}
dim^D(\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1, \bar{\sigma}|A) &= dim^D(\bar{a}_1|A, \bar{b}_1, \bar{c}_1, \bar{\sigma}) + dim^D(\bar{b}_1, \bar{c}_1, \bar{\sigma}|A) = \\
&= 0 + dim^D(\bar{b}_1, \bar{c}_1|A, \bar{\sigma}) + dim^D(\bar{\sigma}|A) = \\
&= n + dim^D(\bar{\sigma}|A).
\end{aligned}$$

Como

$$dim^D(\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1, \bar{\sigma}|A) = dim^D(\bar{\sigma}|A, \bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1,) + dim^D(\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1|A) = 0 + 2n,$$

deducimos que $dim^D(\bar{\sigma}|A) = n$. $\square$

Dado que $\bar{c}_1 \in qfdcl^D(A, \bar{\sigma}, \bar{b}_1)$ y $\bar{b}_1 \in qfdcl^D(A, \bar{\sigma}, \bar{c}_1)$, existen unas funciones parciales μ y ν definibles sin cuantificadores sobre A tales que $\mu(\bar{\sigma}, \bar{b}_1) = \bar{c}_1$ y $\nu(\bar{\sigma}, \bar{c}_1) = \bar{b}_1$.

Proposición 3.30. *Sean $\bar{\sigma}', \bar{b}'_1 \in D$ independientes sobre A tales que realizan r y q_1 respectivamente. Entonces $qftp^D(\bar{\sigma}', \bar{b}'_1|A) = qftp^D(\bar{\sigma}, \bar{b}_1|A)$.*

Demostración. Sea D' una extensión elemental de D que sea $|A|^+$-saturada. Dado que $tp(\bar{\sigma}|A) = tp(\bar{\sigma}'|A)$, por la proposición 1.3 existe una automorfismo $g \in Aut_A(\mathcal{D}')$ tal que $g(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma}'$. Denotemos con $\bar{b}''_1 = g(\bar{b}_1)$. Puesto que $\bar{\sigma}$ y $\bar{b}_1$ son independientes sobre A tenemos que $g(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma}'$ y $g(\bar{b}_1) = \bar{b}''_1$ son independientes sobre $g(A) = A$. Así pues, $tp(\bar{b}''_1|\bar{\sigma}', A)$ y $tp(\bar{b}'_1|\bar{\sigma}', A)$ son extensiones de q_1 que no bifurcan. Como q_1 es estacionario tenemos que $tp(\bar{b}''_1|\bar{\sigma}', A) = tp(\bar{b}'_1|\bar{\sigma}', A)$. Por la proposición 1.3 existe un automorfismo $h \in Aut_{A,\bar{\sigma}'}(\mathcal{D}')$ tal que $h(\bar{b}''_1) = \bar{b}'_1$. Finalmente, puesto que $h \circ g \in Aut_A(\mathcal{D}')$ es tal que $h \circ g(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma}'$ y $h \circ g(\bar{b}_1) = \bar{b}'_1$ tenemos que $qftp^D(\bar{\sigma}', \bar{b}'_1|A) = qftp^D(\bar{\sigma}, \bar{b}_1|A)$. □

Por la proposición 3.30, dadas unas uplas $\bar{\sigma}'$ y $\bar{b}'_1$ en D que realicen r y q_1 y que sean independientes sobre A tenemos que $\mu(\bar{\sigma}', \bar{b}'_1)$ está bien definido, realiza q_2 y es independiente tanto de $\bar{\sigma}'$ como de $\bar{b}'_1$ sobre A y $\mu(\bar{\sigma}', \nu(\bar{\sigma}', \bar{b}'_2)) = \bar{b}'_2$. En general, para cualesquiera uplas $\bar{\sigma}'$ y $\bar{b}'_1$ en D que satisfagan $q_\mu = qftp^D(\bar{\sigma}, \bar{b}_1|A)$, $\mu(\bar{\sigma}', \bar{b}'_1)$ está bien definido, realiza q_2 y es independiente tanto de $\bar{\sigma}'$ como de $\bar{b}'_1$ sobre A y $\mu(\bar{\sigma}', \nu(\bar{\sigma}', \bar{b}'_1)) = \bar{b}'_1$. De la misma manera, utilizando un argumento similar al de la proposición 3.30, dadas unas uplas $\bar{\sigma}'$ y $\bar{c}'_1$ en D que realicen r y q_2 y que sean independientes sobre A, tenemos que $qftp^D(\bar{\sigma}', \bar{c}'_1|A) = qftp^D(\bar{\sigma}, \bar{c}_1|A)$ y por tanto $\nu(\bar{\sigma}', \bar{c}'_1)$ está bien definido, realiza q_1 y es independiente tanto de $\bar{\sigma}'$ como de $\bar{c}'_1$ sobre A y $\mu(\bar{\sigma}', \nu(\bar{\sigma}', \bar{c}'_1)) = \bar{c}'_1$. En general, para cualesquiera uplas $\bar{\sigma}'$ y $\bar{c}'_1$ en D que satisfagan $q_\nu = qftp^D(\bar{\sigma}, \bar{c}_1|A)$, $\nu(\bar{\sigma}', \bar{c}'_1)$ está bien definido, realiza q_2 y es independiente tanto de $\bar{\sigma}'$ como de $\bar{b}'_1$ sobre A y $\mu(\bar{\sigma}', \nu(\bar{\sigma}', \bar{c}'_1)) = \bar{c}'_1$.

Proposición 3.31. *Siguiendo la notación de los párrafos anteriores, si $\bar{\sigma}_1$ y $\bar{\sigma}_2$ son dos uplas que realizan r, $\bar{b}'_1$ es una upla que realiza q_1, $\bar{b}'_1$ es independiente de $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ sobre A y $\mu(\bar{\sigma}_1, \bar{b}'_1) = \mu(\bar{\sigma}_2, \bar{b}'_1)$ entonces $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2$.*

Demostración. Denotemos $\bar{c}'_1 = \mu(\bar{\sigma}_1, \bar{b}'_1) = \mu(\bar{\sigma}_2, \bar{b}'_1)$. Puesto que el tipo $p = qftp^D(\bar{b}_1, \bar{c}_1|A, \bar{\sigma})$ es estacionario, tanto $p_1 = qftp^D(\bar{b}'_1, \bar{c}'_1|A, \bar{\sigma}_1)$ como $p_2 = qftp^D(\bar{b}'_1, \bar{c}'_1|A, \bar{\sigma}_2)$ también lo son dado que $qftp^D(\bar{b}'_1, \bar{\sigma}_1|A) = qftp^D(\bar{b}'_1, \bar{\sigma}_2|A) = qftp^D(\bar{b}_1, \bar{\sigma}|A)$. Por tanto, ya que $dim^D(\bar{b}'_1, \bar{c}'_1|A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) = n$, tenemos que $qftp^D(\bar{b}'_1, \bar{c}'_1|A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$ es una extensión que no bifurca tanto de p_1 como de p_2. El resultado lo vamos a deducir del hecho de que tanto $\bar{\sigma}_1$ como $\bar{\sigma}_2$ son base canónica de $qftp^D(\bar{b}'_1, \bar{\sigma}_1|A) = qftp^D(\bar{b}'_1, \bar{\sigma}_2|A) =$

$qftp^D(\bar{b}_1, \bar{\sigma}|A)$. Sea $\psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\sigma}) \in qftp^D(\bar{b}_1, \bar{c}_1|A, \bar{\sigma})$ una fórmula de dimensión n y multiplicidad 1. Como la fórmula asociada a la dimensión de $\psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ pertenece a $qftp^D(\bar{b}_1, \bar{\sigma}|A)$ y como con infinitas fórmulas de $qftp^D(\bar{b}_1, \bar{\sigma}|A)$ es posible fijar que $\psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ es una fórmula de multiplicidad 1, entonces $\psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\sigma}_1) \in qftp^D(\bar{b}'_1, \bar{c}'_1|A, \bar{\sigma}_1)$ y $\psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\sigma}_2) \in qftp^D(\bar{b}'_1, \bar{c}'_1|A, \bar{\sigma}_2)$ son dos fórmulas de dimensión n y multiplicidad 1. Sea E la relación de equivalencia mediante la cual podemos definir la base canónica de $qftp^D(\bar{b}_1, \bar{c}_1|A, \bar{\sigma})$ mediante $\psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\sigma})$ como se hizo en la sección 1.7. Obsérvese que puesto que $\bar{\sigma}$ es interdefinible con dicha base canónica sabemos que existe una fórmula $\chi \in For(L^{eq})$ tal que

$$\mathcal{M}^{eq} \models \forall \bar{y}((\chi(\bar{y}, f_E(\bar{y})) \wedge f_E(\bar{y}) = f_E(\bar{\sigma})) \rightarrow \bar{y} = \bar{\sigma}).$$

Así pues, como $\bar{\sigma}_1$ realiza r,

$$\mathcal{M}^{eq} \models \forall \bar{y}((\chi(\bar{y}, f_E(\bar{y})) \wedge f_E(\bar{y}) = f_E(\bar{\sigma}_1)) \rightarrow \bar{y} = \bar{\sigma}_1). \qquad (2)$$

Como $\bar{\sigma}_2$ realiza r y $\bar{\sigma}$ satisface $\chi(\bar{y}, f_E(\bar{y}))$, tenemos que $\mathcal{M}^{eq} \models \chi(\bar{\sigma}_2, f_E(\bar{\sigma}_2))$. Finalmente, como p es la extensión que no bifurca tanto de p_1 como de p_2 tenemos que, por la propia definición de E, $f_E(\bar{\sigma}_1) = f_E(\bar{\sigma}_2)$ y por la ecuación (2), $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2$. $\square$

Sean $\bar{\sigma}_1 \in F$ y $\bar{\sigma}_2 \in F$ dos realizaciones de r independientes sobre A, cuya existencia tenemos asegurada por la hipótesis B) del comienzo de la sección. Sea $\bar{b}_2 \in F$ una realización de q_1 independiente de $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ sobre A y cuya existencia también podemos asegurar por la hipótesis B) del comienzo de la sección. Tenemos entonces que $\mu(\bar{\sigma}_1, \bar{b}_2)$ está bien definido, que realiza q_1 y que es independiente de $\bar{\sigma}_1$ y de $\bar{b}_2$ sobre A. Es más, como $\bar{b}_2 = \nu(\bar{\sigma}_1, \mu(\bar{\sigma}_1, \bar{b}_2))$, tenemos que

$$\begin{aligned} & dim^D(\mu(\bar{\sigma}_1, \bar{b}_2)|A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) = \\ &= dim^D(\mu(\bar{\sigma}_1, \bar{b}_2), \bar{b}_2|A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) - dim^D(\bar{b}_2|A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \mu(\bar{\sigma}_1, \bar{b}_2)) = \\ &= dim^D(\mu(\bar{\sigma}_1, \bar{b}_2)|A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{b}_2) + dim^D(\bar{b}_2|A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) - 0 = \\ &= 0 + dim^D(\bar{b}_2|A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) = n, \end{aligned}$$

es decir, $\mu(\bar{\sigma}_1, \bar{b}_2)$ es independiente de $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ sobre A. Por tanto $\nu(\bar{\sigma}_2, \mu(\bar{\sigma}_1, \bar{b}_2))$ está bien definido, realiza q_2 y es independiente de $\bar{\sigma}_2$ y de $\mu(\bar{\sigma}_1, \bar{b}_2)$ sobre A. Denotemos $\bar{b}_3 = \nu(\bar{\sigma}_2, \mu(\bar{\sigma}_1, \bar{b}_2))$.

Proposición 3.32. *Siguiendo la notación del párrafo anterior,*

i) $\bar{b}_3 \in qfdcl^D(A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{b}_2)$*,*

ii) $\bar{b}_2 \in qfdcl^D(A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{b}_3)$*,*

iii) $\bar{b}_2$ *es independiente de* $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ *sobre* A*,*

iv) $\bar{b}_3$ *es independiente de* $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ *sobre* A*,*

v) $qftp^D(\bar{b}_2, \bar{b}_3|A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$ *es estacionario.*

Demostración. i) Se debe a que $\bar{b}_3 = \nu(\bar{\sigma}_2, \mu(\bar{\sigma}_1, \bar{b}_2))$.

ii) Se debe a que $\nu(\bar{\sigma}_1, \mu(\bar{\sigma}_2, \bar{b}_3)) = \nu(\bar{\sigma}_1, \mu(\bar{\sigma}_1, \bar{b}_2)) = \bar{b}_2$.

iii) Por hipótesis.

iv) Probados los apartados i) y ii) se deduce directamente,

$$dim^D(\bar{b}_3|A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) =$$

$$\begin{aligned} &= dim^D(\bar{b}_3, \bar{b}_2|A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) - dim^D(\bar{b}_2|A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{b}_3) = \\ &= dim^D(\bar{b}_3|A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{b}_2) + dim^D(\bar{b}_2|A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) - 0 = 0 + n. \end{aligned}$$

v) Por el lema 2.10 y puesto que $acl^F(A) = A$ tenemos que $qftp^D(\bar{b}_2|A)$ es estacionario. Por iii), $qftp^D(\bar{b}_2|A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$ es una extensión de $qftp^D(\bar{b}_2|A)$ que no bifurca y por tanto también es estacionario. Finalmente, dado que $\bar{b}_3 \in qfdcl^D(A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{b}_2)$, si repetimos el argumento dado en la demostración de la proposición 3.28, llegamos a que $qftp^D(\bar{b}_2, \bar{b}_3|A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$ es estacionario. □

La proposición 3.32 nos proporciona una serie de condiciones para $\bar{b}_2$, $\bar{b}_3$ y $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ iguales a las que teníamos para $\bar{b}_1$, $\bar{c}_1$ y $\bar{a}_1$ y por tanto podemos repetir con las primeras uplas parte del estudio que hemos hecho con las últimas. Sea entonces $\bar{\tau}$ una upla de D que sea interdefinible con la base canónica de $qftp^D(\bar{b}_2, \bar{c}_3|A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$, cuya existencia tenemos asegurada por la eliminación de imaginarios de D. Observamos que $\bar{\tau} \in dcl^D(A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) = qfdcl^D(A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) \subset F$ y por tanto $\bar{\tau} \in F$. Sea $s = qftp^D(\bar{\tau}|A)$. Por el lema 2.10 tenemos que s es estacionario.

Proposición 3.33. *Siguiendo la notación del párrafo anterior tenemos que*

i) $\bar{\tau}$ *es independiente de* $\bar{b}_2$ *sobre* A*,*

ii) $\bar{\tau}$ *es independiente de* $\bar{b}_3$ *sobre* A*,*

iii) $\bar{b}_3 \in qfdcl^D(A, \bar{\tau}, \bar{b}_2)$*,* *iv)* $\bar{b}_2 \in qfdcl^D(A, \bar{\tau}, \bar{b}_3)$,

v) $dim^D(s) = n$.

Demostración. Similar a la demostración de la proposición 3.28. $\square$

Dado que $\bar{b}_3 \in qfdcl^D(A, \bar{\tau}, \bar{b}_2)$ y $\bar{b}_2 \in qfdcl^D(A, \bar{\tau}, \bar{b}_3)$, existen unas funciones parciales $\widetilde{\mu}$ y $\widetilde{\nu}$ definibles sin cuantificadores sobre A tales que $\widetilde{\mu}(\bar{\tau}, \bar{b}_2) = \bar{b}_3$ y $\widetilde{\nu}(\bar{\tau}, \bar{b}_3) = \bar{b}_2$. Dadas unas uplas $\bar{\tau}'$ y $\bar{b}_2'$ en D que realicen s y q_1 y que sean independientes sobre A, tenemos que $qftp^D(\bar{\tau}', \bar{b}_2'|A) = qftp^D(\bar{\tau}, \bar{b}_2|A)$ y por tanto $\widetilde{\mu}(\bar{\tau}', \bar{b}_2')$ está bien definido, realiza q_1 y es independiente tanto de $\bar{\tau}'$ como de $\bar{b}_2'$ sobre A y $\widetilde{\nu}(\bar{\tau}', \widetilde{\mu}(\bar{\tau}', \bar{b}_2')) = \bar{b}_2'$. En general, para cualesquiera uplas $\bar{\sigma}'$ y $\bar{b}_2'$ en D que satisfagan $q_{\widetilde{\mu}} = qftp^D(\bar{\sigma}, \bar{b}_2|A)$, $\widetilde{\mu}(\bar{\sigma}', \bar{b}_2')$ está bien definido, realiza q_1 y es independiente tanto de $\bar{\sigma}'$ como de $\bar{b}_2'$ sobre A y $\widetilde{\nu}(\bar{\tau}', \widetilde{\mu}(\bar{\tau}', \bar{b}_2')) = \bar{b}_2'$. De la misma manera, dadas unas uplas $\bar{\tau}'$ y $\bar{b}_3'$ en D que realicen s y q_1 respectivamente y que sean independientes sobre A, tenemos que $qftp^D(\bar{\tau}', \bar{b}_3'|A) = qftp(\bar{\tau}, \bar{b}_3|A)$ y por tanto $\widetilde{\nu}(\bar{\tau}', \bar{b}_3')$ está bien definido, realiza q_1 y es independiente tanto de $\bar{\tau}'$ como de $\bar{b}_3'$ sobre A y $\widetilde{\mu}(\bar{\tau}', \widetilde{\nu}(\bar{\tau}', \bar{b}_3')) = \bar{b}_3'$. En general, para cualesquiera uplas $\bar{\sigma}'$ y $\bar{b}_3'$ en D que satisfagan $q_{\widetilde{\nu}} = qftp^D(\bar{\sigma}, \bar{b}_3|A)$, $\widetilde{\nu}(\bar{\sigma}', \bar{b}_3')$ está bien definido, realiza q_1 y es independiente tanto de $\bar{\sigma}'$ como de $\bar{b}_3'$ sobre A y $\widetilde{\mu}(\bar{\tau}', \widetilde{\nu}(\bar{\tau}', \bar{b}_3')) = \bar{b}_3'$.

Observación 3.34. Según hemos construido las funciones parciales $\widetilde{\mu}$ y $\widetilde{\nu}$ puede parecer que dependen de las elecciones que hayamos hecho de $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ y $\bar{b}_2$. Sin embargo eso no es así. Para unas uplas $\bar{\sigma}_1'$, $\bar{\sigma}_2'$ y $\bar{b}_2'$ que satisfagan las propiedades que satisfacían $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ y $\bar{b}_2$ tenemos que $qftp^D(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{b}_2|A) = qftp^D(\bar{\sigma}_1', \bar{\sigma}_2', \bar{b}_2'|A)$, y por tanto las elecciones de $\widetilde{\mu}$ y $\widetilde{\nu}$ van a estar presentes para las nuevas uplas. Sí es verdad que hay que hacer una elección por ejemplo en la longitud de la upla $\bar{\tau}$ y en la fórmula que definirá $\widetilde{\mu}$ y $\widetilde{\nu}$, pero estas elecciones se harán sobre un abanico de posibilidades que no variará con la elección de las uplas. De hecho, nuestras elecciones de $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ y $\bar{b}_2$ se hicieron en F para poder probar resultados que de otra forma hubieran sido muy complicados, como el hecho de que s es estacionario. Una vez que hemos probado esos resultados para las uplas que elegimos inicialmente y que pertenecían a F, podemos aplicarlos para una elección distinta de uplas iniciales que incluso podemos suponer que no están en F.

Proposición 3.35. *Siguiendo la notación de los párrafos anteriores, si $\bar{\tau}_1$ y $\bar{\tau}_2$ son dos uplas que realizan s, $\bar{b}_2'$ es una upla que realiza q_1, $\bar{b}_2'$ es independiente de $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2$ sobre A y $\widetilde{\mu}(\bar{\tau}_1, \bar{b}_2') = \widetilde{\mu}(\bar{\tau}_2, \bar{b}_2')$ entonces $\bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_2$.*

Demostración. Similar a la demostración de la proposición 3.31. $\square$

Proposición 3.36. *Siguiendo la notación del párrafo anterior, tenemos que $\bar{\tau}$ es independiente de $\bar{\sigma}_1$ y $\bar{\sigma}_2$ sobre A.*

Demostración. Para demostrar la proposición vamos a suponer que las uplas $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ y $\bar{b}_2$ con las que comenzamos el estudio tienen una serie de propiedades adicionales las cuales nos facilitarán el trabajo. Esto lo podemos hacer ya que, como dijimos en la observación 3.34, da igual con qué uplas comencemos. Entonces, sin pérdida de generalidad, sean $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}$ y $\bar{\sigma}_2 \in F$ una upla que realice q_1 y que sea independiente de $\bar{a}, \bar{b}$ sobre A. Obsérvese que dicha upla existe por la hipótesis B) del comienzo de la sección y que también va a ser independiente de $\bar{a}, \bar{b}, \bar{\sigma}_1$ sobre A ya que $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma} \in qfdcl^D(A, \bar{a})$. Por último, no hay ningún problema en tomar como $\bar{b}_2$ la upla $\bar{b}_1$ ya que $\bar{b}_1$ es independiente de $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ sobre A y realiza q_1. En estas condiciones, por definición, $\bar{b}_3 = \nu(\bar{\sigma}_2, \mu(\bar{\sigma}_1, \bar{b}_1))$ y $\bar{\tau}$ es la base canónica de $qftp^D(\bar{b}_1, \bar{b}_3|A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$.

Sea $x \in G$ un punto genérico de G sobre $A, \bar{a}, \bar{b}, \bar{\sigma}_2$. Como ya observamos anteriormente, x también va a ser genérico sobre $A, \bar{a}, \bar{b}, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$. Sean $\bar{y} = \bar{x}\bar{b}$ y $\bar{z} = \bar{y}\bar{c}^{-1}$. Observamos que entonces $\bar{z} = \bar{x}\bar{a}^{-1}$ y que $dim^D(\bar{\sigma}_2|\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = dim^D(\bar{\sigma}_2|\bar{x}, \bar{a}, \bar{b}) = n$, es decir, que $\bar{\sigma}_2$ es independiente de $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sobre A. Puesto que $\bar{\sigma}_1 \in acl^D(A, \bar{a}_1) = acl^D(A, \bar{a})$, tenemos que

$$\begin{aligned} dim^D(\bar{z}, \bar{c}_1, \bar{y}|A, \bar{\sigma}_1) &\geq dim^D(\bar{z}, \bar{c}_1, \bar{y}|A, \bar{\sigma}_1, \bar{a}) = \\ &= dim^D(\bar{z}, \bar{c}_1, \bar{y}|A, \bar{a}) = \\ &= dim^D(\bar{z}|A, \bar{a}, \bar{c}_1, \bar{y}) + dim^D(\bar{c}_1, \bar{y}|A, \bar{a}) = \\ &= 0 + 2n = dim^D(\bar{z}, \bar{c}_1, \bar{y}|A), \end{aligned}$$

es decir, que $\bar{\sigma}_1$ es independiente de $\bar{z}, \bar{c}_1, \bar{y}$ sobre A. Como $\bar{\sigma}_2$ es independiente de $\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}$ sobre A, también es independiente de $\bar{z}, \bar{c}_1, \bar{y}$ sobre A. Como r es estacionario, $\bar{\sigma}_1$ y $\bar{\sigma}_2$ realizan r y ambos son independientes sobre $\bar{z}, \bar{c}_1, \bar{y}$, tenemos que

$$qftp^D(\bar{\sigma}_1|A, \bar{z}, \bar{c}_1, \bar{y}) = qftp^D(\bar{\sigma}_2|A, \bar{z}, \bar{c}_1, \bar{y}). \tag{3}$$

Comprobemos que existen unas uplas $\bar{x}_1$ y $\bar{b}_4$ en D tales que

$$qftp^D(\bar{x}, \bar{b}_1, \bar{\sigma}_1, \bar{z}, \bar{c}_1, \bar{y}|A) = qftp^D(\bar{x}_1, \bar{b}_4, \bar{\sigma}_1, \bar{z}, \bar{c}_1, \bar{y}|A). \tag{4}$$

Denotemos con $p(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_6) = qftp^D(\bar{x}, \bar{b}_1, \bar{\sigma}_1, \bar{z}, \bar{c}_1, \bar{y}|A)$. Por el lema 2.10 tenemos que p es estacionario. Por tanto existe una fórmula $\psi(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_6) \in p$ tal que $dim(\psi) = dim(p)$ y $mult(\psi) = 1$. La fórmula sin cuantificadores que en D expresa $\exists \bar{v}_1 \exists \bar{v}_2 \psi(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{z}, \bar{c}_1, \bar{y}) \wedge \delta(\bar{v}_3, \bar{z}, \bar{c}_1, \bar{y})$, donde $\delta(\bar{v}_3, \bar{z}, \bar{c}_1, \bar{y})$ es la fórmula asociada a la dimensión de $\psi(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{z}, \bar{c}_1, \bar{y})$, pertenece al tipo sin cuantificadores $qftp^D(\bar{\sigma}_1|A, \bar{z}, \bar{c}_1, \bar{y})$. Por la igualdad (3) y puesto que la dimensión de la fórmula $\psi(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{\sigma}_1, \bar{z}, \bar{c}_1, \bar{y})$ es 0, existen unas uplas $\bar{x}_1$ y $\bar{b}_4$ tales que $M \models \psi(\bar{x}_1, \bar{b}_4, \bar{\sigma}_2, \bar{z}, \bar{c}_1, \bar{y})$ y tales que $\bar{x}_1, \bar{b}_4 \in acl^D(\bar{\sigma}_2, \bar{z}, \bar{c}_1, \bar{y})$. Así pues, tanto $qftp^D(\bar{x}_1, \bar{b}_4, \bar{\sigma}_1, \bar{z}, \bar{c}_1, \bar{y}|A)$ como $p(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_6)$ contienen la fórmula $\psi(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_6)$, tienen dimensión igual a la dimensión de $\psi(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_6)$ y por tanto, dado que $\psi(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_6)$ tiene multiplicidad 1, ambos tipos sin cuantificadores deben ser el mismo. Además, como por (3) tenemos que $\mu(\bar{\sigma}_1, \bar{b}_1) = \mu(\bar{\sigma}_2, \bar{b}_4) = \bar{c}_1$ y puesto que las funciones μ y ν son inversas una de la otra si el primer argumento de ambas es el mismo, entonces

$$\bar{b}_3 = \widetilde{\mu}(\bar{\tau}, \bar{b}_1) = \nu(\bar{\sigma}_2, \mu(\bar{\sigma}_1, \bar{b}_1)) = \nu(\bar{\sigma}_2, \mu(\bar{\sigma}_2, \bar{b}_4)) = \bar{b}_4.$$

Para terminar, basta demostrar que

a) $\bar{\sigma}_1$ y $\bar{\sigma}_2$ son independientes de $\bar{x}, \bar{x}_1$ sobre A,

b) $\bar{\tau} \in acl^D(A, \bar{x}, \bar{x}_1)$.

Efectivamente, si probamos *a*) y *b*) entonces por un lado tendremos que

$$\begin{aligned} dim(\bar{\sigma}_1, \bar{\tau}|A, \bar{x}, \bar{x}_1) &= dim(\bar{\sigma}_1|A, \bar{x}, \bar{x}_1, \bar{\tau}) + dim(\bar{\tau}|A, \bar{x}, \bar{x}_1) = \\ &= dim(\bar{\sigma}_1|A, \bar{x}, \bar{x}_1, \bar{\tau}) + 0, \end{aligned}$$

mientras que por otro lado

$$\begin{aligned} dim(\bar{\sigma}_1, \bar{\tau}|A, \bar{x}, \bar{x}_1) &= dim(\bar{\tau}|A, \bar{x}, \bar{x}_1, \bar{\sigma}_1) + dim(\bar{\sigma}_1|A, \bar{x}, \bar{x}_1) = \\ &= 0 + dim(\bar{\sigma}_1|A, \bar{x}, \bar{x}_1) = \\ &= dim(\bar{\sigma}_1|A), \end{aligned}$$

y por tanto $dim(\bar{\sigma}_1|A) = dim(\bar{\sigma}_1|A, \bar{x}, \bar{x}_1, \bar{\tau})$ y en particular $dim(\bar{\sigma}_1|A) = dim(\bar{\sigma}_1|A, \bar{\tau})$, es decir, $\bar{\sigma}_1$ es independiente de $\bar{\tau}$ sobre A. De forma similar probamos que $\bar{\sigma}_2$ es independiente de $\bar{\tau}$ sobre A.

Demostremos entonces los asertos *a*) y *b*)

a) Sea $X = \{\bar{\sigma}_1, \bar{b}, \bar{c}, \bar{b}_1, \bar{c}_1, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\sigma}_2, \bar{x}_1, \bar{b}_4\}$. Probemos que $dim(X|A) = 4n$. Dado que $dim(\bar{\sigma}_1, \bar{b}, \bar{x}, \bar{\sigma}_2|A) = 4n$, basta que veamos que $X \subset acl^D(A, \bar{\sigma}_1, \bar{b}, \bar{x}, \bar{\sigma}_2)$,

1. por el lema 3.27, $\bar{b}_1 \in acl^D(A, \bar{b})$,
2. por la proposición 3.29 y el lema 3.27, $\bar{c}_1 \in qfdcl^D(A, \bar{\sigma}, \bar{b}_1) = qfdcl^D(A, \bar{\sigma}_1, \bar{b})$,
3. por el lema 3.27 y el apartado 2), $\bar{c} \in acl^D(A, \bar{c}_1) \subset acl^D(A, \bar{\sigma}_1, \bar{b})$
4. por definición, $\bar{y} = \bar{x}\bar{b}$ y por tanto $\bar{y} \in acl^D(A, \bar{x}, \bar{b})$,

5. por definición $\bar{z} = \bar{y}\bar{c}^{-1}$ y por los apartados 4) y 3) tenemos que $\bar{z} \in acl^D(A, \bar{y}, \bar{c}) \subset acl^D(A, \bar{x}, \bar{b}, \bar{\sigma}_1)$,
6. por definición y por los apartados 4), 5) y 2), tenemos que $\bar{x}_1, \bar{b}_4 \in acl^D(A, \bar{\sigma}_2, \bar{z}, \bar{c}_1, \bar{y}) \subset acl^D(A, \bar{\sigma}_2, \bar{x}, \bar{\sigma}_1, \bar{b})$.

Demostremos que $X \subset acl^D(A, \bar{\sigma}_1, \bar{x}, \bar{x}_1, \bar{b}_1)$,

1. por el lema 3.27, $\bar{b} \in acl^D(A, \bar{b}_1)$,
2. por el lema 3.27, la proposición 3.29 y el apartado 1), tenemos que $\bar{c} \in acl^D(A, \bar{c}_1) \subset acl^D(A, \bar{\sigma}_1, \bar{b}) \subset acl^D(A, \bar{\sigma}_1, \bar{b}_1)$,
3. por el lema 3.27, $\bar{c}_1 \in acl^D(A, \bar{c})$,
4. por definición $\bar{y} = \bar{x}\bar{b}$ y por tanto $\bar{y} \in acl^D(A, \bar{x}, \bar{b}) \subset acl^D(A, \bar{x}, \bar{b}_1)$,
5. por definición $\bar{z} = \bar{y}\bar{c}^{-1}$ y por los apartados 2) y 4) tenemos que $\bar{z} \in acl^D(A, \bar{y}, \bar{c}) \subset acl^D(A, \bar{\sigma}_1, \bar{x}, \bar{b}_1)$,
6. por definición $\bar{b} = \bar{x}^{-1}\bar{y}$ y por tanto $\bar{b} \in acl^D(A, \bar{x}, \bar{y})$. En particular, $\bar{b}_1 \in acl^D(A, \bar{b}) \subset acl^D(A, \bar{x}, \bar{y})$. Por la igualdad (4) y por el apartado 4) , tenemos que $\bar{b}_4 \in\subset acl^D(A, \bar{x}_1, \bar{y}) \subset acl^D(A, \bar{x}_1, \bar{x}, \bar{b}_1)$,
7. por definición y puesto que $\bar{a} = \bar{z}^{-1}\bar{y}\bar{b}^{-1}$, $\bar{\sigma}_1 \in qfdcl^D(A, \bar{a}_1) \subset acl^D(A, \bar{a}) \subset acl^D(A, \bar{z}, \bar{y}, \bar{b})$. Por la igualdad (4) y por los apartados 4), 5) y 6), $\bar{\sigma}_2 \subset acl^D(A, \bar{z}, \bar{y}, \bar{b}_4) \subset acl^D(A, \bar{\sigma}_1, \bar{x}, \bar{x}_1, \bar{b})$.

Por tanto deducimos que $dim(\bar{\sigma}_1, \bar{x}, \bar{x}_1, \bar{b}_1|A) = 4n$ y, en particular, que $\bar{\sigma}_1$ es independiente de $\bar{x}, \bar{x}_1$ sobre A. Veamos que $\bar{\sigma}_2$ es independiente de $\bar{x}, \bar{x}_1$ sobre A. Puesto que $\bar{a} = \bar{z}^{-1}\bar{x}$ tenemos que $\bar{\sigma}_1 \in acl^D(A, \bar{a}) \subset acl^D(A, \bar{z}, \bar{x})$ y por la igualdad (4) entonces $\bar{\sigma}_2 \in acl^D(A, \bar{z}, \bar{x}_1)$. Como $\bar{z} = \bar{x}\bar{a}^{-1}$ y $acl^D(A, \bar{a}_1) = acl^D(A, \bar{\sigma}_1)$, esto último porque $acl^D(A, \bar{\sigma}_1) \subset acl^D(A, \bar{a}_1)$ y $dim(\bar{a}_1|A) = dim(\bar{\sigma}_1|A) = n$, $\bar{\sigma}_2 \in acl^D(A, \bar{x}, \bar{x}_1, \bar{\sigma}_1)$. Así pues $acl^D(A, \bar{\sigma}_1, \bar{x}, \bar{x}_1, \bar{b}) = acl^D(A, \bar{\sigma}_2, \bar{x}, \bar{x}_1, \bar{b})$ y por tanto también $X \subset acl^D(A, \bar{\sigma}_2, \bar{x}, \bar{x}_1, \bar{b}_1)$ de lo que deducimos que $dim(\bar{\sigma}_2, \bar{x}, \bar{x}_1, \bar{b}_1|A) = 4n$ y, en particular, que $\bar{\sigma}_2$ es independiente de $\bar{x}, \bar{x}_1$ sobre A.

b) Como ya vimos en el aserto a), $dim(\bar{\sigma}_1, \bar{x}, \bar{x}_1, \bar{b}_1|A) = 4n$ y por tanto $\bar{b}_1$ es independiente de $\bar{\sigma}_1, \bar{x}, \bar{x}_1$ sobre A. También vimos en el aserto a) que $\bar{\sigma}_2 \in acl^D(A, \bar{x}, \bar{x}_1, \bar{\sigma}_1)$ y por tanto

$$dim(\bar{b}_1|A, \bar{x}, \bar{x}_1, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) = dim(\bar{b}_1|A, \bar{x}, \bar{x}_1, \bar{\sigma}_1) = n,$$

es decir, $\bar{b}_1$ es independiente de $\bar{x}, \bar{x}_1, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ sobre A. Dado que $\bar{b}_3 = \widetilde{\mu}(\bar{\tau}, \bar{b}_1) = \bar{b}_4$, $\bar{\tau}$ es la base canónica de $qftp^D(\bar{b}_1, \bar{b}_4|A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$. Como $\bar{b}_1$ es independiente de $\bar{x}, \bar{x}_1, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ sobre A y $\bar{b}_4 \in qfdcl^D(A, \bar{\tau}, \bar{b}_1)$ entonces $qftp^D(\bar{b}_1, \bar{b}_4|A, \bar{x}, \bar{x}_1, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$ es la extensión que no bifurca de

$qftp^D(\bar{b}_1, \bar{b}_4|A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$. Como $\bar{b} = \bar{y}\bar{x}^{-1}$ tenemos que $\bar{b}_1 \in acl^D(A, \bar{y}, \bar{x})$ y por tanto, por la igualdad (4) y puesto que $\bar{y} = \bar{x}\bar{b}^{-1}$, entonces $\bar{b}_4 \in acl^D(A, \bar{y}, \bar{x}_1) \subset acl^D(A, \bar{x}, \bar{x}, \bar{b}_1, \bar{x}_1)$. Finalmente

$$dim(\bar{b}_1, \bar{b}_4|A, \bar{x}, \bar{x}_1) = dim(\bar{b}_4|A, \bar{x}, \bar{x}_1, \bar{b}_1) + dim(\bar{b}_1|A, \bar{x}, \bar{x}_1) = 0 + n,$$

y por tanto, por la proposición 1.62, $\bar{\tau} \in acl^D(A, \bar{x}, \bar{x}_1)$.

□

Corolario 3.37. *Siguiendo la notación de la proposición 3.36, tenemos que* $\bar{\tau} \in acl^D(A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$*,* $\bar{\sigma}_1 \in acl^D(A, \bar{\sigma}_2, \bar{\tau})$ *y* $\bar{\sigma}_2 \in acl^D(A, \bar{\sigma}_1, \bar{\tau})$*.*

Demostración. Dado que $\bar{\tau}$ es la base canónica de $qftp^D(\bar{b}_2, \bar{c}_3|A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$, tenemos que $\bar{\tau} \in acl^D(A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$. Como $\bar{\sigma}_1$ y $\bar{\sigma}_2$ son independientes sobre A tenemos que

$$\begin{aligned} dim^D(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\tau}|A) &= dim^D(\bar{\tau}|A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) + dim^D(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2|A) = \\ &= 0 + 2n = 2n. \end{aligned}$$

Por la proposición 3.36 y el apartado v) de la proposición 3.33 tenemos que

$$\begin{aligned} dim^D(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\tau}|A) &= dim^D(\bar{\sigma}_1|A, \bar{\sigma}_2, \bar{\tau}) + dim^D(\bar{\sigma}_2, \bar{\tau}|A) = \\ &= dim^D(\bar{\sigma}_1|A, \bar{\sigma}_2, \bar{\tau}) + 2n. \end{aligned}$$

Por tanto $dim^D(\bar{\sigma}_1|A, \bar{\sigma}_2, \bar{\tau}) = 0$. De forma similar se puede demostrar que $dim^D(\bar{\sigma}_2|A, \bar{\sigma}_1, \bar{\tau}) = 0$. □

Como $\bar{\tau} \in qfdcl^D(A, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$, existe una función parcial ρ definible en D sobre A tal que $\rho(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) = \bar{\tau}$.

En estos últimos pasos vamos a construir una función parcial f adecuada para poder aplicar la proposición 3.22. Sean $\bar{\tau}_1 \in F$ y $\bar{\tau}_2 \in F$ dos realizaciones de s independientes entre sí sobre A. Sea $\bar{b}' \in F$ una upla que realice q_1 y que sea independiente de $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2$ sobre A. Sea $\bar{\sigma}_{02} \in F$ una realización de r que sea independiente de $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \bar{b}'$ sobre A. Tenemos entonces que $qftp^D(\bar{\sigma}_{02}, \bar{\tau}_2|A) = qftp^D(\bar{\sigma}_2, \bar{\tau}|A)$. Veamos que existe una upla $\bar{\sigma}_{03} \in D$ tal que

$$qftp^D(\bar{\sigma}_{03}, \bar{\sigma}_{02}, \bar{\tau}_2|A) = qftp^D(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\tau}|A).$$

Por el lema 2.10, y puesto que podemos suponer que $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\tau} \in F$ como ya se explicó al comienzo de la demostración de la proposición 3.36, $p(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = qftp^D(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\tau}|A)$ es estacionario y por tanto existe una fórmula $\chi(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) \in p(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ con multiplicidad 1 y dimensión $3n$. Así pues, la fórmula sin cuantificadores y con parámetros en A que en D expresa

$\exists\bar{v}_1\chi(\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3)\wedge\delta(\bar{v}_2,\bar{v}_3)$, donde $\delta(\bar{v}_2,\bar{v}_3)$ es la fórmula asociada a la dimensión de $\chi(\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3)$, pertenece a $qftp^D(\bar{\sigma}_2,\bar{\tau}|A)$. Como la dimensión de $\chi(\bar{v}_1,\bar{\sigma}_2,\bar{\tau})$ es 0, existe una upla $\bar{\sigma}_{03}$ en D tal que se satisface $\chi(\bar{\sigma}_{03},\bar{\sigma}_{02},\bar{\tau}_2)$ y la dimensión de $\chi(\bar{v}_1,\bar{\sigma}_{02},\bar{\tau}_2)$ es 0. Así pues, tanto $qftp^D(\bar{\sigma}_{03},\bar{\sigma}_{02},\bar{\tau}_2A)$ como $p(\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3)$ contienen la fórmula $\chi(\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3)$, tienen dimensión igual a la dimensión de $\chi(\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3)$ y por tanto, dado que $\chi(\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3)$ tiene multiplicidad 1, ambos tipos sin cuantificadores deben ser el mismo. De la misma manera, como $qftp^D(\bar{\sigma}_{02},\bar{\tau}_1)=qftp^D(\bar{\sigma}_1,\bar{\tau})$, existe una upla $\bar{\sigma}_{01}$ en D tal que

$$qftp^D(\bar{\sigma}_{02},\bar{\sigma}_{01},\bar{\tau}_1|A)=qftp^D(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\bar{\tau}|A).$$

En particular tenemos que

a) $\bar{\sigma}_{03}$ realiza r, es independiente tanto de $\bar{\sigma}_{02}$ como de $\bar{\tau}_2$ sobre A, $\bar{\tau}_2=\rho(\bar{\sigma}_{03},\bar{\sigma}_{02})$ y cada $\bar{\sigma}_{03},\bar{\sigma}_{02},\bar{\tau}_2$ pertenece a la clausura definible en D de los otros dos,

b) $\bar{\sigma}_{01}$ realiza r, es independiente tanto de $\bar{\sigma}_{02}$ como de $\bar{\tau}_1$ sobre A, $\bar{\tau}_1=\rho(\bar{\sigma}_{02},\bar{\sigma}_{01})$ y cada $\bar{\sigma}_{01},\bar{\sigma}_{02},\bar{\tau}_1$ pertenece a la clausura definible en D de los otros dos.

Puesto que $\bar{\tau}_2$ y $\bar{b}'$ son independientes sobre A y son realizaciones de s y q_1 respectivamente tenemos que $qftp^D(\bar{b}',\bar{\tau}_2)=qftp^D(\bar{b},\bar{\tau})$ y por tanto $\widetilde{\mu}(\bar{\tau}_2,\bar{b}')$ está bien definido, realiza q_1 y es independiente de $\bar{\tau}_2$ sobre A. Es más, dado que $\bar{b}'=\widetilde{\nu}(\bar{\tau}_2,\widetilde{\mu}(\bar{\tau}_2,\bar{b}'))$,

$$\begin{aligned}
&dim(\widetilde{\mu}(\bar{\tau}_2,\bar{b}')|A,\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2,\bar{\sigma}_{02})=\\
&\quad= dim(\widetilde{\mu}(\bar{\tau}_2,\bar{b}'),\bar{b}'|A,\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2,\bar{\sigma}_{02})-dim(\bar{b}'|A,\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2,\bar{\sigma}_{02},\widetilde{\mu}(\bar{\tau}_2,\bar{b}'))=\\
&\quad= dim(\widetilde{\mu}(\bar{\tau}_2,\bar{b}')|A,\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2,\bar{\sigma}_{02},\bar{b}')+dim(\bar{b}'|A,\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2,\bar{\sigma}_{02})-0=0+n,
\end{aligned}$$

es decir, $\widetilde{\mu}(\bar{\tau}_2,\bar{b}')$ es independiente de $\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2,\bar{\sigma}_{02}$ sobre A. Por tanto tenemos que $\widetilde{\mu}(\bar{\tau}_1,\widetilde{\mu}(\bar{\tau}_2,\bar{b}'))$ está bien definido, realiza q_1 y es independiente tanto de $\bar{\tau}_1$ como de $\widetilde{\mu}(\bar{\tau}_2,\bar{b}')$ sobre A y al cual denotaremos con $\bar{c}'$. Demostremos una serie de hechos que nos conducirán a nuestro función parcial deseada,

i) $\bar{\sigma}_{01}$ y $\bar{\sigma}_{03}$ son independientes sobre A. Efectivamente, como por definición tenemos que $\bar{\sigma}_{01}\in acl^D(A,\bar{\sigma}_{02},\bar{\tau}_1)$ y $\bar{\tau}_1=\rho(\bar{\sigma}_{02},\bar{\sigma}_{01})$, entonces

$$\begin{aligned}
&dim(\bar{\sigma}_{01}|A,\bar{\tau}_2,\bar{\sigma}_{02})=\\
&\quad= dim(\bar{\sigma}_{01},\bar{\tau}_1|A,\bar{\tau}_2,\bar{\sigma}_{02})-dim(\bar{\tau}_1|A,\bar{\tau}_2,\bar{\sigma}_{02},\bar{\sigma}_{01})=\\
&\quad= dim(\bar{\sigma}_{01}|A,\bar{\tau}_2,\bar{\sigma}_{02},\bar{\tau}_1)+dim(\bar{\tau}_1|A,\bar{\tau}_2,\bar{\sigma}_{02})-0=0+n,
\end{aligned}$$

es decir, que $\bar{\sigma}_{01}$ es independiente de $\bar{\tau}_2, \bar{\sigma}_{02}$ sobre A. Además, $\bar{\sigma}_{03} \in acl^D(A, \bar{\sigma}_{02}, \bar{\tau}_2)$. Finalmente, como $\bar{\sigma}_{03} \in acl^D(A, \bar{\sigma}_{02}, \bar{\tau}_2)$, por un lado tenemos que

$$
\begin{aligned}
& dim(\bar{\sigma}_{01}, \bar{\sigma}_{03} | A, \bar{\tau}_2, \bar{\sigma}_{02}) = \\
& \qquad = \; dim(\bar{\sigma}_{01} | A, \bar{\tau}_2, \bar{\sigma}_{02}, \bar{\sigma}_{03}) + dim(\bar{\sigma}_{03} | A, \bar{\tau}_2, \bar{\sigma}_{02}) = \\
& \qquad = \; dim(\bar{\sigma}_{01} | A, \bar{\tau}_2, \bar{\sigma}_{02}, \bar{\sigma}_{03}) + 0,
\end{aligned}
$$

mientras que por otro

$$
\begin{aligned}
& dim(\bar{\sigma}_{01}, \bar{\sigma}_{03} | A, \bar{\tau}_2, \bar{\sigma}_{02}) = \\
& \qquad = \; dim(\bar{\sigma}_{03} | A, \bar{\tau}_2, \bar{\sigma}_{02}, \bar{\sigma}_{01}) + dim(\bar{\sigma}_{01} | A, \bar{\tau}_2, \bar{\sigma}_{02}) = \\
& \qquad = \; 0 + dim(\bar{\sigma}_{01} | A, \bar{\tau}_2, \bar{\sigma}_{02}) = \\
& \qquad = \; dim(\bar{\sigma}_{01} | A),
\end{aligned}
$$

y por tanto $dim(\bar{\sigma}_{01} | A) = dim(\bar{\sigma}_{01} | A, \bar{\tau}_2, \bar{\sigma}_{02}, \bar{\sigma}_{03})$. En particular, deducimos que $dim(\bar{\sigma}_{01} | A) = dim(\bar{\sigma}_{01} | A, \bar{\sigma}_{03})$, es decir, $\bar{\sigma}_{01}$ es independiente de $\bar{\sigma}_{03}$ sobre A.

ii) Por el punto anterior, $\rho(\bar{\sigma}_{01}, \bar{\sigma}_{03})$, al cual denotaremos con $\bar{\tau}_3$, está bien definido, realiza s y es independiente tanto de $\bar{\sigma}_{01}$ como de $\bar{\sigma}_{03}$ sobre A. Es más, $\bar{\tau}_3$ es independiente tanto de $\bar{\tau}_1$ como de $\bar{\tau}_2$ sobre A. Efectivamente, por un lado tenemos que

$$
\begin{aligned}
& dim(\bar{\sigma}_{01}, \bar{\sigma}_{02}, \bar{\sigma}_{03}, \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2 | A) = \\
& \qquad = \; dim(\bar{\sigma}_{01}, \bar{\sigma}_{03} | A, \bar{\sigma}_{02}, \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) + dim(\bar{\sigma}_{02}, \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2 | A) = \\
& \qquad = \; 0 + 3n.
\end{aligned}
$$

y por el otro

$$
\begin{aligned}
& dim(\bar{\sigma}_{01}, \bar{\sigma}_{02}, \bar{\sigma}_{03}, \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2 | A) = \\
& \qquad = \; dim(\bar{\tau}_2 | A, \bar{\sigma}_{01}, \bar{\sigma}_{02}, \bar{\sigma}_{03}, \bar{\tau}_1) + dim(\bar{\sigma}_{01}, \bar{\sigma}_{02}, \bar{\sigma}_{03}, \bar{\tau}_1 | A) = \\
& \qquad = \; 0 + dim(\bar{\sigma}_{02} | A, \bar{\sigma}_{01}, \bar{\sigma}_{03}, \bar{\tau}_1) + dim(\bar{\sigma}_{01}, \bar{\sigma}_{03}, \bar{\tau}_1 | A) = \\
& \qquad = \; 0 + dim(\bar{\sigma}_{01}, \bar{\sigma}_{03}, \bar{\tau}_1 | A).
\end{aligned}
$$

Por tanto $dim(\bar{\sigma}_{01}, \bar{\sigma}_{03}, \bar{\tau}_1 | A) = 3n$. De forma similar se prueba que $dim(\bar{\sigma}_{01}, \bar{\sigma}_{03}, \bar{\tau}_2 | A) = 3n$. Entonces, como $\bar{\tau}_3 = \rho(\bar{\sigma}_{01}, \bar{\sigma}_{03})$, tenemos que por un lado

$$
\begin{aligned}
&dim(\bar\tau_3,\bar\tau_1,\bar\sigma_{01},\bar\sigma_{03}|A) = \\
&\quad = dim(\bar\tau_3|A,\bar\tau_1,\bar\sigma_{01},\bar\sigma_{03}) + dim(\bar\tau_1,\bar\sigma_{01},\bar\sigma_{03}|A) = \\
&\quad = 0+3n,
\end{aligned}
$$

y por otro lado

$$
\begin{aligned}
&dim(\bar\tau_3,\bar\tau_1,\bar\sigma_{01},\bar\sigma_{03}|A) = \\
&\quad = dim(\bar\tau_1|A,\bar\tau_3,\bar\sigma_{01},\bar\sigma_{03}) + dim(\bar\tau_3,\bar\sigma_{01},\bar\sigma_{03}|A) = \\
&\quad = dim(\bar\tau_1|A,\bar\tau_3,\bar\sigma_{01},\bar\sigma_{03}) + 2n,
\end{aligned}
$$

y por tanto $\bar\tau_1$ es independiente de $\bar\tau_3$ sobre A. De forma similar se prueba que $\bar\tau_2$ es independiente de $\bar\tau_3$ sobre A.

iii) $\bar b'$ es independiente de $\bar\sigma_{01},\bar\sigma_{03}$ sobre A. Se debe a que,

$$
\begin{aligned}
&dim(\bar b'|A,\bar\sigma_{01},\bar\sigma_{03}) \geq \\
&\quad \geq dim(\bar b'|A,\bar\sigma_{01},\bar\sigma_{03},\bar\sigma_{02},\bar\tau_1,\bar\tau_2) = \\
&\quad = dim(\bar b'|A,\bar\sigma_{02},\bar\tau_1,\bar\tau_2) = \\
&\quad = dim(\bar b',\bar\sigma_{02}|A,\bar\tau_1,\bar\tau_2) - dim(\bar\sigma_{02}|A,\bar\tau_1,\bar\tau_2) = \\
&\quad = dim(\bar\sigma_{02}|A,\bar\tau_1,\bar\tau_2,\bar b') + dim(\bar b'|A,\bar\tau_1,\bar\tau_2) - n = \\
&\quad = n+n-n = n.
\end{aligned}
$$

Por tanto $\bar\tau_3$ es la base canónica de $qftp^D(\bar b',\nu(\bar\sigma_{01},\mu(\bar\sigma_{03},\bar b'))|A,\bar\sigma_{03},\bar\sigma_{01})$.

iv) $\widetilde\mu(\bar\tau_2,\bar b')$ es independiente de $\bar\sigma_{02},\bar\sigma_{01}$ sobre A. Se deduce directamente de que $\widetilde\mu(\bar\tau_2,\bar b')$ es independiente de $\bar\tau_1,\bar\tau_2,\bar\sigma_{02}$ y de que $\bar\sigma_{01}\in acl^D(\bar\tau_1,\bar\sigma_{02})$,

v) Por tanto $\bar\tau_1$ es la base canónica de

$$qftp^D(\widetilde\mu(\bar\tau_2,\bar b'),\nu(\bar\sigma_{01},\mu(\bar\sigma_{02},\widetilde\mu(\bar\sigma_{02},\bar b')))|A,\bar\sigma_{02},\bar\sigma_{01}).$$

vi) $\mu(\bar\sigma_{03},\bar b')$ es independiente de $\bar\sigma_{03},\bar\sigma_{02}$ sobre A. Efectivamente, como $\bar b'=\nu(\bar\sigma_{02},\mu(\bar\sigma_{03},\bar b'))$,

$$dim(\mu(\bar{\sigma}_{03},\bar{b}')|A,\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2,\bar{\sigma}_{02}) =$$

$$\begin{aligned} &= dim(\mu(\bar{\sigma}_{03},\bar{b}'),\bar{b}'|A,\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2,\bar{\sigma}_{02}) - dim(\bar{b}'|A,\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2,\bar{\sigma}_{02},\mu(\bar{\sigma}_{03},\bar{b}')) = \\ &= dim(\mu(\bar{\sigma}_{03},\bar{b}')|A,\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2,\bar{\sigma}_{02},\bar{b}') + dim(\bar{b}'|A,\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2,\bar{\sigma}_{02}) - 0 = 0 + n, \end{aligned}$$

es decir, $\mu(\bar{\sigma}_{03},\bar{b}')$ es independiente de $\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2,\bar{\sigma}_{02}$ sobre A y puesto que $\bar{\sigma}_{03} \in qfdcl^D(A,\bar{\tau}_2,\bar{\sigma}_{02})$, deducimos que $\mu(\bar{\sigma}_{03},\bar{b}')$ es independiente de $\bar{\sigma}_{03},\bar{\sigma}_{02}$ sobre A.

vii) Por tanto $\bar{\tau}_2$ es la base canónica de

$$qftp^D(\mu(\bar{\sigma}_{03},\bar{b}'),\nu(\bar{\sigma}_{02},\mu(\bar{\sigma}_{03},\mu(\bar{\sigma}_{03},\bar{b}')))).$$

viii) $\widetilde{\mu}(\bar{\tau}_3,\bar{b}') = \bar{c}'$. Efectivamente, por $vii)$,$v)$ y $iii)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{c}' &= \widetilde{\mu}(\bar{\tau}_1,\widetilde{\mu}(\bar{\tau}_2,\bar{b}')) = \\ &= \nu(\bar{\sigma}_{01},\mu(\bar{\sigma}_{01},\widetilde{\mu}(\bar{\sigma}_{02},\bar{b}'))) = \\ &= \nu(\bar{\sigma}_{01},\mu(\bar{\sigma}_{01},\nu(\bar{\sigma}_{02},\mu(\bar{\sigma}_{03},\bar{b}')))) = \\ &= \nu(\bar{\sigma}_{01},\mu(\bar{\sigma}_{03},\bar{b}')) = \\ &= \widetilde{\mu}(\bar{\tau}_3,\bar{b}'). \end{aligned}$$

ix) $qftp^D(\bar{b}',\bar{c}'|A,\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2)$ es estacionario. Efectivamente, como q_1 es estacionario y $\bar{b}'$ es independiente de $\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2$ entonces $qftp^D(\bar{b}',\bar{c}'|A,\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2)$ debe ser la extensión de q_1 sobre $A,\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2$ que no bifurca y por tanto es estacionaria.

x) $\bar{\tau}_3$ es la base canónica de $qftp^D(\bar{b}',\bar{c}'|A,\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2)$. Por un lado tenemos que

$$dim(\bar{b}',\bar{c}'|A,\bar{\sigma}_{01},\bar{\sigma}_{02},\bar{\sigma}_{03},\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2) =$$

$$\begin{aligned} &= dim(\bar{c}'|A,\bar{\sigma}_{01},\bar{\sigma}_{02},\bar{\sigma}_{03},\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2,\bar{b}') + dim(\bar{b}'|A,\bar{\sigma}_{01},\bar{\sigma}_{02},\bar{\sigma}_{03},\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2) = \\ &= dim(\bar{b}'|A,\bar{\sigma}_{01},\bar{\sigma}_{02},\bar{\sigma}_{03}) = n, \end{aligned}$$

y por otro lado, como por definición

$$\begin{aligned} dim(\bar{b}',\bar{c}'|A,\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2) &= dim(\bar{c}'|A,\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2,\bar{b}') + dim(\bar{b}'|A,\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2) = \\ &= 0 + n = n. \end{aligned}$$

Por tanto, por el punto $ix)$, $\bar{\tau}_3$ es la base canónica de $qfdcl^D(A,\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2)$.

Tenemos entonces que $\bar{\tau}_3 \in qfdcl^D(A, \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$ y por tanto existe una función definible sobre A sin cuantificadores tal que $f(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) = \bar{\tau}_3$. Denotemos con $q_f = qftp^D(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2|A)$.

Comprobemos que la función f que hemos definido satisface las hipótesis del lema 3.22. Sea $\widetilde{D}$ una extensión $|A|^+$-saturada de D.

Lema 3.38. *Siguiendo la notación del párrafo anterior,*

1) para cualesquiera realizaciones $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2 \in \widetilde{D}$ de s independientes sobre A, $f(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$ está definido, realiza s y es independiente tanto de $\bar{\tau}_1$ como de $\bar{\tau}_2$ sobre A,

2) para cualesquiera realizaciones $\bar{\tau}_1, \bar{b}' \in \widetilde{D}$ de s y r respectivamente e independientes sobre A, $\widetilde{\mu}(\bar{\tau}_1, \bar{b}')$ está definido, realiza r y es independiente de $\bar{\tau}_1$ sobre A,

3) para cualesquiera realizaciones $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \bar{\tau}_3 \in \widetilde{D}$ de s independientes sobre A tenemos que $f(f(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2), \bar{\tau}_3) = f(\bar{\tau}_1, f(\bar{\tau}_2, \bar{\tau}_3))$.

4) para cualesquiera realizaciones $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2 \in \widetilde{D}$ de s y $\bar{b}' \in \widetilde{D}$ de r, independientes dos a dos sobre A, tenemos que $\widetilde{\mu}(f(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2), \bar{b}') = \widetilde{\mu}(\bar{\tau}_1, \widetilde{\mu}(\bar{\tau}_2, \bar{b}'))$.

Demostración. 1) y 4) Puesto que $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2$ son realizaciones de s independientes sobre A tenemos que $qftp^{\widetilde{D}}(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2|A) = q_f$ y por tanto $f(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$ está bien definida. De entre los apartados que probamos antes de el enunciado del lema, el apartado *ii*) nos asegura que $f(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$ es independiente de tanto de $\bar{\tau}_1$ como de $\bar{\tau}_2$ y por el apartado *viii*) tenemos que $\widetilde{\mu}(f(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2), \bar{b}') = \widetilde{\mu}(\bar{\tau}_1, \widetilde{\mu}(\bar{\tau}_2, \bar{b}'))$.

2) Puesto que $\bar{\tau}_1, \bar{b}'$ son realizaciones de s y q_1 respectivamente e independientes sobre A por la proposición , tenemos que $qftp^{\widetilde{D}}(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2|A) = q_{\widetilde{\mu}}$ y por tanto $\widetilde{\mu}(\bar{\tau}_1, \bar{b}')$ esta bien definida, realiza r y es independiente de $\bar{\tau}_1$ sobre A.

3) Sea $\bar{b}'$ una realización de q_1 independiente de $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \bar{\tau}_3$ sobre A. Tenemos entonces que por un lado, aplicando reiteradamente 4),

$$\widetilde{\mu}(f(\bar{\tau}_1, f(\bar{\tau}_2, \bar{\tau}_3)), \bar{b}') = \widetilde{\mu}(\bar{\tau}_1, \widetilde{\mu}(f(\bar{\tau}_2, \bar{\tau}_3), \bar{b}')) = \widetilde{\mu}(\bar{\tau}_1, \widetilde{\mu}(\bar{\tau}_2, \widetilde{\mu}(\bar{\tau}_3), \bar{b}')),$$

y por otro

$$\widetilde{\mu}(f(f(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2), \bar{\tau}_3), \bar{b}') = \widetilde{\mu}(f(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2), \widetilde{\mu}(\bar{\tau}_3, \bar{b}')) = \widetilde{\mu}(\bar{\tau}_1, \widetilde{\mu}(\bar{\tau}_2, \widetilde{\mu}(\bar{\tau}_3), \bar{b}')).$$

Dado que $\widetilde{\mu}(f(\bar{\tau}_1, f(\bar{\tau}_2, \bar{\tau}_3)), \bar{b}') = \widetilde{\mu}(f(f(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2), \bar{\tau}_3), \bar{b}')$, por la proposición 3.35 tenemos que $f(\bar{\tau}_1, f(\bar{\tau}_2, \bar{\tau}_3)) = f(f(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2), \bar{\tau}_3)$. $\square$

Una vez demostrado el lema 3.38, la aplicación del teorema 3.22, donde $\widetilde{\mu}$ desempeña el papel de g y s y q_1 los papeles de p y q respectivamente, es inmediata. Así pues, existe un grupo definiblemente conexo H y subconjunto X con multiplicidad 1, ambos interpretables en $\widetilde{D}$ con parámetros en A, una acción $*$ transitiva de H sobre X y unas funciones parciales h_1 y h_2 invertibles y definibles en $\widetilde{D}$ sobre A tales que

i) para cualquier upla $\bar{\tau}_1$ que realice s, $h_1(\bar{\tau}_1)$ está definido y realiza el tipo genérico de H,

ii) para cualquier upla $\bar{b}'$ que realice q_1, $h_2(\bar{b}')$ está definido y realiza el tipo genérico de X,

iii) para cualesquiera realizaciones $\bar{\tau}_1$ y $\bar{\tau}_2$ de s independientes sobre A, $h_1(f(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)) = h_1(\bar{\tau}_1)h_1(\bar{\tau}_2)$,

iv) para cualesquiera realizaciones $\bar{\tau}_1$ y $\bar{b}'$ de s y q_1 respectivamente e independientes sobre A, $h_2(\widetilde{\mu}(\bar{\tau}_1, \bar{b}')) = h_1(\bar{\tau}_1)h_2(\bar{b}')$.

Como $\widetilde{D}$ es una extensión elemental de D tiene eliminación de imaginarios y por tanto tanto X como H son definibles. Como $\widetilde{D}$ es una extensión elemental de D tenemos que existe un grupo definiblemente conexo H y subconjunto X con multiplicidad 1, ambos definibles en D con parámetros en A, una acción transitiva $*$ de H sobre X y unas funciones parciales h_1 y h_2 invertibles y definibles en D sobre A tales que

i) para cualquier upla $\bar{\tau}_1$ que realice s, $h_1(\bar{\tau}_1)$ está definido y realiza el tipo genérico de H,

ii) para cualquier upla $\bar{b}'$ que realice q_1, $h_2(\bar{b}')$ está definido y realiza el tipo genérico de X,

iii) para cualesquiera realizaciones $\bar{\tau}_1$ y $\bar{\tau}_2$ de s independientes sobre A, $h_1(f(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)) = h_1(\bar{\tau}_1)h_1(\bar{\tau}_2)$,

iv) para cualesquiera realizaciones $\bar{\tau}_1$ y $\bar{b}'$ de s y q_1 respectivamente e independientes sobre A, $h_2(\widetilde{\mu}(\bar{\tau}_1, \bar{b}')) = h_1(\bar{\tau}_1) * h_2(\bar{b}')$.

Demostración de la proposición 3.25. Sean $\bar{\sigma}, \bar{b}_1, \bar{c}_1 \in F$ las uplas con las que estuvimos trabajando en la proposición 3.29. Por la hipótesis B) del comienzo de la sección, existe una upla $\bar{\sigma}_1 \in F$ que realiza r y es independiente de $\bar{\sigma}, \bar{b}_1, \bar{c}_1$ sobre A. Puesto que las uplas $\bar{\sigma}_1$ y $\bar{c}_1$ realizan el tipo p_ν, $\nu(\bar{\sigma}_1, \bar{c}_1)$ está bien definido, realiza q_1 y es independiente tanto de $\bar{\sigma}_1$ como de $\bar{c}_1$ sobre A. Es más, $\nu(\bar{\sigma}_1, \bar{c}_1) \in dcl^D(A, \bar{\sigma}_1, \bar{c}_1) \subset F$. Denotemos con $\bar{c}_2 = \nu(\bar{\sigma}_1, \bar{c}_1)$

y $\bar{c}'_2 = h_2(\nu(\bar{\sigma}_1, \bar{c}_1))$. Obsérvese que también $\bar{c}'_2 \in F$ y que por el lema 1.48 $dim(\bar{c}'_2|A) = dim(\bar{c}'_2|A, \bar{\sigma}_1) = dim(\bar{c}'_2|A, \bar{c}_1) = n$. De la misma manera, las uplas $\bar{\sigma}_1$ y $\bar{\sigma}$ realizan el tipo p_ρ , $\rho(\bar{\sigma}, \bar{\sigma}_1)$ está bien definido, realiza s, es independiente tanto de $\bar{\sigma}_1$ como de $\bar{\sigma}$ sobre A y pertenece a F. Denotemos con $\bar{\tau} = \rho(\bar{\sigma}, \bar{\sigma}_1)$ y $\bar{\tau}' = h_1(\rho(\bar{\sigma}, \bar{\sigma}_1))$. Obsérvese que $\bar{\tau}'$ pertenece a $H(F)$, realiza el tipo genérico de H y por la proposición 1.48 , $dim(\bar{\tau}'|A, \bar{\sigma}_1) = dim(\bar{\tau}|A, \bar{\sigma}_1) = n$. Sea $A_3 = acl^F(A, \bar{\sigma}_1)$. Entonces

1) Puesto que $\bar{\sigma}_1$ es independiente de $\bar{\sigma}, \bar{b}$ tenemos que,

$$\begin{aligned} dim(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}|A_3) &= dim(\bar{c}|A_3, \bar{a}, \bar{b}) + dim(\bar{a}, \bar{b}|A_3) = \\ &= dim(\bar{a}|A_3, \bar{b}) + dim(\bar{b}|A_3) = \\ &= dim(\bar{a}, \bar{\sigma}|A_3, \bar{b}) - dim(\bar{a}|A_3) + n = \\ &= n - 0 + n = 2n. \end{aligned}$$

2) Probemos que $acl^D(A_3, \bar{\tau}') = acl^D(A_3, \bar{a})$. Dado que $dim(\bar{\tau}'|A_3) = dim(\bar{a}|A_3) = n$, basta mostrar que $\bar{\tau}' \in acl^D(A_3, \bar{a})$, lo cual se deduce directamente de que $\bar{\tau}' = h_1(\rho(\bar{\sigma}, \bar{\sigma}_1))$ y $\bar{\sigma} \in acl^D(A_3, \bar{a})$.

3) Probemos que $acl^D(A_3, \bar{c}'_2) = acl^D(A_3, \bar{c})$. Dado que $dim(\bar{c}'_2|A_3) = dim(\bar{c}|A_3) = n$, basta mostrar que $\bar{c}'_2 \in acl^D(A_3, \bar{c})$, lo cual se deduce directamente de que $\bar{c}'_2 = h_2(\nu(\bar{c}_1, \bar{\sigma}_1))$.

Por la hipótesis B) del comienzo de la sección, existe una upla $\bar{\tau}_1 \in F$ que realiza s y es independiente de $\bar{\tau}, \bar{b}_1, \bar{c}'_2$ sobre A_3. Sean $\bar{\tau}'_1 = h_1(\bar{\tau}_1)$, $\bar{\tau}'_2 = \bar{\tau}'\bar{\tau}'_1$ y $\bar{b}'_2 = \bar{\tau}'^{-1}_1 * h_2(\bar{b}_1)$. Obsérvese que $\bar{\tau}'_2 * \bar{b}'_2 = h_1(\bar{\tau}) * h_2(\bar{b}_1) = h_2(\widetilde{\mu}(\bar{\tau}, \bar{b}_1)) = h_2(\nu(\bar{\sigma}_1, \mu(\bar{\sigma}, \bar{b}_1))) = h_2(\nu(\bar{\sigma}_1, \bar{c}_1)) = \bar{c}'_2$. Además, como $\widetilde{\mu}(h_2^{-1}(\tau'_2), \bar{b}_2) = \bar{c}_2$ tenemos que $h_2^{-1}(\tau'_2) \in dcl^D(A, \bar{b}_2, \bar{c}_2)$. En particular, $\tau'_2 \in dcl^D(A, \bar{b}_2, \bar{c}_2)$. Por la propia definición de $\bar{\tau}'_2$ y $\bar{b}'_2$ tenemos que por una lado

$$\begin{aligned} &dim(\bar{\tau}'_1, \bar{\tau}'_2, \bar{b}'_2|A_3, \bar{\tau}', \bar{c}'_2, \bar{b}_1) = \\ &\quad = dim(\bar{b}'_2|A_3, \bar{\tau}', \bar{c}'_2, \bar{b}_1, \bar{\tau}'_1, \bar{\tau}'_2) + dim(\bar{\tau}'_1, \bar{\tau}'_2|A_3, \bar{\tau}', \bar{c}'_2, \bar{b}_1) = \\ &\quad = 0 + dim(\bar{\tau}'_2|A_3, \bar{\tau}', \bar{c}'_2, \bar{b}_1, \bar{\tau}'_1) + dim(\bar{\tau}'_1|A_3, \bar{\tau}', \bar{c}'_2, \bar{b}_1) = \\ &\quad = 0 + n = n, \end{aligned}$$

Por otro lado, como $\bar{\tau}'_1 = \bar{\tau}'^{-1}\bar{\tau}'_2$ y puesto que $\bar{\tau}'_2 \in dcl^D(A, \bar{b}'_2, \bar{c}'_2)$,

$$\begin{aligned} &dim(\bar{\tau}'_1, \bar{\tau}'_2, \bar{b}'_2|A_3, \bar{\tau}', \bar{c}'_2, \bar{b}_1) = \\ &\quad = dim(\bar{\tau}'_2, \bar{\tau}'_1|A_3, \bar{\tau}', \bar{c}'_2, \bar{b}_1, \bar{b}'_2) + dim(\bar{b}'_2|A_3, \bar{\tau}', \bar{c}'_2, \bar{b}_1) = \\ &\quad = 0 + dim(\bar{b}'_2|A_3, \bar{\tau}', \bar{c}'_2, \bar{b}_1). \end{aligned}$$

Por tanto $dim(\bar{b}_2'|\bar{\tau}', \bar{c}_2', \bar{b}_1) = n$, es decir, $\bar{b}_2'$ es independiente de $\bar{\tau}', \bar{c}_2', \bar{b}_1$ sobre A_3. Sea $A_4 = acl^F(A_1, \bar{b}_2)$. Entonces,

i) Puesto que $\bar{b}_2'$ es independiente de $\bar{\tau}'$, tenemos que

$$\begin{aligned} dim(\bar{a}|A_3, \bar{b}_2') &= dim(\bar{a}, \bar{\tau}'|A_3, \bar{b}_2') - dim(\bar{\tau}'|A_3, \bar{b}_2', \bar{a}) = \\ &= dim(\bar{a}|A_3, \bar{b}_2', \bar{\tau}') + dim(\bar{\tau}'|A_3, \bar{b}_2') - 0 = \\ &= 0 + n = n. \end{aligned}$$

ii) Puesto que $\bar{b}_2'$ es independiente de $\bar{\tau}', \bar{b}_1$ y tenemos que

$$\begin{aligned} dim(\bar{a}, \bar{b}|A_3, \bar{b}_2') &= dim(\bar{a}, \bar{b}, \bar{\tau}', \bar{b}_1|A_3, \bar{b}_2') - dim(\bar{\tau}', \bar{b}_1|A_3, \bar{b}_2', \bar{a}, \bar{b}) = \\ &= dim(\bar{a}, \bar{b}|A_3, \bar{b}_2', \bar{\tau}', \bar{b}_1) + dim(\bar{\tau}', \bar{b}_1|A_3, \bar{b}_2') - 0 = \\ &= 0 + 2n = 2n \end{aligned}$$

iii) Por *ii)* tenemos que

$$\begin{aligned} dim(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}|A_4) &= dim(\bar{c}|A_4, \bar{a}, \bar{b}) + dim(\bar{a}, \bar{b}|A_4) = \\ &= 0 + 2n. \end{aligned}$$

iv) Como $\bar{b}_2'$ es independiente de $\bar{c}_2'$ sobre A_3 y $\bar{c}_2' = \bar{\tau}_2' * \bar{b}_2'$ entonces

$$\begin{aligned} dim(\bar{\tau}_2'\bar{b}_2'|A_3) &= dim(\bar{\tau}_2', \bar{b}_2', \bar{c}_2'|A_3) - dim(\bar{c}_2'|A_3, \bar{b}_2', \bar{\tau}_2') = \\ &= dim(\bar{\tau}_2'|A_3, \bar{b}_2', \bar{c}_2') + dim(\bar{c}_2'\bar{b}_2'|A_3) - 0 = \\ &= 0 + 2n = 2n, \end{aligned}$$

de lo que deducimos que $dim(\bar{\tau}_2'|A_3, \bar{b}_2') = n$.

v) Dado que $acl^D(\bar{a}, A_4) \subset acl^D(\bar{\tau}', A_4)$ y $dim(\bar{a}|_4) = dim(\bar{\tau}'|A_4) = n$, tenemos que $acl^D(\bar{a}, A_4) = acl^D(\bar{\tau}', A_4)$.

vi) Como $acl^D(\bar{b}, A_4) \subset acl^D(\bar{b}, A_4) \subset acl^D(\bar{\tau}_1', A_4)$ puesto que $\bar{b}_1 = \bar{\tau}_1' * \bar{b}_2'$ y $dim(\bar{\tau}_1'|A_4) = dim(\bar{b}_1|A_4) = n$, tenemos que $acl^D(\bar{b}, A_4) = acl^D(\bar{\tau}_1', A_4)$.

vii) Como $acl^D(\bar{c}, A_4) \subset acl^D(\bar{c}_2', A_4) \subset acl^D(\bar{\tau}_2', A_4)$ puesto que $\bar{c}_2' = \bar{\tau}_2' * \bar{b}_2'$ y $dim(\bar{\tau}_2'|A_4) = dim(\bar{c}_2'|A_4) = n$, tenemos que $acl^D(\bar{c}, A_4) = acl^D(\bar{\tau}_2', A_4)$.

Para terminar la demostración, basta observar que es posible encontrar en subconjunto finito $A \subset A_4$ con el que podemos definir H y tal que las igualdades anteriores se satisfacen, es decir, tales que

- $acl^D(\bar{a}, A) = acl^D(\bar{\tau}', A)$, $acl^D(\bar{b}, A) = acl^D(\bar{\tau}'_1, A)$, $acl^D(\bar{c}, A) = acl^D(\bar{\tau}'_2, A)$,

- $\bar{\tau}'$ y $\bar{\tau}'_1$ son puntos A-genéricos de H y $\bar{\tau}'$ es independiente de $\bar{b}$ sobre A,

Como por definición $\bar{\tau}'_2 = \bar{\tau}'\bar{\tau}'_1$ y $\bar{\tau}', \bar{\tau}'_1, \bar{\tau}'_2 \in H(F)$, renombrando $\bar{\tau}'$ por $\bar{a}_1$, $\bar{\tau}'_1$ por $\bar{b}_1$ y $\bar{\tau}'_2$ por $\bar{c}_1$ terminamos la demostración. $\square$

Demostración de la proposición 3.26. Sea F un cuerpo geométrico satisfaciendo la hipótesis B) del comienzo de la sección y sea G un grupo definible sobre un subconjunto finito A_0. Por la proposición 3.25 existe un subconjunto finito A de F sobre el cual G está definido, un grupo definiblemente conexo H definible sin cuantificadores sobre A en $\overline{F}$, elementos $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in G$ y elementos $\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}' \in H(F)$ tales que se satisfacen las condiciones i),ii),iii) y iv) de dicha proposición. Por la proposición 3.23 existe un grupo algebraico conexo H_1 sobre $\overline{F}$ y un isomorfismo $\widetilde{f}$ definible entre H y H_1. En el caso de que $char(F) = 0$, dicho teorema nos asegura que tanto H_1 como $\widetilde{f}$ son definibles sobre $F_0(A)$ puesto que H es definible sobre A. En particular, como $dcl^{\overline{F}}(F) = F$, tenemos que para todo $\bar{x} \in F$, $\widetilde{f}(\bar{x}) \in dcl^{\overline{F}}(A, \bar{x}) \subset F$, es decir, $\widetilde{f}(H(F)) = H_1(F)$, y por tanto basta que sustituyamos H por H_1 y $\bar{a}'$, $\bar{b}'$ y $\bar{c}'$ por $\widetilde{f}(\bar{a}')$, $\widetilde{f}(\bar{b}')$ y $\widetilde{f}(\bar{c}')$ respectivamente. Obsérvese que puesto que $\widetilde{f}$ es isomorfismo tenemos que $\widetilde{f}(\bar{c}') = \widetilde{f}(\bar{a}'\bar{b}') = \widetilde{f}(\bar{a}')\widetilde{f}(\bar{b}')$. En el caso de característica positiva, repasando la demostración del teorema 3.23 bajo nuestras hipótesis, es decir, en el caso de que $\overline{F}$ sea la clausura algebraica de un cuerpo geométrico F, se puede comprobar que tanto H_1 como f son definibles sobre F. Sea A_1 un subconjunto finito de F conteniendo a A y tal que f y H_1 están definidos sobre A_1. Por la hipótesis B) del comienzo de la sección podemos tomar $\bar{a}_0$ y $\bar{b}_0$ independientes sobre A_1. La demostración de la proposición 3.25 sería exactamente la misma para $\bar{a}_0$ y $\bar{b}_0$ que para $\bar{a}$ y $\bar{b}$, es decir, que obtendríamos los mismos tipos q_1, q_2, s y r y las mismas funciones parciales μ, ν, $\widetilde{\nu}$, $\widetilde{\mu}$ y f y por tanto obtendríamos el mismo grupo H y la misma acción $*$ definidos sobre A. En los últimos pasos de la demostración de la proposición 3.25, es decir, en lo que probamos justo antes de esta demostración, basta añadir la condición de que todos las uplas sean independientes sobre A_1 y no sólo sobre A. Finalmente, como $\widetilde{f}(H(F)) = H_1(F)$, debemos sustituir A por A_1, H por H_1, $\bar{a}'$, $\bar{b}'$ y $\bar{c}'$ por $\widetilde{f}(\bar{a}')$, $\widetilde{f}(\bar{b}')$ y $\widetilde{f}(\bar{c}')$ respectivamente. $\square$

4. Variedades de Nash y las demostraciones del teorema A y del teorema B

4.1. Variedades de Nash

En esta sección denotaremos con F a los cuerpos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}_p$. Obsérvese que dichos cuerpos están dotados de las topologías inducidas por la norma Euclídea y por la norma p-ádica respectivamente. La dimensión para estos cuerpos tiene una interpretación topológica.

Proposición 4.1. *Sea X un subconjunto definible de F^n. Entonces*

$$dim(X) = max\{k \leq n : \text{alguna proyección de } X \text{ sobre } F^k \text{ contiene un abierto}\}.$$

Demostración. El resultado es cierto para estructuras O-minimales en general y la demostración puede encontrarse en el lema 1.4 de [P1]. Para el cuerpo $\mathbb{Q}_p$ véase el corolario 3.1 de [D-Sc]. □

Observación 4.2. En particular, dado un conjunto $X \subset F^n$ definible sobre A tal que $dim(X) = n$ tenemos que $int(X)$, el cual también es definible sobre A, es distinto del vacío. Obsérvese también que $dim(X \setminus int(X)) < n$. Efectivamente, si $dim(X \setminus int(X)) = n$ entonces por la proposición 4.1 tenemos que $int(X \setminus int(X)) \neq \emptyset$, lo cual es absurdo.

Recuérdese que decimos que una función $f : U \to \mathbb{R}$, donde U es un abierto de $\mathbb{R}^n$, es analítica si para todo punto $\bar{x} \in U$ existe un entorno $U_{\bar{x}} \subset U$ tal que f en $U_{\bar{x}}$ se puede escribir como una serie de potencias. De igual manera se define un función analítica en el caso del cuerpo $\mathbb{Q}_p$.

Definición 4.3. *Decimos que una función $f : X \to F$, donde X es un abierto definible de F^n, es una* ***función de Nash*** *si es una función definible y analítica. Una aplicación $f : X \to F^n$, donde X es un abierto definible de F^n, es una* ***aplicación de Nash*** *si cada función coordenada es una función de Nash.*

Proposición 4.4. *i) Sea X un abierto definible de F^n y sea $f : X \to F$ una función definible. Entonces existe un abierto Y de X denso en X tal que $f|_Y$ es analítica, y por tanto, una función de Nash.*

ii) Sea k un subcuerpo de F y sea $a \in acl(k)$. Entonces $a \in dcl(k)$.

Demostración. La demostración para $\mathbb{R}$ se puede encontrar en [B*]. Para $\mathbb{Q}_p$ véase el lema 1.3 de [D-Sc]. $\square$

Definición 4.5. *Un conjunto X es una* ***variedad de Nash*** *de dimensión n si existen subconjuntos $V_1, \ldots, V_k$ de X y aplicaciones f_i tales que*

i) X es un espacio topológico Hausdorff,

ii) cada V_i es un abierto de X y $X = \cup_{i=1}^k V_i$,

iii) f_i es un homeomorfismo de V_i con un abierto definible U_i de F^n,

iv) para cada $1 \leq i, j \leq k$ el homeomorfismo $f_i \circ f_j^{-1}|_{f_j(V_i \cap V_j)}$ entre $f_j(V_i \cap V_j)$ y $f_i(V_i \cap V_j)$ es una aplicación de Nash.

Denotaremos con $(X, V_1, \ldots, V_k, f_1, \ldots, f_k)$ a las variedades de Nash o simplemente con X, si las cartas y los cambios de coordenadas se sobreentienden. Si $F = \mathbb{R}$ entonces diremos que X es una variedad de Nash real. Si $F = \mathbb{Q}_p$ entonces diremos que X es una variedad de Nash p-ádica.

Definición 4.6. *Sea $(X, V_1, \ldots, V_k, f_1, \ldots, f_k)$ una variedad de Nash sobre F. Un subconjunto Y de X es definible si para todo $i = 1, \ldots, k$ tenemos que $f_i(Y \cap V_i)$ es definible. Un subconjunto definible Y de X es definiblemente conexo si no existen dos abiertos definibles disjuntos U_1 y U_2 de X tales $Y \subset U_1 \cup U_2$. Dado $x \in X$ definimos la componente definiblemente conexa de x como la unión de todos los subconjuntos definiblemente conexos que contienen a x.*

Observación 4.7. Sea $(X, V_1, \ldots, V_k, f_1, \ldots, f_k)$ una variedad de Nash real. Dado que las componentes definiblemente conexas de los conjuntos definibles de $\mathbb{R}$ forman una partición finita(véase proposición 2.18 de [D]) y puesto X es la unión de un número finito de abiertos homeomorfos a abiertos definibles de $\mathbb{R}$, tenemos que las componentes definiblementes conexas de X son definibles y también forman una partición finita. Es más, dado que las componentes definiblemente conexas de un conjunto definible de $\mathbb{R}$ son las componentes conexas(véase ejercicio 2.19.7 de [D]), tenemos que las componentes definiblementes conexas de X son sus componentes conexas.

Definición 4.8. *Una* ***aplicación de Nash*** *entre dos variedades de Nash $(X, V_1, \ldots, V_k, f_1, \ldots, f_k)$ y $(Y, W_1, \ldots, W_m, g_1, \ldots, g_m)$ reales o p-ádicas es una aplicación $f : X \to Y$ continua tal que para cualesquiera $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq j \leq m$, el subconjunto $U_{ij} = f_i(f^{-1}(W_j) \cap V_i)$ es un subconjunto definible de V_i y la aplicación $g_j \circ f \circ f_i^{-1}|_{U_{ij}}$ es una función de Nash. Si la aplicación es además inyectiva y la diferencial de la aplicación $g_j \circ f \circ f_i^{-1}|_{U_{ij}}$*

para cualesquiera $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq j \leq m$ es inyectiva entonces diremos que f es una ***inmersión inyectiva de Nash****. A una aplicación de Nash tal que posee una aplicación de Nash inversa la llamaremos* ***isomorfismo de Nash****.*

Ejemplo 4.9. 1) Los conjuntos $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{Q}_p^n$ son variedades de Nash reales y p-ádicas respectivamente para cualquier $n \geq 1$.

2) Sea el subconjunto $X = [0,1)$ de $\mathbb{R}$ dotado con la topología procedente de identificar el 0 y el 1. Sean $V_1 = (0,1)$ y $V_2 = [0,1/2) \cup (1/2,1)$. Sean las funciones $f_1 = id : V_1 \to (0,1)$ y $f_2 : V_2 \to (1/2,3/2)$, con $f_2(x) = x$ si $x \in (1/2,1)$ y $f_2(x) = x+1$ si $x \in [0,1/2)$. Resulta trivial comprobar que X es una variedad de Nash real ya que las funciones f_1 y f_2 son homeomorfismos y la función $f_1 \circ f_2^{-1} : (1/2,1) \cup (1/2,3/2) \to (0,1/2) \cup (1/2,1)$ es una función de Nash. En adelante, cuando escribamos $[0,1)$ estaremos haciendo referencia al intervalo $[0,1)$ con la estructura de variedad de Nash antes descrita.

3) Consideremos ahora el conjunto $X = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$ dotado con la topología inducida de $\mathbb{R}^2$. Sean $V_1 = X \setminus \{(1,0)\}$ y $V_2 = X \setminus \{(-1,0)\}$ y las funciones $f_1^{-1} : (0,2\pi) \ni \theta \to (cos(\theta), sen(\theta)) \in V_1$ y $f_2^{-1} : (-\pi,\pi) \ni \theta \to (cos(\theta), sen(\theta)) \in V_2$. De nuevo es inmediato comprobar que X es una variedad de Nash real ya que las funciones f_1 y f_2 son homeomorfismos y la función $f_1 \circ f_2^{-1} : (-\pi,0) \cup (0,\pi) \ni \theta \to \theta+\pi \in (0,\pi) \cup (\pi,2\pi)$ es una función de Nash. Observamos que para el conjunto $SO_2(\mathbb{R})$, es decir, el grupo multiplicativo de números complejos de norma 1, podemos hacer un estudio parecido y definir un isomorfismo de Nash entre ellas.

4) Sin embargo, las variedades $[0,1)$ y $SO_2(\mathbb{R})$, a pesar de que son homeomorfas, no son isomorfas Nash. Esto último lo probaremos más adelante, aunque de forma intuitiva podemos decir que la aplicación natural $f(\theta) = (cos(2\pi\theta), sen(2\pi\theta))$, la cual es un homeomorfismo entre ellas y es analítica, no es un isomorfismo de Nash porque no es definible.

Observación 4.10. i) Al igual que se hizo en 1.81, podemos interpretar las variedades de Nash en F^{eq}. Es más, en el caso de una variedad de Nash real, por la eliminación de imaginarios de $\mathbb{R}$, existe una biyección entre dicha interpretación y un subconjunto definible de $\mathbb{R}^m$ para algún m.

ii) Dadas dos variedades de Nash X e Y, el conjunto $X \times Y$ también es una variedad de Nash de forma natural.

Definición 4.11. *Decimos que una variedad de Nash G es un* ***grupo de Nash*** *si está dotada de una operación de grupo que es una aplicación de Nash entre $G \times G$ y G de forma que la operación inversión sea también una aplicación de Nash de G en sí misma.*

Proposición 4.12. *Sea G un grupo definible en F. Entonces G es definiblemente isomorfo a un grupo de Nash. Por tanto G puede ser dotado de una estructura de grupo de Nash. Esta estructura de Nash es única salvo isomorfismos de Nash y la componente definiblemente conexa de la unidad de G respecto de su topología de Nash es el menor subgrupo definible de índice finito.*

Demostración. El resultado para $\mathbb{R}$ puede encontrarse en la proposición 2.5 [P1]. Para el cuerpo $\mathbb{Q}_p$ véase el lema 3.8 de [P]. $\square$

Definición 4.13. *Decimos que una aplicación f entre dos variedades de Nash $(X, V_1, \dots, V_k, f_1, \dots, f_k)$ y $(Y, W_1, \dots, W_m, g_1, \dots, g_m)$ reales o p-ádicas es* ***una aplicación de Nash local*** *si es continua y para todo $a \in V_i$, $1 \le i \le k$, existe un entorno abierto $V_a \subset V_i$ de a tal que para algún $1 \le i \le m$ tenemos que $f(V_a) \subset W_j$, $f_i(V_a)$ es una abierto definible y $g_j \circ f \circ f_i^{-1}|_{f_i(V_a)}$ es una aplicación de Nash.*

Observación 4.14. Toda aplicación de Nash es localmente una aplicación de Nash de forma evidente. Sin embargo, el recíproco no es cierto. Sea $\pi : \mathbb{R} \ni x \to x - [x] \in [0,1)$ la aplicación recubridora natural. La aplicación π es una aplicación localmente de Nash. Para comprobarlo usaremos las cartas que definimos en el ejemplo 4.9.π es una aplicación continua de forma trivial. Dado $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $\pi((x-\varepsilon, x+\varepsilon)) = ([x] - x - \varepsilon, [x] - x + \varepsilon) \subset V_1$. Denotando con $V = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, es evidente que V es definible y $f_1 \circ \pi \circ id^{-1}|_V$ es Nash. Para $x \in \mathbb{Z}$ es similar. Sin embargo la aplicación π no es una aplicación de Nash. Si lo fuera, entonces el abierto $id(\pi^{-1}(V_1) \cap \mathbb{R}) = \cup_{n\in\mathbb{Z}}(n, n+1)$ sería definible, lo cual no puede ser cierto dada la eliminación de cuantificadores en $\mathcal{L}_{or}$.

Definición 4.15. *Una variedad de Nash X es una* ***variedad de Nash afín*** *si existe una inmersión inyectiva de Nash de X en algún F^n. Si $F = \mathbb{R}$ entonces diremos que X es una variedad de Nash afín real. Si $F = \mathbb{Q}_p$ entonces diremos que X es una variedad de Nash afín p-ádica.*

Ejemplo 4.16. 1) Las variedades $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{Q}_p$ son variedades de Nash afines real y p-ádica respectivamente.

2) La variedad de Nash $SO_2(\mathbb{R})$ es una variedad de Nash afín real.

La siguiente proposición es útil para comprobar si una aplicación no es afín.

Proposición 4.17. *Sea X una variedad de Nash y sea X' una variedad de Nash afín. Entonces cualquier aplicación localmente de Nash de X en X' es una aplicación de Nash.*

Demostración. Véase [S]. □

Observación 4.18. Por la proposición 4.17 y siguiendo la notación de la observación 4.14, tenemos que si $[0,1)$ fuera afín entonces π sería una aplicación de Nash, lo cual ya hemos visto que no es posible. Por tanto $[0,1)$ no es una variedad de Nash afín.

Definición 4.19. *Un conjunto X es* ***una variedad de Nash local*** *de dimensión n si existen subconjuntos V_i de X, $i < \omega$, y aplicaciones f_i tales que*

i) X es un espacio topológico Hausdorff,

ii) cada V_i es un abierto de X y $X = \cup_{i<\omega} V_i$,

iii) f_i es un homeomorfismo de V_i con un abierto definible U_i de F^n, y

iv) para cada $i, j < \omega$ el homeomorfismo $f_i \circ f_j^{-1}|_{f_j(V_i \cap V_j)}$ entre $f_j(V_i \cap V_j)$ y $f_i(V_i \cap V_j)$ es una aplicación de Nash.

Definición 4.20. *Un subconjunto Y de una variedad de Nash local (X, V_i, f_i) es localmente definible si para todo $i < \omega$ tenemos que $f_i(Y \cap V_i)$ es definible. Un conjunto Y de X localmente definible es definiblemente conexo si no existen dos abiertos localmente definibles disjuntos U_1 y U_2 de X tales $Y \subset U_1 \cup U_2$. Dado $x \in X$ definimos la componente definiblemente conexa de x como la unión de todos los subconjuntos definiblemente conexos que contienen a x.*

Observación 4.21. Sea (X, V_i, f_i) una variedad de Nash local y sea C una componente definiblemente conexa. Veamos que C es localmente definible. Efectivamente, para todo $i < \omega$ tenemos que $f_i(C \cap V_i)$ es una componente definiblemente conexa de $f_i(V_i)$ y por tanto es definible. De hecho, por la proposición 2.18 de [D] tenemos que $f_i(C \cap V_i)$ es un abierto y cerrado de $f_i(V_i)$ y por tanto C es un abierto y cerrado de X. Observamos también que por el ejercicio 2.19.7 de [D], $f_i(C \cap V_i)$ es una componente conexa de $f_i(V_i)$ y por tanto C es una componente conexa de X.

Definición 4.22. *Decimos que una aplicación f entre dos variedades de Nash locales $(X, \{V_i\})$ y $(Y, \{W_i\})$ reales o p-ádicas es* ***una aplicación de Nash local*** *si es continua y para todo $a \in V_i$, $i \leq \omega$, existe un entorno abierto $V_a \subset V_i$ de a tal que para algún $j \leq \omega$ tenemos que $f(V_a) \subset W_j$, $f_i(V_a)$ es una abierto definible en U_i y $g_j \circ f \circ f_i^{-1}|_{f_i(V_a)}$ es una aplicación de Nash.*

Observación 4.23. En general, como ya veremos, los espacios recubridores universales de las variedades de Nash tendrán estructura de variedad de Nash local. De hecho, el espacio recubridor universal del grupo $SO_2(\mathbb{R})$ es $\mathbb{R}$ considerado con una cierta estructura de variedad de Nash local. De hecho, por la proposición 4.17 tenemos que $\mathbb{R}$ como variedad de Nash no puede ser el espacio recubridor de $SO_2(\mathbb{R})$.

Definición 4.24. *Decimos que una variedad de Nash local G es un **grupo de Nash local** si está dotada de una operación de grupo que es una aplicación de Nash local entre $G \times G$ y G de forma que la operación inversión sea también una aplicación de Nash local de G en si misma.*

Proposición 4.25. *Sea G un grupo de Nash local conexo. Sea (G', π) su espacio recubridor universal. Entonces G' puede ser dotado de una estructura de grupo de Nash local de forma que π sea una aplicación de Nash local y homomorfismo.*

Demostración. Véase el teorema B.4. Siguiendo el esquema de la demostración, lo único que le falta a M' para que sea variedad de Nash local es que los cambios de carta sean Nash. Ello se debe a que los cambios de carta de M' son básicamente los cambios de carta de M, los cuales son Nash. $\square$

Proposición 4.26. *Sea G un grupo topológico conexo y sea H un subgrupo discreto y normal de G. Entonces H es central, es decir, $H < Z(G)$.*

Demostración. Sea $h \in H$ y sea la función continua $f : G \ni g \to g^{-1}hg \in G$. Observamos que $f(e) = h$. Puesto que H es un subgrupo normal, la imagen de f está incluida en H. Como H es discreto, $f^{-1}(h)$ es abierto y cerrado y por tanto, dado que G es conexo, tenemos que $f^{-1}(h) = G$. Es decir, $h \in Z(G)$. $\square$

Proposición 4.27. *Sea G un grupo de Nash local conexo y Z un subgrupo normal y discreto de G. Entonces se puede dotar a G/Z de una estructura de grupo de Nash local de forma que la aplicación natural $\pi : G \to G/Z$ es una aplicación localmente de Nash y homomorfismo.*

Demostración. Denotemos con (G, V_i, f_i), $f_i : V_i \xrightarrow{\approx} U_i$, $i < \omega$, la estructura de grupo de Nash local de G.

i) Veamos que podemos suponer que los abiertos V_i son tales que para todo $i < \omega$, $V_i^{-1}V_i \cap Z = \{e\}$. Fijemos un V_i. Puesto que Z es discreto existe un entorno abierto U_e de e tal que $U_e \cap Z = \{e\}$. Sea el abierto $H^{-1}(U_e)$, donde H es la aplicación continua $H(x, y) = x^{-1}y$. Sea $x \in V_i$. Como $(V_i \times V_i) \cap H^{-1}(U_e)$ es abierto, existe un entorno abierto W_x de

x tal que $W_x \times W_x \subset (V_i \times V_i) \cap H^{-1}(U_e)$. Así pues para todo $x \in V_i$ existe un entorno abierto W_x tal que $(W_x^{-1}W_x) \cap Z = \{e\}$. Puesto que V_i es homeomorfo a una abierto de $\mathbb{R}^n$, existe una familia numerable de abiertos W_x, $x \in V_i$, como los anteriores que cubren V_i.

ii) Definamos una topología en G/Z. Un subconjunto $\widetilde{V} \subset G/Z$ es abierto si y solo si $\pi^{-1}(\widetilde{V})$ es abierto en G. Dada esta topología, veamos que si $V \subset G$ es un abierto de G entonces $\pi(V)$ es un abierto de G/Z. Efectivamente, tenemos que

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \{g \in G : g \in \pi(V)\} = \bigcup_{g \in V} gZ = VZ = \bigcup_{g \in Z} Vg.$$

Puesto que Vg es abierto para todo $g \in Z$, tenemos que $\pi^{-1}(\pi(V))$ es la union arbitraria de abiertos y por tanto es abierto.

iv) Comprobemos que la topología que hemos definido es Hausdorff. Sean $\pi(g_1), \pi(g_2) \in G/Z$, $\pi(g_1) \neq \pi(g_2)$. Consideremos de nuevo la función continua $H(x,y) = x^{-1}y$. Observamos que puesto que $\pi(g_1) \neq \pi(g_2)$ tenemos que $H(g_1, g_2) = g_1^{-1}g_2 \notin Z$. Como Z es cerrado en G, existe un entorno V de $g_1^{-1}g_2$ tal que $V \cap Z = \emptyset$. Puesto que $H^{-1}(V)$ es abierto existen unos entornos abiertos V_{g_1} y V_{g_2} de g_1 y g_2 respectivamente tales que $V_{g_1} \times V_{g_2} \subset H^{-1}(V)$. Denotemos por $\widetilde{V}_1 = \pi(V_{g_1})$ y $\widetilde{V}_2 = \pi(V_{g_2})$. Observamos que $\pi(g_1) \in \widetilde{V}_1$, $\pi(g_2) \in \widetilde{V}_2$ y que por el punto $ii)$ tenemos que tanto $\widetilde{V}_1$ como $\widetilde{V}_2$ son abiertos. Comprobemos que $\widetilde{V}_1 \cap \widetilde{V}_2 = \emptyset$. Supongamos que existe $x \in \widetilde{V}_1 \cap \widetilde{V}_2$. Entonces existen $y_1 \in V_{g_1}$ y $y_2 \in V_{g_2}$ tales que $\pi(y_1) = \pi(y_2) = x$. Por tanto $y_1^{-1}y_2 \in Z \cap V = \emptyset$, lo cual es absurdo.

Puesto que ya hemos definido una topología Hausdorff tan solo nos falta cubrir G/Z con unas cartas adecuadas. Sean $\widetilde{V}_i = \pi(V_i)$ y $\widetilde{f}_i : \widetilde{V}_i \ni \pi(g) \longrightarrow f_i(g) \in U_i$, $i < \omega$. Las funciones $\widetilde{f}_i$ están bien definidas por lo dicho en el punto $i)$.

v) Veamos que las funciones $\widetilde{f}_i$ son homeomorfismos. La inyectividad y sobreyectividad se deduce de la inyectividad y sobreyectividad de los homeomorfismos f_i. $\widetilde{f}_i$ es continua ya que dado un abierto $U \subset U_i$ tenemos que $\widetilde{f}_i^{-1}(U) = \pi(f_i^{-1})(U))$ es abierto por lo dicho en el punto $ii)$ y ya que $f_i^{-1})(U)$ es abierto. $\widetilde{f}_i^{-1}$ es continua ya que dado un abierto $\widetilde{V} \subset \widetilde{V}_i$ tenemos que $\pi^{-1}(\widetilde{V}) \cap V_i$ es abierto y por tanto $\widetilde{f}_i(\widetilde{V}) = f_i(\pi^{-1}(\widetilde{V}) \cap V_i)$ también lo es.

vi) Comprobemos que las aplicaciones $\widetilde{f}_i \circ \widetilde{f}_j^{-1}|_{\widetilde{f}_j(\widetilde{V}_i \cap \widetilde{V}_j)}$, $i, j < \omega$, son Nash. Puesto que $f_i \circ f_j|_{f_j(V_i \cap V_j)}$ son aplicaciones Nash, deducimos que

$$\widetilde{f}_i \circ \widetilde{f}_j^{-1}(f_j(g)) = (f_i \circ f_j)^{-1}(f_j(g)),$$

donde $g \in V_i \cap V_j$, también lo son.

Probar que la operación de grupo de G/Z y el recubrimiento π son aplicaciones de Nash locales es inmediato. $\square$

Proposición 4.28. *Sea G un grupo de Nash y sea Z un subgrupo infinito, normal y discreto de G. Entonces G/Z no es un grupo de Nash afín.*

Demostración. Sea la aplicación natural $\pi : G \to G/Z$, que por la proposición 4.27 es una aplicación localmente de Nash y homomorfismo. Supongamos que G/Z es afín. Entonces por la proposición 4.17 tenemos que π es una aplicación de Nash. Así pues, $Ker(\pi) = Z$ es definible. Sin embargo, por la eliminación de cuantificadores de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}_p$ en los lenguajes $\mathcal{L}_{or}$ y $\mathcal{L}_{po}$ respectivamente, ningún subconjunto infinito y discreto puede ser definible. $\square$

Los grupos de Nash más típicos son de la forma $G(F)$, donde G es un grupo algebraico definido sobre F.

Proposición 4.29. *Sea $G \subset \overline{F}$ un grupo algebraico conexo definido sobre F. Entonces $G(F)$ es un grupo de Nash afín.*

Demostración. Véase Fact 4.4, pag. 234, de [Hr-P]. $\square$

4.2. Demostración del Teorema A

Al igual que en la sección anterior, F denotará o bien el cuerpo $\mathbb{R}$ o bien el cuerpo $\mathbb{Q}_p$. Obsérvese que por la proposición 2.13 y por la proposición 2.18, F es un cuerpo geométrico que satisface la propiedad B) del comienzo de la sección 3.3. Sea G un grupo definible en Fde dimensión n. Por la proposición 4.12, es posible dotar a G de una estructura de grupo de Nash única salvo isomorfismos de Nash de forma definible. Por la proposición 3.26 existe un subcuerpo k de F sobre el cual G está definido y existe un grupo algebraico conexo H definido sobre k, unas uplas $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ de G y unas uplas $\bar{a}'$, $\bar{b}'$ y $\bar{c}'$ de $H(F)$ satisfaciendo las propiedades i), ii), iii) y iv) del enunciado de dicha proposición. Puesto que $H(F)$ es definible sobre F también es posible dotarla de una estructura de grupo de Nash única salvo isomorfismos de Nash de forma definible. Denotemos con $(G, V_1, \ldots, V_s, f_1, \ldots, f_s)$ la estructura de grupo de Nash de G. Obsérvese que tanto los abiertos V_i como las funciones

f_i son definibles. Denotemos con $U_i \subset F^m$ los abiertos definibles que son homeomorfos a V_i mediante las funciones f_i. Obsérvese que puesto que las f_i son definibles tenemos que $dim(V_i) = dim(U_i)$. Por la proposición 4.1, tenemos que $dim(U_i) = m$ y por tanto $m = n$. En realidad, estas conclusiones las hemos deducido del enunciado de la proposición 4.12, aunque son propias de la construcción de la estructura de grupo de Nash para el grupo G que se realiza en la demostración de dicha proposición. De forma similar, denotando con $(H(F), W_1, \ldots, W_r, g_1, \ldots, g_r)$ la estructura de grupo de Nash de $H(F)$ obtenemos que su dimensión también es n y que para todo $1 \leq i \leq r$, $dim(W_i) = n$. Recuérdese que por 4.4 en F la clausura algebraica es igual a la clausura definible.

Lema 4.30. *Siguiendo la notación del párrafo anterior, existen entornos abiertos k-definibles U, V y W de $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ respectivamente en G, entornos abiertos k-definibles U', V' y W' de $\bar{a}'$, $\bar{b}'$ y $\bar{c}'$ respectivamente en $H(F)$ y funciones k-definibles f, g y h tales que*

i) $f(\bar{a}) = \bar{a}'$ y f es un homeomorfismo entre U y U', $g(\bar{b}) = \bar{b}'$ y g es un homeomorfismo entre V y V' y $h(\bar{c}) = \bar{c}'$ y h es un homeomorfismo entre W y W',

ii) para cualesquiera $\bar{a}'' \in U$ y $\bar{b}'' \in V$, $f(\bar{a}'')g(\bar{b}'') = h(\bar{a}''\bar{b}'')$,

iii) para cualesquiera $\bar{x}, \bar{z} \in U$, $\bar{x}^{-1}\bar{c} \in V$ y $\bar{z}\bar{x}^{-1}\bar{c} \in W$.

Demostración. Denotemos con V_{i_1}, V_{i_2} y V_{i_3} a aquellas cartas de G que contienen a $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ respectivamente y con W_{i_1}, W_{i_2} y W_{i_3} a aquellas cartas de $H(F)$ que contienen a $\bar{a}'$, $\bar{b}'$ y $\bar{c}'$ respectivamente.

i) Como $acl^F(k, \bar{a}) = acl^F(k, \bar{a}')$ tenemos que $\bar{a}$ y $\bar{a}'$ son interdefinibles sobre k. Por tanto existe una fórmula $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ con parámetros en k tal que $\mathcal{F} \models \psi(\bar{a}, \bar{a}')$, $\mathcal{F} \models \exists! \bar{x}\psi(\bar{x}, \bar{a}')$ y $\mathcal{F} \models \exists! \bar{y}\psi(\bar{a}, \bar{y})$. Consideremos el subconjunto $X = \{\bar{x}' \in f_{i_1}(V_{i_1}) : \mathcal{F} \models \exists! \bar{y}\psi(f_{i_1}^{-1}\bar{x}', \bar{y})\}$. Puesto que $f_{i_1}(\bar{a}) \in X$ tenemos que $dim(X) = n$ y por tanto, por la observación 4.2, $int(X) \neq \emptyset$ y $f_{i_1}(\bar{a}) \in int(X)$. Denotemos con $U_1 = int(X)$. Así pues existe una función parcial f definible sobre k tal que para todo $\bar{x}' \in U_1$, $f(\bar{x}')$ es la única upla tal que $\mathcal{F} \models \psi(f_{i_1}^{-1}(\bar{x}'), f(\bar{x}'))$. En particular $f(f_{i_1}(\bar{a})) = \bar{a}'$. Puesto que la función $g_{i_1} \circ f$ es una función definible sobre k y U_1 es un abierto definible sobre k (de hecho, definible sobre el vacío), por la proposición 4.4 existe un abierto denso U_2 de U_1 definible sobre k tal que $g_{i_1} \circ f|_{U_2}$ es analítica. Obsérvese que puesto que U_2 es denso tenemos que $f_{i_1}(\bar{a}) \in U_2$. De forma similar se prueba que existe un entorno abierto U_2' de $g_{i_1}(\bar{a}')$ definible sobre k y una función parcial f' definible sobre k tal que para todo $\bar{y}' \in U_2'$, $f'(\bar{y}')$ es la única upla tal que $\mathcal{F} \models \psi(f'(\bar{y}'), g_{i_1}^{-1}(\bar{y}'))$ y $f_{i_1} \circ f'|U_2'$ es analítica. Sea

$U = f_{i_1}^{-1}(U_2 \cap (g_{i_1} \circ f)^{-1}(U_2'))$ el cual es un entorno abierto definible sobre k de $\bar{a}$. Si renombramos f como $f \circ f_{i_1}|U$ basta observar que $f' \circ g_{i_1}$ es su inversa y que por tanto $U' = f(U) = (f' \circ g_{i_1})^{-1}(U)$ es un entorno abierto definible sobre k de $\bar{a}'$ y en particular f es un homeomorfismo entre U y U' definible sobre k.

De forma similar se prueba la existencia de los entornos V y V' y la función g para las uplas $\bar{b}$ y $\bar{b}'$ y los entornos W y W' y la función h para las uplas $\bar{c}$ y $\bar{c}'$.

ii) Utilizando las funciones del apartado *i*) tenemos que

$$f(\bar{a})g(\bar{b}) = \bar{a}'\bar{b}' = \bar{c}' = h(\bar{c}).$$

Consideremos el subconjunto

$$Y = \{(\bar{x}', \bar{y}') \in f_{i_1}(U) \times f_{i_2}(V) : f(f_{i_1}^{-1}(\bar{x}'))g(f_{i_2}^{-1}(\bar{y}')) = h(f_{i_1}^{-1}(\bar{x}'))f_{i_2}^{-1}(\bar{y}'))\}.$$

Como $(f_{i_1}(\bar{a}), f_{i_2}(\bar{b})) \in Y$ tenemos que $dim(Y) = 2n$ y por la observación 4.2, el interior de Y es no vacío y $(f_{i_1}(\bar{a}), f_{i_2}(\bar{b})) \in int(Y)$. Así pues, podemos encontrar entornos abiertos $\widetilde{U}_1$ y $\widetilde{V}_2$ definibles sobre k (de hecho, definibles sobre el vacío) de $\bar{a}$ y $\bar{b}$ respectivamente tales que $(f_{i_1}(\bar{a}), f_{i_2}(\bar{b})) \in \widetilde{U}_1 \times \widetilde{V}_2 \subset int(Y)$ y por tanto basta renombrar U por $f_{i_1}^{-1}(\widetilde{U}_1)$ y V por $f_{i_2}^{-1}(\widetilde{V}_2)$.

iii) Puesto que la operación de grupo es continua el conjunto $Z = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in G \times G : \bar{x}\bar{y} \in W\}$ es abierto. Dado que $(\bar{a}, \bar{b}) \in Z$, podemos tomar los abiertos U y V suficientemente pequeños de forma que $U \times V \subset Z$, es decir, $UV \subset W$. Consideremos la función continua $\rho : G \ni \bar{x} \rightarrow \bar{c}\bar{x} \in G$. Obsérvese que $\rho^{-1}(V)$ es abierto y $\bar{a}^{-1} \in \rho^{-1}(V)$ ya que $\bar{a}^{-1}\bar{c} = \bar{b} \in V$. Tomemos $U_1 = (\rho^{-1}(V))^{-1} \cap U$, el cual es un entorno abierto de $\bar{a}$ definible sobre k incluido en U y tal que $U_1^{-1} \subset \rho^{-1}(V)$. Por definición $\rho(U_1) \subset V$, es decir, $U_1^{-1}\bar{c} \subset V$. Sean $\bar{x}, \bar{z} \in U_1$. Entonces, como $\bar{z} \in U_1 \subset U$, $\bar{x}^{-1}\bar{c} \in V$ y $UV \subset W$, tenemos que $\bar{z}\bar{x}^{-1}\bar{c} \in W$. Por tanto basta renombrar U por U_1. $\square$

Demostración del Teorema A. Denotemos con $U_1 = U^{-1}\bar{a}$ y $U_2 = (U')^{-1}\bar{a}'$. Puesto que la función $\chi : U^{-1}\bar{a} \ni \bar{x}^{-1}\bar{a} \rightarrow f(\bar{x})^{-1}\bar{a}' \in (U')^{-1}\bar{a}'$ es un homeomorfismo entre U_1 y U_2 de forma evidente, basta comprobar que $\chi(\bar{x}\bar{y}) = \chi(\bar{x})\chi(\bar{y})$ para cualesquiera $\bar{x}, \bar{y} \in U_1$ tales que $\bar{x}\bar{y} \in U_1$. Probemos que para cualesquiera $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in U$ tales que $\bar{x}\bar{z}^{-1}\bar{y} = \bar{a}$ tenemos que $f(\bar{a}) = f(\bar{x})f(\bar{z})^{-1}f(\bar{y})$. Denotemos con $\bar{b}_1 = \bar{x}^{-1}\bar{c}$ y $\bar{c}_1 = \bar{z}\bar{b}_1$. Obsérvese que $\bar{y}\bar{b} = \bar{z}\bar{x}^{-1}\bar{a}\bar{b} = \bar{z}\bar{x}^{-1}\bar{c} = \bar{c}_1$. Por el lema 4.30 tenemos que $\bar{b}_1 \in V$ y $\bar{c}_1 = \bar{z}\bar{x}^{-1}\bar{c} \in W$. También por el lema 4.30 tenemos que

- $f(\bar{y})g(\bar{b}) = h(\bar{y}\bar{b}) = h(\bar{c}_1)$,

- $f(\bar{z})g(\bar{b}_1) = h(\bar{z}\bar{b}_1) = h(\bar{c}_1)$,

- $f(\bar{x})g(\bar{b}_1) = h(\bar{x}\bar{b}_1) = h(\bar{c})$.

Así pues,

$$\begin{aligned} f(\bar{x})f(\bar{z})^{-1}f(\bar{y})g(\bar{b}) &= f(\bar{x})g(\bar{b}_1)h(\bar{c}_1)^{-1}f(\bar{y})g(\bar{b}) = \\ &= f(\bar{x})g(\bar{b}_1) = h(\bar{c}) = \\ &= f(\bar{a})g(\bar{b}), \end{aligned}$$

y por tanto $f(\bar{a}) = f(\bar{x})f(\bar{z})^{-1}f(\bar{y})$.

Finalmente, sean $\bar{x}^{-1}\bar{a} \in U_1$ e $\bar{y}^{-1}\bar{a} \in U_1$ tales que $\bar{x}^{-1}\bar{a}\bar{y}^{-1}\bar{a} \in U_1$, donde $\bar{x} \in U$ y $\bar{y} \in U$. Sea $\bar{z} \in U$ tal que $\bar{x}^{-1}\bar{a}\bar{y}^{-1}\bar{a} = \bar{z}^{-1}\bar{a}$. En particular observamos que $\bar{x}^{-1}\bar{a}\bar{y}^{-1} = \bar{z}^{-1}$. Por definición tenemos que

$$\begin{aligned} \chi(\bar{x}^{-1}\bar{a}\bar{y}^{-1}\bar{a}) &= \chi(\bar{z}^{-1}\bar{a}) = f(\bar{z})^{-1}\bar{a}' = f(\bar{z})^{-1}f(\bar{a}) = \\ &= f(\bar{x})^{-1}f(\bar{a})f(\bar{y})^{-1}f(\bar{a}) = \chi(\bar{x}^{-1}\bar{a})\chi(\bar{y}^{-1}\bar{a}). \end{aligned}$$

□

Observación 4.31. Veamos que en general, el isomorfismo local que nos proporciona el Teorema A no puede ser extendido a una aplicación de Nash isógena. Consideremos las variedades de Nash $[0,1)$ y $\mathbb{R}$ y comprobemos que no existen aplicaciones de Nash entre $[0,1)$ y $\mathbb{R}$ no constantes. Sea $\pi : \mathbb{R} \to [0,1)$ el recubrimiento natural. Supongamos que $g : [0,1) \to \mathbb{R}$ es una aplicación de Nash no constante. Puesto que $[0,1)$ es compacto existe un máximo $a \in \mathbb{R}$ de la función g. Entonces $g \circ \pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una aplicación de Nash local tal que $X = (g \circ \pi)^{-1}(a)$ es un subconjunto infinito discreto de $\mathbb{R}$. Como $g \circ \pi$ es Nash local, $g \circ \pi$ es definible en un entorno y por tanto existe un abierto $U \subset \mathbb{R}$ y un polinomio $P(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ tal que $P(x, g \circ \pi(x)) = 0$ para todo $x \in U$. Como $g \circ \pi$ es analítica y $\mathbb{R}$ conexo, $P(x, g \circ \pi(x)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto $g \circ \pi$ es Nash, de lo que deducimos que X es definible, lo cual es una contradicción. Sin embargo, los puntos racionales $H(\mathbb{R})$ de cualquier grupo algebraico H es una variedad de Nash afín, y por tanto sí que existen aplicaciones no constantes entre $H(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}$. Así pues, no puede existir un aplicación de Nash isógena entre $[0,1)$ y los puntos racionales de un grupo algebraico.

Como ya vimos en la observación 4.18, $[0,1)$ no es afín. El teorema B establece que ese es el único impedimento para no poder extender el isomorfismo local del teorema A a una aplicación de Nash isógena global.

4.3. Demostración del Teorema B

El siguiente lema es un conocido resultado sobre grupos de Lie que será de especial importancia para la demostración del teorema B.

Lema 4.32. *Sea G la componente conexa de los puntos reales de un grupo algebraico conexo y conmutativo definido sobre $\mathbb{R}$. Entonces $G = G_1 \times G_2 \times G_3$, donde G_1 es racionalmente isomorfo a un producto de copias de $(\mathbb{R}, +)$, G_2 es racionalmente isomorfo a un producto de copias de $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ y G_3 es un grupo cerrado y compacto.*

Demostración. Véase el lema 4.10 de [Hr-P]. $\square$

Observación 4.33. Siguiendo la notación del lema anterior, G_1 y G_2 son semi-algebraicos pero G_3 no tiene por qué serlo. De hecho, G_1 y G_2 son grupos de Nash afines.

Demostración del teorema B. Sea G un grupo de Nash afín conexo. Por el teorema A, existe un grupo algebraico conexo H y un isomorfismo f de Nash entre un entorno U_1 de la identidad de G y un entorno U_2 de la identidad de $H(\mathbb{R})$. Denotemos con H' la componente conexa de los puntos reales de H, es decir, $H' = H(\mathbb{R})^0$, la cual es también grupo de Nash. Obsérvese que sigue existiendo un isomorfismo de Nash entre un entorno de la identidad de G y un entorno de la identidad de H' ya que podemos reducir el isomorfismo anterior a un entorno conexo. Sean $(\widetilde{G}, p_1)$ y $(\widetilde{H'}, p_2)$ los recubrimientos universales de G y H' respectivamente y denotemos con $D_1 = Ker(p_1)$ y $D_2 = Ker(p_2)$. Por el teorema 13.3 de [Bu], podemos levantar el isomorfismo local f a un isomorfismo $\widetilde{f} : \widetilde{G} \to \widetilde{H'}$ de forma que $p_2 \circ \widetilde{f} = f \circ p_1$ en la componente conexa de la identidad de la preimagen de $p_1^{-1}(U_1)$. Sean $Z(G)^0$ y $Z(H')^0$ las componentes conexas de los centros de G y H respecto de su topología de Nash. Obsérvese que $Z(H')^0$ es la componente conexa de los puntos racionales de un grupo algebraico conexo definido sobre $\mathbb{R}$. Efectivamente, como $Z(H')^0$ es un subgrupo definible de $H(\mathbb{R})$ entonces su clausura Zariski $\overline{Z(H')^0}$ es un subgrupo de H cuya dimensión es $dim(Z(H')^0)$. Denotemos con $H_4 = \overline{Z(H')^0}$, el cual es un subgrupo conmutativo de H ya que $Z(H')^0$ es un subgrupo conmutativo de H. Veamos que $H_4(\mathbb{R})^0 = Z(H')^0$. La inclusión $Z(H')^0 \subset H_4(\mathbb{R})^0$ es inmediata, y por tanto $Z(H')^0 < H_4(\mathbb{R})^0$. Por la propiedad (E) de $\mathbb{R}$ y puesto que $dim(H_4(\mathbb{R})^0) = dim(Z(H')^0)$, deducimos que $Z(H')^0$ es un subgrupo de índice finito de $H_4(\mathbb{R})^0$. Por tanto, $H_4(\mathbb{R})^0 = Z(H')^0$.

Veamos que $p_2 : Z(\widetilde{H'})^0 \to Z(H')^0$ es un recubrimiento. En primer lugar, demostremos que $p_2|_{Z(\widetilde{H'})^0}$ es sobreyectiva. Puesto que $p_2(Z(\widetilde{H'})^0) \ni e$ es conexo y p_2 continua tenemos que $p_2(Z(\widetilde{H'})^0) \subset Z(H')^0$. Siguiendo la demostración del teorema B.4, dado $q \in Z(H')^0$ sea $\gamma(t)$ una curva en $Z(H')$ tal que $\gamma(0) = e$ y $\gamma(1) = q$. Entonces $[\gamma] \in \widetilde{H'}$ es tal que $[\gamma] \in Z(\widetilde{H'})$. Como la curva $\widetilde{\gamma}(t) = [\gamma|_{[0,t]}]$ de $Z(\widetilde{H'})$ satisface que $\widetilde{\gamma}(0) = [e]$ y $\widetilde{\gamma}(1) = [\gamma]$, tenemos que $[\gamma] \in Z(\widetilde{H'})^0$ y por tanto $p_2(Z(\widetilde{H'})^0) = Z(H')^0$. En segundo lugar, veamos que dado un entorno abierto U de $Z(H')^0$ de la unidad tal que $p_2^{-1}(U) = \bigcup_i U_i$, U_i abierto de $p_2^{-1}(U)$, $p_2|_{U_i}$ homeomorfismo entre U_i y U, tenemos que si $Z(\widetilde{H'})^0 \cap U_i \neq \emptyset$ entonces $U_i \subset Z(\widetilde{H'})^0$. Siguiendo la demostración del teorema B.4, sea $[\gamma_0] \in U_i \cap Z(\widetilde{H'})^0$, $\gamma_0(1) = x_0 \in U$ y sea $[\gamma_1] \in U_i$, $\gamma_1(1) = x_1 \in U$. Puesto que $x_0, x_1 \in U$ y que podemos suponer que U es simplemente conexo, existe una curva $\gamma(t)$ en $Z(H')^0$ tal que $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$. Así pues la curva $\gamma_0 * \gamma$ es tal que $[\gamma_1] = [\gamma_0 * \gamma] \in Z(H')^0$.

Por el lema 4.32, $Z(H')^0 = H_1 \times H_2 \times H_3$ donde H_1 es racionalmente isomorfo a un producto de $(\mathbb{R}, +)$, H_2 es racionalmente isomorfo a un producto de $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ y H_3 es cerrado y compacto. Por el Teorema B.4 tenemos que $p_{2*}(\pi_1(Z(\widetilde{H'})^0)) < \pi_1(Z(H')^0) = \pi_1(H_1) \times \pi_1(H_2) \times \pi_1(H_3) = 0 \times 0 \times \pi_1(H_3)$. De nuevo por el Teorema B.4, existe un recubrimiento $(\widetilde{H}_3, p_3)$ tal que $p_{3*}(\pi_1(\widetilde{H}_3)) \cong p_{2*}(\pi_1(Z(\widetilde{H'})^0))$. Por el teorema 53.3 de [Mu*] tenemos que $(H_1 \times H_2 \times \widetilde{H}_3, id \times id \times p_3)$ es un recubrimiento de $H_1 \times H_2 \times H_3$. Como $Ker(id \times id \times p_3) \cong Ker(id) \times Ker(id) \times Ker(p_3) \cong Ker(p_2|_{Z(\widetilde{H'})^0})$, por la Observación B.5 y el Teorema B.4 tenemos que $Z(\widetilde{H'})^0 \cong H_1 \times H_2 \times \widetilde{H}_3$. Obsérvese que entonces $D_2 \cap Z(\widetilde{H'})^0 \cong Ker(p_3)$ y por tanto, por la observación B.5.2), es un subgrupo discreto y normal de $\widetilde{H}_3$.

Sean $\widetilde{G}_1$, $\widetilde{G}_2$ y $\widetilde{G}_3$ las preimagenes de $\widetilde{H}_1$, $\widetilde{H}_2$ y $\widetilde{H}_3$ por $\widetilde{f}$. Como $\widetilde{f}$ es un isomorfismo tenemos que $Z(\widetilde{G})^0 = \widetilde{G}_1 \times \widetilde{G}_2 \times \widetilde{G}_3$. Sea el homomorfismo

$$f_1 : H_1 \times H_2 \times 0 \ni (x_1, x_2, 0) \longrightarrow p_1 \circ \widetilde{f}^{-1} \circ p_2^{-1}(x_1, x_2, 0) \in Z(G)^0.$$

Por ser composición de funciones localmente Nash es localmente Nash. Definamos $G_1 = f_1(H_1 \times H_2 \times 0) < Z(G)^0$ y comprobemos que es definible. En primer lugar, veamos que $G_1 =< f^{-1}(U_2 \cap (H_1 \times H_2 \times 0)) >$. Sea $x \in f^{-1}(U_2 \cap (H_1 \times H_2 \times 0))$, es decir, $x = f^{-1}(y_1, y_2, 0)$ para un cierto $(y_1, y_2, 0) \in U_2 \cap (H_1 \times H_2 \times 0)$. Entonces, utilizando que $f \circ p_1 = p_2 \circ \widetilde{f}$ en la componente conexa de la identidad de la preimagen de $p_1^{-1}(U_1)$ deducimos que

$$\begin{aligned} f_1(y_1, y_2, 0) &= p_1 \circ \widetilde{f}^{-1} \circ p_2^{-1}(y_1, y_2, 0) = p_1 \circ p_1^{-1} \circ f^{-1}(y_1, y_2, 0) = \\ &= f^{-1}(y_1, y_2, 0) = x \in G_1. \end{aligned}$$

Por tanto $< f^{-1}(U_2 \cap (H_1 \times H_2 \times 0)) > \subset G_1$. Por último, puesto que $H_1 \times H_2 \times 0$ es racionalmente isomorfo a un producto de copias de $(\mathbb{R}, +)$ y de $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$

tenemos que $< U_2 \cap (H_1 \times H_2 \times 0) >= H_1 \times H_2 \times 0$ y por tanto

$$\begin{aligned}
G_1 &= f_1(H_1 \times H_2 \times 0) = f_1(< U_2 \cap (H_1 \times H_2 \times 0) >) = \\
&= \{f_1(a_1^{n_1} \cdots a_m^{n_m}) : a_i \in U_2 \cap (H_1 \times H_2 \times 0), n_i \in \mathbb{Z}\} = \\
&= \{f_1(a_1)^{n_1} \cdots f_1(a_m)^{n_m} : a_i \in U_2 \cap (H_1 \times H_2 \times 0), n_i \in \mathbb{Z}\} = \\
&= \{f^{-1}(a_1)^{n_1} \cdots f^{-1}(a_m)^{n_m} : a_i \in U_2 \cap (H_1 \times H_2 \times 0), n_i \in \mathbb{Z}\} \subset \\
&\subset\ < f^{-1}(U_2 \cap (H_1 \times H_2 \times 0)) > .
\end{aligned}$$

En segundo lugar, y puesto que la clausura Zariski de $U_2 \cap (H_1 \times H_2 \times 0)$ es $H_1 \times H_2 \times 0$ el cual es irreducible respecto de la topología Zariski, por el lema 3.1 de [P2] tenemos que G_1 es un subgrupo definible de $Z(G)^0$. En particular, G_1 es un grupo de Nash afín ya que es un subgrupo de $Z(G)^0$, el cual es afín.

Como f_1 es localmente Nash, $H_1 \times H_2 \times 0$ es Nash y G_1 es Nash afín, por la proposición 4.17 la aplicación f_1 es Nash. Supongamos que $Ker(f_1)$ es infinito. Entonces, por la proposición 4.28 tenemos que $H_1 \times H_2 \times 0/Ker(f_1)$ no es afín, lo cual es una contradicción, puesto que $H_1 \times H_2 \times 0/Ker(f_1) \simeq G_1$ es afín. Por tanto $Ker(f_1)$ es finito. Así pues, dado que $H_1 \times H_2 \times 0$ es racionalmente isomorfo a un producto de copias de $(\mathbb{R}, +)$ y de $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ tenemos que $Ker(f_1)$ es trivial, es decir, f_1 es un isomorfismo.

Sea $D_3 = \widetilde{f}(D_1)D_2/D_2$. Por la proposición 4.26 tenemos que $D_1 < Z(\widetilde{G})$ y $D_2 < Z(\widetilde{H'})$ y por tanto

$$D_3 < Z(\widetilde{H'})/D_2 \simeq Z(H').$$

Veamos que D_3 es finito. Puesto que $Z(H')^0$ es un subgrupo de índice finito de $Z(H')$ basta probar que $D_4 = D_3 \cap Z(H')^0$ es finito. Consideremos la aplicación natural $h : Z(H')^0 \to Z(H')^0/H_1 \times H_2 \times 0$. Obsérvese que

i) $D_4 = p_2(\widetilde{f}(D_1) \cap Z(\widetilde{H'})^0 D_2)$. Efectivamente, es inmediato identificar D_3 con el subgrupo $p_2(\widetilde{f}(D_1)D_2) = p_2(\widetilde{f}(D_1))$. Así pues, $D_4 = D_3 \cap Z(H')^0 = p_2(\widetilde{f}(D_1)) \cap p_2(Z(\widetilde{H'})^0) = p_2(\widetilde{f}(D_1) \cap Z(\widetilde{H'})^0 D_2)$.

ii) La aplicación h es inyectiva sobre D_4. Sean $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \in D_4$ tales que $h(\bar{y}_1) = h(\bar{y}_2)$. Entonces $\bar{y}_1 - \bar{y}_2 \in H_1 \times H_2 \times 0$ y por tanto es posible aplicar f_1 a $\bar{y}_1 - \bar{y}_2$. Es más, puesto que por $i)$ tenemos que $\bar{y}_1 - \bar{y}_2 \in p_2(\widetilde{f}(D_1))$, deducimos que $\widetilde{f}^{-1} \circ p_2^{-1}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) \in D_1$. Así pues, $f_1(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) = p_1 \circ \widetilde{f}^{-1} \circ p_2^{-1}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) = 0$. Como f_1 es un isomorfismo, deducimos que $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$.

iii) $h(D_4)$ es discreto, por ser h un función continua y D_4 un grupo discreto.

Por $iii)$, $h(D_4)$ es un subgrupo discreto del grupo compacto $h(Z(H')^0) \simeq H_3$ y por tanto debe ser finito. Por $ii)$, D_4 también debe ser finito.

Consideremos la aplicación

$$g : \widetilde{G}/D_1 \ni \bar{x} \to \overline{\widetilde{f}(x)} \in \widetilde{H'}/\widetilde{f}(D_1)D_2,$$

la cual está bien definida de forma evidente. De hecho, puesto que $\widetilde{G}/D_1 \approx G$ y $\widetilde{H'}/\widetilde{f}(D_1)D_2 \approx (\widetilde{H'}/D_2)/(\widetilde{f}(D_1)D_2/D_2) \approx H'/D_3$, podemos escribir $g : G \to H'/D_3$. Como D_3 es finito entonces es definible. Por tanto H/D_3 es interpretable y por el teorema 1 de la introducción, H/D_3 es un grupo algebraico conexo. De hecho, por la proposición 4.29, $(H/D_3)(\mathbb{R})^0 = H'/D_3$ es un grupo de Nash afín. Por la proposición 4.28, $Ker(g)$ es finito y por la proposición 4.17 la aplicación g es Nash. Por tanto G es isógeno a la componente conexa de los puntos racionales de un grupo algebraico definido sobre $\mathbb{R}$. $\square$

A. Apéndice: Los cuerpos p-ádicamente cerrados

La valoración p-ádica sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$ se define como sigue: dado $x \in \mathbb{Q}^*$, $x = p^n \frac{a}{b}$, $(a, b) = 1$, $\nu_p(x) = n$. Si $x = 0$, entonces $\nu_p(x) = \infty$. La valoración p-ádica es una valoración discreta en $\mathbb{Q}$, es decir, satisface $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$ y $\nu(x + y) \geq min\{\nu_p(x), \nu_p(y)\}$. La norma p-ádica se define como $\|x\|_p = p^{-\nu_p(x)}$. Definimos los números p-ádicos, $\mathbb{Q}_p$, como la completación de $\mathbb{Q}$ respecto de esta norma. Alternativamente, podemos definir los números p-ádicos como el cuerpo de fracciones del anillo de enteros p-ádicos, $\mathbb{Z}_p = lim\ \mathbb{Z}/p^{n+1}$. Los elementos de $\mathbb{Z}_p$ pueden representarse formalmente como $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n p^n$, con $0 \leq \alpha_n < p$. Siguiendo esta notación, la aplicación $\nu(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n p^n) = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : \alpha_k = 0\}$, $\nu(0) = \infty$, es una valoración discreta. Las definiciones que siguen van dirigidas a definir una axiomatización de la teoría de $\mathbb{Q}_p$.

Definición A.1. *Decimos que un cuerpo K es un* ***cuerpo de valoración*** *si es el cuerpo de fracciones de un dominio V que es un anillo de valoración de K, es decir, tal que para todo $x \in K^*$ o bien $x \in V$ o bien $x^{-1} \in V$. Obsérvese que entonces V tiene un único ideal maximal $\mathfrak{m} = V \setminus U$, donde U es el conjunto formado por la unidades multiplicativas. Al cuerpo $k = V/\mathfrak{m}$ lo denominamos cuerpo residual. El grupo $\Gamma = K^*/U$, al cual llamaremos grupo de valoración, es un grupo abeliano ordenado con $aU \leq bU \Leftrightarrow \frac{b}{a} \in V$.*

Observación A.2. Sea K un cuerpo de valoración y sea V su anillo de valoración. Entonces la aplicación $\nu(a) = aU \in \Gamma$, $a \in K^*$, $\nu(0) = \infty$, es una valoración, es decir, satisface $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$ y $\nu(x + y) \geq \text{mín}\{\nu(x), \nu(y)\}$.

Ejemplo A.3. El cuerpo $\mathbb{Q}_p$ es un cuerpo de valoración y $\mathbb{Z}_p$ es su anillo de valoración. En este caso, $k \approx \mathbb{F}_p$ y $\Gamma \approx \mathbb{Z}$.

Definición A.4. *Un anillo de valoración es* ***henseliano*** *si todo polinomio $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \in V[x]$ con $a_{n-1} \notin \mathfrak{m}$ y $a_n \in \mathfrak{m}$ tiene un cero en $\mathfrak{m}$.*

Observación A.5. De acuerdo con la notación anterior, el cero del polinomio debe ser el único cero en $\mathfrak{m}$. Supongamos que existan dos ceros a y b en $\mathfrak{m}$ de dicho polinomio. Entonces, $(a^n - b^n) + a_1(a^{n-1} - b^{n-1}) + \ldots + a_{n-2}(a^2 - b^2) = -a_{n-1}(a - b)$ y por tanto $\nu(-a_{n-1}(a - b)) = \nu(-a_{n-1}) + \nu(a - b) = \nu(a - b) \geq \nu((a^n - b^n) + a_1(a^{n-1} - b^{n-1}) + \ldots + a_{n-2}(a^2 - b^2)) \geq \nu(a_{n-2}(a^2 - b^2)) \geq \nu(a_{n-2}) + \nu(a + b) + \nu(a - b)$. Así pues, $\nu(a + b) = 0$, de lo cual deducimos que $\nu(a) = \nu(b) = 0$, lo cual es una contradicción.

Ejemplo A.6. El anillo de valoración $\mathbb{Z}_p$ es henseliano. Se debe al siguiente teorema cuya demostración se puede encontrar en el teorema 7.3 de [E],

> *Lema de Hensel. Sea K un cuerpo de valoración y se V su anillo de valoración. Sea $\|\cdot\|$ la norma inducida por la valoración discreta. Sea $P(x) \in V[x]$ un polinomio y sea $a_0 \in K$ tal que $\|P(a_0)\| < \|P'(a_0)\|^2$. Entonces existe un único elemento $a \in V$ tal que $P(a) = 0$ y $\|a - a_0\| \leq \|\frac{f(a_0)}{f'(a_0)}\|$.*

Sea entonces $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ con $a_{n-1} \notin \mathfrak{m}$ y $a_n \in \mathfrak{m}$. Observamos que $P(0) = a_n$ y $P'(0) = a_{n-1}$ y por tanto $\|P(0)\| < \|P'(0)\|^2$. Por el lema de Hensel existe un único $a \in V$ tal que $P(a) = 0$ y $\|a\| \leq \|\frac{a_n}{a_{n-1}}\| \Rightarrow a \in \mathfrak{m}$.

Definición A.7. *Un **cuerpo p-ádicamente cerrado** es un cuerpo de valoración K tal que $char(K) = 0$, V es henseliano con $\mathfrak{m} = pV$, $k \approx \mathbb{F}_p$ y $[\Gamma : n\Gamma] = n$ para cualquier $n = 1, 2, 3, \ldots$.*

Con las observaciones anteriores resulta trivial comprobar que $\mathbb{Q}_p$ es un cuerpo p-ádicamente cerrado. La definición anterior se puede expresar con una serie de axiomas de primer orden en el lenguaje $\mathcal{L} = \{0, 1, +, -, \cdot, V\}$, donde V es un símbolo de relación 1-aria que se interpreta como el anillo de valoración, y que de hecho son la axiomatización de $\mathbb{Q}_p$.

Teorema A.8. *La teoría de cuerpos p-ádicamente cerrados es completa y modelo completa.*

Demostración. Véase [A-K].

□

Teorema A.9. *La teoría de cuerpos p-ádicamente cerrados admite eliminación de cuantificadores en el lenguaje extendido $\mathcal{L} = \{0, 1, +, -, \cdot, V\} \cup \{P_n : n = 2, \ldots\}$, donde los símbolos P_n son relaciones 1-arias que son interpretadas como las potencias n-ésimas.*

Demostración. Véase el teorema 1 de [M]. □

Observación A.10. En la página 20 de [Ma*] se prueba que para $p \neq 2$ tenemos que $\mathbb{Z}_p$ es definible en $\mathbb{Q}_p$ mediante la fórmula $\exists z(z^2 = px^2 + 1)$. Por tanto por el teorema A.8 para todo cuerpo p-ádicamente cerrado se satisface que $V(x) \leftrightarrow \exists z(z^2 = px^2 + 1)$. En particular, si disponemos de los símbolos P_n tenemos que $V(x) \leftrightarrow \exists P_2(px^2+1)$ y por tanto en el teorema A.9 es posible eliminar el símbolo V del lenguaje. De hecho, dados $x, y \in \mathbb{Q}_p$ tenemos que $\nu(x) \leq \nu(y) \Leftrightarrow \nu(yx^{-1}) = 0 \Leftrightarrow P_2(p(yx^{-1})^2+1) \Leftrightarrow P_2(py^2+x^2)$ y por tanto la valoración ν es definible. En el caso $p = 2$ el estudio es similar pero utilizando la fórmula $\exists z(z^2 = 8x^2 + 1)$. Denotaremos $\mathcal{L}_{Mac} = \{0, 1, +, -, \cdot\} \cup \{P_n : n = 2, \ldots\}$.

B. Apéndice: Espacios recubridores

Definición B.1. *Dado un espacio topológico M decimos que una aplicación $\pi : M' \to M$ es recubridora si para todo $a \in M$ existe un entorno abierto U_a conexo tal que $\pi^{-1}(U_a) = \bigcup_i U_i$, donde U_i son abiertos disjuntos tales que $f|_{U_i}$ es un homeomorfismo entre U_i y U_a. En ese caso, se dice que M' es un espacio recubridor. Si además M' es simplemente conexo entonces decimos que es un espacio recubridor universal.*

Lema B.2. *Sea M un espacio topológico y sea $\pi : M' \to M$ una aplicación recubridora. Entonces para todo $x \in M$ el subconjunto $\pi^{-1}(M)$ tiene el mismo número de elementos.*

Demostración. Para todo $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $E_n = \{x \in M : \#\{\pi^{-1}(x)\} = n\}$ es abierto y cerrado. Como M es conexo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $E_n = M$. $\square$

Definición B.3. *Sean $\pi_1 : M_1 \to M$ y $\pi_2 : M_2 \to M$ dos recubrimientos. Decimos que ambos recubrimientos son equivalentes si existe un homeomorfismo $\pi_{21} : M_2 \to M_1$ tal que $\pi_2 = \pi_1 \circ \pi_{21}$.*

El espacio topológico M va a ser en lo que sigue una variedad topológica conexa. Nuestra intención ahora es probar la existencia de espacios recubridores y en concreto la existencia de espacios recubridores universales para variedades topológicas conexas.

Teorema B.4. *Sea M una variedad topológica conexa. Entonces existe una biyección entre clases de equivalencia de recubrimientos de M y clases de equivalencia de conjugados de subgrupos de $\pi_1(M)$, es decir, las clases de equivalencia de la relación que identifica dos subgrupos H_1 y H_2 de $\pi_1(M)$ si existe un elemento $g \in \pi_1(M)$ tal que $gH_1g^{-1} = H_2$.*

Demostración (Teorema 1.3.2, pag. 10,[J*]). Consideremos la aplicación que manda la clase de un espacio recubridor $p' : M' \to M$ a la clase de conjugación del subgrupo $p'_*(\pi_1(M'))$. No es difícil probar que esta aplicación está bien definida y es inyectiva, es decir, que dos recubrimientos $p' : M' \to M$ y $p'' : M'' \to M$ son equivalentes si y sólo si $p'_*(\pi_1(M'))$ y $p''_*(\pi_1(M''))$ son conjugados (véase el Teorema 79.4 en [Mu*]). A continuación presentamos las ideas necesarias para probar que dicha aplicación es sobreyectiva (véase [J*] para más detalles). En concreto nos centramos en la construción del espacio recubridor cuya imagen por la aplicación anteriormente descrita es la clase de conjugación del subgrupo trivial, es decir, el espacio recubridor universal (el proceso es similar para cualquier otra clase de conjugación). Denotaremos con $*$ a la "unión" de dos curvas. Fijemos un punto $p_0 \in M$

y consideremos el conjunto formado por las curvas continuas $\gamma : [0,1] \to M$ tales que $\gamma(0) = p_0$. En dicho conjunto decimos que dos curvas γ_1 y γ_2 son equivalentes si $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ y $\gamma_1 * \gamma_2^{-1}$ es homótopa a la curva constante $\gamma_0(t) = p_0$. Definimos M' como el conjunto de clases de equivalencia y la aplicación $\pi : M' \ni [\gamma] \to \gamma(1) \in M$. Definamos la estructura de variedad topológica conexa de M'. Sean (U_i, f_i) las cartas y los cambios de coordenadas de M los cuales podemos suponer tales que $f(U_i)$ es homeomorfo a una bola abierta de $\mathbb{R}^n$. Sea $q_0' = [\gamma_0] \in \pi^{-1}(q_0)$, con $q_0 \in U_{i_0}$, y consideremos cualquier elemento $q_1 \in U_{i_0}$. Puesto que U_{i_0} es homeomorfo a una bola podemos encontrar una curva γ en U_{i_0} tal que $\gamma(0) = q_0$ y $\gamma(1) = q_1$. De hecho, como las bolas abiertas son simplemente conexas, dada cualquier otra curva β que satisfaga lo mismo tenemos que $[\gamma * \gamma_0] = [\beta * \gamma_0]$. Sea $U_i'(q_0') = \{[\gamma * \gamma_0] : \gamma(t) \in U_i, \gamma(0) = q_0\}$. Observamos que la aplicación $f_i' = f_i \circ \pi|_{U_i'(q_0')}$ es una biyección con $f_i(U_i)$. En la referencia anterior se demuestra que estableciendo estos conjuntos y estas aplicaciones como las cartas y los cambios de coordenadas dotamos a M' de estructura de variedad topológica simplemente conexa. $\square$

Observación B.5. 1) Por el teorema B.4 el espacio recubridor universal es único salvo homeomorfismo.

2) Si M está dotada de una operación de grupo continua entonces el espacio recubridor (M', π) también puede ser dotado de una operación de grupo continua de tal forma que π sea un homomorfismo de grupos. De hecho, tendremos que $Ker(\pi)$ es isomorfo a $\pi_1(M)/\pi_*(\pi_1(M'))$. Efectivamente, siguiendo la construcción de la demostración del teorema B.4 y fijando $p_0 = e$, dados dos puntos $[\gamma_1], [\gamma_2]$ de M' donde γ_1 y γ_2 son dos curvas tales que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = e$, podemos definir $[\gamma_1][\gamma_2]$ como la clase de equivalencia de la curva $\gamma_3(t) = \gamma_1(t)\gamma_2(t)$, la cual es un punto de M' porque $\gamma_3(0) = e$ y porque es una curva continua por serlo la operación de grupo. Observamos que de hecho $Ker(\pi) = \pi^{-1}(e) = \pi_1(M, e) = \pi_1(M)$. Como $Ker(\pi) = \pi^{-1}(e)$, $Ker(\pi)$ es un subgrupo discreto de M'. Dado $[\gamma] \in M'$ tenemos que $[\gamma]Ker(\pi)[\gamma^{-1}] \subset Ker(\pi)$ y por tanto $[\gamma]Ker(\pi)[\gamma^{-1}] = Ker(\pi)$, es decir, $Ker(\pi)$ es un subgrupo normal de M'. Por la proposición 4.26, $Ker(\pi)$ es central, es decir, $Ker(\pi) \subset Z(M')$.

Referencias

[A-K] J. Ax y S. Kochen, *Diophantine problems over local fields I, II*, Amer. J. Math., Vol. 87, pags. 605-630, pags. 631-648, 1965.

[B*] J. Bochnak, M. Coste y M.F.Roy, **Geometrie algebrique reelle**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[Bo*] E. Bouscaren, **Model theory and Algebraic Geometry: An introducction to E.Hrushovski's proof of the geometric Mordell-Lang conjecture**, LNM 1696, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999.

[Bo1] E. Bouscaren, *Model theoretic version of Weil's theorem on pregroups* de **Model theory of groups**, Notre Dame Press, 1989.

[Bu] D. Bump, **Lie groups**, Springer-Verlag, NY, 2004.

[C*] Z. Chatzidakis, *Notes on the model theory of finite and pseudo-finite fields*, disponible en: `www.logique.jussieu.fr/www.zoe/index.html`

[C-D-M*] Z. Chatzidakis, L. van den Dries, A. Macintyre, *Definable sets over finite fields*, J. Reine Angew. Math., Vol. 427, pags. 107-135, 1992.

[C-F*] E. Casanovas y R. Farré, *Weak forms of eliminations of imaginaries*, Math. Log. Quart.

[D] L. van den Dries, **Tame Topology and O-minimal Structures**, Cambridge University Press, 1998.

[D-Sc] L. van den Dries y P. Scowcroft, *On the structure of semialgebraic sets over p-adic fields*, J.Symbolic Logic, Vol.53, 1138-1164, 1988.

[E] D. Eisenbud, **Commutative Algebra with a View Towards Algebraic Geometry**, Springer, 2004.

[J*] J. Jost, **Compact Riemann Surfaces**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 2000.

[Hr-P] E. Hrushovski y A. Pillay, *Groups definable in local fields and pseudo-finite fields*, Israel Journal of Math., Vol. 85, pags. 203-262, 1994.

[L*] S. Lang, **Introduction to algebraic geometry**, Wiley, 1964.

[M] A. Macintyre, *On definable sets of p-adics fields*, J. Symbolic Logic, Vol.41, pags.605-610, 1976.

[Ma*] D. Marker, **Model theory: An introduction**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2002.

[Mu*] J.R. Munkres, **Topology**, Prentice Hall, Inc., 2000.

[P] A. Pillay, *On fields definable in* $\mathbb{Q}_p$, Arch.Math.Logic, Vol.29, 1-7, 1989.

[P1] A. Pillay, *Groups and fields definable in O-minimal structures*, J.Pure Appl. Algebra, Vol. 53, pags. 239-255, 1988.

[P2] A. Pillay, *An application of model theory to real and p-adic algebraic groups*, J. Algebra, Vol.126, pags.139-146, 1989.

[P3] A. Pillay, *Some remarks on definable equivalence relations in O-minimal structures*, J. Symbolic Logic, Vol.51, pags.709-714, 1986.

[Po*] B. Poizat, **A course in Model Theory**, Springer-Verlag,New York, 2000.

[S] M. Shiota, **Nash manifolds**, Lectures Notes in Math. 1269, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[W] A. Weil, *On algebraic groups of transformations*, American Journal of Mathematics, Vol.77, pags.355-391, 1955.