APÉNDICE A: DERIVACIÓN DE INTEGRALES. LA REGLA DE LEIBNITZ

Proposición 1. *(Regla abreviada de Leibnitz) Sea $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que existe y es continua $D_y f(x,y)$. Sea $F(y) := \int_a^b f(x,y)dx,\ \forall y \in [c,d]$. Entonces existe $F'(y),\ \forall y \in [c,d]$, y se verifica que*

$$F'(y) = \int_a^b D_y f(x,y)dx,\ \forall y \in [c,d]$$

(forma abreviada de la regla de Leibnitz).

Demostración. Sea $y_0 \in [c,d]$ fijo y calculemos $F'(y_0)$. Sea $\epsilon > 0$. Por la continuidad uniforme de $D_y f$, existe $\delta > 0$ tal que, si $y, y' \in [c,d]$ con $|y - y'| \leq \delta$, entonces

$$|D_y f(x,y) - D_y f(x,y')| \leq \frac{\epsilon}{(b-a)+1},\ \forall x \in [a,b]. \tag{0.1}$$

Sea $0 < |h| \leq \delta,\ h \in \mathbb{R}$. Por el TVM existe $\theta \in [0,1]$ (dependiendo de x, y_0, h) tal que

$$f(x, y_0 + h) - f(x, y_0) = D_y f(x, y_0 + \theta h) \cdot h,\ \forall x \in [a,b]. \tag{0.2}$$

Por tanto, para $0 < |h| \leq \delta$ (y tal que $y_0 + h \in [c,d]$ naturalmente), aplicando (0.4) y (0.2) se tiene que:

$$\begin{aligned} &\Big|\frac{F(y_0+h) - F(y_0)}{h} - \int_a^b D_y f(x,y_0)dx\Big| = \\ &= \Big|\int_a^b \Big(\frac{f(x,y_0+h) - f(x,y_0)}{h} - D_y f(x,y_0)\Big)dx\Big| = \\ &= \Big|\int_a^b \big(D_y f(x, y_0 + \theta h) - D_y f(x,y_0)\big)dx\Big| \leq \\ &\leq \int_a^b \big|D_y f(x, y_0 + \theta h) - D_y f(x,y_0)\big|dx \leq \int_a^b \frac{\epsilon}{(b-a)+1}dx \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, finalmente concluimos que

$$\int_a^b D_y f(x,y_0)dx = \lim_{h\to 0} \frac{F(y_0+h) - F(y_0)}{h} =: F'(y_0).$$

□

Proposición 2. *(Regla de derivación de Leibnitz) Sean $R := [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ y*

(i) $f : R \to \mathbb{R}$ una función continua tal que existe y es continua $D_y f(x,y)$ en R.

(ii) $\varphi, \psi : [c,d] \to [a,b]$ funciones tales que existen y son finitas las derivadas $\varphi'(y), \psi'(y),\ \forall y \in [c,d]$.

Definamos $F(y) := \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y) \cdot dx,\ \forall y \in [c,d]$. Entonces existe $F'(y),\ \forall y \in [c,d]$, y se verifica que

$$F'(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} D_y f(x,y)dx + f(\psi(y), y) \cdot \psi'(y) - f(\varphi(y), y) \cdot \varphi'(y). \tag{0.3}$$

Demostración. Consideremos $G : [a,b]^2 \times [c,d] \to \mathbb{R}$ de modo que

$$G(t_1,t_2,t_3) := \int_{t_1}^{t_2} f(x,t_3) \cdot dx, \ \forall t_1,t_2 \in [a,b], \ \forall t_3 \in [c,d].$$

En tal caso

$$F(y) = G(\varphi(y),\psi(y),y), \ \forall y \in [c,d].$$

Aplicando la regla de la cadena obtenemos que existe $F'(y), \ \forall y \in [c,d]$, y además

$$F'(y) = D_1G(\varphi(y),\psi(y),y)\cdot\varphi'(y)+D_2G(\varphi(y),\psi(y),y)\cdot\psi'(y)+D_3G(\varphi(y),\psi(y),y).$$

A continuación observemos que:

(i) Por el TVM del CI y por ser $f(x,y)$ continua, se tiene que

$$D_1G(\varphi(y),\psi(y),y) \cdot \varphi'(y) = -f(\varphi(y),y) \cdot \varphi'(y),$$
$$D_2G(\varphi(y),\psi(y),y) \cdot \psi'(y) = f(\psi(y),y) \cdot \psi'(y).$$

(ii) Por la Prop.1

$$D_3G(\varphi(y),\psi(y),y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} D_2f(x,y) \cdot dx.$$

Combinando todos los resultados anteriores sale la fórmula de Leibnitz (0.3). $\square$

Proposición 3. *(Regla de Leibnitz generalizada) Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\varphi,\psi : U \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y*

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y \in U, x = t\psi(y) + (1-t)\varphi(y), t \in [0,1]\}.$$

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua y definamos

$$\forall y \in U, \quad F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx.$$

Entonces:

(a) F es continua en U.

(b) Supongamos que $A \subset G \subset U \times \mathbb{R}$ es un abierto tal que $f : G \to \mathbb{R}$. Sea $j \in \{1,\dots,n\}$ y admitamos que existen las derivadas parciales $D_j\varphi, D_j\psi$ en U y que D_jf existe y es continua en G. Entonces existe D_jF en U y tiene la forma (regla de Leibnitz):

$$\forall y \in U, \ \ D_jF(y) = f(\psi(y),y)D_j\psi(y) - f(\varphi(y),y)D_j\varphi(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} D_jf(x,y)dx.$$

Demostración. (a) Como $f(x,y)$ es continua es claro que existe la integral de Riemann $F(y) := \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx, \ \forall y \in U$. Fijemos $y_0 \in U$ y probemos que F es continua en y_0. Sea $1 \geq \epsilon > 0$ fijo.

Objetivo: hallar $\delta > 0$ tal que $B(y_0;\delta) \subset U$ y

$$|F(y_0+h) - F(ty_0)| \leq \epsilon, \ \forall h \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } \|h\| \leq \delta.$$

Sea $\delta_1 > 0$ tal que $B(y_0;\delta_1) \subset U$. Sea

$$K_{\delta_1} := \{(x,y) \in A : y \in B(y_0;\delta_1)\}$$

que es un subconjunto compacto. Definimos

$$M := \sup\{|f(x,y)| : (x,y) \in K_{\delta_1}\} \text{ y } M_1 := |\psi(y_0) - \varphi(y_0)|,$$

que son constantes tales que $0 \leq M, M_1 < \infty$. Puesto que f es uniformemente continua en K_{δ_1} y ψ, φ son continuas en y_0, existe $0 < \delta \leq \delta_1$ tal que si $h \in \mathbb{R}^n$ verifica $\|h\| \leq \delta$ entonces:

(i) $|f(x,y_0+h) - f(x,y_0)| \leq \frac{\epsilon}{4M_1+1}$, $\forall (x,y_0+h),(x,y_0) \in K_{\delta_1}, \|h\| \leq \delta$.

(ii) $|\psi(y_0+h) - \psi(y_0)| \leq \frac{\epsilon}{4M+4} \geq |\varphi(y_0+h) - \varphi(y_0)|$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$ con $\|h\| \leq \delta$.

Sea $\|h\| \leq \delta$ y supongamos (los demás casos son análogos) que

$$\varphi(y_0) \leq \varphi(y_0+h) \leq \psi(y_0) \leq \psi(y_0+h).$$

Entonces

$$\begin{aligned} F(y_0+h) - F(y_0) &= \int_{\varphi(y_0+h)}^{\psi(y_0+h)} f(x,y_0+h)dx - \int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x,y_0)dx = \\ &= \int_{\varphi(y_0+h)}^{\psi(y_0)} (f(x,y_0+h) - f(x,y_0))dx + \\ &+ \int_{\psi(y_0)}^{\psi(y_0+h)} f(x,y_0+h)dx - \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y_0+h)} f(x,y_0)dx. \end{aligned} \tag{0.4}$$

(1) Observemos que

$$\begin{aligned} |\int_{\varphi(y_0+h)}^{\psi(y_0)} (f(x,y_0+h) - f(x,y_0))dx| &\leq \frac{\epsilon}{4M_1+1}(|\psi(y_0) - \varphi(y_0+h)|) \leq \\ &\leq \frac{\epsilon}{4M_1+1}(|\psi(y_0) - \varphi(y_0)| + |\varphi(y_0) - \varphi(y_0+h)|) \leq \\ &\leq \frac{\epsilon}{4M_1+1}(M_1 + \frac{\epsilon}{4M+4}) \leq \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

(2) Por otra parte

$$|\int_{\psi(y_0)}^{\psi(y_0+h)} f(x,y_0+h)dx| \leq M\tfrac{\epsilon}{4M+4} \leq \tfrac{\epsilon}{4} \geq M\tfrac{\epsilon}{4M+4} \geq |\int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y_0+h)} f(x,y_0+h)dx|.$$

Finalmente combinando (0.4),(1) y (2) vemos que se cumple el objetivo propuesto.

(b) Sea $y_0 \in U$. Por las hipótesis impuestas existen $\epsilon > 0$, $a_\epsilon \leq b_\epsilon$, $a_\epsilon, b_\epsilon \in \mathbb{R}$, tales que $B(y_0;\epsilon) \times \{[a_\epsilon, b_\epsilon]\} \subset G$ y $\varphi(B(y_0;\epsilon)), \psi(B(y_0;\epsilon)) \subset [a_\epsilon, b_\epsilon]$. Ahora basta aplicar la Prop.2. $\square$