APÉNDICE B: INTEGRALES IMPROPIAS PARAMÉTRICAS

Una **integral impropia (en $\mathbb{R}$ y de 1ªEsp.) paramétrica** es una integral de la forma $\int_c^\infty f(x,y)dx$ donde Y es un conjunto arbitrario, $c \in \mathbb{R}$ y $f : [c, +\infty) \times Y \to \mathbb{R}$.

Proposición 1. *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto compacto $\mathcal{J}$-medible, Y un espacio topológico (abrev., et) y $f : A \times Y \to \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene que $f(\cdot, y) : A \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann sobre A para todo $y \in Y$ y la función $F : Y \to \mathbb{R}$ tal que $F(y) := \int_A f(x,y)dx$ es continua.*

Demostración. En primer término, $\forall y \in Y, f(\cdot, y) : A \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann sobre A porque $f(\cdot, y)$ es continua y acotada sobre A. Veamos que F es continua sobre Y. Sean $y_0 \in Y$ y $\epsilon > 0$ fijos. Tenemos que hallar un entorno G_0 de y_0 de modo que $|F(y_0) - F(y)| \leq \epsilon$, $\forall y \in G_0$. Aplicando que f es continua, por cada $a \in A$ existen entornos abiertos U^a y G^a de a y y_0, respectivamente, de modo que

$$|f(a, y_0) - f(b, y)| \leq \tfrac{\epsilon}{2(m(A)+1)}, \ \forall (b, y) \in U^a \times G^a. \tag{0.1}$$

Es claro que $A \subset \cup_{a \in A} U^a$. Como A es un compacto, existe una familia finita de puntos $a_1, a_2, \cdots, a_p \in A$ de modo que $A \subset \cup_{i=1}^p U^{a_i}$. Sea $G_0 := \cap_{i=1}^p G^{a_i}$, que es un entorno abierto de y_0 en Y.

Aserto. Para todo par $(x, y) \in A \times G_0$ se verifica que

$$|f(x, y_0) - f(x, y)| \leq \tfrac{\epsilon}{m(A)+1}.$$

En efecto, fijemos $(x, y) \in A \times G_0$ y sea $j \in \{1, 2, ..., p\}$ tal que $x \in U^{a_j}$. Es claro que $y, y_0 \in G^{a_j}$ porque $y, y_0 \in G_0 \subset G^{a_j}$. Por tanto aplicando (0.1) concluimos que

$$\begin{aligned}|f(x, y_0) - f(x, y)| &= |f(x, y_0) - f(a_j, y_0) + f(a_j, y_0) - f(x, y)| \leq \\ &\leq |f(x, y_0) - f(a_j, y_0)| + |f(a_j, y_0) - f(x, y)| \leq \\ &\leq \frac{\epsilon}{2(m(A)+1)} + \frac{\epsilon}{2(m(A)+1)} = \frac{\epsilon}{m(A)+1}.\end{aligned}$$

Aplicando el Aserto concluimos que para todo $y \in G_0$ se verifica:

$$\begin{aligned}|F(y) - F(y_0)| &= \Big|\int_A (f(x,y) - f(x, y_0))dx\Big| \leq \int_A |f(x,y) - f(x,y_0)|dx \leq \\ &\leq \int_A \frac{\epsilon}{m(A)+1}dx = \frac{\epsilon}{m(A)+1} m(A) \leq \epsilon,\end{aligned}$$

lo que termina la demostración. □

Definición 2. *Dados Y un conjunto arbitrario, $c \in \mathbb{R}$ y $f : [c, +\infty) \times Y \to \mathbb{R}$, decimos que la integral impropia paramétrica $\int_c^\infty f(x,y)dx$ es* **uniformemente convergente en** Y *si y sólo si $\int_c^\infty f(x,y)dx$ es convergente para todo $y \in Y$ y para todo $\epsilon > 0$ existe $c \leq u_\epsilon < \infty$ de modo que para todo $y \in Y$ y todo $u_\epsilon \leq u < \infty$ se verifica que*

$$\Big|\int_c^\infty f(x,y)dx - \int_c^u f(x,y)dx\Big| = \Big|\int_u^\infty f(x,y)dx\Big| \leq \epsilon.$$

Proposición 3. *Sean* $c \in \mathbb{R}$*,* Y *un et y* $f : [c, \infty) \times Y \to \mathbb{R}$ *una función continua tales que* $\int_c^\infty f(x, y)dx$ *es una integral impropia paramétrica uniformemente convergente hacia* $F(y) := \int_c^\infty f(x, y)dx, \ \forall y \in Y$*. Entonces* $F : Y \to \mathbb{R}$ *es continua.*

Demostración. Por la Prop. 1 sabemos que la integral $\int_c^{c+n} f(x, y)dx =: F_n(y)$ existe, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in Y$, y que la función $F_n : Y \to \mathbb{R}$ es continua. Finalmente observemos que la convergencia uniforme de la integral $\int_c^\infty f(x, y)dx$ implica que $F_n \to F$ uniformemente sobre Y y que el límite uniforme de funciones continuas es una función continua. □

EJEMPLOS. (a) **Criterio de Weierstrass**: la integral impropia paramétrica

$$\int_0^\infty e^{-xy} \cdot sen(x)dx$$

es uniformemente convergente para $y \in [d, \infty)$ cuando $0 < d < \infty$. Esto se debe a que $|e^{-xy} \cdot sen(x)| \leq e^{-dx}$ para todo $(x, y) \in [0, \infty) \times [d, \infty)$. Aplicando la Prop. 3 obtenemos que

$$F : (0, \infty) \to \mathbb{R} \ \text{ tal que } F(y) := \int_0^\infty e^{-xy} \cdot sen(x)dx, \ \forall y \in (0, \infty)$$

es continua en $(0, \infty)$.

(b) **Criterio de Abel**. *Sean* Y *un conjunto,* $c \in \mathbb{R}$ *y* $\alpha, f : [c, \infty) \times Y \to \mathbb{R}$ *funciones tales que*

(i) Para todo $y \in Y$ *las aplicaciones* $\alpha(\cdot, y), f(\cdot, y) : [c, \infty) \to \mathbb{R}$ *son continuas y*

$$\sup\{|\int_c^u f(x, y)dx| : c \leq u < \infty, y \in Y\} \leq M < \infty.$$

(ii) $\alpha(x, y) \underset{x \to \infty}{\downarrow 0}$ *uniformemente para* $y \in Y$*, es decir,* $\alpha(x, y)$ *decrece uniformemente hacia* 0 *.*

Entonces la integral impropia paramétrica $\int_c^\infty \alpha(x, y)f(x, y)dx$ *es uniformemente convergente sobre* Y*.*

Demostración. Para $y \in Y$ y $c \leq u < \infty$ denotemos $F(u, y) := \int_c^u f(x, y)dx$. Por hipótesis se verifica $|F(u, y)| \leq M, \forall y \in Y \ , \forall c \leq u < \infty$. Fijemos $\epsilon > 0$. Tenemos que hallar $c \leq u_e < \infty$ de modo que para todo $y \in Y$ y todo par $u_\epsilon \leq u \leq v < \infty$ se verifique que

$$|\int_u^v \alpha(x, y)f(x, y)dx| \leq \epsilon.$$

Elegimos $c \leq u_e < \infty$ de modo que $\alpha(x, y) \leq \frac{\epsilon}{3M+1}, \ \forall y \in Y$, siempre que $u_\epsilon \leq x < \infty$. Sean $u_\epsilon \leq u \leq v < \infty$. Aplicando la integración por partes (para la integral de Riemann-Stieltjes) obtenemos

$$\int_u^v \alpha(x, y)f(x, y)dx = F(x, y)\alpha(x, y)\Big|_{x=u}^v + \int_u^v F(x, y)d(-\alpha(x, y)).$$

Se tiene que:

$$|F(x,y)\alpha(x,y)|_{x=u}^{v}| = |F(v,y)\alpha(v,y) - F(u,y)\alpha(u,y)| \leq \tag{0.2}$$
$$\leq M\frac{\epsilon}{3M+1} + M\frac{\epsilon}{3M+1} \leq \frac{2\epsilon}{3}.$$

Además, como $-\alpha(\cdot,y)$ es creciente y $|F(x,y)| \leq M$, tenemos que:

$$\Big|\int_u^v F(x,y)d(-\alpha(x,y))\Big| \leq \tag{0.3}$$
$$\leq M\int_u^v d(-\alpha(x,y)) = M(-\alpha(v,y)+\alpha(u,y)) \leq M\frac{\epsilon}{3M+1} \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Finalmente combinando (0.2) y (0.3) concluimos que

$$\Big|\int_u^v \alpha(x,y)f(x,y)dx\Big| \leq \epsilon,\ \forall y \in Y, \forall u_\epsilon \leq u \leq v < \infty.$$

□

(c) Por el Criterio de Abel la integral impropia paramétrica

$$\int_0^\infty e^{-xy}\cdot\frac{sen(x)}{x}dx$$

es uniformemente convergente para $y \in [0,\infty)$. Aplicando la Prop. 3 obtenemos que la función

$$F:[0,\infty)\to\mathbb{R}\ \text{ tal que } F(y) := \int_0^\infty e^{-xy}\cdot\frac{sen(x)}{x}dx,\ \forall y \in [0,\infty)$$

es continua en $[0,\infty)$.

Proposición 4. *Sean $c \in \mathbb{R}$, $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [c,\infty)\times(a,b) \to \mathbb{R}$ una función continua tales que:*

(i) Para cada $y \in (a,b)$ la integral impropia $\int_c^\infty f(x,y)dx$ es convergente hacia $F(y) := \int_c^\infty f(x,y)dx$.

(ii) Existe y es continua la derivada parcial $D_yf(x,y)$ en $[c,\infty)\times(a,b)$ y la integral impropia $\int_c^\infty D_yf(x,y)dx$ es uniformemente convergente para $y \in (a,b)$.

Entonces $F'(y) = \int_c^\infty D_yf(x,y)dx$ para todo $y \in (a,b)$.

Demostración. Por Prop. 3 la función $h : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $h(y) := \int_c^\infty D_yf(x,y)dx$ es continua en (a,b) ya que la sucesión $\int_c^{c+n} D_yf(x,y)dx$ converge uniformemente hacia h. Denotemos $F_n(y) := \int_c^{c+n} f(x,y)dx$. Por la regla de derivación de Leibnitz sabemos que

$$F_n'(y) = \int_c^{c+n} D_yf(x,y)dx,\ \forall y \in (a,b).$$

La demostración termina aplicando el siguiente resultado de Análisis de una Variable Real:

" Sean $G \subset \mathbb{R}$ un abierto, $F_n, F, h : G \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que: (i) $F_n(t) \to F(t)$ puntualmente para $t \in G$; (ii) existen las derivadas F_n' y convergen uniformemente hacia h. Entonces $F' = h$ ". $\square$

Proposición 5. *Sean $c \in \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ un abierto y $f : [c, \infty) \times U \to \mathbb{R}$ una función continua tales que:*

(i) Para cada $y \in U$ la integral impropia $\int_c^\infty f(x,y)dx$ es convergente hacia $F(y) := \int_c^\infty f(x,y)dx$.

(ii) Existe y es continua la derivada parcial $D_{y_j} f(x,y)$ para cierto $j \in \{1, ..., m\}$ en $[c, \infty) \times U$ y la integral impropia $\int_c^\infty D_{y_j} f(x,y)dx$ es uniformemente convergente para $y \in U$.

Entonces $D_{y_j} F(y) = \int_c^\infty D_{y_j} f(x,y)dx$ para todo $y \in U$.

Demostración. La demostración es similar a la de la Prop.5. $\square$

Ejercicios

Calcular las siguientes integrales impropias:

1.-$\int_0^\infty e^{-xy} \cdot sen(rx)dx,\ \int_0^\infty e^{-xy} \cdot cos(rx)dx,\ y > 0.$

2.-$\int_0^\infty e^{-xy} \cdot \frac{sen(rx)}{x}dx,\ y \geq 0,\ \int_0^\infty \frac{sen(rx)}{x}dx.$

3.-$\int_0^\infty e^{-xy} \cdot \frac{cos(ax) - cos(bx)}{x}dx,\ y \geq 0,\ \int_0^\infty \frac{cos(bx) - cos(ax)}{x}dx.$

4.- $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}dx,\ \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}dx,\ \alpha, \beta > 0.$