CÁLCULO INTEGRAL

Antonio Suárez Granero

Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

Índice general

Capítulo 1

La integral de Riemann en $\mathbb{R}^n$

1.1. Introducción

Comencemos introduciendo la notación y las definiciones que utilizaremos. Si A, B son subconjuntos de un conjunto X, $|A|$ indicará el cardinal de A, ${}^cA = X \setminus A$ el complementario de A respecto de X y $A \uplus B$ la unión disjunta de los conjuntos A y B. Si (X, T_X) es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces

(i) El interior de A se denota por $int(A)$ ó $\overset{\circ}{A}$.

(ii) La frontera de A se denota por ∂A ó $Fr(A)$. Recordemos que la frontera de A se define como $\partial A = \overline{A} \cap \overline{{}^cA}$.

Si $x, y \in \mathbb{R}^n$ el producto escalar se denota por $\langle x, y \rangle$ (ó $x \bullet y$) y se define como

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

En $\mathbb{R}^n$ consideraremos, salvo indicación en contra, la norma euclídea $\| \cdot \|$ tal que

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| := (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2} = \langle x, x \rangle^{1/2}$$

y la distancia euclídea asociada d (ó d_e) tal que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad d_e(x, y) := \|x - y\|.$$

Si $A \subset \mathbb{R}^n$, el diámetro $diam(A)$ de A se define como

$$diam(A) := \sup\{\|a - b\| : a, b \in A\}.$$

Si $a \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon \geq 0$, definimos:

Bola cerrada de centro a y radio ϵ $:= B(a, \epsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq \epsilon\}$.

Bola abierta de centro a y radio ϵ $:= \overset{\circ}{B}(a, \epsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < \epsilon\}$.

Bola reducida (cerrada) de centro a **y radio** ϵ $:= B_r(a,\epsilon) := B(a,\epsilon) \setminus \{a\}$**.**

Esfera de centro a **y radio** ϵ $:= S(a,\epsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| = \epsilon\}$**.**

En $\mathbb{R}^n$ se define el orden " $\leq$ " de la siguiente forma:

Definición 1.1. *Si* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$*, decimos que:*
(i) $x \leq y$ *sii* $x_i \leq y_i,\ i = 1, \ldots, n$*; (ii)* $x < y$ *sii* $x_i < y_i,\ i = 1, \ldots, n$*.*

Es inmediato que " $\leq$ " es un orden parcial en $\mathbb{R}^n$, es decir que
(a) " $\leq$ " es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva en $\mathbb{R}^n$.
(b) Hay puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que ni $x \leq y$ ni $y \leq x$. Por tanto, " $\leq$ " no es un orden total, sino sólo parcial.

Definición 1.2. *Si* $a, b \in \mathbb{R}^n$ *definimos los siguientes tipos de intervalos:*
(1) el **intervalo cerrado de extremos** $a, b = [a, b]$ *(en este orden) se define como*

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq x \leq y\}.$$

Obviamente, si $a \not\leq b$*, entonces* $[a, b] = \emptyset$*. En cualquier caso,* $[a, b]$ *es un subconjunto compacto de* $\mathbb{R}^n$*.*
(2) el **intervalo abierto de extremos** $a, b = (a, b)$ *(en este orden) es*

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R}^n : a < x < y\}.$$

Obviamente, si $a \not< b$*, entonces* $(a, b) = \emptyset$*. En cualquier caso,* (a, b) *es un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^n$ *tal que* $(a, b) = int([a, b])$*.*
(3) $I \subset \mathbb{R}^n$ *es un* **intervalo generalizado de extremos** a, b *sii* $(a, b) \subset I \subset [a, b]$*.*
Dos intervalos generalizados $I, J \subset \mathbb{R}^n$ *se dice que son* **casi-disjuntos o que no se solapan** *sii* $int(I) \cap int(J) = \emptyset$*.*

Definición 1.3. *Sea* $I \subset \mathbb{R}^n$ *un intervalo generalizado de extremos* $a, b \in \mathbb{R}^n$ *con* $a \leq b$*.*
(a) Definimos **el volumen de** I *(abrev.,* $v(I)$ *ó* $vol(I)$*) de la siguiente forma:*

$$v(I) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Decimos que I *es un* **intervalo degenerado** *sii* $v(I) = 0$*. Obviamente, el intervalo* I *es degenerado sii* $int(I) = \emptyset$ *sii* $a_i \geq b_i$ *para algún* $i = 1, ..., n$*.*
(b) Las caras de I *son los intervalos compactos*

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times \{t_i\} \times \cdots \times [a_n, b_n],\ i = 1, \ldots, n,\ t_i = a_i \ \text{ ó } t_i = b_i.$$

Todos los intervalos generalizados de extremos $a \leq b$ *tienen las mismas caras. La unión de las caras de* I *es igual a la frontera* ∂I *ó borde de* I*. Si* $v(I) > 0$*,* I *tiene* $2n$ *caras exactamente, pero si* $v(I) = 0$*, algunas de las* $2n$ *caras anteriores coinciden entre si y por tanto tiene* $< 2n$ *caras. Cada cara* C *de* I *se puede ver también como un intervalo* *compacto de $\mathbb{R}^{n-1}$, degenerado ó no. Si C es una cara no degenerada en $\mathbb{R}^{n-1}$, entonces (y sólo entonces) C determina un único hiperplano afín en $\mathbb{R}^n$: el hiperplano afín que pasa por C.*

(c) Si $\epsilon > 0$, definimos

$$\textbf{intervalo abierto } \epsilon\textbf{-orlado por fuera de } I := \Pi_{i=1}^n (a_i - \epsilon, b_i + \epsilon),$$

$$\textbf{intervalo cerrado } \epsilon\textbf{-orlado por fuera de } I := \Pi_{i=1}^n [a_i - \epsilon, b_i + \epsilon],$$

$$\textbf{intervalo abierto } \epsilon\textbf{-orlado por dentro de } I := \Pi_{i=1}^n (a_i + \epsilon, b_i - \epsilon)$$

y

$$\textbf{intervalo cerrado } \epsilon\textbf{-orlado por dentro de } I := \Pi_{i=1}^n [a_i + \epsilon, b_i - \epsilon].$$

NOTA (A). Sean $a, b \in \mathbb{R}^n,\ a \leq b$.

(0) Sea I un intervalo generalizado de extremos a, b. Decimos que a **es el extremo inicial y b el extremo final de I.**

(1) Todos los intervalos generalizados I de extremos a, b tienen el mismo volumen. En particular $v(I) = v((a, b)) = v([a, b])$.

(2) Un intervalo generalizado I de extremos a, b es degenerado sii $a_i = b_i$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$.

(3) El intervalo (abierto ó cerrado) ϵ-orlado por dentro de I puede ser vacío, si $\epsilon > 0$ no es suficientemente pequeño.

(4) Si $\tilde{I}_\epsilon$ es el intervalo (abierto ó cerrado) ϵ-orlado por fuera de I, la diferencia $v(\tilde{I}_\epsilon) - v(I)$ se puede hacer arbitrariamente pequeña, cogiendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Análogamente, si $\underset{\sim}{I}_\epsilon$ es el intervalo (abierto ó cerrado) ϵ-orlado por dentro de I, la diferencia $v(I) - v(\underset{\sim}{I}_\epsilon)$ también se puede hacer arbitrariamente pequeña, cogiendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.

Definición 1.4. *Sea $I = [a, b]$ un intervalo compacto de $\mathbb{R}^n$ de extremos $a \leq b$.*

(1) **Una partición** *$\pi = \{I_1, I_2, \dots, I_r\}$ de I es una familia finita de subintervalos compactos casi-disjuntos $I_1, I_2, \dots, I_r$ de I tales que $I = \bigcup_{i=1}^r I_i$. La norma de π es $\|\pi\| := \max\{diam(I_i) : i = 1, \dots, r\}$. Denotaremos por $\Pi(I)$ al conjunto de todas las particiones de I.*

(2) Una partición $\pi \in \Pi(I)$ es de **tipo grilla o rejilla** *si consta de los subintervalos que resultan de partir I mediante hiperplanos paralelos a los hiperplanos coordenados.*

(3) Dadas dos particiones $\pi, \pi' \in \Pi(I)$, se dice que $\pi \leq \pi'$ (se lee π' **es más fina que** *π) sii todo $J \in \pi$ verifica $J = \cup\{H : H \in \pi', H \subset J\}$.*

(4) Sea $\mathcal{F}$ una familia finita arbitraria de subintervalos compactos de I. Procedemos a continuación a definir el concepto de **partición grilla $\pi_{\mathcal{F}}$ subordinada a** *$\mathcal{F}$:*

(41) Si I es degenerado, $\pi_{\mathcal{F}} := \{I\}$.

(42) Supongamos que I no es degenerado, es decir, $v(I) > 0$. En este caso la partición grilla $\pi_{\mathcal{F}}$ subordinada a $\mathcal{F}$ es la partición grilla de I que se obtiene utilizando

los hiperplanos que determinan las caras de los elementos de $\mathcal{F}$ y las caras de I. Es decir, se corta I con los hiperplanos de $\mathbb{R}^n$ determinados por las caras de los elementos de $\mathcal{F}$ y los determinados por las caras del propio I. $\pi_{\mathcal{F}}$ verifica que, para todo $J \in \mathcal{F}$, $\pi_J := \{J \cap H : H \in \pi_{\mathcal{F}}\}$ es una partición grilla de J. Observemos que, en general, $J \neq \cup\{H \in \pi_{\mathcal{F}} : H \subset J\}$ (ni siquiera ocurre la igualdad cuando $\mathcal{F} \in \pi(I)$, ver Ejercicios).

(5) Si $\pi = \{I_1, I_2, \ldots, I_r\} \in \Pi(I)$, **una selección** *para π es toda r-upla $\xi := (x_1, ..., x_r)$ tal que $x_i \in I_i$, $i = 1, ..., r$.*

NOTA (B). Sea $I = [a, b]$ un intervalo compacto de $\mathbb{R}^n$ de extremos $a \leq b$.

(a) La relación de finura $\leq$, que acabamos de definir en $\Pi(I)$, es un preorden parcial en $\Pi(I)$, es decir, se verifica:

(a1) Es trivialmente reflexiva y transitiva.

(a2) En general, no es antisimétrica (ver Ejercicios), aunque sí lo es cuando $n = 1$ ó si se define $\leq$ permitiendo sólo intervalos no degenerados.

(a3) Hay pares de elementos de $\Pi(I)$ que no son comparables mediante $\leq$, por lo que el preorden es parcial.

(a4) Sean $\pi_1, \pi_2 \in \Pi(I)$ y $\pi = \{J \cap H : J \in \pi_1, H \in \pi_2\}$. Entonces $\pi \in \Pi(I)$ y $\pi_i \leq \pi$, $i = 1, 2$. La partición π la denotaremos por $\pi := \pi_1 \vee \pi_2$.

(b) Si $\pi \in \Pi(I)$ es una partición de I y $H \subset I$ es un subintervalo compacto de I, entonces $\{H \cap J : J \in \pi\}$ es una partición de H, que es de tipo grilla caso de serlo π.

(c) Sea $\mathcal{F} := \{J_1, \cdots, J_p\}$ una familia de subintervalos compactos de I y $\pi_g(\mathcal{F}) \in \Pi(I)$ la partición grilla subordinada a $\mathcal{F}$.

(c1) Sea $J \in \pi_g(\mathcal{F})$ tal que $v(J) > 0$. Entonces $\emptyset = int(J) \cap ((\bigcup_{i=1}^p \partial J_i) \cup (\cup_{H \in \pi} \partial H))$, es decir, $int(J)$ es disjunto de las caras de los elementos de $\mathcal{F}$ y de π.

(c2) Sea $J \in \pi_g(\mathcal{F})$ tal que $v(J) > 0$ y $x \in int(J)$ tal que $x \in J_m$ para cierto $J_m \in \mathcal{F}$. Entonces $int(J) \subset int(J_m)$ (y por tanto $J \subset J_m$)). En efecto, como x no está en ∂J_m (por (c1)), necesariamente $x \in int(J_m)$ ya que $J_m = int(J_m) \uplus \partial J_m$. Esto prueba que $int(J) \cap J_m \subset int(J_m)$). Sea y otro punto arbitrario de $int(J)$. Es claro que el segmento recto $S(x, y)$ que une x con y verifica $S(x, y) \subset int(J)$ porque $int(J)$ es convexo. Si $y \notin J_m$, necesariamente $S(x, y) \cap \partial J_m \neq \emptyset$, lo que no puede ser pues, como hemos visto, $int(J) \cap J_m \subset int(J_m)$. Por tanto, $y \in int(J_m)$. Como y es un punto arbitrario de $int(J)$, se concluye que $int(J) \subset int(J_m)$.

(c3) En consecuencia, si $I = \bigcup_{i=1}^p J_i$ y $J \in \pi_g(\mathcal{F})$ es tal que $v(J) > 0$, existe al menos un cierto $m \in \{1, ..., p\}$ (puede haber varios) tal que $int(J) \subset int(J_m)$ y también $J \subset J_m$ pues $J = \overline{int(J)} \subset \overline{J_m} = J_m$.

(c4) Si $\mathcal{F}$ es partición de I y $J \in \pi_g(\mathcal{F})$ es tal que $v(J) > 0$, existe un y sólo un $m \in \{1, ..., p\}$ tal que $int(J) \subset int(J_m)$ y también $J \subset J_m$. En efecto, por (c3) existe al menos un $m \in \{1, ..., p\}$ de modo que $J \subset J_m$. Además no puede haber dos, pues se solaparían (ya que $int(J) \neq \emptyset$), cosa imposible ahora ya que $\mathcal{F}$ es partición por hipótesis.

Proposición 1.5. *Sea $I \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto.*

(A) Sea $\pi \in \Pi(I)$. Entonces $v(I) = \sum_{J\in\pi} v(J) = \sum_{J\in\pi, v(J)>0} v(J)$.

(B) Sea $\{J_i : i = 1, \dots, p\}$ una familia de subintervalos compactos de I tales que $I = \bigcup_{i=1}^p J_i$. Entonces $v(I) \le \sum_{i=1}^p v(J_i)$.

(C) Sea $\{J_i : i = 1, \dots, p\}$ una familia de intervalos compactos de $\mathbb{R}^n$ tales que $I \subset \bigcup_{i=1}^p J_i$. Entonces $v(I) \le \sum_{i=1}^p v(J_i)$.

(D) Sea $\{J_i : i \ge 1\}$ una familia de intervalos compactos de $\mathbb{R}^n$ tales que $I \subset \bigcup_{i\ge 1} J_i$. Entonces $v(I) \le \sum_{i\ge 1} v(J_i)$.

(E) Sean $I_1, I_2, \dots, I_p$ y $\{J_i : i \ge 1\}$ rectángulos compactos de $\mathbb{R}^n$ tales que: (i) los I_i, $i = 1, ..., p$, no se solapan; (ii) $\bigcup_{i=1}^p I_i \subset \bigcup_{j\ge 1} J_j$. Entonces $\sum_{i=1}^p v(I_i) \le \sum_{i\ge 1} v(J_i)$.

Demostración. (A) En primer término, la igualdad

$$\sum_{J\in\pi} v(J) = \sum_{J\in\pi, v(J)>0} v(J)$$

es obvia. Para probar la primera igualdad, distinguimos dos casos, a saber:

<u>**Caso 1.**</u> En este Caso 1 suponemos que π es partición tipo grilla. Por razones de sencillez consideraremos que $n = 2$ (los demás casos son análogos). Como π es tipo grilla, existen números reales $l_i \ge 0, i = 1, \dots, p$, y $h_j \ge 0, j = 1, \dots, q$, tales que

(1) $b_1 - a_1 = \sum_{i=1}^p l_i$ y $b_2 - a_2 = \sum_{j=1}^q h_j$.

(2) $\pi := \{I_{ij} : i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q\}$, siendo

$$I_{ij} := [a_1 + \sum_{r=1}^{i-1} l_r, a_1 + \sum_{r=1}^{i} l_r] \times [a_2 + \sum_{s=1}^{j-1} h_s, a_2 + \sum_{s=1}^{j} h_s]$$

con $v(I_{ij}) = l_i h_j$. Por tanto

$$\sum_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q}} v(I_{ij}) = \sum_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q}} l_i h_j =$$

$$= \sum_{i=1,\dots,p} (\sum_{j=1,\dots,q} l_i h_j) = \sum_{i=1,\dots,p} l_i (b_2 - a_2) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) = v(I).$$

<u>**Caso 2.**</u> Sea $\pi \in \Pi(I)$ una partición arbitraria. Prolongando las caras de los subintervalos de π obtenemos una nueva partición $\pi' \in \Pi(I)$ tipo grilla. Es inmediato que se verifican los siguientes hechos:

(a) Si $J \in \pi$, por Caso 1 y punto (c) de NOTA (B) anterior se tiene que

$$v(J) = \sum \{v(H \cap J) : H \in \pi'\} = \sum \{v(H) : H \in \pi', H \subset J, v(H) > 0\}.$$

(b) Para todo $H \in \pi'$ con $v(H) > 0$ existe un único $J \in \pi$ tal que $H \subset J$ (por (c) de NOTA (B) anterior).

Teniendo en cuenta estos hechos, se concluye que:

$$v(I) \overset{Caso\ 1}{=} \sum_{H\in\pi'} v(H) = \sum_{H\in\pi', v(H)>0} v(H) \overset{(b)}{=} \sum_{J\in\pi} \sum_{H\in\pi', H\subset J, v(H)>0} v(H) \overset{(a)}{=} \sum_{J\in\pi} v(J).$$

(B) Sea $\pi \in \Pi(I)$ la partición grilla subordinada a la familia $\{J_i : i = 1, \dots, p\}$. Observemos que $\{J \cap J_i : J \in \pi\}$ es una partición grilla de J_i, $i = 1, \dots, n$, y, por (A) y punto (c) de NOTA (B) anterior

$$v(J_i) = \sum_{J\in\pi} v(J \cap J_i) = \sum_{J\in\pi, J\subset J_i, v(J)>0} v(J).$$

Teniendo en cuenta que, si $J \in \pi$ y $v(J) > 0$, existe al menos un J_i tal que $J \subset J_i$, concluimos que

$$v(I) \overset{(A)}{=} \sum_{J\in\pi} v(J) = \sum_{J\in\pi, v(J)>0} v(J) \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{J\in\pi, v(J)>0, J\subset J_i} v(J) = \sum_{i=1}^{n} v(J_i).$$

(C) Sea $H_i := I \cap J_i$. Se verifica que $\{H_i : i = 1, \dots, n\}$ es una familia de subintervalos compactos de I tales que $H_i \subset J_i$ (por tanto $v(H_i) \le v(J_i)$) y $I = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$. Se tiene

$$v(I) \overset{(B)}{\le} \sum_{i=1}^{n} v(H_i) \le \sum_{i=1}^{n} v(J_i).$$

(D) Si $\sum_{i\ge1} v(J_i) = \infty$, el resultado es obvio. Supongamos que $\sum_{i\ge1} v(J_i) < \infty$ y sea $\eta > 0$ arbitrario. Elegimos $\epsilon_i > 0$ tales que, si H_i es el intervalo cerrado ϵ_i-orlado por fuera de J_i, se verifica

$$\sum_{i\ge1} (v(H_i) - v(J_i)) \le \eta.$$

Como I es compacto, $I \subset \bigcup_{i\ge1} int(H_i)$ y cada $int(H_i)$ es abierto, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $I \subset \bigcup_{i=1}^{p} int(H_i) \subset \bigcup_{i=1}^{p} H_i$. Por (C)

$$v(I) \overset{(C)}{\le} \sum_{i=1}^{p} v(H_i) \le \sum_{i\ge1} v(H_i) \le \sum_{i\ge1} v(J_i) + \eta.$$

Como $\eta > 0$ es arbitrario, se concluye el enunciado.

(E) Sea $\pi_i \in \Pi(J_i)$, $i \ge 1$, la partición tipo grilla que la familia de subintervalos compactos $\mathcal{F}_i := \{J_i \cap I_j : j = 1, ..., r\}$ determina en J_i. Como los elementos de $\mathcal{F}_i$ no se solapan, si $H \in \pi_i$ y $v(H) > 0$, existe a lo más un único $1 \leq s \leq r$ tal que $H \subset J_i \cap I_s$. Por tanto

$$v(J_i) = \sum_{H \in \pi_i, v(H)>0} v(H) \geq \sum_{j=1}^{r} \sum_{H \in \pi_i, v(H)>0, H \subset J_i \cap I_j} v(H) = \sum_{j=1}^{r} v(J_i \cap I_j).$$

Por tanto

$$\sum_{j=1}^{r} v(I_j) \overset{(D)}{\leq} \sum_{j=1}^{r} \sum_{i \geq 1} v(I_j \cap J_i) = \sum_{i \geq 1} \sum_{j=1}^{r} v(I_j \cap J_i) \leq \sum_{i \geq 1} v(J_i).$$

■

1.2. Las sumas de Darboux

Definición 1.6. *Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto, $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada y $\pi \in \Pi(I)$. Por cada $J \in \pi$ ponemos*

$$m(f; J) := \inf\{f(x) : x \in J\} \text{ y } M(f; J) := \sup\{f(x) : x \in J\}.$$

Definimos las sumas de Darboux de la siguiente forma:

(1) la **Suma de Darboux superior** *$U(f; \pi)$ de f respecto de π es*

$$U(f; \pi) := \sum_{J \in \pi} M(f; J) v(J).$$

(2) la **Suma de Darboux inferior** *$L(f; \pi)$ de f respecto de π se define como*

$$L(f; \pi) := \sum_{J \in \pi} m(f; J) v(J).$$

Proposición 1.7. *Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto, $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada y $\pi, \pi' \in \Pi(I)$. Entonces:*

(1) $L(f; \pi) \leq U(f; \pi)$.

(2) Si $\pi \leq \pi'$, se verifica $L(f; \pi) \leq L(f; \pi')$ y $U(f; \pi') \leq U(f; \pi)$.

(3) $L(f; \pi) \leq U(f; \pi')$.

Demostración. (1) es inmediato porque $m(f; J) \leq M(f; J)$ y $v(J) \geq 0$ para todo $J \in \pi$.

(2) Como $\pi \leq \pi'$, si $J \in \pi$, ocurre que:

(i) $v(J) = \sum\{v(H) : H \in \pi', v(H) > 0, H \subset J\}$.

(ii) Si $H \in \pi', H \subset J$ entonces $m(f; J) \leq m(f; H) \leq M(f; H) \leq M(f; J)$.

Por tanto, observando que los elementos $H \in \pi', v(H) > 0$, (que son los que cuentan) están dentro de un único $J \in \pi$, obtenemos:

$$L(f;\pi) = \sum_{J\in\pi} m(f;J)v(J) = \sum_{J\in\pi} m(f;J)\Big(\sum_{H\in\pi',v(H)>0,H\subset J} v(H)\Big) \leq$$

$$\leq \sum_{J\in\pi}\sum_{H\in\pi',v(H)>0,H\subset J} m(f;H)v(H) = \sum_{H\in\pi'} m(f;H)v(H) = L(f;\pi') \overset{(1)}{\leq}$$

$$\leq U(f;\pi') = \sum_{J\in\pi}\sum_{H\in\pi',v(H)>0,H\subset J} M(f;H)v(H) \leq$$

$$\leq \sum_{J\in\pi} M(f;J)\Big(\sum_{H\in\pi',v(H)>0,H\subset J} v(H)\Big) = \sum_{J\in\pi} M(f;J)v(J) = U(f;\pi).$$

(3) Sea $\pi_0 = \pi \vee \pi'$, que verifica $\pi, \pi' \leq \pi_0$. Se tiene que

$$L(f;\pi) \overset{(2)}{\leq} L(f;\pi_0) \overset{(1)}{\leq} U(f;\pi_0) \overset{(2)}{\leq} U(f;\pi').$$

■

1.3. La integral de Riemann

Definición 1.8. *Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto y $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos la integral de Riemann superior e inferior de f en I de la siguiente forma:*

(1) **Integral de Riemann superior** $\overline{\int}_I f$ *de f sobre I se define como*

$$\overline{\int}_I f := \text{ínf}\{U(f;\pi) : \pi \in \Pi(I)\}.$$

(2) **Integral de Riemann inferior** $\underline{\int}_I f$ *de f en I se define como*

$$\underline{\int}_I f := \sup\{L(f;\pi) : \pi \in \Pi(I)\}.$$

Trivialmente $\underline{\int}_I f \leq \overline{\int}_I f$. Decimos que f es **Riemann-integrable en** *I sii $f : I \to \mathbb{R}$ es acotada y se verifica $\underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f$, en cuyo caso* **la integral de Riemann** *$\int_I f$ de f en I se define como $\int_I f = \underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f$. Indicaremos por $\mathcal{R}(I)$ al conjunto de las funciones Riemann-integrables en I.*

NOTA. Es claro que si $I \subset \mathbb{R}^n$ es un intervalo compacto tal que $v(I) = 0$, entonces

$$\mathcal{R}(I) = \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ acotada}\} \quad \text{y} \quad \int_I f = 0, \quad \forall f \in \mathcal{R}(I).$$

En consecuencia, el caso $v(I) = 0$ carece de interés. De todos modos, la teoría que aquí se desarrolla es válida tanto en el caso interesante, es decir, cuando $v(I) > 0$, como en el caso sin interés con $v(I) = 0$.

Proposición 1.9. *(Criterio de Riemann) Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto y $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada. Son equivalentes:*

(1) $f \in \mathcal{R}(I)$.

(2) $\forall \epsilon > 0,\ \exists \pi \in \Pi(I)$, tal que $U(f;\pi) - L(f;\pi) \leq \epsilon$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de la Definición 1.8 y de la Proposición 1.7. ■

Proposición 1.10. *Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto y $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Entonces $f \in \mathcal{R}(I)$*

Demostración. Con objeto de aplicar el Criterio de Riemann, fijamos $\epsilon > 0$. Por ser I compacto y f continua, f es acotada y uniformemente continua. Por tanto, existe $\delta > 0$ tal que, si $x, y \in I$ verifican $\|x - y\| \leq \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon/(v(I) + 1)$. Sea $\pi \in \Pi(I)$ tal que $\|\pi\| \leq \delta$. Observemos que si $H \in \pi$ y $x, y \in H$, entonces $\|x - y\| \leq \delta$ (pues $\|\pi\| \leq \delta$) y de aquí que $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon/(v(I) + 1)$. Por tanto

$$M(f;H) - m(f;H) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in H\} \leq \frac{\epsilon}{v(I) + 1}.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} U(f;\pi) - L(f;\pi) &= \sum_{H\in\pi} (M(f;H) - m(f;H))v(H) \leq \\ &\leq \frac{\epsilon}{v(I) + 1} \sum_{H\in\pi} v(H) = \frac{\epsilon}{v(I) + 1} v(I) \leq \epsilon, \end{aligned}$$

de donde, al ser $\epsilon > 0$ arbitrario, sale que $f \in \mathcal{R}(I)$ por el Criterio de Riemann. ■

Proposición 1.11. *Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto y $f : I \to \mathbb{R}$ monótona. Entonces $f \in \mathcal{R}(I)$*

Demostración. Sea $I = [a, b]$ con $a \leq b$. Supondremos que f es monótona creciente (el caso decreciente es análogo). Entonces, como todo $x \in I$ verifica $a \leq x \leq b$, se tiene $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. En particular, f es acotada en I, digamos, $|f(x)| \leq M < \infty, \forall x \in I$. Con vista a aplicar el Criterio de Riemann, fijemos $\epsilon > 0$. Por cada $m \in \mathbb{N}$ dividimos cada arista de I en m partes iguales y obtenemos la correspondiente partición de tipo grilla π_m de I. Observemos que todos los elementos de π_m son iguales entre sí (todos tienen el mismo volumen) y $\|\pi_m\| \downarrow 0$ para $m \to \infty$. Si $J \in \pi_m$ no es lateral, es decir, $J \cap \partial I = \emptyset$, los extremos inicial y final de J son los extremos final e inicial, respectivamente, de ciertos otros elementos de π_m. Definamos:

(1) $AREA_{lat}(I)$ = Área lateral de I = suma de las áreas ó volúmenes $(n-1)$-dimensionales de las caras de $I = \sum\{v(C) : C \text{ cara de } I\}$. Observemos que si C es cara de I, C es un rectángulo compacto en $\mathbb{R}^{n-1}$ y su volumen ($n-1$-dimensional) $v(C)$ está perfectamente definido.

(2) $VOL_{lat}(\pi_m)$ = Volumen lateral de $\pi_m = \sum\{v(J) : J \in \pi_m, J \cap \partial I \neq \emptyset\}$.

Aserto. $VOL_{lat}(\pi_m) \leq AREA_{lat}(I) \cdot \|\pi_m\|$.

En efecto, si C es una cara de I, es inmediato que

$$\sum\{v(H) : H \in \pi_m, H \cap C \neq \emptyset\} \leq v(C) \cdot \|\pi_m\|.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} VOL_{lat}(\pi_m) &\leq \sum_{C \text{ cara de } I} \sum\{v(H) : H \in \pi_m, H \cap C \neq \emptyset\} \leq \\ &\leq \sum_{C \text{ cara de } I} v(C) \cdot \|\pi_m\| = AREA_{lat}(I) \cdot \|\pi_m\|. \end{aligned}$$

Hacemos $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $\|\pi_m\|$ sea tan pequeño que se verifique $VOL_{lat}(\pi_m) \leq \epsilon/(2M+1)$. Sea $v(J) = a = cte, \forall J \in \pi_m$. La contribución de un elemento $J = [u, v] \in \pi_m$ a la diferencia $U(f; \pi_m) - L(f; \pi_m)$ es $a(f(v) - f(u))$. Cuando esta contribución se suma a la de los demás subintervalos de π_m, se presentan dos situaciones, dependiendo de si J es lateral ó no, a saber:

(a) Si J no es lateral, u será el elemento final de cierto $H_1 \in \pi_m$, que contribuye con $af(u)$, y v el elemento inicial de cierto $H_2 \in \pi_m$, que contribuye con $-af(v)$. En consecuencia, la contribución de J se cancela con (parte de) las contribuciones de H_1 y H_2. Nos podemos olvidar de J.

(b) Supongamos que J es lateral. Puede que ó bien $af(v)$ ó bien $-af(u)$ no se cancele con nadie. Así que, hechas las cancelaciones con otros subintervalos, queda una de las siguientes cantidades: 0, $a(f(v) - f(u))$, $-af(u)$, $af(v)$. En cualquier caso, su contribución es $\leq 2Ma$, porque cualquiera de las anteriores cantidades es $\leq 2Ma$.

En consecuencia

$$U(f; \pi_m) - L(f; \pi_m) \leq \sum_{H \in \pi_m, H \cap \partial I \neq \emptyset} 2Ma = 2M \cdot VOL_{lat}(\pi_m) \leq 2M \frac{\epsilon}{2M+1} \leq \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, del Criterio de Riemann se deduce el enunciado. ■

Proposición 1.12. *Sea $I \subset \mathbb{R}^n$ un intervalo compacto.*

(1) $(\mathcal{R}(I), +, *)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Además, si $f, g \in \mathcal{R}(I)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g.$$

Es decir, el operador $\int_I : \mathcal{R}(I) \to \mathbb{R}$ es lineal.

(2) Si $f \in \mathcal{R}(I)$ y $f \geq 0$, entonces $\int_I f \geq 0$.

(3) Si $f, g \in \mathcal{R}(I)$ y $f \leq g$, entonces $\int_I f \leq \int_I g$.

Demostración. (1) Sean $f, g \in \mathcal{R}(I),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Queremos probar que $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(I)$ y que $\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g$.

(11) En primer lugar, veamos que $f + g \in \mathcal{R}(I)$ y que $\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$. Es claro que $f + g$ es función acotada en I y que para todo subintervalo compacto $H \subset I$ se verifica

$$m(f; H) + m(g; H) \leq m(f+g; H) \leq M(f+g; H) \leq M(f; H) + M(g; H).$$

De aquí sale que para toda partición $\pi \in \Pi(I)$ se tiene

$$L(f;\pi) + L(g;\pi) \leq L(f+g;\pi) \leq U(f+g;\pi) \leq U(f;\pi) + U(g;\pi). \tag{1.1}$$

Sea $\epsilon > 0$ y $\pi \in \Pi(I)$ tal que

$$-\tfrac{\epsilon}{4} + \int_I f \leq L(f;\pi) \leq U(f;\pi) \leq \int_I f + \tfrac{\epsilon}{4}, \quad -\tfrac{\epsilon}{4} + \int_I g \leq L(g;\pi) \leq U(g;\pi) \leq \int_I g + \tfrac{\epsilon}{4}.$$

Combinando estas desigualdades con (1.1) sale que

$$\begin{aligned} -\tfrac{\epsilon}{2} + \int_I f + \int_I g \leq L(f;\pi) + L(g;\pi) \leq L(f+g;\pi) \leq \\ \leq U(f+g;\pi) \leq U(f;\pi) + U(g;\pi) \leq \int_I f + \int_I g + \tfrac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Por tanto $U(f+g;\pi) - L(f+g;\pi) \leq \epsilon$, lo que por el Criterio de Riemann implica que $f + g \in \mathcal{R}(I)$. Además, de (1.2) sale que

$$-\tfrac{\epsilon}{2} + \int_I f + \int_I g \leq L(f+g;\pi) \leq \int_I (f+g) \leq U(f+g;\pi) \leq \int_I f + \int_I g + \tfrac{\epsilon}{2},$$

es decir, $|\int_I (f+g) - (\int_I f + \int_I g)| \leq \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que

$$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g.$$

(12) Veamos que $\alpha f \in \mathcal{R}(I)$ y que $\int_I \alpha f = \alpha \int_I f$.

(121) Si $\alpha = 0$, entonces $\alpha f = 0$ y el resultado es obvio.

(122) Si $\alpha > 0$, para cada $\pi \in \Pi(I)$ ocurre que $L(\alpha f;\pi) = \alpha L(f;\pi)$ y $U(\alpha f;\pi) = \alpha U(f;\pi)$. Sean $\epsilon > 0$ y $\pi \in \Pi(I)$ tales que

$$-\tfrac{\epsilon}{2\alpha} + \int_I f \leq L(f;\pi) \leq U(f;\pi) \leq \int_I f + \tfrac{\epsilon}{2\alpha},$$

es decir,

$$-\tfrac{\epsilon}{2} + \alpha \int_I f \leq \alpha L(f;\pi) = L(\alpha f;\pi) \leq U(\alpha f;\pi) = \alpha U(f;\pi) \leq \alpha \int_I f + \tfrac{\epsilon}{2}.$$

De aquí sale inmediatamente que:

(i) $U(\alpha f;\pi) - L(\alpha f;\pi) \leq \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, del Criterio de Riemann obtenemos que $\alpha f \in \mathcal{R}(I)$.

(ii) $|\int_I \alpha f - \alpha \int_I f| \leq \epsilon/2$. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, obtenemos que $\int_I \alpha f = \alpha \int_I f$.

(123) Si $\alpha < 0$, para cada $\pi \in \Pi(I)$ se verifica que $L(\alpha f;\pi) = \alpha U(f;\pi)$ y $U(\alpha f;\pi) = \alpha L(f;\pi)$. Un argumento análogo al de (122) prueba que $\alpha f \in \mathcal{R}(I)$ y que $\int_I \alpha f = \alpha \int_I f$.

De (11) y (12) sale (1).

(2) Observemos que, si $f \geq 0$, entonces, para toda $\pi \in \Pi(I)$, se verifica $0 \leq L(f;\pi)$, es decir, $0 \leq \underline{\int}_I f = \int_I f$.

(3) $g - f \in \mathcal{R}(I)$ y $\int_I (g-f) = \int_I g - \int_I f$ por (1). Por (2), como $g - f \geq 0$, obtenemos $\int_I (g-f) \geq 0$. En consecuencia $\int_I f \leq \int_I g$. ■

1.4. El Teorema de composición. Aplicaciones

Proposición 1.13. *(Teorema de composición) Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ intervalo compacto, $J \subset \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}(I)$ tal que $f(I) \subset J$ y $\varphi : J \to \mathbb{R}$ uniformemente continua acotada (esto ocurre, por ejemplo, si φ es continua y J es un compacto de $\mathbb{R}$). Entonces $\varphi \circ f \in \mathcal{R}(I)$.*

Demostración. Con objeto de aplicar el Criterio de Riemann, fijamos $\epsilon > 0$. Sea $K = \sup\{|\varphi(t)| : t \in J\}$ y $\epsilon' = \epsilon/(v(I) + 2K + 1)$. Como φ es uniformemente continua sobre J, existe $\epsilon' > \delta > 0$ tal que, si $s, t \in J$ y $|s - t| \leq \delta$, entonces $|\varphi(s) - \varphi(t)| \leq \epsilon'$. Sea $\pi := \{I_1, ..., I_k\} \in \Pi(I)$ tal que

$$U(f;\pi) - L(f;\pi) \leq \delta^2.$$

Queremos probar que

$$U(\varphi \circ f;\pi) - L(\varphi \circ f;\pi) \leq \epsilon.$$

Pongamos

$$m_j := m(f;I_j),\ \tilde{m}_j := m(\varphi \circ f;I_j),\ M_j := M(f;I_j),\ \tilde{M}_j := M(\varphi \circ f;I_j),\ j = 1, 2, ..., k,$$

y sean

$$A := \{j \in \{1, ..., k\} : M_j - m_j \leq \delta\},\ B = \{1, ..., k\} \setminus A.$$

Si $j \in A$, para todo par $x, y \in I_j$ se tiene

$$|f(x) - f(y)| \leq M_j - m_j \leq \delta \ \Rightarrow\ |\varphi \circ f(x) - \varphi \circ f(y)| \leq \epsilon' \ \Rightarrow\ \tilde{M}_j - \tilde{m}_j \leq \epsilon',$$

de donde sale que

$$\sum_{j\in A}(\tilde{M}_j - \tilde{m}_j)v(I_j) \leq \epsilon' \cdot v(I). \tag{1.3}$$

Por otra parte, si $j \in B$, entonces $\tilde{M}_j - \tilde{m}_j \leq 2K$ por lo que

$$\sum_{j\in B}(\tilde{M}_j - \tilde{m}_j)v(I_j) \leq 2K \cdot \sum_{j\in B} v(I_j).$$

Como $M_j - m_j \geq \delta,\ \forall j \in B$, se tiene que

$$\sum_{j\in B} v(I_j) \leq \tfrac{1}{\delta} \cdot \sum_{j\in B}(M_j - m_j)v(I_j) \leq \tfrac{1}{\delta}(U(f;\pi) - L(f;\pi)) \leq \delta < \epsilon',$$

de donde sale que

$$\sum_{j\in B}(\tilde{M}_j - \tilde{m}_j)v(I_j) \leq 2K \cdot \epsilon'. \tag{1.4}$$

Finalmente, combinando las desigualdades (1.3) y (1.4) obtenemos

$$U(\varphi\circ f;\pi) - L(\varphi\circ f;\pi) = \sum_{j=1}^{k}(\tilde{M}_j - \tilde{m}_j)v(I_j) =$$
$$= \sum_{j\in A}(\tilde{M}_j - \tilde{m}_j)v(I_j) + \sum_{j\in B}(\tilde{M}_j - \tilde{m}_j)v(I_j) \leq \epsilon' \cdot v(I) + 2K\cdot\epsilon' \leq \epsilon.$$

■

Corolario 1.14. *Sea $I \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto. Entonces:*
(1) Si $f \in \mathcal{R}(I)$, se tiene que $f^+, f^-, |f| \in \mathcal{R}(I)$ y

$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-, \quad \left|\int_I f\right| \leq \int_I |f| = \int_I f^+ + \int_I f^-.$$

(2) Si $f \in \mathcal{R}(I)$ y $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $f^n \in \mathcal{R}(I)$.
(3) Si $f \in \mathcal{R}(I)$ y $\exists\delta > 0$ tal que $|f(x)| \geq \delta,\ \forall x \in I$, se tiene que $\frac{1}{f} \in \mathcal{R}(I)$.
(4) Si $f, g \in \mathcal{R}(I)$, se tiene que $fg \in \mathcal{R}(I)$.

Demostración. (1) La aplicación $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = x^+ := x \vee 0$ es continua y, por tanto, uniformemente continua acotada en $J := f(I) \cup (-f(I))$, que es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$. Como $f^+ = \varphi \circ f$ y $f^- = \varphi \circ (-f)$, del Teorema de composición (Proposición 1.13) deducimos que $f^+, f^- \in \mathcal{R}(I)$. Ya que $f = f^+ - f^-$, se tiene que $\int_I f = \int_I (f^+ - f^-) = \int_I f^+ - \int_I f^-$ por la Proposición 1.12. También de la Proposición 1.12 sale que $|f| \in \mathcal{R}(I)$, pues $|f| = f^+ + f^-$, y además

$$\left|\int_I f\right| = \left|\int_I f^+ - \int_I f^-\right| \leq \int_I f^+ + \int_I f^- = \int_I (f^+ + f^-) = \int_I |f|.$$

(2) La aplicación $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = x^n$ es continua (por tanto uniformemente continua acotada en $J := f(I)$, que es un acotado de $\mathbb{R}$) y $f^n = \varphi \circ f$. Ahora basta aplicar el Teorema de composición (Proposición 1.13).

(3) La aplicación $\varphi : \mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = 1/x$ es uniformemente continua acotada en $\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)$, $f(I) \subset \mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)$ y $1/f = \varphi \circ f$. A continuación aplicamos el Teorema de composición (Proposición 1.13).

(4) De lo que se ha probado hasta aquí sale que $f + g, (f + g)^2, f^2, g^2 \in \mathcal{R}(I)$. Finalmente basta observar que $fg = \frac{1}{2}[(f + g)^2 - f^2 - g^2]$ y aplicar la Proposición 1.12.
■

1.5. El Teorema de Riemann

Lema 1.15. *Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto, $\pi^* := \{E_1, ..., E_s\} \in \Pi(I)$ y $\epsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que, si $\pi \in \Pi(I)$ verifica $\|\pi\| \leq \delta$, entonces la suma de los volúmenes de los subintervalos de π no contenidos en ningún subintervalo de π^* es menor ó igual que ϵ.*

Demostración. Elegimos $\delta > 0$ suficientemente pequeño de modo que

$$\sum_{i=1}^{s} (v(\tilde{E}_i) - v(\underset{\sim}{E}_i)) \leq \epsilon,$$

siendo $\tilde{E}_i$ (resp., $\underset{\sim}{E}_i$) el δ-orlado por fuera (resp., por dentro) de E_i. Sea $\pi \in \Pi(I)$ con $\|\pi\| \leq \delta$. Observemos que

(a) Si $J \in \pi$ es tal que J no está contenido en ningún E_i, $i = 1, ..., s$, entonces existe $p \in \{1, ..., s\}$ tal que $J \cap \partial E_p \neq \emptyset$.

(b) Si $p \in \{1, ..., s\}$, $\{J \in \pi : J \cap \partial E_p \neq \emptyset\} \cup \{\underset{\sim}{E}_p\}$ es una familia de subintervalos casi-disjuntos de $\tilde{E}_p$. Por (E) de la Proposición 1.5 se verifica

$$\sum_{J \in \pi, J \cap \partial E_p \neq \emptyset} v(J) + v(\underset{\sim}{E}_p) \leq v(\tilde{E}_p),$$

es decir

$$\sum_{J \in \pi, J \cap \partial E_p \neq \emptyset} v(J) \leq v(\tilde{E}_p) - v(\underset{\sim}{E}_p).$$

Por tanto

$$\sum_{J \in \pi, J \not\subseteq E_p, 1 \leq p \leq s} v(J) \leq \sum_{p=1}^{s} \sum_{J \in \pi, J \cap \partial E_p \neq \emptyset} v(J) \leq \sum_{p=1}^{s} (v(\tilde{E}_p) - v(\underset{\sim}{E}_p)) \leq \epsilon.$$

■

Definición 1.16. *Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto, $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada, $\pi := \{I_1, ..., I_k\} \in \Pi(I)$ y $\xi := (x_1, ..., x_k)$ una selección para π (es decir, $x_i \in I_i$, $i = 1, ..., k$). La* **suma de Riemann de f relativa a π y ξ** *se denota por $S(f; \pi; \xi)$ y se define de la siguiente forma*

$$S(f; \pi; \xi) := \sum_{i=1}^{k} f(x_i) v(I_i).$$

Proposición 1.17. *[Teorema de Riemann] Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto y $f \in \mathcal{R}(I)$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $\pi := \{I_1, ..., I_k\} \in \Pi(I)$ con $\|\pi\| \le \delta$, para toda k-upla $\xi := (x_1, ..., x_k)$ selección para π se verifica $|\int_I f - S(f; \pi; \xi)| < \epsilon$.*

Demostración. Sean $M := \sup\{|f(x)| : x \in I\} + 1$ y $\pi^* := \{E_1, ..., E_s\} \in \Pi(I)$ tales que $U(f; \pi^*) - L(f; \pi^*) < \epsilon/2$. Sea $\delta > 0$ el número obtenido en el Lema 1.15 para π^* y $\epsilon/(4M) > 0$. Sea $\pi := \{I_1, ..., I_r, I_{r+1}, ..., I_k\} \in \Pi(I)$ con $\|\pi\| \le \delta$ de modo que cada subintervalo $I_1, ..., I_r$ está contenido en algún subintervalo de π^*, mientras que ningún subintervalo $I_{r+1}, ..., I_k$ lo está. Se tiene que $\sum_{i=r+1}^{k} v(I_i) \le \epsilon/(4M)$ por el Lema 1.15. Sea $\xi := (x_1, ..., x_k)$ una selección para π. Entonces

$$\begin{aligned} S(f; \pi; \xi) &= \sum_{i=1}^{r} f(x_i) v(I_i) + \sum_{i=r+1}^{k} f(x_i) v(I_i) \le \sum_{j=1}^{s} \sum_{I_i \subset E_j} M(f; E_j) v(I_i) + M \tfrac{\epsilon}{4M} = \\ &= \sum_{j=1}^{s} M(f; E_j) v(E_j) + \sum_{j=1}^{s} (-M(f; E_j))[v(E_j) - \sum_{I_i \subset E_j} v(I_i)] + \tfrac{\epsilon}{4} \le \\ &\le U(f; \pi^*) + M \sum_{i=r+1}^{k} v(I_i) + \tfrac{\epsilon}{4} \le U(f; \pi^*) + \tfrac{\epsilon}{4} + \tfrac{\epsilon}{4} = U(f; \pi^*) + \tfrac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} S(f; \pi; \xi) &= \sum_{i=1}^{r} f(x_i) v(I_i) + \sum_{i=r+1}^{k} f(x_i) v(I_i) \ge \sum_{j=1}^{s} \sum_{I_i \subset E_j} m(f; E_j) v(I_i) - M \tfrac{\epsilon}{4M} = \\ &= \sum_{j=1}^{s} m(f; E_j) v(E_j) + \sum_{j=1}^{s} (-m(f; E_j))[v(E_j) - \sum_{I_i \subset E_j} v(I_i)] - \tfrac{\epsilon}{4} \ge \\ &\ge L(f; \pi^*) - M \sum_{j=1}^{s} [v(E_j) - \sum_{I_i \subset E_j} v(I_i)] - \tfrac{\epsilon}{4} = \\ &= L(f; \pi^*) - M \sum_{i=r+1}^{k} v(I_i) - \tfrac{\epsilon}{4} \ge L(f; \pi^*) - \tfrac{\epsilon}{4} - \tfrac{\epsilon}{4} = L(f; \pi^*) - \tfrac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$-\tfrac{\epsilon}{2} + L(f; \pi^*) \le S(f; \pi; \xi) \le U(f; \pi^*) + \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Como, por otra parte $U(f;\pi^*) - L(f;\pi^*) < \epsilon/2$, obtenemos también que

$$-\tfrac{\epsilon}{2} + \int_I f < L(f;\pi^*) \le U(f;\pi^*) < \int_I f + \tfrac{\epsilon}{2},$$

y finalmente

$$-\epsilon + \int_I f < -\tfrac{\epsilon}{2} + L(f;\pi^*) \le S(f;\pi;\xi) \le U(f;\pi^*) + \tfrac{\epsilon}{2} < \int_I f + \epsilon \;\Leftrightarrow\; |\int_I f - S(f;\pi;\xi)| < \epsilon,$$

que es el resultado buscado. ■

Corolario 1.18. *Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto y $f : I \to \mathbb{R}$.*

(a) Si f es acotada, son equivalentes:
(a1) $f \in \mathcal{R}(I)$.
(a2) Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\pi_1, \pi_2 \in \Pi(I)$ verifican $\|\pi_i\| \le \delta,\ i = 1, 2$, y ξ_i es selección para $\pi_i,\ i = 1, 2$, entonces $|S(f;\pi_1;\xi_1) - S(f;\pi_2;\xi_2)| \le \epsilon$.

(b) Si $f \in \mathcal{R}(I)$, para toda secuencia de pares $\{(\pi_m, \xi_m) : m \ge 1\}$ tal que $\pi_m \in \Pi(I)$ con $\|\pi_m\| \to 0$ y ξ_m selección para $\pi_m,\ m \ge 1$, se verifica que $S(f;\pi_m;\xi_m) \underset{m\to\infty}{\to} \int_I f$.

Demostración. (a) La implicación $(a1) \Rightarrow (a2)$ sale inmediatamente del Teorema de Riemann (Proposición 1.17).

$(a2) \Rightarrow (a1)$. Observemos que si $\pi \in \Pi(I)$, entonces:

$$L(f;\pi) = \text{ínf}\{S(f;\pi;\xi) : \xi \text{ selección para } \pi\}$$

y

$$U(f;\pi) = \sup\{S(f;\pi;\xi) : \xi \text{ selección para } \pi\}.$$

Sea $\epsilon > 0$. Por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que, si $\pi_1, \pi_2 \in \Pi(I)$ verifican $\|\pi_i\| \le \delta,\ i = 1, 2$, y ξ_i es selección para $\pi_i,\ i = 1, 2$, entonces $|S(f;\pi_1;\xi_1) - S(f;\pi_2;\xi_2)| \le \epsilon$. En consecuencia, si $\pi \in \Pi(I)$ y $\|\pi\| \le \delta$ se verifica:

$$\begin{gathered} U(f;\pi) - L(f;\pi) = \\ = \sup\{S(f;\pi;\xi_1) : \xi_1 \text{ selección para } \pi\} - \text{ínf}\{S(f;\pi;\xi_2) : \xi_2 \text{ selección para } \pi\} = \\ = \sup\{S(f;\pi;\xi_1) - S(f;\pi;\xi_2) : \xi_i \text{ selección para } \pi, i = 1, 2\} \le \epsilon, \end{gathered}$$

y este hecho, por el Criterio de Riemann (Proposición 1.9), prueba que $f \in \mathcal{R}(I)$.

(b) sale sin dificultad del Teorema de Riemann (Proposición 1.17). ■

Capítulo 2

Medida 0 y contenido 0. El Teorema de Lebesgue

2.1. Introducción

Definición 2.1. *Sea* $A \subset \mathbb{R}^n$*.*

(a) Decimos que A *es de* **medida** 0 *(n-dimensional) sii para todo* $\epsilon > 0$ *existe una familia contable* $\{I_k : k \geq 1\}$ *de rectángulos compactos de* $\mathbb{R}^n$ *tales que* $A \subset \bigcup_{k\geq 1} I_k$ *y* $\sum_{k\geq 1} v(I_k) \leq \epsilon$*.*

(b) Decimos que A *es de* **contenido** 0 *(n-dimensional) sii para todo* $\epsilon > 0$ *existe una familia finita* $\{I_1, ..., I_m\}$ *de rectángulos compactos de* $\mathbb{R}^n$ *tales que* $A \subset \bigcup_{k=1}^{m} I_k$ *y* $\sum_{k=1}^{m} v(I_k) \leq \epsilon$*. Obviamente todo conjunto de contenido* 0 *es acotado.*

NOTA. (1) En la anterior definición, en lugar de intervalos cerrados, se pueden coger intervalos abiertos, porque todo intervalo cerrado J se puede orlar por fuera hasta obtener otro intervalo abierto $\tilde{J}$ tal que $v(\tilde{J}) - v(J)$ sea arbitrariamente pequeño.

(2) Toda colección contable $\{x_k : k \geq 1\}$ de puntos de $\mathbb{R}^n$ tiene medida 0, pero puede no ser de contenido 0. Por ejemplo, el subconjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ es contable, tiene medida 0 pero no es de contenido 0 ya que no es acotado.

(3) Toda colección contable acotada $\{x_k : k \geq 1\}$ de puntos de $\mathbb{R}^n$ tiene medida 0, pero puede no ser de contenido 0. Por ejemplo, el subconjunto $A := [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ es contable, tiene medida 0 pero no es de contenido 0.

Proposición 2.2. *Sean* $A, A_k \subset \mathbb{R}^n, k \geq 1$*, tales que* $A \subset \bigcup_{k\geq 1} A_k$ *y cada* A_k *es medida* 0*. Entonces* A *es medida* 0*.*

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $\{E_{ki} : i \geq 1\}$ una secuencia de intervalos compactos que recubre A_k verificando $\sum_{i\geq 1} v(E_{ki}) \leq \epsilon/2^k, \ \forall k \geq 1$. Entonces $\mathcal{F} := \{E_{ki} : k, i \geq 1\}$ es una colección contable de intervalos compactos que recubre A verificando

$$\sum_{k,i\geq 1} v(E_{ki}) = \sum_{k\geq 1}\sum_{i\geq 1} v(E_{ki}) \leq \sum_{k\geq 1} \epsilon/2^k = \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que A tiene medida 0. ■

Proposición 2.3. *(a) Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto compacto, son equivalentes:(a1) K es contenido 0; (a2) K es medida 0.*

(b) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto, son equivalentes: (b1) $\overline{A}$ es de contenido 0; (b2) A es de contenido 0.

Demostración. (a) La implicación $(a1) \Rightarrow (a2)$ es obvia. Veamos la implicación $(a2) \Rightarrow (a1)$. Sea $\epsilon > 0$. Por hipótesis existe una secuencia de intervalos abiertos $\{E_i : i \geq 1\}$ que recubre K verificando $\sum_{i\geq 1} v(E_i) \leq \epsilon$. Como K es compacto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^m E_i$ y, obviamente, $\sum_{i=1}^m v(E_i) \leq \epsilon$. En consecuencia, K es de contenido 0.

(b) Como trivialmente $(b1) \Rightarrow (b2)$, probemos que $(b2) \Rightarrow (b1)$. En primer término $\overline{A}$ es un compacto y por tanto acotado, porque A es acotado. Sea $\epsilon > 0$. Por hipótesis existe una familia finita de intervalos compactos $I_1, ..., I_r$ tales que $\sum_{i=1}^r v(I_i) \leq \epsilon$ y $A \subset \bigcup_{i=1}^r I_i$. Por tanto

$$\overline{A} \subset \overline{\cup_{i=1}^r I_i} = \cup_{i=1}^r I_i.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, sale que $\overline{A}$ es de contenido 0. ■

2.2. La oscilación

Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto, $f : I \to \mathbb{R}$, $x \in I$ y $r > 0$. Si $A \subset \mathbb{R}^n$, el número

$$\begin{aligned} O(f;A) :&= \sup\{f(y) : y \in A \cap I\} - \inf\{f(z) : z \in A \cap I\} \\ &= \sup\{f(y) - f(z) : y, z \in A \cap I\} \end{aligned}$$

recibe el nombre de *oscilación de f en A*. La *oscilación de f en x* relativa a I es el número $O(f;x)$ definido por

$$O(f;x) := \lim_{r\downarrow 0} O(f; B(x,r)).$$

Observemos que el límite anterior siempre existe porque los números $O(f;B(x,r))$ decrecen con r. Si $\epsilon \geq 0$, definimos

$$D_\epsilon := \{x \in I : O(f;x) \geq \epsilon\}.$$

Se verifican trivialmente las siguientes propiedades:

(i) $\forall A \subset \mathbb{R}^n$, $M(f; I \cap A) - m(f; I \cap A) = O(f;A) \geq 0$.
(ii) $\forall x \in I$, $O(f;x) \geq 0$.
(iii) Si $x \in I$, entonces $O(f;x) = 0$ sii f es continua en x.
(iv) D_ϵ es un subconjunto cerrado -y por tanto compacto- de I, para todo $\epsilon \geq 0$.

2.3. El Teorema de Lebesgue

Proposición 2.4. *[Teorema de Lebesgue] Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ un intervalo compacto, $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada y $D := \{x \in I : f$ discontinua en $x\}$. Son equivalentes:*
(1) D es medida 0; (2) $f \in \mathcal{R}(I)$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sean

$$\epsilon > 0,\ \eta := \frac{\epsilon}{2v(I)+1} \text{ y } D_\eta := \{x \in I : O(f;x) \geq \eta\}.$$

Sabemos que D_η es compacto y que tiene medida 0 (porque $D_\eta \subset D$ y D tiene medida 0 por hipótesis). Por tanto, D_η es contenido 0 por la Proposición 2.3. En consecuencia, existe una familia finita $\{I_i : i = 1, ..., m\}$ de intervalos compactos de $\mathbb{R}^n$ tales que

$$D_\eta \subset \bigcup_{i=1}^{m} \overset{\circ}{I}_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{m} v(I_i) \leq \tfrac{\epsilon}{4M+1},$$

siendo $M := \sup\{|f(x)| : x \in I\}$. Sea $x \in I \setminus D_\eta$. Como $O(f;x) < \eta$ y $x \in {}^cD_\eta$, que es abierto, existe un intervalo compacto $I_x \subset \mathbb{R}^n$ tal que $x \in \overset{\circ}{I}_x$ y $O(f;I_x) < \epsilon/(2v(I)+1)$. Puesto que I es compacto y la familia de abiertos

$$\{\overset{\circ}{I}_x : x \in I \setminus D_\eta\} \cup \{\overset{\circ}{I}_i : i = 1, ..., m\}$$

recubre I, existe una subfamilia finita, extraída de la anterior, que también recubre I. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$I \subset (\bigcup_{j=1}^{p} I_{x_j}) \cup (\bigcup_{i=1}^{m} I_i).$$

Sea $\pi \in \Pi(I)$ la partición grilla subordinada a la familia de subintervalos $\{I \cap I_{x_j} : j = 1, ..., p\} \cup \{I \cap I_i : i = 1, ..., m\}$ de I. Definimos

$$\mathcal{S}_1 := \{J \in \pi : J \subset I_i \text{ para algún } i = 1, ..., m\} \text{ y } \mathcal{S}_2 := \pi \setminus \mathcal{S}_1.$$

Observemos que, si $J \in \mathcal{S}_2$ con $v(J) > 0$, entonces $J \subset I_{x_j}$ para algún $j = 1, ..., p$ (por (c) de NOTA (B), Cap. 1), por lo que

$$M(f;J) - m(f;J) = O(f;J) \leq O(f;I_{x_j}) < \frac{\epsilon}{2v(I)+1}. \tag{2.1}$$

Por tanto aplicando (2.1), que $|M(f;J) - m(f;J)| \leq 2M$ y el punto (E) de la Proposición 1.5 sale que

$$\begin{aligned}
U(f;\pi) - L(f;\pi) &= \sum_{J \in \mathcal{S}_1} (M(f;J) - m(f;J))v(J) + \sum_{J \in \mathcal{S}_2, v(J)>0} (M(f;J) - m(f;J))v(J) \leq \\
&\leq 2M \cdot \sum_{i=1}^{m} \sum_{J \in \pi, J \subset I_i} v(J) + \frac{\epsilon}{2v(I)+1} \cdot \sum_{J \in \mathcal{S}_2} v(J) \\
&\leq 2M \cdot \sum_{i=1}^{m} v(I_i) + \frac{\epsilon}{2v(I)+1} v(I) \leq 2M \frac{\epsilon}{4M+1} + \frac{\epsilon}{2v(I)+1} v(I) \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, esto prueba que $f \in \mathcal{R}(I)$ por el Criterio de Riemann (Proposición 1.9).

(2) $\Rightarrow$ (1). Sea $f \in \mathcal{R}(I)$. Puesto que $D = \bigcup_{k\geq 1} D_{1/k}$, por la Proposición 2.2 bastará probar que, $\forall k \geq 1$, $D_{1/k}$ tiene medida 0, lo que, por la Proposición 2.3, equivale a decir que cada $D_{1/k}$ es de contenido 0, pues $D_{1/k}$ es compacto. Así que fijamos $m \in \mathbb{N}$ y probamos que $D_{1/m}$ es de contenido 0. Sean $\epsilon > 0$ y $\pi \in \Pi(I)$ tales que $U(f;\pi) - L(f;\pi) < \epsilon/m$. Sea $\mathcal{S}_1 := \{J \in \pi : \overset{\circ}{J} \cap D_{1/m} \neq \emptyset\}$ y $\mathcal{S}_2 := \pi \setminus \mathcal{S}_1$. Si $J \in \mathcal{S}_1$, J es entorno de algún punto de $D_{1/m}$ (porque $D_{1/m} \cap \overset{\circ}{J} \neq \emptyset$), por lo que

$$\forall J \in \mathcal{S}_1, \quad M(f;J) - m(f;J) \geq \frac{1}{m}. \tag{2.2}$$

Sea $x \in D_{1/m} \setminus (\cup\{J : J \in \mathcal{S}_1\})$. Como $x \in \cup\{J : J \in \mathcal{S}_2\}$ pero $x \notin \cup\{\overset{\circ}{J} : J \in \mathcal{S}_2\}$ (si $x \in \overset{\circ}{J}$ para cierto $J \in \mathcal{S}_2$, resultaría $D_{1/m} \cap \overset{\circ}{J} \neq \emptyset$ porque $x \in D_{1/m}$, lo que no puede ser pues $J \in \mathcal{S}_2$), existe $J \in \mathcal{S}_2$ tal que $x \in \partial J$. Como $\cup\{\partial J : J \in \mathcal{S}_2\}$ es la unión de una familia finita de intervalos degenerados (son las caras de los $J \in \mathcal{S}_2$), digamos

$$\cup\{\partial J : J \in \mathcal{S}_2\} = I_1 \cup .... \cup I_p,$$

concluimos que

$$D_{1/m} \subset (\cup\{J : J \in \mathcal{S}_1\}) \cup (\bigcup_{i=1}^{p} I_i). \tag{2.3}$$

Por otra parte aplicando (2.2) sale que

$$\tfrac{1}{m} \sum_{J\in\mathcal{S}_1} v(J) \leq \sum_{J\in\mathcal{S}_1} (M(f;J) - m(f;J))v(J) \leq U(f;\pi) - L(f;\pi) < \frac{\epsilon}{m},$$

es decir, $\sum_{J\in\mathcal{S}_1} v(J) < \epsilon$. En consecuencia, como $\sum_{i=1}^{p} v(I_i) = 0$, obtenemos que

$$\sum_{j\in\mathcal{S}_1} v(J) + \sum_{i=1}^{p} v(I_i) = \sum_{J\in\mathcal{S}_1} v(J) < \epsilon.$$

Teniendo en cuenta que $\epsilon > 0$ es arbitrario y (2.3), concluimos que $D_{1/m}$ es de contenido 0. ■

Proposición 2.5. *Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ intervalo compacto y $f : I \to \mathbb{R}$ función acotada. Son equivalentes:*

(1) $f \in \mathcal{R}(I)$.

(2) D_ϵ tiene medida 0 para todo $\epsilon > 0$.

(3) D_ϵ es de contenido 0 para todo $\epsilon > 0$.

Demostración. Sale inmediatamente del hecho $D = \bigcup_{k\geq 1} D_{1/k}$, del Teorema de Lebesgue (Proposición 2.4), de la Proposición 2.3 y de la Proposición 2.2. ■

Si $C \subset \mathbb{R}^n$, la función característica $\mathbb{1}_C$ de C se define de la siguiente forma

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad , \mathbb{1}_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in C \\ 0 & \text{si } x \notin C \ . \end{cases}$$

Proposición 2.6. *Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ intervalo compacto y $C \subset I$ un subconjunto. Son equivalentes:*

(1) $\mathbb{1}_C \in \mathcal{R}(I)$.

(2) ∂C tiene medida 0.

(3) ∂C es de contenido 0.

Demostración. (1) ⇒ (2). Si $x \in \partial C$, entonces ó $x \in \partial I$ ó $x \in \overset{\circ}{I}$ y, en este último caso, $\mathbb{1}_C$ es discontinua en x (respecto tanto de $\mathbb{R}^n$ como de I), es decir, $x \in D := \{z \in I : O(\mathbb{1}_C; z) > 0\}$ = puntos de discontinuidad de $\mathbb{1}_C$ en I. Así que $\partial C \subset \partial I \cup D$. Sabemos que ∂I es de contenido 0 y que D es medida 0 pues $\mathbb{1}_C \in \mathcal{R}(I)$ por hipótesis (Teorema de Lebesgue). Por tanto ∂C tiene medida 0.

(2) ⇒ (1). Si $x \in I$ verifica $x \in D$, es decir, x es un punto de discontinuidad de $\mathbb{1}_C$ en I, necesariamente $x \in \partial C$. En otras palabras, $D \subset \partial C$, por lo que D tiene medida 0. Ahora basta aplicar el T. de Lebesgue.

Finalmente, la equivalencia (2) ⇔ (3) sale de la Proposición 2.3, ya que ∂C es compacto. ■

Proposición 2.7. *Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ un intervalo compacto y $A \subset I$.*

(1) Si $\pi \in \Pi(I)$, se tiene que

$$L(\mathbb{1}_A; \pi) = \sum\{v(J) : J \in \pi, J \subset A\} \quad y \quad U(\mathbb{1}_A; \pi) = \sum\{v(J) : J \in \pi, J \cap A \neq \emptyset\}.$$

(2) Son equivalentes: (i) $\mathbb{1}_A \in \mathcal{R}(I)$ y $\int_I \mathbb{1}_A = 0$; (ii) $\overline{\int}_I \mathbb{1}_A = 0$; (iii) A es de contenido 0.

Demostración. (1) sale inmediatamente de la definición de $L(\mathbb{1}_A; \pi)$, $U(\mathbb{1}_A; \pi)$ y $\mathbb{1}_A$.

(2) $(i) \Rightarrow (ii)$ es obvio, aplicando las correspondientes definiciones.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sea $\epsilon > 0$. Como $\overline{\int}_I \mathbb{1}_A = 0$, existe $\pi \in \Pi(i)$ tal que $U(\mathbb{1}_A; \pi) \leq \overline{\int}_I \mathbb{1}_A + \epsilon = \epsilon$. Teniendo en cuenta (1) y que $A \subset \cup\{J : J \in \pi, J \cap A \neq \emptyset\}$, este hecho implica que A es de contenido 0.

$(iii) \Rightarrow (i)$. En primer término, $\overline{A}$ es de contenido 0 (por la Proposición 2.3 y porque A es de contenido 0), lo mismo que ∂A, ya que $\partial A \subset \overline{A}$. Por la Proposición 2.6 concluimos que $\mathbb{1}_A \in \mathcal{R}(I)$. Sea $\epsilon > 0$. Como $\overline{A}$ es de contenido 0, existe una familia finita $\{I_i : i = 1, ..., m\}$ de intervalos compactos de $\mathbb{R}^n$ tales que

$$\overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^{m} \overset{\circ}{I}_i := G \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{m} v(I_i) \leq \epsilon.$$

Como $\overline{A}$ es compacto, G es abierto y $\overline{A} \subset G$, se tiene que $d(\overline{A}, {}^cG) =: \eta > 0$. Sea $\pi \in \Pi(I)$ una partición tal que $\|\pi\| < \eta$. Observemos que:

(a) Si $J \in \pi$ y $J \cap A \neq \emptyset$, necesariamente $J \subset G$. En consecuencia

$$A \subset \{J \in \pi : J \cap A \neq \emptyset\} \subset G \subset \bigcup_{i=1}^{m} I_i,$$

de donde por el punto (E) de la Proposición 1.5 sale que

$$\sum \{v(J) : J \in \pi, J \cap A \neq \emptyset\} \leq \sum_{i=1}^{m} v(I_i) \leq \epsilon.$$

(b) Por otra parte, de (1) obtenemos que

$$0 \leq U(\mathbb{1}_A; \pi) = \sum \{v(J) : J \in \pi, J \cap A \neq \emptyset\} \leq \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $\int_I \mathbb{1}_A = 0$. ■

Corolario 2.8. *Sea $I \subset \mathbb{R}^n$ un intervalo compacto.*

(1) Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si f es nula, salvo en un conjunto de contenido 0, entonces $f \in \mathcal{R}(I)$ y $\int_I f = 0$.

(2) Sean $f \in \mathcal{R}(I)$ y $g : I \to \mathbb{R}$ una función acotada tales que $f = g$, salvo en un conjunto de contenido 0. Entonces $g \in \mathcal{R}(I)$ y $\int_I f = \int_I g$.

Demostración. (1) Sean $M := \sup\{|f(x)| : x \in I\} < \infty$ y $A := \{x \in I : f(x) \neq 0\}$. Como A es de contenido 0, también lo es $\overline{A}$ (por la Proposición 2.3). Claramente f es continua en $I \setminus \overline{A}$, porque este conjunto es un abierto (relativo) de I y $f \restriction I \setminus \overline{A} = 0$. En consecuencia el conjunto D de los puntos de discontinuidad de f en I verifica $D \subset \overline{A}$, de donde sale que D tiene medida 0. Por el T. de Lebesgue concluimos que $f \in \mathcal{R}(I)$.

Por otra parte $\mathbb{1}_A \in \mathcal{R}(I)$ y $\int_I \mathbb{1}_A = 0$, por la Proposición 2.7. Como $|f| \leq M \cdot \mathbb{1}_A$ obtenemos

$$|\int_I f| \leq \int_I |f| \leq \int_I M \cdot \mathbb{1}_A = 0.$$

Por tanto $\int_I f = 0$.

(2) Es claro que $g - f$ es una función acotada que es nula en I salvo en un conjunto de contenido 0. Por (1) $g - f \in \mathcal{R}(I)$ y $\int_I (g - f) = 0$. Teniendo en cuenta la Proposición 1.12 obtenemos que $g = (g - f) + f \in \mathcal{R}(I)$ y que

$$\int_I g = \int_I ((g - f) + f) = \int_I (g - f) + \int_I f = \int_I f.$$

$\blacksquare$

Capítulo 3

El Teorema de Fubini para la integral de Riemann

Proposición 3.1. *[Teorema de Fubini para la integral de Riemann] Sean* $p, q \in \mathbb{N}$, $n = p+q$, *y* $J \subset \mathbb{R}^p$, $K \subset \mathbb{R}^q$, $I := J \times K \subset \mathbb{R}^n$ *rectángulos compactos. Sea* $f \in \mathcal{R}(I)$*. Para* $x \in J, y \in K$ *definimos* $f_x(y) = f^y(x) = f(x,y)$*. Sean* $\ell, u : J \to \mathbb{R}$ *definidas por*

$$\forall x \in J,\ \ell(x) := \underline{\int}_K f_x, \quad u(x) := \overline{\int}_K f_x.$$

Entonces $\ell, u \in \mathcal{R}(J)$ *y* $\int_J \ell = \int_I f = \int_J u$*. Aún más,* ℓ *y* u *son iguales, salvo quizás sobre un subconjunto de medida* 0*.*

Demostración. Sean $\pi_J := \{J_1, ..., J_r\} \in \Pi(J)$ y $\pi_K := \{K_1, ..., K_s\} \in \Pi(K)$ particiones de J y K, respectivamente, y $\pi := \{J_l \times K_m : 1 \leq l \leq r, 1 \leq m \leq s\} \in \Pi(I)$. Se tiene que

$$L(f;\pi) = \sum_{\substack{l=1,\dots,r \\ m=1,\dots,s}} m(f; J_l \times K_m) v(J_l \times K_m) = \sum_{l=1}^{r} (\sum_{m=1}^{s} m(f; J_l \times K_m) v(K_m)) v(J_l). \tag{3.1}$$

Si $x \in J_l$, entonces $m(f; J_l \times K_m) \leq m(f_x; K_m)$, por lo que

$$\forall x \in J_l,\ \sum_{m=1}^{s} m(f; J_l \times K_m) v(K_m) \leq \sum_{m=1}^{s} m(f_x; K_m) v(K_m) = L(f_x; \pi_K) \leq \underline{\int}_K f_x = \ell(x).$$

De aquí que

$$\sum_{m=1}^{s} m(f; J_l \times K_m) v(K_m) \leq \inf\{\ell(x) : x \in J_l\} = m(\ell; J_l).$$

Combinando esta desigualdad con (3.1) obtenemos que

$$L(f;\pi) = \sum_{l=1}^{r} (\sum_{m=1}^{s} m(f; J_l \times K_m) v(K_m)) v(J_l) \leq \sum_{l=1}^{r} m(\ell; J_l) v(J_l) = L(\ell; \pi_J).$$

De modo análogo sale que $U(u;\pi_J) \leq U(f;\pi)$, por lo que, teniendo presente que $\ell \leq u$, obtenemos

$$L(f;\pi) \leq L(\ell;\pi_J) \leq U(\ell;\pi_J) \leq U(u;\pi_J) \leq U(f;\pi) \tag{3.2}$$

y

$$L(f;\pi) \leq L(\ell;\pi_J) \leq L(u;\pi_J) \leq U(u;\pi_J) \leq U(f;\pi). \tag{3.3}$$

Dado $\epsilon > 0$, como $f \in \mathcal{R}(I)$, por el T. de Riemann (Proposición 1.17) existe $\delta > 0$ tal que, si $\|\pi\| \leq \delta$, entonces $U(f;\pi) - L(f;\pi) \leq \epsilon$. Puesto que $\|\pi\| \leq \|\pi_J\| + \|\pi_K\|$, haciendo $\|\pi_J\|$ y $\|\pi_K\|$ suficientemente pequeñas, podemos suponer que $\|\pi\| \leq \delta$ y, por tanto, que que $U(f;\pi) - L(f;\pi) \leq \epsilon$. Teniendo en cuenta (3.2) y (3.3) es claro que

$$U(\ell;\pi_J) - L(\ell;\pi_J) \leq \epsilon \quad \text{y} \quad U(u;\pi_J) - L(u;\pi_J) \leq \epsilon,$$

de donde deducimos que $\ell, u \in \mathcal{R}(J)$ porque $\epsilon > 0$ es arbitrario. De (3.2) y (3.3) también sale que

(i) Como

$$L(\ell;\pi_J) \leq \int_J \ell \leq U(\ell;\pi_J) \quad \text{y} \quad L(u;\pi_J) \leq \int_J u \leq U(u;\pi_J),$$

obtenemos que $|\int_J u - \int_J \ell| \leq \epsilon$, por lo que $\int_J u = \int_J \ell$, ya que $\epsilon > 0$ es arbitrario.

(ii) También $L(f;\pi) \leq \int_I f \leq U(f;\pi)$, por lo que $|\int_I f - \int_J u| \leq \epsilon$. Puesto que $\epsilon > 0$ es arbitrario, obtenemos:

$$\int_J u = \int_I f = \int_J \ell.$$

Finalmente, ya que $u - \ell \geq 0$ y $\int_J (u - \ell) = 0$, el conjunto

$$\{x \in J : \ell(x) \neq u(x)\} = \{x \in J : \ell(x) < u(x)\}$$

tiene medida 0 por el Lema 3.2, que aparece a continuación. ∎

Lema 3.2. *Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto y $f \in \mathcal{R}(I)$ tal que $f \geq 0$ y $\int_I f = 0$. Entonces el conjunto $\{x \in I : f(x) > 0\}$ tiene medida 0.*

Demostración. Sea $D := \{x \in I : f \text{ discontinua en } x\}$. Es claro que $I \setminus D$ es el conjunto de los puntos de continuidad de f. Por el T. de Lebesgue (Proposición 2.4) sabemos que D tiene medida 0.

Aserto. Si $x_0 \in I \setminus D$, entonces $f(x_0) = 0$.

En efecto, si fuese $f(x_0) > 0$, como f es continua en x_0, existiría un cierto entorno abierto V^{x_0} de x_0 tal que

$$\forall y \in I \cap V^{x_0}, \quad f(y) \geq \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

En estas condiciones, existe un cierto intervalo compacto J tal que $J \subset V^{x_0} \cap I$ y $v(J) > 0$. En consecuencia

$$\int_I f \geq \int_J f \geq \int_J \tfrac{f(x_0)}{2} = \tfrac{f(x_0)}{2} v(J) > 0$$

lo que es imposible por hipótesis.

En consecuencia, $\{x \in I : f(x) > 0\} \subset D$ y, por tanto, tiene medida 0. ■

Capítulo 4

La medida de Jordan

4.1. Conjuntos $\mathcal{J}$-medibles

Definición 4.1. *Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice* **Jordan-medible ó $\mathcal{J}$-medible** *sii A es acotado y $\mathbb{1}_A \in \mathcal{R}(I)$ para algún (todo) rectángulo compacto I tal que $A \subset I \subset \mathbb{R}^n$.*

Denotaremos por $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a la familia de los subconjuntos $\mathcal{J}$-medibles de $\mathbb{R}^n$.

Si $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ y $A \subset I$, siendo I un cierto intervalo compacto de $\mathbb{R}^n$, **la medida de Jordan ó $\mathcal{J}$-medida** $m(A)$ **de** A *se define por*

$$m(A) = \int_I \mathbb{1}_A.$$

NOTA (A). (1) Si $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, la $\mathcal{J}$-medida $m(A)$ de A no depende del intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A \subset I$. Además la medida de Jordan es claramente monótona en $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ por el punto (3) de la Proposición 1.12.

(2) Aunque $A \subset \mathbb{R}^n$ tenga medida 0, puede no ser lícito escribir $m(A) = 0$, ya que tal vez A no sea $\mathcal{J}$-medible. Por ejemplo, $\mathbb{N}$ como parte de $\mathbb{R}$ tiene medida 0, pero $\mathbb{N} \notin \mathcal{J}(\mathbb{R})$, ya que $\mathbb{N}$ no es acotado. Así que no se puede escribir $m(\mathbb{N}) = 0$.

Proposición 4.2. *(0) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es acotado, son equivalentes*

(i) $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$;(ii) ∂A es de contenido 0; (iii) ∂A tiene medida 0.

(1) $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ es un anillo de subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^n$, es decir, si $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, entonces $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, A \triangle B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. Además la $\mathcal{J}$-medida m es una aplicación $m : \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty)$ finitamente aditiva (y por tanto, finitamente subaditiva). En particular, $\emptyset \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ y $m(\emptyset) = 0$.

(2) Si I es un intervalo generalizado de extremos $a, b \in \mathbb{R}^n$ con $a \leq b$, entonces $I \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ y $m(I) = v(I)$.

(3) Si $A \subset \mathbb{R}^n$, entonces: A es de contenido 0 $\Leftrightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ y $m(A) = 0$.

(4) Si $A \in \mathcal{J}(R^n)$, entonces: (i) $\partial A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ y $m(\partial A) = 0$;(ii) $\mathring{A}, \overline{A} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ y $m(A) = m(\mathring{A}) = m(\overline{A})$.

(5) Si $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, son equivalentes: (i) $\overset{\circ}{A} = \emptyset$; (ii) $m(A) = 0$; (iii) A es de contenido 0; (iv) A tiene medida 0.

(6) Si $A_i \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n), i = 1, ..., p$, son subconjuntos $\mathcal{J}$-medibles que no se solapan (es decir, $int(A_i) \cap int(A_j) = \emptyset,\ i \neq j$) y $A := \bigcup_{i=1}^p A_i$, entonces $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ y $m(A) = \sum_{i=1}^p m(A_i)$.

Demostración. (0) es consecuencia inmediata de la Proposición 2.6.

(1) Sea $I \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo compacto tal que $A, B \subset I$. Puesto que $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, se tiene que $\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B \in \mathcal{R}(I)$.

(a) Como $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$, del Corolario 1.14 sale que $\mathbb{1}_{A\cap B} \in \mathcal{R}(I)$ y por tanto $A \cap B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ por la Definición 4.1.

(b) Como $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$, $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A\cap B}$ y $\mathbb{1}_{A\triangle B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2 \cdot \mathbb{1}_{A\cap B}$, concluimos análogamente que $\mathbb{1}_{A\cup B}, \mathbb{1}_{A\setminus B}, \mathbb{1}_{A\triangle B} \in \mathcal{R}(I)$ y por tanto $A \cup B, A \setminus B, A\triangle B \in \mathcal{J}(R^n)$.

Esto prueba que $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ es un anillo de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Además, si A, B son disjuntos, entonces $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$, por lo que

$$m(A \uplus B) = \int_I \mathbb{1}_{A\cup B} = \int_I (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B) = \int_I \mathbb{1}_A + \int_I \mathbb{1}_B = m(A) + m(B),$$

es decir, m es finitamente aditiva sobre $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ y, por tanto, finitamente subaditiva, es decir, dados $A_i,\ i = 1, .., k$, en $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, se tiene que

$$m(\cup_{i=1}^k A_i) \leq \sum_{i=1}^k m(A_i).$$

Observemos que, para probar la anterior desigualdad, bastará ver que es cierta para $k = 2$ y esto se hace a continuación. Como $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ es un anillo y que m es finitamente aditiva y monótona, se verifica

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1 \uplus (A_2 \setminus A_1)) = m(A_1) + m(A_2 \setminus A_1) \leq m(A_1) + m(A_2).$$

Finalmente, $\emptyset \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ porque $\mathbb{1}_\emptyset = 0$ y las constantes son integrables-Riemann en todo intervalo cerrado I, siendo $m(\emptyset) = \int_I 0 = 0$ (también porque $\emptyset = A \setminus A,\ \forall A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, y m es finitamente aditiva).

(2) Puesto que I es acotado y ∂I es de contenido 0 (porque es unión de las caras de I y cada cara tiene contenido 0 en $\mathbb{R}^n$), de (0) concluimos que $I \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. Como $I \subset [a, b]$, por definición de $m(I)$ se tiene que $m(I) = \int_{[a,b]} \mathbb{1}_I$ y es trivial ver que $\int_{[a,b]} \mathbb{1}_I = v(I)$.

(3) está probado en la Proposición 2.7.

(4) (i) Como $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, ∂A es un compacto de contenido 0 (por el punto (0)). Del punto (3) sale que $\partial A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ y $m(\partial A) = 0$.

(ii) Por (i) y (1) obtenemos que $\overset{\circ}{A}, \overline{A} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ ya que $\overset{\circ}{A} = A \setminus \partial A$ y $\overline{A} = A \cup \partial A$. Como $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$ es claro que $m(\overset{\circ}{A}) \leq m(A) \leq (\overline{A})$ porque m es monótona. Por otra parte $m(\overline{A}) = m(\overset{\circ}{A}) + m(\partial A) = m(\overset{\circ}{A})$ porque m es finitamente aditiva. Por tanto $m(\overset{\circ}{A}) = m(A) = m(\overline{A})$.

(5) $(i) \Rightarrow (ii)$ sale de (4) pues $m(A) = m(\overset{\circ}{A}) = 0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ sale de (3) y $(iii) \Rightarrow (iv)$ siempre ocurre.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Supongamos que $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$. Entonces existe un cubo cerrado $J \subset \overset{\circ}{A}$ tal que $v(J) > 0$. Puesto que A es de medida 0, existe una familia contable $\{I_i : i \geq 1\}$ de intervalos cerrados de $\mathbb{R}^n$ tal que $A \subset \cup_{i\geq 1} I_i$ y $\sum_{i\geq 1} v(I_i) < v(J)$. Como $J \subset \cup_{i\geq 1} I_i$, por (E) de la Proposición 1.5 obtenemos que

$$0 < v(J) \leq \sum_{i\geq 1} v(I_i) < v(J),$$

una contradicción que prueba que $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.

(6) Que $A = \bigcup_{i=1}^p A_i$ es $\mathcal{J}$-medible sale del punto (1). Como también $\biguplus_{i=1}^p int(A_i) \in \mathcal{J}(R^n)$, $m(A_i) = m(int(A_i))$ y m es finitamente aditiva, monótona y finitamente subaditiva sobre $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, obtenemos que

$$m(A) \leq \sum_{i=1}^p m(A_i) = \sum_{i=1}^p m(int(A_i)) = m(\biguplus_{i=1}^p int(A_i)) \leq m(A).$$

Por tanto $m(\cup_{i=1}^p A_i) = \sum_{i=1}^p m(A_i)$. ■

Si $I \subset \mathbb{R}^n$ es un intervalo compacto, un subconjunto $K \subset I$ es *un compacto reticular* de I si existe una partición $\pi \in \Pi(I)$ tal que K es la unión de algunos (si todos, $K = I$) subintervalos de π. Por la Proposición 4.2 todo compacto reticular K de I verifica $K \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ y su medida de Jordan $m(K)$ es la suma de los volúmenes de los subintervalos que integran K. Un *compacto reticular uniforme* es un compacto reticular K cuyos intervalos integrantes son cubos cerrados todos de iguales dimensiones.

Lema 4.3. *Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ intervalo compacto y $A \subset I$ un subconjunto $\mathcal{J}$-medible. Entonces*

$$\begin{aligned} m(A) &= \sup\{m(K) : K \subset A \text{ compacto reticular de } I\} \\ &= \inf\{m(K) : A \subset K \subset I \text{ compacto reticular de } I\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Además en las igualdades anteriores se puede poner "compacto reticular uniforme" en lugar de "compacto reticular" .

Demostración. Como $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ y $A \subset I$, se tiene que $\mathbb{1}_A \in \mathcal{R}(I)$, por lo que

$$\begin{aligned} m(A) = \int_I \mathbb{1}_A &= \underline{\int}_I \mathbb{1}_A = \sup\{L(\mathbb{1}_A;\pi) : \pi \in \Pi(I)\} \\ &= \overline{\int}_I \mathbb{1}_A = \text{ínf}\{U(\mathbb{1}_A;\pi) : \pi \in \Pi(I)\}. \end{aligned}$$

Observemos que si $\pi \in \Pi(I)$ y $K_1 := \cup\{J : J \in \pi, J \subset A\}$, $K_2 := \cup\{J : J \in \pi, J \cap A \neq \emptyset\}$, entonces K_1, K_2 son compactos reticulares de I tales que $K_1 \subset A \subset K_2$ y

$$\begin{aligned} L(\mathbb{1}_A;\pi) &= \sum_{J\in\pi} m(\mathbb{1}_A;J)v(J) = \sum_{J\in\pi, J\subset A} v(J) = m(K_1), \\ U(\mathbb{1}_A;\pi) &= \sum_{J\in\pi} M(\mathbb{1}_A;J)v(J) = \sum_{J\in\pi, J\cap A\neq\emptyset} v(J) = m(K_2). \end{aligned}$$

De aquí que

$$m(A) \leq \sup\{m(K) : K \subset A \text{ compacto reticular de } I\}$$

y

$$m(A) \geq \text{ínf}\{m(K) : A \subset K \subset I \text{ compacto reticular de } I\}.$$

Por otra parte, si $K_1 \subset A \subset K_2 \subset I$ son compactos reticulares de I, K_1 y K_2 son $\mathcal{J}$-medibles y por tanto $m(K_1) \leq m(A) \leq m(K_2)$, porque la medida de Jordan m es monótona en $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. Esto prueba que

$$m(A) \geq \sup\{m(K) : K \subset A \text{ compacto reticular de } I\}.$$

y que

$$m(A) \leq \text{ínf}\{m(K) : A \subset K \subset I \text{ compacto reticular de } I\}.$$

En consecuencia se verifican las igualdades (4.1).

Finalmente, cogiendo un cubo cerrado I tal que $A \subset I$ y trabajando con particiones grilla $\pi \in \Pi(I)$ tales que todos los subintervalos de π sean cubos cerrados iguales entre sí, se obtienen las igualdades (4.1) pero poniendo "compacto reticular uniforme" en lugar de "compacto reticular" . ■

Corolario 4.4. *(1) En la definición de conjunto de contenido* 0 *se pueden utilizar cubos cerrados casi-disjuntos (ó cubos abiertos) de iguales dimensiones, en lugar de intervalos cerrados.*

(2) En la definición de conjunto con medida 0 *se pueden utilizar cubos cerrados (abiertos), en lugar de intervalos cerrados.*

Demostración. (1) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto de contenido 0. Elegimos un cubo compacto $I \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A \subset I$. Sabemos (Proposición 4.2 y Lema 4.3) que $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ y que

$$0 = m(A) = \text{ínf}\{m(K) : A \subset K \subset I \text{ compacto reticular uniforme de } I\}.$$

Esto prueba (1), teniendo en cuenta la definición de compacto reticular uniforme.

(2) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ subconjunto de medida 0 y $\epsilon > 0$. Por definición de conjunto con medida 0 existe una secuencia de intervalos compactos $\{I_i : i \geq 1\}$ de $\mathbb{R}^n$ tales que $A \subset \cup_{i\geq 1} I_i$ y $\sum_{i\geq 1} v(I_i) \leq \epsilon/2$. Aplicando el Lema 4.3 a cada I_i, se obtiene una familia finita de cubos cerrados iguales $\{I_{ij} : j = 1, ..., p_i\}$ tales que $I_i \subset \bigcup_{j=1}^{p_i} I_{ij}$ y $\sum_{j=1}^{p_i} v(I_{ij}) \leq v(I_i) + \epsilon/2^{i+1}$. La familia de cubos cerrados $\mathcal{F} := \{I_{ij} : i \geq 1, j = 1, ..., p_i\}$ verifica $A \subset \cup_{J\in\mathcal{F}} J$ y $\sum_{J\in\mathcal{F}} v(J) \leq \epsilon$, como queríamos probar.

Finalmente, observemos que los cubos abiertos, que se mencionan en el enunciado, se obtienen orlando por fuera ligeramente los cubos cerrados. ■

El anillo $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ tiene algunos problemas e imperfecciones. En efecto, no sólo no contiene a los abiertos ó cerrados no acotados, sino que, como vamos a ver en los siguientes Contraejemplos, $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ no contiene ni a todos los abiertos acotados ni a todos los compactos de $\mathbb{R}^n$.

Contraejemplo 1. $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ no contiene a todos los abiertos acotados de $\mathbb{R}$.

En efecto, sean $0 < \epsilon < 1/2$, $\mathbb{Q} \cap (0,1) = \{q_n : n \geq 1\}$ y $0 < r_n \leq \epsilon/2^n$ tal que $J_n := (q_n - r_n, q_n + r_n) \subset (0,1)$. Sea $G := \cup_{n\geq 1} J_n$, que es un abierto acotado de $\mathbb{R}$. Afirmamos que $G \notin \mathcal{J}(\mathbb{R})$. Supongamos que $G \in \mathcal{J}(\mathbb{R})$. Entonces por el Lema 4.3

$$m(G) = \sup\{m(K) : K \subset G \text{ compacto reticular de } [0,1]\}.$$

Si K es un compacto reticular de $[0,1]$ tal que $K \subset G = \cup_{n\geq 1} J_n$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \cup_{i=1}^{p} J_i$ (porque K es compacto y los J_i son abiertos), de donde $m(K) \leq m(\cup_{i=1}^{p} J_i) \leq \sum_{i=1}^{p} v(J_i) \leq \epsilon$. Por tanto $m(G) \leq \epsilon$. Como hemos supuesto que $G \in \mathcal{J}(\mathbb{R})$, entonces ∂G es de contenido 0 y por tanto $m(\partial G) = 0$ (ver la Proposición 4.2). Como $\partial G = [0,1] \setminus G$, llegamos a que

$$1 = m([0,1]) = m(G \uplus \partial G) = m(G) + m(\partial G) = m(G) \leq \epsilon,$$

una contradicción, que prueba que $G \notin \mathcal{J}(\mathbb{R})$. ■

Contraejemplo 2. $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ no contiene a todos los compactos de $\mathbb{R}$.

En efecto, como $[0,1] \in \mathcal{J}(\mathbb{R})$, pero $G \notin \mathcal{J}(\mathbb{R})$ (este G es el mismo del Contraejemplo 1), necesariamente $[0,1] \setminus G \notin \mathcal{J}(\mathbb{R})$. Observemos que $[0,1] \setminus G$ es un compacto acotado. ■

Una familia $\mathcal{F} := \{A_i : i \geq 1\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ se dice *bien-inscrita* en un abierto G de $\mathbb{R}^n$ sii

(1) $\mathcal{F} \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ y los elementos de $\mathcal{F}$ no se solapan.
(2) $G = \cup_{i\geq 1} A_i$.
(3) Para todo compacto $K \subset G$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} A_i$.

Denotaremos por $\mathcal{B}(G)$ al conjunto de todas las familias bien-inscritas en el abierto G de $\mathbb{R}^n$.

Proposición 4.5. *(1) Si G es un abierto de $\mathbb{R}^n$, existe una familia $\mathcal{F} := \{I_i : i \geq 1\}$ bien-inscrita en G tal que cada I_i es un cubo cerrado.*

(2) Sean $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{F} := \{A_i : i \geq 1\}$ familia bien-inscrita en $\overset{\circ}{A}$. Entonces

$$m(A) = \sum_{i \geq 1} m(A_i).$$

Demostración. (1) Procedemos por etapas.

Etapa 1. Sea $\mathcal{R}_1$ la partición grilla de $\mathbb{R}^n$ construida utilizando los hiperplanos perpendiculares a los ejes (comenzando por los que pasan por 0) de paso 2^{-1}, es decir, con una separación entre sí igual a 2^{-1}. Sea $\mathcal{F}_1 := \{J_{1i} : i \geq 1\} \subset \mathcal{R}_1$ tal que $J_{1i} \subset G$, $\forall i \geq 1$ (quizás $J_{1i} = \emptyset$ para $i \geq i_1$).

Etapa 2. Sea $\mathcal{R}_2$ la partición grilla de $\mathbb{R}^n$ de paso 2^{-2} y $\mathcal{F}_2 := \{J_{2j} : j \geq 1\} \subset \mathcal{R}_2$ tales que $J_{2j} \subset G \setminus int(\cup\{J : J \in \mathcal{F}_1\})$.

Etapa m. Sea $\mathcal{R}_m$ la partición grilla de $\mathbb{R}^n$ de paso 2^{-m} y $\mathcal{F}_m := \{J_{mj} : j \geq 1\} \subset \mathcal{R}_m$ tales que $J_{mj} \subset G \setminus int(\cup\{J : J \in \mathcal{F}_1 \cup ... \cup \mathcal{F}_{m-1}\})$.

Reiteramos hasta el infinito.

Sea $\mathcal{F} := \cup_{i \geq 1} \mathcal{F}_i$. Se tiene que:

(a) Los elementos de $\mathcal{F}$ son cubos cerrados que no se solapan. Por tanto $\mathcal{F} \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Veamos que $G = \cup_{J \in \mathcal{F}} J$. Sea $x \in G$. Entonces $d(x, {}^cG) > 0$ (utilizamos la distancia d asociada a la norma $\|\cdot\|_\infty$). Sea $p \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-p} < d(x, {}^cG)$. Sea $J \in \mathcal{R}_p$ tal que $x \in J$ (como $\cup\{J : J \in \mathcal{R}_p\} = \mathbb{R}^n$, hay al menos un $J \in \mathcal{R}_p$ tal que $x \in J$). Entonces $J \subset G$ porque:
(i) $diam(J) = 2^{-p}$ (todos los elementos de $\mathcal{R}_p$ tienen diámetro 2^{-p} para la norma $\|\cdot\|_\infty$).
(ii) $x \in J$ y $d(x, {}^cG) > 2^{-p}$.

Por tanto

$$x \in \cup\{J \in \mathcal{R}_p : J \subset G\} = \cup\{J : J \in \mathcal{F}_1 \cup ... \cup \mathcal{F}_p\} \subset \cup_{J \in \mathcal{F}} J.$$

(en particular $\{x \in G : d(x, {}^cG) > 2^{-p}\} \subset \cup\{J : J \in \mathcal{F}_1 \cup ... \cup \mathcal{F}_p\}$). Obtenemos que $G \subset \cup_{J \in \mathcal{F}} J$ y, como la inclusión $\cup_{J \in \mathcal{F}} J \subset G$ es obvia, concluimos que $G = \cup_{J \in \mathcal{F}} J$.

(c) Sea $K \subset G$ un subconjunto compacto. Entonces

$$\exists p \in \mathbb{N},\ \forall k \in K,\ d(k, {}^cG) > 2^{-p}.$$

Por lo que se ha visto en (b) resulta que $K \subset \cup\{J : J \in \mathcal{F}_1 \cup ... \cup \mathcal{F}_p\}$. Como K es acotado, sólo un número finito de elementos de cada familia $\mathcal{F}_i$, $i = 1, ..., p$, corta a K. En consecuencia, se puede cubrir K con una familia finita de elementos de $\mathcal{F}$.

Esto completa la prueba de (1).

(2) Por el punto (5) de la Proposición 4.2 para todo $p \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\sum_{i=1}^{p} m(A_i) = m(\bigcup_{i=1}^{p} A_i) \leq m(A),$$

de donde sale que $\sum_{i\geq 1} m(A_i) \leq m(A)$. Sabemos también (Proposición 4.2 y Lema 4.3) que

$$m(A) = m(\overset{\circ}{A}) = \sup\{m(K) : K \subset \overset{\circ}{A} \text{ compacto reticular }\}. \tag{4.2}$$

Si $K \subset \overset{\circ}{A}$ es un compacto reticular, como $\mathcal{F}$ es familia bien-inscrita en $\overset{\circ}{A}$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \cup_{i=1}^{r} A_i$, de donde

$$m(K) \leq m(\cup_{i=1}^{r} A_i) = \sum_{i=1}^{r} m(A_i) \leq \sum_{i\geq 1} m(A_i). \tag{4.3}$$

Por tanto de (4.2) y (4.3) sale que

$$m(A) \leq \sum_{i\geq 1} m(A_i).$$

En consecuencia, $m(A) = \sum_{i\geq 1} m(A_i)$, como queríamos probar. ■

4.2. Integración en conjuntos $\mathcal{J}$-medibles

Si $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ y $f : A \to \mathbb{R}$, consideraremos a f extendida a todo B (extensión que por sencillez seguimos denotando por f) de modo que $f = 0$ sobre $B \setminus A$. Sean $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $I \subset \mathbb{R}^n$ intervalo compacto con $A \subset I$ y $f : A \to \mathbb{R}$. Decimos que f es *integrable-Riemann sobre* A sii $f \in \mathcal{R}(I)$, en cuyo caso la integral de Riemann de f sobre A es

$$\int_A f := \int_I f.$$

Observemos que la noción de función integrable-Riemann sobre A, así como la de integral de Riemann sobre A, no dependen del intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A \subset I$.

Indicaremos por $\mathcal{R}(A)$ al conjunto de las funciones $f : A \to \mathbb{R}$ que son integrables-Riemann sobre A.

Proposición 4.6. *(a) Sea $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$.*

(a1) $f : A \to \mathbb{R}$ verifica $f \in \mathcal{R}(A)$ sii f es acotada en A y el conjunto $\{x \in \overset{\circ}{A} : f$ discontinua en $x\}$ tiene medida 0.

(a2) Si $I \subset \mathbb{R}^n$ es un intervalo compacto con $A \subset I$, entonces $\mathcal{R}(A) = \{f \restriction A : f \in \mathcal{R}(I)\}$.

(a3) $(\mathcal{R}(A), +, *)$ *es un ev y la aplicación* $\int_A : \mathcal{R}(A) \to \mathbb{R}$ *es un operador lineal (es decir, si* $f, g \in \mathcal{R}(A)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *se tiene que* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(A)$ *y* $\int_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_A f + \beta \int_A g$*).*

(a4) También $f^+, f^-, |f|, f^n, fg \in \mathcal{R}(A)$, *si* $f, g \in \mathcal{R}(A)$, $n \in \mathbb{N}$, *y* $|\int_A f| \leq \int_A |f|$*. Si* $f, g \in \mathcal{R}(A)$ *y* $f \leq g$, *entonces* $\int_A f \leq \int_A g$*.*

(a5) Si $m(A) = 0$, *entonces* $\mathcal{R}(A) = \{f : A \to \mathbb{R} : f \text{ acotada}\}$ *y* $\int_A f = 0$, $\forall f \in \mathcal{R}(A)$*.*

(a6) $\{f : A \to \mathbb{R} : f \text{ continua y acotada}\} \subset \mathcal{R}(A)$*.*

(a7) Sea $f : \overline{A} \to \mathbb{R}$ *acotada. Son equivalentes: (i)* $f \in \mathcal{R}(\overline{A})$*; (ii)* $f \in \mathcal{R}(A)$*; (iii)* $f \in \mathcal{R}(\mathring{A})$*. En cualquiera de los casos* $\int_{\overline{A}} f = \int_A f = \int_{\mathring{A}} f$*.*

(b) Si $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ *y* $f \in \mathcal{R}(A \cup B)$, *entonces* $f \in \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) \cap \mathcal{R}(A \cap B)$ *y* $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A \cap B} f$*.*

(c) Sea $\{A_i : i = 1, .., m\} \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ *familia casi-disjunta,* $A := \bigcup_{i=1}^m A_i$ *y* $f : A \to \mathbb{R}$*. Son equivalentes: (i)* $f \in \mathcal{R}(A)$*; (ii)* $f \in \mathcal{R}(A_i)$, $i = 1, ..., m$*. En cualquiera de los casos* $\int_A f = \sum_{i=1}^m \int_{A_i} f$*.*

(d) Sean $A, A_i \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $i \geq 1$, *de modo que* $\{A_i : i \geq 1\} \in \mathcal{B}(\mathring{A})$ *(es decir,* $\{A_i : i \geq 1\}$ *es una familia bien-inscrita en* $\mathring{A}$*). Entonces, si* $f \in \mathcal{R}(A)$, *se tiene que* $f \in \mathcal{R}(A_i)$, $i \geq 1$, *y* $\int_A f = \sum_{i \geq 1} \int_{A_i} f$*.*

Demostración. (a) Sea $I \subset \mathbb{R}^n$ intervalo compacto tal que $A \subset I$.

(a1) $\underline{\Rightarrow}$. Sea $f \in \mathcal{R}(A)$. Por hipótesis f es acotada y, como $f \in \mathcal{R}(I)$, el conjunto $\{x \in I : f \text{ discontinua en } x\}$ tiene medida 0 por el T. de Lebesgue. Por la forma de f sobre I es claro que

$$\begin{aligned}\{x \in \mathring{A} : f \text{ discontinua en } x\} \subset \{x \in I : f \text{ discontinua en } x\} \subset \\ \subset \{x \in \mathring{A} : f \text{ discontinua en } x\} \cup \partial A.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Por tanto, $\{x \in \mathring{A} : f \text{ discontinua en } x\}$ tiene medida 0.

$\underline{\Leftarrow}$. Como $\{x \in \mathring{A} : f \text{ discontinua en } x\}$ tiene medida 0 (por hipótesis) y ∂A es de contenido 0 (porque $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$), de (4.4) concluimos que $\{x \in I : f \text{ discontinua en } x\}$ tiene medida 0, lo que por el T. de Lebesgue implica que $f \in \mathcal{R}(I)$, es decir, $f \in \mathcal{R}(A)$.

(a2) Es claro, por la definición del conjunto $\mathcal{R}(A)$, que $\mathcal{R}(A) \subset \{f \restriction A : f \in \mathcal{R}(I)\}$. Por otra parte, si $g \in \mathcal{R}(I)$ y $f := g \restriction A$, entonces $f = \mathbb{1}_A \cdot g$. Como $\mathbb{1}_A \cdot g \in \mathcal{R}(I)$ (por Corolario 1.14), concluimos que $\{f \restriction A : f \in \mathcal{R}(I)\} \subset \mathcal{R}(A)$. Por tanto, $\mathcal{R}(A) = \{f \restriction A : f \in \mathcal{R}(I)\}$.

(a3) y (a4) salen de (a2), Proposición 1.12 y Corolario 1.14.

(a5) Si $m(A) = 0$, A es de contenido 0 por la Proposición 4.2. Ahora basta aplicar el Corolario 2.8.

(a6) sale de (a1).

(a7) Sea $I \subset \mathbb{R}^n$ un intervalo compacto tal que $A \subset I$. Como las funciones f, $f \upharpoonright A$ y $f \upharpoonright \overset{\circ}{A}$ difieren sólo en un subconjunto de ∂A, que tiene contenido 0, el resultado sale del Corolario 2.8.

(b) Sea $I \subset \mathbb{R}^n$ un intervalo compacto tal que $A \cup B \subset I$. Por hipótesis $f \in \mathcal{R}(I)$ y además $\mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_B$, $\mathbb{1}_{A\cap B} \in \mathcal{R}(I)$ por la Definición 4.1 y la Proposición 4.2. Por otra parte las funciones

$$f \upharpoonright A = f \cdot \mathbb{1}_A, \; f \upharpoonright B = f \cdot \mathbb{1}_B \; \text{ y } \; f \upharpoonright A \cap B = f \cdot \mathbb{1}_{A\cap B}$$

pertenecen a $\mathcal{R}(I)$ por el Corolario 1.14. Por tanto $f \upharpoonright A \in \mathcal{R}(A)$, $f \upharpoonright B \in \mathcal{R}(B)$ y $f \upharpoonright A \cap B \in \mathcal{R}(A \cap B)$. También ocurre que

$$f = f \cdot \mathbb{1}_A + f \cdot \mathbb{1}_B - f \cdot \mathbb{1}_{A\cap B},$$

de donde obtenemos

$$\int_{A\cup B} f = \int_I f = \int_I f\cdot\mathbb{1}_A + \int_I f\cdot\mathbb{1}_B - \int_I f\cdot\mathbb{1}_{A\cap B} = \int_A f \upharpoonright A + \int_B f \upharpoonright B - \int_{A\cap B} f \upharpoonright (A\cap B).$$

(c) Sea $I \subset \mathbb{R}^n$ un intervalo compacto tal que $A \subset I$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ sale de (b).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Por hipótesis $f \upharpoonright A_j \in \mathcal{R}(A_j)$, es decir, $f \upharpoonright A_j = f \cdot \mathbb{1}_{A_j} \in \mathcal{R}(I)$. Por otra parte

$$f = \sum_{j=1}^{m} (f \cdot \mathbb{1}_{A_j})$$

salvo en un subconjunto de $\bigcup_{j=1}^m \partial A_j$, que tiene contenido 0. Del Corolario 2.8 obtenemos que $f \in \mathcal{R}(I)$ y que

$$\int_A f = \int_I f = \sum_{j=1}^{m} \int_I (f \upharpoonright A_j) = \sum_{j=1}^{m} \int_{A_j} f.$$

(d) Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ un intervalo compacto tal que $A \subset I$ y $M := \sup\{|f(x)| : x \in A\}+1$. Por (b) y (c) sabemos que

$$f \in \mathcal{R}(A_i), \; i \geq 1, \quad \text{y que , } \forall p \in \mathbb{N}, \quad m(\bigcup_{i=1}^{p} A_i) = \sum_{i=1}^{p} m(A_i) \quad \text{y} \quad \int_{\cup_{i=1}^p A_i} f = \sum_{i=1}^{p} \int_{A_i} f.$$

Como $m(A) = \sum_{i\geq 1} m(A_i)$ (ver la Proposición 4.5), dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $p \geq N$ se verifica

$$\tfrac{\epsilon}{M} \geq \sum_{i>p} m(A_i) = m(A) - \sum_{i=1}^{p} m(A_i) = m(A \setminus \bigcup_{i=1}^{p} A_i).$$

Así que para todo $p \geq N$ se tiene que

$$|\int_A f - \sum_{i=1}^{p} \int_{A_i} f| = |\int_I f \cdot \mathbb{1}_{A \setminus \cup_{i=1}^p A_i}| \leq M \int_I \mathbb{1}_{A \setminus \cup_{i=1}^p A_i} = M \cdot m(A \setminus \bigcup_{i=1}^{p} A_i) \leq M \tfrac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, de aquí sale (d). ■

4.3. Transformación de conjuntos $\mathcal{J}$-medibles

Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $F : A \to \mathbb{R}^p$. Entonces:

(a) F es una función K-*lipschitziana* si $0 \leq K < \infty$ y para todo par $x, y \in A$ se verifica $\|F(x) - F(y)\| \leq K\|x - y\|$. Se dice que K es la constante de Lipschitz de F.

(b) F es *lipschitziana* sii F es K-*lipschitziana* para algún $0 \leq K < \infty$.

(c) F es *localmente lipschitziana* sii para toda $a \in A$ existen un entorno U^a de a en $\mathbb{R}^n$ y una constante $0 \leq K_a < \infty$ tales que $F \restriction A \cap U^a$ es K_a-lipschitziana. Observemos que si A es un abierto y $F \in C^1(A, \mathbb{R}^p)$, del Teorema del Valor Medio generalizado sale que F es localmente lipschitziana.

Lema 4.7. *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $F : A \to \mathbb{R}^p$ función K-lipschitziana para la norma $\|\cdot\|_\infty$. Supongamos que A está contenido en un cubo cerrado de arista de longitud ℓ y sea $a \in A$. Entonces $F(A)$ está contenido en un cubo de $\mathbb{R}^p$ de centro $F(a)$ y arista de longitud $2K\ell$.*

Demostración. Adoptamos tanto en $\mathbb{R}^n$ como en $\mathbb{R}^p$ la norma $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$ tal que para todo $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty := \sup\{|x_i| : i = 1, ..., n\}.$$

Observemos que con la norma $\|\cdot\|_\infty$, las bolas cerradas son cubos cerrados. Por ejemplo, la bola cerrada $B_{\mathbb{R}^n}(a, \ell)$ de $\mathbb{R}^n$ de centro a y radio $\ell \geq 0$ es el cubo cerrado de centro a y arista de longitud 2ℓ. Si $x \in A$, entonces $\|x - a\| \leq \ell$, es decir, $x \in B_{\mathbb{R}^n}(a, \ell)$, y se verifica

$$\|F(x) - F(a)\| \leq K\|x - a\| \leq K\ell.$$

Por tanto $F(x)$ está en el cubo cerrado de $\mathbb{R}^p$ de centro $F(a)$ y arista de longitud $2K\ell$. ■

Proposición 4.8. *(1) Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $F : A \to \mathbb{R}^n$ función lipschitziana. Entonces; (i) si A es de contenido 0, $F(A)$ es de contenido 0;(ii) si A tiene medida 0, $F(A)$ tiene medida 0.*

(2) Sean $h, n \in \mathbb{N}$, $h < n$, $A \subset \mathbb{R}^h$ un subconjunto y $F : A \to \mathbb{R}^n$ función lipschitziana. Entonces; (i) si A es acotado, $F(A)$ es de contenido 0; (ii) si $A \subset \mathbb{R}^h$, $F(A)$ tiene medida 0.

(3) Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $F : U \to \mathbb{R}^n$ función localmente lipschitziana (v.g., si $F \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$) y $A \subset U$. Se verifica que: (i) si A es de contenido 0 y $\overline{A} \subset U$, entonces $F(A)$ es de contenido 0; (ii) si A tiene medida 0, entonces $F(A)$ tiene medida 0.

Demostración. En toda esta prueba adoptamos la norma del supremo $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^n$.

(1) Sea $F : A \to \mathbb{R}^n$ K-lipschitziana.

(i) Sea A de contenido 0 y $\epsilon > 0$. Como A es de contenido 0, existen cubos cerrados $\{I_i : i = 1, .., r\}$ con aristas de longitud ℓ (igual para todos, ver el Corolario 4.4) tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{r} I_i,\ A \cap I_i \neq \emptyset,\ i = 1, ..., r, \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{r} v(I_i) = \sum_{i=1}^{r} \ell^n \leq \tfrac{\epsilon}{1+(2K)^n}.$$

Sea $a_i \in A \cap I_i,\ i = 1, ..., r$. Por el Lema 4.7 se verifica que $F(A \cap I_i) \subset B_{\mathbb{R}^n}(F(a_i), K\ell)$. Por tanto

$$F(A) = \bigcup_{i=1}^{r} F(A \cap I_i) \subset \bigcup_{i=1}^{r} B_{\mathbb{R}^n}(F(a_i), K\ell).$$

Por otra parte, $v(B_{\mathbb{R}^n}(F(a_i), K\ell)) = (2K)^n \ell^n$, de donde se obtiene

$$\sum_{i=1}^{r} v(B_{\mathbb{R}^n}(F(a_i), K\ell)) = \sum_{i=1}^{r} (2K)^n \ell^n \leq (2K)^n \tfrac{\epsilon}{1+(2K)^n} \leq \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario concluimos que $F(A)$ es de contenido 0.

(ii) La prueba es análoga al caso anterior, utilizando ahora una secuencia infinita de cubos cerrados $\{I_i : i \geq 1\}$ de longitud de arista ℓ_i tales que

$$A \subset \cup_{i\geq 1} I_i,\ A \cap I_i \neq \emptyset,\ i = 1 \geq 1, \quad \text{y} \quad \sum_{i\geq 1} v(I_i) = \sum_{i\geq 1} \ell_i^n \leq \tfrac{\epsilon}{1+(2K)^n}.$$

(2) Sea $A^* := \{(a_1, ..., a_h, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n : (a_1, ..., a_h) \in A\}$ y $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^h$ tal que $P(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_h)$. Es claro que $T := F \circ P : A^* \to \mathbb{R}^n$ es función lipschitziana con la misma constante de Lipschitz que F.

(i) Si suponemos que $A \subset \mathbb{R}^h$ es acotado, como $h < n$ se tiene que A^* es de contenido 0 en $\mathbb{R}^n$ (ver ejercicios). Por (1) sale que $F(A) = T(A^*)$ es de contenido 0.

(ii) Observemos que $(\mathbb{R}^h)^*$ tiene medida 0 en $\mathbb{R}^n$. Si $A \subset \mathbb{R}^h$, también $A^* \subset (\mathbb{R}^h)^*$ tiene medida 0 y por (1) se verifica que $F(A) = T(A^*)$ tiene medida 0.

(3) Por cada $z \in U$ existen un entorno abierto $G^z \subset U$ de z y una constante $0 \leq K^z < \infty$ tales que $F \restriction G^z$ es K^z-lipschitziana.

(i) Puesto que la familia de abiertos $\{G^z : z \in U\}$ recubre $\overline{A}$, que es compacto, se verifica $\overline{A} \subset \cup_{i=1}^m G^{z_i}$ para ciertos $z_i \in U,\ i = 1, ..., m$. Por hipótesis el conjunto A es de contenido 0. En consecuencia, teniendo en cuenta (1) y que $F \restriction G^{z_i}$ es K^{z_i}-lipschitziana, concluimos que $F(A \cap G^{z_i})$ es de contenido 0. De aquí que $F(A) = \cup_{i=1}^m F(A \cap G^{z_i})$ es de contenido 0, lo que por la Proposición 4.2 equivale a decir que $F(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ y $m(F(A)) = 0$.

(ii) Como $U = \cup\{G^z : z \in U\}$ y U es Lindelöf, $U = \cup_{i\geq 1} G^{z_i}$ para una cierta familia contable de puntos $\{z_i : i \geq 1\} \subset U$. Teniendo en cuenta (1), que $F \upharpoonright G^{z_i}$ es K^{z_i}-lipschitziana y que $A \cap G^{z_i}$ tiene medida 0, concluimos que $F(A \cap G^{z_i})$ tiene medida 0. De aquí que $F(A) = \cup_{i\geq 1} F(A \cap G^{z_i})$ tiene medida 0 por la Proposición 2.2. ■

Proposición 4.9. *Sean* $U \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto,* $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ *con* $\overline{A} \subset U$ *y* $F : U \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $F \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$ *y* $F \upharpoonright \overset{\circ}{A}$ *es difeomorfismo de clase* C^1. *Entonces* $F(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ *y* $\partial(F(A)) \subset F(\partial A)$.

Demostración. En primer término, como $\overline{A} \subset U$ es compacto y F continua, es claro que $F(\overline{A})$ es compacto (luego acotado) y $\overline{F(A)} = F(\overline{A})$. Puesto que $F \upharpoonright \overset{\circ}{A}$ es un difeomorfismo, $F(\overset{\circ}{A})$ es un abierto y por tanto $F(\overset{\circ}{A}) \subset int(F(A))$. Por otra parte

$$F(A) \subset \overline{F(A)} = F(\overline{A}) = F(\overset{\circ}{A} \uplus \partial A) = F(\overset{\circ}{A}) \cup F(\partial A).$$

Puesto que $\partial F(A) \subset \overline{F(A)} = F(\overline{A})$, pero $\partial F(A) \cap int(F(A)) = \emptyset$, resulta $\partial F(A) \subset F(\partial A)$. Por otra parte, de (3) de la Proposición 4.8 sale que $F(\partial A)$ es contenido 0, porque F es localmente lipschitziana y ∂A contenido 0. En consecuencia $\partial F(A)$ es de contenido 0 y por tanto $F(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. ■

Capítulo 5

Cambio de variables

5.1. Preliminares

Identificaremos las aplicaciones lineales $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con las matrices $n \times n$. Observemos que L es isomorfismo si y sólo si $det\ L \neq 0$. Recordemos que toda aplicación lineal $T : \mathbb{R}^n \to X$, siendo X un espacio normado, es continua (porque $\mathbb{R}^n$ es de dimensión finita) y tiene diferencial, que es $DT = T$.

Proposición 5.1. *Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un isomorfismo (es decir, $det\ L \neq 0$). Entonces, si $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, se tiene que*

$$LA \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \quad y \quad m(LA) = |det\ L| \cdot m(A). \tag{5.1}$$

Demostración. Puesto que $L, L^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ (es decir, L es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$ de clase C^1 al menos), aplicando la Proposición 4.9, con $U = V = \mathbb{R}^n$, obtenemos que $LA \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. A continuación probamos en varias etapas que $m(LA) = |det\ L| \cdot m(A)$.

(a) Supongamos, en primer lugar, que A es un intervalo compacto, digamos $A = [a, b]$ con $a \leq b$.

(a1) Supongamos que L es tal que

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ L(x_1, ..., x_n) = (kx_1, x_2, ..., x_n),\ k \neq 0.$$

Entonces $det\ L = k$ y

$$LA = \begin{cases} [ka_1, kb_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n] & \text{si } k > 0 \\ [kb_1, ka_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n] & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

En cualquier caso, claramente

$$m(LA) = |k| \cdot \Pi_{i=1}^n (b_i - a_i) = |k| \cdot m(A) = |det\ L| \cdot m(A)$$

(a2) Supongamos que L es el operador que permuta las coordenadas i, j, es decir

$$\forall x = (x_1, .., x_i, ...x_j, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ L(x_1, .., x_i, ...x_j, ..., x_n) = (x_1, .., x_j, ...x_i, ..., x_n).$$

Entonces $det\ L = -1$ y

$$LA = [a_1, b_1] \times ... \times [a_j, b_j] \times ... \times [a_i, b_i] \times ... \times [a_n, b_n].$$

Por tanto, en este caso se verifica

$$m(LA) = \Pi_{k=1}^n (b_k - a_k) = |det\ L| \cdot m(A).$$

(a3) Sea L el operador tal que

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ L(x_1, ..., x_n) = (x_1 + x_2, x_2, ..., x_n).$$

Entonces $det\ L = 1$ y

$$LA = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 2, 3, ..., n, a_1 + x_2 \leq x_1 \leq b_1 + x_2\}.$$

Por el Teorema de Fubini tenemos que

$$\begin{aligned} m(LA) = \int_{LA} 1 &= \int_{a_n}^{b_n} [\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} ...[\int_{a_2}^{b_2} [\int_{a_1+x_2}^{b_1+x_2} 1 dx_1] dx_2] .... dx_{n-1}] dx_n = \\ &= \int_{a_n}^{b_n} [\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} ...[\int_{a_2}^{b_2} (b_1 - a_1) dx_2] .... dx_{n-1}] dx_n = \\ &= \Pi_{k=1}^n (b_k - a_k) = |det\ L| \cdot m(A). \end{aligned}$$

(b) Supongamos que $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ es arbitrario pero que el operador L es ó del tipo (a1) ó (a2) ó (a3). Sea $\mathcal{F} := \{J_i : i \geq 1\}$ una familia de cubos cerrados bien-inscrita en $\overset{\circ}{A}$ (ver Proposición 4.5). Entonces $\tilde{\mathcal{F}} := \{LJ_i : i \geq 1\} \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ es un familia contable de $\mathcal{J}$-medibles de $\mathbb{R}^n$ (en general, no serán cubos, ni siquiera intervalos), que está bien-inscrita en el abierto $L(\overset{\circ}{A}) = int(LA)$. Así que por Proposición 4.2, Proposición 4.5 y el apartado (a) anterior se tiene que

$$m(LA) = m(int(LA)) = \sum_{i \geq 1} m(LJ_i) = |det\ L| \sum_{i \geq 1} m(J_i) = |det\ L| \cdot m(\overset{\circ}{A}) = |det\ L| \cdot m(A).$$

(c) Finalmente sean $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ y L arbitrarios. Sabemos que L se descompone como producto de un número finito de operadores del tipo (a1), (a2) y (a3), digamos $L = L_s \circ L_{s-1} \circ ... \circ L_1$. Por (a) y (b) se tiene que

$$\begin{aligned} m(LA) &= m(L_s \circ (L_{s-1} \circ ... \circ L_1(A))) = |det\ L_s| \cdot m(L_{s-1} \circ ... \circ L_1(A)) = ... \\ &= |det\ L_s| \cdot |det\ L_{s-1}| \cdots |det\ L_1| \cdot m(A) = |det\ L| \cdot m(A). \end{aligned}$$

■

Proposición 5.2. *Sean* $U, V \subset \mathbb{R}^n$ *abiertos,* $T : U \to V$ *un* C^1*-difeomorfismo y* $C \subset U$ *un cubo cerrado. Se verifica que* $TC \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ *y*

$$m(TC) \leq \int_C |det\ DT|.$$

Demostración. (A) Por la Proposición 4.9 sabemos que $TC \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. La función $|det\ DT|$ es contina en U (porque T es C^1 en U). Por tanto $|det\ DT| \in \mathcal{R}(C)$. En toda esta prueba vamos trabajar con la norma del supremo $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$ de $\mathbb{R}^n$. Recordemos que con esta norma del supremo las bolas cerradas son cubos cerrados. Sea a el centro del cubo C y ℓ la longitud de su arista. Aplicando el Teorema del Valor Medio Generalizado (abrev., TVMG), para todo $y \in C$ se verifica

$$\begin{aligned} \|Ty - Ta\| &\leq \sup_{0\leq t\leq 1} \|DT(a + t(y-a))\| \cdot \|y - a\| \leq \\ &\leq \sup_{z\in C} \|DT(z)\| \cdot \|y-a\| \leq \sup_{z\in C} \|DT(z)\| \cdot \tfrac{\ell}{2}. \end{aligned}$$

Esta desigualdad pone de manifiesto que TC está contenido en el cubo cerrado (que es una bola para la norma $\|\cdot\|_\infty$) de centro Ta y arista de longitud $= \sup_{z\in C} \|DT(z)\| \cdot \ell$. Por tanto como la medida de Jordan m es monótona se tiene que:

$$m(TC) \leq (\sup_{z\in C} \|DT(z)\|)^n \ell^n = (\sup_{z\in C} \|DT(z)\|)^n m(C). \tag{5.2}$$

(B) Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un isomorfismo. Entonces $W := L(V)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $L \circ T : U \to W$ es un C^1-difeomorfismo entre U y W tal que $D(L \circ T) = L \circ DT$, al que se le puede aplicar (A). Por tanto aplicando (5.1) a L y (5.2) al C^1-difeomorfismo $L \circ T$ se tiene

$$|det\ L| \cdot m(TC) = m(L \circ T(C)) \leq (\sup_{z\in C} \|L \circ DT(z)\|)^n \cdot m(C),$$

de donde, como $|det\ L^{-1}| = |det\ L|^{-1}$, sale que

$$m(TC) \leq |det\ L^{-1}| \cdot (\sup_{z\in C} \|L \circ DT(z)\|)^n \cdot m(C).$$

(C) Sea $y \in U$ arbitrario. Como T es un C^1-difeomorfismo tal que $T^{-1} \circ T = Id_U$(= identidad en U), por la regla de la cadena:

$$Id_{\mathbb{R}^n} = D(Id_U)(y) = D(T^{-1})(Ty) \circ DT(y),$$

de donde sale que $det\ D(T^{-1})(Ty) \neq 0 \neq det\ DT(y)$, es decir, que $DT(y)$ y $D(T^{-1})(Ty)$ son isomorfismos, inverso el uno del otro. Tomando $L = (DT(y))^{-1}$ en (B) obtenemos

$$\forall y \in U,\ m(TC) \leq |det\ DT(y)| \cdot (\sup_{z\in C} \|(DT(y))^{-1} \circ DT(z)\|)^n \cdot m(C). \tag{5.3}$$

(D) La función $C \times C \ni (y,z) \to \Phi(y,z) := \|(DT(y))^{-1} \circ DT(z)\|^n$ es continua y, por tanto, uniformemente continua ya que $C \times C$ es compacto. De aquí que, dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $y, z, y', z' \in C$ verifican $\|y - y'\|$, $\|z - z'\| \leq \delta$, entonces $|\Phi(y,z) - \Phi(y',z')| \leq \epsilon$. Sea $\pi := \{C_1, ..., C_s\} \in \Pi(C)$ una partición grilla de C en cubos iguales con $\|\pi\| \leq \delta$. Entonces, si $y, z \in C_j \in \pi$, se verifica $\|y - z\| \leq \delta$ y por tanto

$$|\Phi(y,z) - \Phi(y,y)| = \left| \|(DT(y))^{-1} \circ DT(z)\|^n - \|(DT(y))^{-1} \circ DT(y)\|^n \right| =$$
$$= \left| \|(DT(y))^{-1} \circ DT(z)\|^n - 1 \right| \leq \epsilon$$

en donde hemos aplicado que $(DT(y))^{-1} \circ DT(y)$ es el operador identidad $Id_{\mathbb{R}^n}$ en $\mathbb{R}^n$ y que $\|Id_{\mathbb{R}^n}\| = 1$. Por tanto, para cada cubo $C_j \in \pi$ se tiene que

$$\forall y, z \in C_j, \quad \|(DT(y))^{-1} \circ DT(z)\|^n \leq 1 + \epsilon,$$

de donde

$$\sup_{y,z \in C_j} \|(DT(y))^{-1} \circ DT(z)\|^n \leq 1 + \epsilon. \tag{5.4}$$

(E) Por cada cubo $C_j \in \pi$ elegimos $y_j \in C_j$ tal que

$$|det\ DT(y_j)| = \text{mín}\{|det\ DT(y)| : y \in C_j\} = m(|det\ DT|; C_j).$$

Por (5.3) y (5.4) para cada cubo C_j se verifica

$$m(TC_j) \leq |det\ DT(y_j)| \cdot (\sup_{z \in C_j} \|(DT(y_j))^{-1} \circ DT(z)\|)^n \cdot m(C_j) \leq \tag{5.5}$$
$$\leq |det\ DT(y_j)| \cdot (1 + \epsilon) \cdot m(C_j).$$

La familia de subconjuntos $\mathcal{J}$-medibles $TC_1, ..., TC_s$ son casi disjuntos pues, como T es un homeomorfismo, se verifica para $i \neq j$ que

$$int(TC_i) \cap int(TC_j) = T(int(C_i) \cap int(C_j)) = T(\emptyset) = \emptyset.$$

Por otra parte $TC = \bigcup_{i=1}^s TC_i$. En consecuencia de la Proposición 4.2 sale que $m(TC) = \sum_{j=1}^s m(TC_j)$. Aplicando (5.5) obtenemos:

$$m(TC) = \sum_{j=1}^s m(TC_j) \leq (1 + \epsilon) \sum_{j=1}^s |det\ DT(y_j)| v(C_j) =$$
$$= (1 + \epsilon) \sum_{j=1}^s m(|det\ DT|; C_j) v(C_j) = (1 + \epsilon) L(|det\ DT|; \pi) \leq (1 + \epsilon) \int_C |det\ DT|.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $m(TC) \leq \int_C |det\ DT|$. ■

5.2. El Teorema del cambio de variables para la integral de Riemann

Comencemos probando el siguiente lema auxiliar.

Lema 5.3. *Sean $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abiertos, $T : U \to V$ un C^1-difeomorfismo y $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\overline{A} \subset U$. Se verifica que $TA \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ y*

$$m(TA) \leq \int_A |det\ DT|.$$

Demostración. En primer término $TA \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ por la Proposición 4.9. Además, como $|det\ DT|$ es una función continua en U y el compacto $\overline{A} \subset U$, es claro que $|det\ DT| \in \mathcal{R}(A)$. Sea $\{J_i : i \geq 1\}$ familia contable de cubos cerrados bien-inscrita en $\overset{\circ}{A}$ (ver la Proposición 4.5). Entonces $\{TJ_i : i \geq 1\}$ es familia contable de $\mathcal{J}$-medibles bien-inscrita en el abierto $int(TA) = T(\overset{\circ}{A})$, por lo que aplicando la Proposición 5.2 a $m(TJ_i)$ y la Proposición 4.6 obtenemos:

$$m(TA) = m(int(TA)) = \sum_{i\geq 1} m(TJ_i) \leq \sum_{i\geq 1} \int_{J_i} |det\ DT| = \int_A |det\ DT|.$$

■

Proposición 5.4. *[Teorema del cambio de variables para la integral de Riemann] Sean $U, V \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos abiertos, $T : U \to V$ un C^1-difeomorfismo, $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ con $\overline{A} \subset U$, $f : T(A) \to \mathbb{R}$ y $g = (f \circ T) \cdot |det\ DT| : A \to \mathbb{R}$. Se verifica que $T(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ y además:*

(A) Son equivalentes:(A1) $f \in \mathcal{R}(T(A))$; (A2) $g \in \mathcal{R}(A)$.

(B) En cualquiera de los casos de (A), se tiene que

$$\int_{T(A)} f = \int_A g = \int_A (f \circ T) \cdot |det\ DT| \quad \textit{[Fórmula del cambio de variables].}$$

Demostración. Que $T(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ sale de la Proposición 4.9.

(A1) $\Rightarrow$ (A2). Como $f \in \mathcal{R}(T(A))$, el conjunto $\{y \in int(T(A)) : f \text{ discontinua en } y\}$ es de medida 0 por (a1) de la Proposición 4.6. Por tanto

$$T^{-1}(\{y \in int(T(A)) : f \text{ discontinua en } y\}) = \{x \in int(A) : f \circ T \text{ discontinua en } x\}$$

es de medida 0 por el punto (3) de la Proposición 4.8. Por (a1) de la Proposición 4.6 obtenemos que $f \circ T \in \mathcal{R}(A)$. Por otra parte, $|det\ DT| \in \mathcal{R}(A)$ porque es una función continua y acotada en el compacto $\overline{A} \subset U$. En consecuencia $g = (f \circ T) \cdot |det\ DT| : A \to \mathbb{R}$ verifica $g \in \mathcal{R}(A)$ por la Proposición 4.6.

$(A2) \Rightarrow (A1)$ sale de la implicación $(A1) \Rightarrow (A2)$. En efecto basta tener en cuenta que

$$f = (g \circ T^{-1})|det\ D(T^{-1})|.$$

(B) Supongamos que $f \in \mathcal{R}(T(A))$. Sean $C \subset int(A)$ un cubo cerrado y $\pi := \{J_1, \ldots, J_r\}$ una partición de C. Denotemos

$$\pi_T := \{TJ_1, TJ_2, \ldots, TJ_r\},$$

que es una partición del $\mathcal{J}$-medible TC formada por conjuntos $\mathcal{J}$-medibles que no se solapan. Se tiene que:

(1) Definamos $\ell(f, \pi_T)$ como

$$\ell(f, \pi_T) := \sum_{i=1}^{r} \text{ínf}\{f(x) : x \in TJ_i\} \cdot m(TJ_i) = \sum_{i=1}^{r} \text{ínf}\{f \circ T(u) : u \in J_i\} \cdot m(TJ_i).$$

Puesto que $m(TJ_i) \leq \int_{J_i} |det\ DT|$ (por el Lema 5.3 ya que $J_i \subset U$ es un $\mathcal{J}$-medible cerrado) obtenemos que:

$$\ell(f, \pi_T) \leq \sum_{i=1}^{r} \text{ínf}\{f \circ T(u) : u \in J_i\} \cdot \int_{J_i} |det\ DT| \leq \sum_{i=1}^{r} \int_{J_i} (f \circ T)|det\ DT| =$$
$$= \int_C (f \circ T)|det\ DT|,$$

en donde la última igualdad sale de la Proposición 4.6.

(2) Si definimos $u(f, \pi_T)$ como

$$u(f, \pi_T) := \sum_{i=1}^{r} \sup\{f(x) : x \in TJ_i\} \cdot m(TJ_i) = \sum_{i=1}^{r} \sup\{f \circ T(u) : u \in J_i\} \cdot m(TJ_i),$$

entonces, como $\sum_{i=1}^{r} \int_{TJ_i} f = \int_{TC} f$ por la Proposición 4.6, se llega a que

$$\ell(f, \pi_T) = \sum_{i=1}^{r} \text{ínf}\{f(x) : x \in TJ_i\} \cdot m(TJ_i) = \sum_{i=1}^{r} \text{ínf}\{f(x) : x \in TJ_i\} \cdot \int_{TJ_i} 1 \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{r} \int_{TJ_i} f = \int_{TC} f \leq \sum_{i=1}^{r} \sup\{f(x) : x \in TJ_i\} \cdot \int_{TJ_i} 1 =$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \sup\{f(x) : x \in TJ_i\} \cdot m(TJ_i) = u(f, \pi_T).$$

Aserto. Dado $\epsilon > 0$ existe una partición $\pi^* \in \Pi(C)$ tal que

$$u(f, \pi_T^*) - \ell(f, \pi_T^*) \leq \epsilon.$$

En efecto, sean

$$\epsilon_1 := \frac{\epsilon}{4\sup\{|f(x)| : x \in TC\} \cdot \sup\{|det\ DT(u)| : u \in C\} + 1}$$

y

$$\epsilon_2 := \frac{\epsilon}{2m(C) \cdot \sup\{|det\ DT(u)| : u \in C\} + 1}.$$

Sabemos que el conjunto $D_{\epsilon_2} := \{x \in C : O(f \circ T, x) \geq \epsilon_2\}$ es un subconjunto compacto de C de cont. 0, por el Teorema de Lebesgue y porque $f \circ T \in \mathcal{R}(C)$. En consecuencia existen intervalos compactos, digamos $J_1, \ldots, J_p$, tales que

$$J_i \subset U,\ i = 1, ..., p, \quad D_{\epsilon_2} \subset \cup_{i=1}^{p} \overset{\circ}{J_i} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{p} v(J_i) \leq \epsilon_1.$$

Si $x \in C \setminus D_{\epsilon_2}$ entonces $O(f \circ T, x) < \epsilon_2$ y por tanto existe un subintervalo compacto $J_x \subset U$ tal que $x \in int(J_x)$, $J_x \cap D_{\epsilon_2} = \emptyset$ y $O(f \circ T, J_x \cap C) < \epsilon_2$. Como la familia $\mathcal{F} := \{\overset{\circ}{J_i} : i = 1, \ldots, p\} \cup \{\overset{\circ}{J_x} : x \in C \setminus D_{\epsilon_2}\}$ recubre C, que es compacto, una cierta subfamilia finita $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{F}$ también recubre C. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{F}_0 := \{\overset{\circ}{J_i} : i = 1, \ldots, p\} \cup \{\overset{\circ}{J}_{x_j} : j = 1, \ldots, q\}$. Sea $\pi^* \in \Pi(C)$ la partición grilla subordinada a la familia $\{J_i \cap C : i = 1, \ldots, p\} \cup \{J_{x_j} \cap C : j = 1, \ldots, q\}$.

(a) Sea $\mathcal{S}_1$ el conjunto de los $J^* \in \pi^*$ que están dentro de algún J_i, $i = 1, \ldots, p$. Por (E) de la Proposición 1.5 se verifica que $\sum_{J^* \in \mathcal{S}_1} v(J^*) \leq \sum_{i=1}^{p} v(J_i) \leq \epsilon_1$.

(b) Sea $\mathcal{S}_2 := \pi^* \setminus \mathcal{S}_1$. Si $J^* \in \mathcal{S}_2$ y $v(J^*) > 0$, necesariamente existe $j \in \{1, ..., q\}$ tal que $J^* \subset J_{x_j}$ (ver (c) NOTA (B), Cap. 1), por lo que $O(f \circ T, J^*) < \epsilon_2$. Si $v(J^*) = 0$, también $m(TJ^*) = 0$ (aplicar vg. el Lema 5.3 ó la Proposición 4.8) y podemos olvidarnos de ambos (de J^* y de TJ^*).

Aplicando (a), (b) y que $m(TJ^*) \leq \int_{J^*} |det\ DT|$, $\forall J^* \in \pi^*$, (es el Lema 5.3) se tiene

$$u(f, \pi_T^*) - \ell(f, \pi_T^*) = \sum_{J^* \in \mathcal{S}_1} O(f, TJ^*) m(TJ^*) + \sum_{J^* \in \mathcal{S}_2, v(J^*) > 0} O(f, TJ^*) m(TJ^*) \leq$$

$$\leq 2\sup\{|f(x)| : x \in TC\} \cdot \sum_{J^* \in \mathcal{S}_1} \int_{J^*} |det\ DT| + \epsilon_2 \cdot \sum_{J^* \in \mathcal{S}_2} \int_{J^*} |det\ DT| \leq$$

$$\leq 2\sup\{|f(x)| : x \in TC\} \cdot \sup\{|det\ DT(u)| : u \in C\} \cdot \sum_{J^* \in \mathcal{S}_1} v(J^*) +$$

$$+ \epsilon_2 \cdot \sup\{|det\ DT(u)| : u \in C\} \cdot \sum_{J^* \in \mathcal{S}_2} v(J^*) \leq$$

$$\leq 2\sup\{|f(x)| : x \in TC\} \cdot \sup\{|det\ DT(u)| : u \in C\} \cdot \epsilon_1 +$$

$$+ \epsilon_2 \cdot \sup\{|det\ DT(u)| : u \in C\} \cdot v(C) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

De (1), (2) y el Aserto obtenemos que para todo $\epsilon > 0$ se verifica

$$\int_{TC} f \leq u(f, \pi_T^*) \leq \ell(f, \pi_T^*) + \epsilon \leq \int_C (f \circ T)|det\ DT| + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que

$$\int_{TC} f \leq \int_C (f \circ T)|det\ DT|. \qquad (\&)$$

Sea $\{I_i : i \geq 1\}$ familia de cubos cerrados "bien inscrita" en $\overset{\circ}{A}$. Entonces $\{TI_i : i \geq 1\}$ es una familia de $\mathcal{J}$-medibles "bien inscrita" en $int(TA) = T\overset{\circ}{A}$. Aplicando la Proposición 4.6 y (&) obtenemos la siguiente desigualdad

$$\int_{TA} f = \int_{T\overset{\circ}{A}} f = \sum_{i\geq 1} \int_{TI_i} f \overset{(\&)}{\leq} \sum_{i\geq 1} \int_{I_i} (f \circ T) \cdot |det\ DT| = \int_A (f \circ T) \cdot |det\ DT|. \ (\&\&)$$

La otra desigualdad $\int_A (f \circ T) \cdot |det\ DT| \leq \int_{TA} f$ se prueba por simetría teniendo en cuenta que si

$$g := (f \circ T) \cdot |det\ DT|,$$

entonces $(g \circ T^{-1}) \cdot |det\ DT^{-1}| = f$ y por (&&) debe ser

$$\int_{A=T^{-1}(TA)} g \leq \int_{TA} (g \circ T^{-1}) \cdot |det\ DT^{-1}| = \int_{TA} f.$$

■

Corolario 5.5. *Sean $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abiertos, $T : U \to V$ un C^1-difeomorfismo y $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\overline{A} \subset U$. Se verifica que $TA \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ y*

$$m(TA) = \int_A |det\ DT|.$$

Demostración. Aplicando el T. de cambio de variable a $f : TA \to \mathbb{R}$ tal que $f = 1$ obtenemos que

$$m(TA) = \int_{TA} 1 = \int_A (1 \circ T)|det\ DT| = \int_A |det\ DT|.$$

■

Capítulo 6

Curvas en $\mathbb{R}^n$. Teorema de Green

6.1. Funciones de variación acotada

Sean $I = [a, b]$ un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una función y $\pi := \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_m = b\} \in \Pi(I)$ una partición de I. Definimos

Variación de f en I respecto de $\pi = V_{f,\pi}(I) = \sum_{i=1}^{m} \|f(x_i) - f(x_{i-1})\|$.

Variación total de f en I $= V_f(I) = \sup_{\pi\in\Pi(I)} V_{f,\pi}(I)$.

Es obvio que $0 \leq V_{f,\pi}(I) \uparrow$ cuando $\pi \uparrow$ asciende en la red $\Pi(I)$, es decir, que $V_{f,\pi_1} \leq V_{f,\pi_2}$ cuando $\pi_1, \pi_2 \in \Pi(I)$ de modo que $\pi_1 \leq \pi_2$. En consecuencia

$$V_f([a, b]) = \sup_{\pi\in\Pi(I)} V_{f,\pi} = \lim_{\pi\in\Pi(I),\pi\uparrow} V_{f,\pi}. \tag{6.1}$$

Decimos que f es de **variación acotada** en $I = [a, b]$ si $V_f(I) < \infty$. Denotaremos **por $BV([a, b]; \mathbb{R}^n)$ al conjunto de las funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de variación acotada en $[a, b]$.**

Proposición 6.1. *Sean $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.*

(1) Para todo $c \in [a, b]$ se verifica que

$$V_f([a, b]) = V_f([a, c]) + V_f([c, b]).$$

(2) Son equivalentes: (i) $f \in BV([a, b])$; (ii) $\forall c \in [a, b],\ f \in BV([a, c]) \cap BV([c, b])$.

(3) Supongamos $f \in BV([a, b])$ y definamos $V_f : [a, b] \to [0, \infty)$ tal que, $\forall x \in [a, b]$, $V_f(x) := V_f([a, x])$. Son equivalentes: (i) f es continua en $[a, b]$; (ii) V_f es continua en $[a, b]$.

Demostración. (1) Sea $c \in [a, b]$ fijo. Si $\pi \in \Pi(I)$ verifica que $c \in \pi$, entonces $\pi \restriction [a, c] =: \pi_1 \in \Pi([a, c])$, $\pi \restriction [c, b] =: \pi_2 \in \Pi([c, b])$ y se tiene trivialmente

$$V_{f,\pi}([a, b]) = V_{f,\pi_1}([a, c]) + V_{f,\pi_2}([c, b]).$$

Además, π asciende en finura en $\Pi(I)$ (manteniéndose $c \in \pi$) sii π_1 y π_2 ascienden en finura en $\Pi([a,c])$ y $\Pi([c,b])$, respectivamente. Por tanto

$$V_f([a,b]) = \lim_{\pi\uparrow, c\in\pi} V_{f,\pi}([a,b]) = \lim_{\pi_1\uparrow} V_{f,\pi_1}([a,c]) + \lim_{\pi_2\uparrow} V_{f,\pi_2}([ac,b]) = V_f([a,c]) + V_f([c,b]).$$

(2) sale inmediatamente de (1).

(3) $(i) \Rightarrow (ii)$. Bastará probar los siguientes Asertos.

Aserto 1. V_f es continua a la derecha, es decir, si $c \in [a,b)$, entonces

$$V_f(c) = V_f(c^+) := \lim_{x\downarrow c} V_f(x).$$

En efecto, es claro (por ser V_f creciente) que $V_f(c) \leq V_f(c^+)$. Probemos que $V_f(c^+) \leq V_f(c)$. Sea $\epsilon > 0$. Puesto que f es continua y $c < b$, existe $\delta > 0$ tal que

$$c + \delta \leq b \quad \text{y} \quad \|f(x) - f(c)\| < \tfrac{\epsilon}{2}\ , \ \forall x \in [c, c+\delta].$$

Sea $\pi := \{c = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b\} \in \Pi([c,b])$ de modo que $x_1 - x_0 < \delta$ y que

$$V_f([c,b]) \leq \sum_{i=1}^{m} \|f(x_i) - f(x_{i-1})\| + \tfrac{\epsilon}{2},$$

de donde, como $\|f(x_1) - f(x_0)\| < \epsilon/2$, obtenemos

$$V_f([c,b]) - \tfrac{\epsilon}{2} \leq \tfrac{\epsilon}{2} + \sum_{i=2}^{m} \|f(x_i) - f(x_{i-1})\| \leq \tfrac{\epsilon}{2} + V_f([x_1,b]).$$

Por tanto, aplicando (1), se verifica que

$$\begin{aligned}\epsilon \geq V_f([c,b]) - V_f([x_1,b]) &= (V_f([a,b]) - V_f([a,c])) - (V_f([a,b]) - V_f([a,x_1])) = \\ &= V_f([a,x_1]) - V_f([a,c]),\end{aligned}$$

es decir

$$V_f(c^+) \leq V_f(x_1) \leq V_f(c) + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, obtenemos que $V_f(c^+) \leq V_f(c)$.

Aserto 2. V_f es continua a la izquierda, es decir, si $c \in (a,b]$, entonces

$$V_f(c) = V_f(c^-) := \lim_{x\uparrow c} V_f(x).$$

La prueba del Aserto 2 es análoga a la del Aserto 1.

La continuidad de V_f sale de ambos Asertos.

$(ii) \Rightarrow (i)$ es inmediato pues, si $a \leq x \leq y \leq b$, entonces

$$0 \leq \|f(y) - f(x)\| \leq V_f([a,y]) - V_f([a,x]).$$

■

Para funciones $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ y $\pi := \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_m = b\} \in \Pi(I)$ adoptamos la siguiente notación:

$$P_{f,\pi}(I) := \sum_{i=1}^{m} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+, N_{f,\pi}(I) := \sum_{i=1}^{m} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^-,$$
$$P_f(I) := \sup_{\pi \in \Pi(I)} P_{f,\pi}(I), \quad N_f(I) := \sup_{\pi \in \Pi(I)} N_{f,\pi}(I),$$

siendo $P_f(I)$ la variación positiva de f en I y $N_f(I)$ la variación negativa. Es inmediato que

(1) $V_{f,\pi}(I) = P_{f,\pi}(I) + N_{f,\pi}(I), \ \forall \pi \in \Pi(I)$.

(2) $0 \leq P_f(I), N_f(I) \leq V_f(I) \leq P_f(I) + N_f(I) \leq \infty$.

Proposición 6.2. *Sea $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$.*

(1) Siempre ocurre que

$$P_f(I) = f(b) - f(a) + N_f(I) \quad y \quad V_f(I) = P_f(I) + N_f(I).$$

(2) Son equivalentes:(21) $f \in BV(I)$, es decir, f es de variación acotada en I; (22) $f = g - h$ siendo $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones monótonas crecientes.

Demostración. (1) Es claro que para toda partición $\pi := \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_m = b\} \in \Pi(I)$ se verifica que

$$P_{f,\pi}(I) - N_{f,\pi}(I) = \sum_{i=1}^{m} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(b) - f(a) \ \text{ y } \ P_{f,\pi}(I) + N_{f,\pi}(I) = V_{f,\pi}(I),$$

de donde

$$P_{f,\pi}(I) = (f(b) - f(a)) + N_{f,\pi}(I).$$

Tomando supremos para $\pi \in \Pi(I)$, llegamos a que

$$P_f(I) = f(b) - f(a) + N_f(I) \quad \text{y} \quad P_f(I) + N_f(I) = V_f(I).$$

(2) (21) $\Rightarrow$ (22). Si $V_f([a,b]) < \infty$, también $V_f([a,x]) < \infty, \forall x \in [a,b]$, y por (1)

$$f(x) = f(a) + P_f([a,x]) - N_f([a,x]).$$

Finalmente observemos que las funciones

$$\forall x \in [a,b], \ g(x) = f(a) + P_f([a,x]) \quad \text{y} \quad h(x) = N_f([a,x])$$

son monótonas crecientes en $[a,b]$.

(22) $\Rightarrow$ (21). Sea $f = g - h$ siendo $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones monótonas crecientes. Entonces para toda $\pi := \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_m = b\} \in \Pi(I)$ se verifica que

$$\sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{m} (g(x_i) - g(x_{i-1})) + \sum_{i=1}^{m} (h(x_i) - h(x_{i-1})) =$$
$$= g(b) - g(a) + h(b) - h(a) < \infty.$$

Por tanto, $V_f(I) \leq g(b) - g(a) + h(b) - h(a) < \infty$. ∎

6.2. Arcos y curvas en $\mathbb{R}^n$

Definición 6.3. *(1) Un* **arco en** $\mathbb{R}^n$ *es todo par* $([a, b], f)$ *(al que nos referiremos simplemente por* f*) tal que* $[a, b]$ *es un intervalo cerrado de* $\mathbb{R}$ *y* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función continua. El punto* $f(a)$ *es el* **extremo inicial** *de* f *y* $f(b)$ *su* **extremo final**. *La imagen de* f *es* $f^* := f([a, b])$ *(es un compacto de* $\mathbb{R}^n$*). El arco* f*: (i) es* **simple** *si* f *es inyectiva; (ii) es* **cerrado** *si* $f(a) = f(b)$*; (iii) es* **simple cerrado** *si es cerrado y* $f \restriction [a, b)$ *es inyectiva.*

El **arco opuesto** *a* f *es el arco* $([a, b], g)$ *tal que* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *verifica* $g(t) = f(b - t + a)$*. Denotaremos por* $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ *al conjunto de todos los arcos de* $\mathbb{R}^n$*.*

(2) Dos arcos $([a, b], f)$ *y* $([c, d], g)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *se dicen* **equivalentes** *(y se escribe* $f \sim g$*) si existe un homeomorfismo* $\psi : [a, b] \to [c, d]$ *tal que* $g \circ \psi = f$*. Es claro que* $\sim$ *es una relación de equivalencia en* $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$*. El conjunto* $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)/\sim$ *de las clases de equivalencia son* **las curvas de** $\mathbb{R}^n$*, conjunto que denotamos por* $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$*.*

(3) Si $\gamma \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ *y* $([a, b], f)$ *es un arco representante de* γ*, entonces*

(31) Pondremos $\gamma = [([a, b], f)]$ *y* $\gamma^* = f^*$*.*

(32) Los extremos de γ *son* $f(a)$ *y* $f(b)$*.* γ *tiene extremos, pero no extremos inicial y final. Si* $([a, b], g)$ *es el arco opuesto a* f*, se tiene que* $[([a, b], f)] = \gamma = [([a, b], g)]$*.*

(33) Diremos que γ *es simple, cerrada ó simple cerrada sii lo es* f*. Observemos que todos los demás arcos de* γ *tienen la misma imagen* f^* *y gozan de las mismas propiedades que* f *(respecto a ser simple, cerrado ó simple cerrado).*

Proposición 6.4. *Sean* $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ *dos curvas simples tales que* $\gamma_1^* = \gamma_2^*$*. Entonces* $\gamma_1 = \gamma_2$*.*

Demostración. Sean $\gamma_1 := [([a, b], f)]$ y $\gamma_2 := [([c, d], g)]$. Como se trata de curvas simples, f y g son homeomorfismos entre el compacto $\gamma_1^* = \gamma_2^*$ y $[a, b]$ y $[c, d]$, respectivamente. Sea $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ tal que $\varphi := g^{-1} \circ f$. Es claro que φ es un homeomorfismo tal que $f = g \circ \varphi$, es decir, $f \sim g$ de donde sale que $\gamma_1 = \gamma_2$. ∎

Entre dos intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ de $\mathbb{R}$ hay dos tipos de homeomorfismos $\psi : [a, b] \to [c, d]$, a saber:

(I) Los estrictamente crecientes tales que $\psi(a) = c$ y $\psi(b) = d$.

(II) Los estrictamente decrecientes tales que $\psi(a) = d$ y $\psi(b) = c$.

Dos arcos $([a,b], f)$ y $([c,d], g)$ de $\mathbb{R}^n$ se dicen **orden-equivalentes (y se escribe $f \simeq g$)** si existe un homeomorfismo creciente $\psi : [a,b] \to [c,d]$ tal que $g \circ \psi = f$. Es claro que $\simeq$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$.

Definición 6.5. *El conjunto de las* **curvas orientadas** $\mathcal{CO}(\mathbb{R}^n)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *es el conjunto cociente* $\mathcal{CO}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)/\simeq$. *Sea* $([a,b], f) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$. *Entonces*

(i) Denotaremos por $\gamma = [[([a,b], f)]]$ *a la curva orientada representada por* f.

(ii) La **curva orientada opuesta** *a* γ *se indica por* $-\gamma$ *y es la curva orientada representada por el arco opuesto* $([a,b], g)$ *a* f. *Recordemos que* $g(t) = b+a-t$, $\forall t \in [a,b]$.

(iii) La curva orientada γ *tiene extremos inicial y final, que son* $f(a)$ *y* $f(b)$. *Observemos que no dependen del representante de* γ.

(iv) $\gamma \cup -\gamma = [([a,b], f)]$, *es decir, la unión de las curvas orientadas* γ *y* $-\gamma$ *(consideradas como conjuntos de arcos) es la curva (no orientada)* $[([a,b], f)]$.

(v) Si $a, b \in \mathbb{R}^n$, *el* **segmento de extremo inicial** a **y final** b *es la curva orientada, que denotamos por* $[a,b]$, *tal que* $[a,b] := [[([0,1], f)]]$ *siendo* $f(t) = a+t(b-a)$, $\forall t \in [0,1]$.

(vi) **(Yuxtaposición ó suma de curvas orientadas)** *Sean* $\gamma = [[([a,b], f)]]$ *y* $\delta := [[([c,d], h)]]$ *dos curvas orientadas. Decimos que* δ *es* **sumable a** γ *sii* $f(b) = h(c)$, *en cuyo caso* **la suma** $\gamma + \delta$ **es la curva orientada** $[[([a, b+d-c], g)]]$ *tal que* $g(t) = f(t)$, $\forall t \in [a,b]$, *y* $g(t) = h(t-b+c)$, $\forall t \in [b, b+d-c]$. *Naturalmente, la yuxtaposición de curvas orientadas no es conmutativa, aunque sí es asociativa.*

(vii) Una **curva de Jordan** *es una curva orientada simple cerrada.*

NOTA (A). Si $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{CO}(\mathbb{R}^n)$ son simples y verifican $\gamma_1^* = \gamma_2^*$, entonces ó $\gamma_1 = \gamma_2$ ó $\gamma_1 = -\gamma_2$.

Proposición 6.6. *[Teorema de la curva de Jordan en* $\mathbb{R}^2$*] Sea* $\gamma \in \mathcal{CO}(\mathbb{R}^2)$ *una curva de Jordan. Entonces* $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma^*$ *se descompone de la forma* $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma^* = A \uplus B$, *siendo* A, B *dos regiones abiertas disjuntas, una de ellas acotada (se llama el interior de* γ*) y la otra no acotada (es el exterior de* γ*). Además* $\partial A = \gamma^* = \partial B$.

Demostración. Ver Dieudonné: "Fundamentos de Análisis Matemático", pg. 251. ■

6.3. Rectificación de arcos y curvas

Definición 6.7. *Sea* $([a,b], f) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ *un arco en* $\mathbb{R}^n$. *Se tiene que*

(1) Si $\pi := \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_m = b\} \in \Pi([a,b])$, $V_{f,\pi}([a,b])$ *es la longitud de la poligonal inscrita en* f^*, *que une sucesivamente los puntos* $f(x_i), i = 0, ..., m$.

(2) **La longitud** $\Lambda(f)$ **de** f *se define como* $\Lambda(f) = V_f([a,b])$. *Decimos que* f *es* **rectificable** *si* $\Lambda(f) = V_f([a,b]) < \infty$.

NOTA (B). Si $([a,b],f),([c,d],g) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ son arcos tales que $g \sim f$, entonces $V_f([a,b]) = V_g([c,d])$. Por tanto, f es rectificable sii lo es g, en cuyo caso ambos arcos tienen la misma longitud.

Proposición 6.8. *Sea $([a,b],f) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ un arco tal que $f \in C^1$ a trozos en $[a,b]$. Entonces f es rectificable y su longitud $\Lambda(f)$ es*

$$\Lambda(f) = \int_{[a,b]} \|f'\|. \tag{6.2}$$

Demostración. En primer término $\|f'\|$ es continua a trozos en $[a,b]$, por lo que es integrable-Riemann sobre $[a,b]$, de modo que su integral de Riemann verifica $\int_{[a,b]} \|f'\| = \sum_{i=1}^{p} \int_{[x_{i-1},x_i]} \|f'\|$, si $\pi := \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_p = b\} \in \Pi([a,b])$ es la partición tal que $\|f'\|$ es continua sobre cada trozo $[x_{i-1},x_i]$.

Sin pérdida de generalidad, suponemos que $\|f'\|$ es continua en todo $[a,b]$ y probamos que, con esta hipótesis, la fórmula (6.2) es válida. Sea $\pi := \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_p = b\} \in \Pi([a,b])$. Entonces, por el TVMG tenemos que

$$V_{f,\pi}([a,b]) = \sum_{i=1}^{p} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \leq \sum_{i=1}^{p} \sup_{\xi \in [t_{i-1},t_i]} \|f'(\xi)\| \cdot (t_i - t_{i-1}) = U(\|f'\|;\pi).$$

Por tanto

$$V_f([a,b]) = \sup_{\pi \in \Pi([a,b])} V_{f,\pi}([a,b]) \leq \lim_{\pi \in \Pi([a,b])} U(\|f'\|;\pi) = \int_{[a,b]} \|f'\| < \infty, \tag{6.3}$$

de donde sale que f es rectificable y que $\Lambda(f) \leq \int_{[a,b]} \|f'\|$.

Sea $\epsilon > 0$. Puesto que f' es uniformemente continua sobre $[a,b]$ (por ser $[a,b]$ compacto y f' continua), existe $\delta > 0$ tal que, si $t,s \in [a,b]$ verifican $|t-s| \leq \delta$, entonces $\|f'(t) - f'(s)\| \leq \epsilon/(b-a)$. Sea $\pi := \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_p = b\} \in \Pi([a,b])$ tal que $\|\pi\| \leq \delta$.

Aserto. Sea $\xi = (\xi_i)_{i=1}^p \prec \pi$. Fijemos $i \in \{1,...,p\}$. Entonces

$$\big|\|f'(\xi_i)\|(t_i - t_{i-1}) - \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|\big| \leq \tfrac{\epsilon}{b-a}(t_i - t_{i-1}).$$

En efecto, por una parte tenemos que

$$\|f'(\xi_i)\|(t_i - t_{i-1}) = \left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(\xi_i)dt\right\| = \left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i} (f'(t) + (f'(\xi_i) - f'(t))dt\right\| = \tag{6.4}$$

$$= \left\|f(t_i) - f(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f'(\xi_i) - f'(t))dt\right\| \leq \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| + \tfrac{\epsilon}{b-a}(t_i - t_{i-1}).$$

De modo análogo sale que

$$\|f'(\xi_i)\|(t_i - t_{i-1}) \geq \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| - \tfrac{\epsilon}{b-a}(t_i - t_{i-1}).$$

Ambas desigualdades prueban el Aserto.

De aquí que

$$L(\|f'\|;\pi) \leq \sum_{i=1}^{p} \|f'(\xi_i)\|(t_i - t_{i-1}) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{p} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| + \tfrac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{p}(t_i - t_{i-1}) \leq \Lambda(f) + \epsilon.$$

Por tanto, $\int_{[a,b]} \|f'\| \leq \Lambda(f) + \epsilon$ y, como $\epsilon > 0$ es arbitrario, $\int_{[a,b]} \|f'\| \leq \Lambda(f)$.

En consecuencia de ambas desigualdades sale (6.2). ■

NOTA (C). Puede ocurrir que dos arcos f, g sean rectificables y que $f^* = g^*$, pero sin embargo $\Lambda(f) \neq \Lambda(g)$. Por ejemplo

$$f(t) = (sen(t), cos(t)) \ \text{ y } \ g(t) = (sen(2t), cos(2t)), \ t \in [0, 2\pi].$$

Definición 6.9. *(I) De* **NOTA (B)** *se deduce que,* **si $\gamma \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ es una curva,** *entonces los arcos que integran γ como conjunto tienen todos la misma longitud. Definimos* **la longitud $\Lambda(\gamma)$ de γ como la longitud de cualquiera de sus arcos.** *En el caso en que $\Lambda(\gamma) < \infty$, decimos que γ es* **rectificable.**

(II) Si $\gamma \in \mathcal{CO}(\mathbb{R}^n)$ **es una curva orientada,** *los arcos que integran γ como conjunto tienen todos la misma longitud. Definimos* **la longitud $\Lambda(\gamma)$ de** *γ como la longitud de cualquiera de sus arcos. Es claro que $\Lambda(\gamma) = \Lambda(-\gamma)$. En el caso en que esta longitud sea finita decimos que γ* **es rectificable.**

Si $([a, b], f)$ es un arco en $\mathbb{R}^n$, definimos $\Lambda_f : [a, b] \to [0, \infty]$ de modo que $\Lambda_f(t) = \Lambda(([a, t], f)), \ \forall t \in [a, b]$.

Proposición 6.10. *Sea $([a, b], f)$ un arco en $\mathbb{R}^n$.*

(1) Si f es rectificable, $\Lambda_f : [a, b] \to [0, \infty)$ es continua.

(2) Son equivalentes: (i) f es rectificable; (ii) para todo $c \in [a, b]$ tanto $([a, c], f)$ como $([c, b], f)$ son rectificables. En cualquiera de los casos $\Lambda([a, b], f) = \Lambda([a, c], f) + \Lambda([c, b], f), \ \forall c \in [a, b]$.

(3) Si f es rectificable y $n \geq 2$, $f^* := f([a, b])$ es de contenido 0.

(4) Si $\gamma := [[([a, b], f)]]$ es una curva rectificable de Jordan en $\mathbb{R}^2$ y A es su interior, entonces $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$.

Demostración. (1) y (2) salen de la Proposición 6.1.

(3) Sea $\delta > 0$ y consideremos en $[0, \Lambda(f)]$ la partición

$$\pi = \{0, \delta, 2\delta, \cdots, \Lambda(f)\} = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = \Lambda(f)\}.$$

Observemos que $\left[\frac{\Lambda(f)}{\delta}\right] =: m \leq p \leq m+1$ y que $x_i - x_{i-1} \leq \delta$. Aprovechando que $\Lambda_f : [a,b] \to [0, \Lambda(f)]$ es continua creciente y sobreyectiva, podemos elegir puntos $\{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = b\}$ de modo que $\Lambda_f(t_i) = x_i,\ i = 0, 1, ..., p$. Por tanto para $i = 1, 2, ..., p$ se tiene que

$$\forall t \in [t_{i-1}, t_i],\ \|f(t) - f(t_{i-1})\| \leq \Lambda(([t_{i-1}, t_i], f)) = \Lambda_f(t_i) - \Lambda_f(t_{i-1}) = x_i - x_{i-1} \leq \delta.$$

En consecuencia existe un cubo $I_i \subset \mathbb{R}^n$ de centro $f(t_{i-1})$ y longitud de arista 2δ tal que $f([t_{i-1}, t_i]) \subset I_i,\ i = 1, 2, ..., p$. Es claro que $f^* \subset \cup_{i=1}^p I_i$ y además

$$\sum_{i=1}^{p} v(I_i) \leq 2^n \delta^n p \leq 2^n \delta^n (\left[\frac{\Lambda(f)}{\delta}\right] + 1).$$

Como $n \geq 2$, se tiene que $\delta^n \left[\frac{\Lambda(f)}{\delta}\right] \leq \delta \cdot \Lambda(f)$. Por tanto

$$2^n \delta^n (\left[\frac{\Lambda(f)}{\delta}\right] + 1) \to 0$$

para $\delta \to 0$, lo que prueba que f^* es de contenido 0.

(4) Sabemos que A es un subconjunto acotado y que $\partial A = \gamma^*$ (ver la Proposición 6.6). De (3) sale que γ^* es de contenido 0. Luego aplicando la Proposición 4.2 concluimos que $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. ■

6.4. Integral sobre una curva de $\mathbb{R}^n$

Sean $([a,b], \varphi) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ un arco, $\gamma := [([a,b], \varphi)] \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ la curva determinada por φ y $f : \varphi^* \to \mathbb{R}$ una función continua. Decimos que f **es integrable sobre** φ sii existe $A \in \mathbb{R}$ tal que, $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$, tal que para toda partición $\pi = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_m = b\} \in \Pi([a,b])$ con $\|\pi\| \leq \delta$ y toda $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m)$ selección para π (abrev., $\xi \prec \pi$) se verifica

$$|\tilde{S}(f; \varphi; \pi; \xi) - A| \leq \epsilon,$$

siendo $\tilde{S}(f; \varphi; \pi; \xi)$ **la suma especial**:

$$\tilde{S}(f; \varphi; \pi; \xi) = \sum_{i=1}^{m} f \circ \varphi(\xi_i) \cdot \|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}\|,$$

en cuyo caso decimos que **la integral de** f **sobre** φ, que denotamos por $\int_\varphi f$, es $\int_\varphi f = A$.

Observemos que, si $([c,d], \psi) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ es otro arco de $\mathbb{R}^n$ equivalente a φ, f es integrable respecto de φ sii lo es respecto de ψ, en cuyo caso las integrales coinciden, es decir, $\int_\varphi f = \int_\psi f$. Esto quiere decir que la integrabilidad y la integral de f dependen de la curva γ y no del arco representante de γ. Por ello podemos establecer **que** f **es integrable sobre** γ sii lo es sobre algún (todo) arco φ representante de γ, en cuyo caso **la integral** $\int_\gamma f$ **de** f **sobre la curva** γ se define como $\int_\gamma f := \int_\varphi f$.

Proposición 6.11. *Sean* $([a,b],\varphi) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ *arco* C^1 *a trozos,* $\gamma := [([a,b],\varphi)]$ *curva representada por* φ *y* $f : \varphi^* \to \mathbb{R}$ *continua. Entonces* f *es integrable sobre* γ *y*

$$\int_\gamma f = \int_{[a,b]} (f\circ\varphi)\cdot \|\varphi'\|.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad suponemos que φ es C^1 en todo $[a,b]$. En estas condiciones $(f\circ\varphi)\cdot\|\varphi'\|$ es continua (luego integrable-Riemann en $[a,b]$) y también uniformemente continua. Por tanto, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $\pi = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_m = b\} \in \Pi([a,b])$ con $\|\pi\| \le \delta_1$ y ξ es una selección para π, la suma de Riemann $S((f\circ\varphi)\cdot\|\varphi'\|;\pi;\xi)$ verifica por el T. de Riemann (ver la Proposición 1.17) que

$$\left|\int_{[a,b]} (f\circ\varphi)\cdot\|\varphi'\| - S((f\circ\varphi)\cdot\|\varphi'\|;\pi;\xi)\right| \le \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{6.5}$$

Además, aplicando el Aserto de la Proposición 6.8, existe $\delta_2 > 0$ tal que, si $\|\pi\| \le \delta_2$, para toda selección $\xi \prec \pi$ para π se verifica

$$\big|\|\varphi'(\xi_i)\|(t_i - t_{i-1}) - \|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\|\big| \le \tfrac{\epsilon}{2M(b-a)+1}(t_i - t_{i-1}),\quad i = 1,,,,,m,$$

siendo $M := \sup\{|f\circ\varphi(t)| : t \in [a,b]\}$. Por tanto, si $\pi \in \Pi([a,b])$ verifica $\|\pi\| \le \delta_1 \wedge \delta_2$ y $\xi \prec \pi$, se tiene que

$$\begin{aligned} &\left|S((f\circ\varphi)\cdot\|\varphi'\|;\pi;\xi) - \tilde{S}(f;\varphi;\pi;\xi)\right| = \qquad (6.6)\\ &= \left|\sum_{i=1}^m f\circ\varphi(\xi_i)(\|\varphi'(\xi_i)\|(t_i - t_{i-1}) - \|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\|)\right| \le \\ &\le M\cdot \tfrac{\epsilon}{2M(b-a)+1}\sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) \le \tfrac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

En consecuencia aplicando (6.5) y (6.6) a $\pi \in \Pi([a,b])$ con $\|\pi\| \le \delta_1 \wedge \delta_2$ y a $\xi \prec \pi$ obtenemos

$$\begin{aligned} &\left|\int_{[a,b]} (f\circ\varphi)\|\varphi'\| - \tilde{S}(f;\varphi;\pi;\xi)\right| \le \\ &\le \left|\int_{[a,b]} (f\circ\varphi)\cdot\|\varphi'\| - S((f\circ\varphi)\cdot\|\varphi'\|;\pi;\xi)\right| + \left|S((f\circ\varphi)\cdot\|\varphi'\|;\pi;\xi) - \tilde{S}(f;\varphi;\pi;\xi)\right| \le \\ &\le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, el enunciado es cierto.

■

6.5. La integral de Riemann-Stieltjes

Sean $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado, $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ funciones, $\pi = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_m = b\} \in \Pi([a,b])$ y ξ una selección para π. Definimos **la suma de Riemann-Stieltjes** $\hat{S}(f;\alpha;\pi;\xi)$ **relativa a** $f,\ \alpha, \pi, \xi$ como

$$\hat{S}(f;\alpha;\pi;\xi) := \sum_{i=1}^{m} \langle f(\xi_i), \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \rangle.$$

Decimos que f es integrable R-St (R-St=Riemann-Stieltjes) en $[a,b]$ respecto de α si existe en $\mathbb{R}$ el límite

$$\lim_{\pi \in \Pi([a,b])} \hat{S}(f;\alpha;\pi;\xi)$$

cuando π asciende en la red $\Pi([a,b])$ y ξ es una selección arbitraria para π. Dicho número, caso de existir, se denomina la integral de R-St de f en $[a,b]$ respecto de α y se denota por $\int_{[a,b]} f \cdot d\alpha$. Observemos que la integral de Riemann habitual es igual a la integral de R-St cuando $n = 1$ y $\alpha(t) = t,\ \forall t \in [a,b]$.

Lema 6.12. *Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado.*

(1) Sea $\varphi := (\varphi_1, ..., \varphi_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Son equivalentes: (11) $\varphi \in BV([a,b])$; (12) $\varphi_i \in BV([a,b]),\ i = 1, ..., n$.

(2) Sean $f, \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ con f continua y $\varphi \in BV([a,b])$. Entonces

(21) Existe la integral de R-St $\int_{[a,b]} f \cdot d\varphi$.

(22) Existen las integrales de R-St $\int_{[a,b]} f_i \cdot d\varphi_i,\ i = 1, ..., n$, y se verifica que:

$$\int_{[a,b]} f \cdot d\varphi = \sum_{i=1}^{n} \int_{[a,b]} f_i \cdot d\varphi_i.$$

Demostración. (1) sale de que para toda partición $\pi \in \Pi([a,b])$ se verifica

$$\forall j \in \{1, ..., n\}, \quad V_{\varphi_j,\pi}([a,b]) \le V_{\varphi,\pi}([a,b]) \le \sum_{i=1}^{n} V_{\varphi_i,\pi}([a,b]).$$

(2) (21) Bastará probar que, dado $\epsilon > 0$, existe una partición $\pi_0 \in \Pi([a,b])$ tal que cualquier otro par de particiones $\pi, \pi' \ge \pi_0$ y cualquier par de selecciones ξ, ξ' para π y π', respect., se verifica que

$$\left| \hat{S}(f;\varphi;\pi;\xi) - \hat{S}(f;\varphi;\pi';\xi') \right| \le \epsilon. \tag{6.7}$$

Puesto que f es continua sobre $[a,b]$ existe $\delta > 0$ tal que $\|f(t) - f(t')\| \le \epsilon/(2V_\varphi([a,b]) + 1)$, siempre que $t, t' \in [a,b]$ con $|t - t'| \le \delta$. Sean $\pi_0 \in \Pi([a,b])$ con $\|\pi_0\| \le \delta$, $\pi, \pi' \ge \pi_0$

arbitrarias y $\pi_1 := \pi \bigvee \pi'$. Bastará probar que para todo par de selecciones ξ, ξ^1 de π y π_1, respect., se verifica

$$\left|\hat{S}(f;\varphi;\pi;\xi) - \hat{S}(f;\varphi;\pi_1;\xi^1)\right| \leq \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{6.8}$$

Sean $\pi := \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_r = b\}$ y $\{J_{ik} : i = 1,...,r; k = 1,...,p_i\}$ los subintervalos de π_1 de modo que $J_{ik} = [t_{i,k-1}, t_{ik}]$ y $[t_{i-1}, t_i] = \cup_{k=1}^{p_i}[t_{i,k-1}, t_{ik}]$. Sean ξ, ξ^1 selecciones para π y π^1 con $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ y $\xi^1_{ik} \in J_{ik}$. Teniendo en cuenta que $\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \sum_{k=1}^{p_i}(\varphi(t_{ik}) - \varphi(t_{i,k-1}))$ obtenemos que

$$\begin{gathered}
\left|\tilde{S}(f;\varphi;\pi;\xi) - \tilde{S}(f;\varphi;\pi^1;\xi^1)\right| = \\
= \left|\sum_{i=1}^{r}\langle f(\xi_i), \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\rangle - \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p_i}\langle f(\xi^1_{ik}), \varphi(t_{ik}) - \varphi(t_{i,k-1})\rangle\right| = \\
= \left|\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p_i}\langle f(\xi_i) - f(\xi^1_{ik}), \varphi(t_{ik}) - \varphi(t_{i,k-1})\rangle\right| \leq \\
\leq \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p_i} \tfrac{\epsilon}{2V_\varphi([a,b])+1} \cdot \|\varphi(t_{ik}) - \varphi(t_{i,k-1})\| = \tfrac{\epsilon}{2V_\varphi([a,b])+1} \cdot V_{\varphi,\pi^1}([a,b]) \leq \tfrac{\epsilon}{2},
\end{gathered}$$

como queríamos probar.

(22) Como $\varphi \in BV([a,b])$, también $\varphi_i \in BV([a,b])$, $i = 1,...,n$, por (1). Por (21) existe la integral de R-St $\int_{[a,b]} f_i \cdot d\varphi_i$ y

$$\int_{[a,b]} f_i \cdot d\varphi_i = \lim_{\pi\in\Pi([a,b]),\xi\prec\pi} \hat{S}(f_i;\varphi_i;\pi;\xi).$$

Observemos que para toda partición $\pi \in \Pi([a,b])$ y toda selección $\xi \prec \pi$ se verifica

$$\hat{S}(f;\varphi;\pi;\xi) = \sum_{i=1}^{n} \hat{S}(f_i;\varphi_i;\pi;\xi).$$

De aquí que

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{n}\int_{[a,b]} f_i \cdot d\varphi_i = \sum_{i=1}^{n} \lim_{\pi\in\Pi([a,b]),\xi\prec\pi} \hat{S}(f_i;\varphi_i;\pi;\xi) = \lim_{\pi\in\Pi([a,b]),\xi\prec\pi} \sum_{i=1}^{n} \hat{S}(f_i;\varphi_i;\pi;\xi) = \\
= \lim_{\pi\in\Pi([a,b]),\xi\prec\pi} \hat{S}(f;\varphi;\pi;\xi) =: \int_{[a,b]} f \cdot d\varphi,
\end{gathered}$$

como se quería probar. ∎

6.6. La integral de línea ó circulación

Sean $([a,b],\varphi) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ un arco de $\mathbb{R}^n$ y $f : \varphi^* \to \mathbb{R}^n$ una función. Decimos que existe la circulación de f sobre φ, que denotamos por $\int_\varphi \overrightarrow{f}$, si existe la integral de R-St $\int_{[a,b]} f \circ \varphi \cdot d\varphi$, en cuyo caso definimos

$$\int_\varphi \overrightarrow{f} = \int_{[a,b]} f \circ \varphi \cdot d\varphi.$$

Sea $([c,d],\psi) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ otro arco de $\mathbb{R}^n$ tal que $\varphi \simeq \psi$, es decir, φ y ψ son orden-equivalentes, existiendo un homeomorfismo creciente $h : [c,d] \to [a,b]$ tal que $\psi = \varphi \circ h$. Entonces es trivial ver que existe la circulación $\int_\varphi \overrightarrow{f}$ sii existe $\int_\psi \overrightarrow{f}$, en cuyo caso $\int_\varphi \overrightarrow{f} = \int_\psi \overrightarrow{f}$. En consecuencia, si $\gamma = [[([a,b],\varphi)]] \in \mathcal{CO}(\mathbb{R}^n)$ es la curva orientada representada por φ, se puede definir la circulación $\int_\gamma \overrightarrow{f}$ de f sobre γ por

$$\int_\gamma \overrightarrow{f} = \int_\varphi \overrightarrow{f}.$$

Proposición 6.13. *[Propiedades de la circulación] Sean $([a,b],\varphi) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ un arco, $\gamma := [[([a,b],\varphi)]] \in \mathcal{CO}(\mathbb{R}^n)$ y $f : \varphi^* \to \mathbb{R}^n$.*

(1) Si f es continua y $\varphi \in BV([a,b])$, existe la circulación $\int_\varphi \overrightarrow{f}$ y se verifica que

$$\int_\varphi \overrightarrow{f} = \sum_{i=1}^n \int_{[a,b]} f_i \circ \varphi \cdot d\varphi_i.$$

(2) Si $([a,b],\psi)$ es el arco opuesto a φ (es decir, $\psi(t) = \varphi(b+a-t),\ t \in [a,b]$), existe la circulación $\int_\varphi \overrightarrow{f}$ sii existe la circulación $\int_\psi \overrightarrow{f}$ y se verifica

$$\int_\psi \overrightarrow{f} = -\int_\varphi \overrightarrow{f}.$$

En consecuencia, $\int_{-\gamma} \overrightarrow{f} = -\int_\gamma \overrightarrow{f}$.

(3) Sea $f = c = cte \in \mathbb{R}^n$. Entonces existe $\int_\varphi \overrightarrow{f} = \langle c, \varphi(b) - \varphi(a)\rangle$. Además, si φ es cerrado (es decir, $\varphi(b) = \varphi(a)$), entonces $\int_\varphi \overrightarrow{f} = 0$.

(4) Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $f, g : \varphi^* \to \mathbb{R}^n$ tales que existen las circulaciones $\int_\varphi \overrightarrow{f}$ y $\int_\varphi \overrightarrow{g}$. Entonces existe la circulación $\int_\varphi (\lambda \overrightarrow{f} + \mu \overrightarrow{g})$ y $\int_\varphi (\lambda \overrightarrow{f} + \mu \overrightarrow{g}) = \lambda \int_\varphi \overrightarrow{f} + \mu \int_\varphi \overrightarrow{g}$.

(5) Sean $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{CO}(\mathbb{R}^n)$ dos curvas rectificables orientadas sumables, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ y $f : \gamma^* \to \mathbb{R}^n$ continua. Entonces las circulaciones $\int_\gamma \overrightarrow{f}$ y $\int_{\gamma_i} \overrightarrow{f},\ i = 1,2$, existen y se verifica $\int_\gamma \overrightarrow{f} = \sum_{i=1,2} \int_{\gamma_i} \overrightarrow{f}$.

(6) Sean $\varphi \in BV([a,b])$ y f continua tal que $\|f(x)\| \leq M < \infty$, $\forall x \in \varphi^*$. Entonces existe la circulación $\int_\varphi \vec{f}$ y se verifica $|\int_\varphi \vec{f}| \leq M \cdot \Lambda(\varphi)$.

Demostración. (1) Basta aplicar el Lema 6.12 y las correspondientes definiciones.

(2) Sea $\pi := \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = b\} \in \Pi(I)$ y $\xi := (\xi_i)_1^p \prec \pi$. Consideremos

$$\hat{\pi} := \{a = a + b - t_p < a + b - t_{p-1} < \cdots < a + b - t_0 = b\} \text{ y } \hat{\xi} := (a + b - \xi_i)_1^p,$$

que verifican

(a) $\hat{\pi} \in \Pi(I)$ y $\hat{\pi}$ recorre y asciende en $\Pi(I)$ sii lo hace π.

(b) $\hat{\xi} \prec \hat{\pi}$ sii $\xi \prec \pi$.

(c) $\hat{S}(f \circ \varphi; \varphi; \pi; \xi) = -\hat{S}(f \circ \psi; \psi; \hat{\pi}; \hat{\xi})$.

Por tanto, teniendo en cuenta las definiciones, el resultado es cierto.

(3) En estas condiciones, para toda partición $\pi := \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = b\} \in \Pi(I)$ y toda selección $\xi \prec \pi$ se verifica

$$\hat{S}(f \circ \varphi; \varphi; \pi; \xi) = \sum_{i=1}^{p} \langle c, \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) \rangle = \langle c, \varphi(b) - \varphi(a) \rangle,$$

de donde se deduce el enunciado.

(4) Basta observar que para toda partición $\pi := \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = b\} \in \Pi(I)$ y toda selección $\xi \prec \pi$ se verifica

$$\hat{S}((\lambda f + \mu g) \circ \varphi; \varphi; \pi; \xi) = \lambda \hat{S}(f \circ \varphi; \varphi; \pi; \xi) + \mu \hat{S}(g \circ \varphi; \varphi; \pi; \xi).$$

(5) Sean $\gamma_1 := [[([0, 1/2], \varphi_1)]]$ y $\gamma_2 := [[([1/2, 1], \varphi_2)]]$ con $\varphi_1(1/2) = \varphi_2(1/2)$ y $\gamma = [[([0, 1], \varphi)]]$ tal que $\varphi(t) = \varphi_1(t)$, si $t \in [0, 1/2]$, y $\varphi_2(t) = \varphi_2(t)$, si $t \in [1/2, 1]$. Por (1) existen las circulaciones citadas. Para toda partición $\pi \in \Pi(I)$ con $1/2 \in \pi$ y toda selección $\xi \prec \pi$, definimos $\pi_1 := \pi \restriction [0, 1/2]$, $\xi_1 = \xi \restriction [0, 1/2]$, $\pi_2 := \pi \restriction [1/2, 1]$ y $\xi_2 := \xi \restriction [1/2, 1]$. Entonces

$$\hat{S}(f \circ \varphi; \varphi; \pi; \xi) = \hat{S}(f \circ \varphi_1; \varphi_1; \pi_1; \xi_1) + \hat{S}(f \circ \varphi_2; \varphi_2; \pi_2; \xi_2),$$

de donde sale el enunciado.

(6) Por (1) existe la circulación citada. Además para toda partición $\pi := \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = b\} \in \Pi(I)$ y toda selección $\xi \prec \pi$ se verifica

$$|\hat{S}(f \circ \varphi; \varphi; \pi; \xi)| = |\sum_{i=1}^{p} \langle f \circ \varphi(\xi_i), \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) \rangle| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{p} \|f \circ \varphi(\xi_i)\| \cdot \|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\| \leq M \cdot \Lambda(\varphi),$$

de donde sale el enunciado. ■

Proposición 6.14. *Sean* $([a,b],\varphi) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ *un arco* C^1 *a trozos y* $f : \varphi^* \to \mathbb{R}^n$ *continua. Entonces existe la circulación* $\int_\varphi \vec{f}$ *y se verifica*

$$\int_\varphi \vec{f} = \int_{[a,b]} \langle f \circ \varphi, \varphi' \rangle.$$

Demostración. Puesto que $\varphi \in BV([a,b])$ (por la Proposición 6.8) y f es continua sobre φ^*, sabemos por la Proposición 6.13 que existe la circulación $\int_\varphi \vec{f}$ y que

$$\int_\varphi \vec{f} = \sum_{i=1}^n \int_{[a,b]} f_i \circ \varphi \cdot d\varphi_i.$$

Por otra parte, ya que φ_i' es continua a trozos, es claro que existen las integrales de Riemann $\int_{[a,b]} f_i \circ \varphi \cdot \varphi_i' \cdot dt$, por lo que existe la integral $\int_{[a,b]} \langle f \circ \varphi, \varphi' \rangle$ y

$$\int_{[a,b]} \langle f \circ \varphi, \varphi' \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{[a,b]} f_i \circ \varphi \cdot \varphi_i' \cdot dt.$$

A la vista de todo lo anterior, bastará probar que la integral de R-St $\int_{[a,b]} f_1 \circ \varphi \cdot d\varphi_1$ (que existe por el Lema 6.12) y la integral de Riemann $\int_{[a,b]} f_1 \circ \varphi \cdot \varphi_1' \cdot dt$ (que existe por ser $f_1 \circ \varphi \cdot \varphi_1'$ continua en $[a,b]$) son iguales, es decir:

$$\int_{[a,b]} f_1 \circ \varphi \cdot d\varphi_1 = \int_{[a,b]} f_1 \circ \varphi \cdot \varphi_1' \cdot dt.$$

Sea $\pi = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_r = b\} \in \Pi([a,b])$. Aplicando el TVM a cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, elegimos $\eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ de modo que

$$\varphi_1(t_i) - \varphi_1(t_{i-1}) = \varphi_1'(\eta_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Sea $\xi_\pi := (\eta_i)_{i=1}^r$, que es una selección para π. Entonces:

$$\hat{S}(f_1 \circ \varphi; \varphi_1; \pi; \xi_\pi) = S(f_1 \circ \varphi \cdot \varphi_1'; \pi; \xi_\pi)$$

de donde

$$\int_{[a,b]} f_1 \circ \varphi \cdot d\varphi_1 = \lim_{\pi \in \Pi([a,b])} \hat{S}(f_1 \circ \varphi; \varphi_1; \pi; \xi_\pi) = \lim_{\pi \in \Pi([a,b])} S(f_1 \circ \varphi \cdot \varphi_1'; \pi; \xi_\pi) = \int_{[a,b]} f_1 \circ \varphi \cdot \varphi_1' \cdot dt.$$

■

6.7. El Teorema de Green

El Teorema de Green relaciona la circulación de una función f sobre una curva de Jordan γ de $\mathbb{R}^2$ y la integral de dicha función sobre el recinto interior a la curva γ.

Dependiendo de lo complicada que sea la curva γ, así de complicada es la prueba del correspondiente Teorema de Green.

(a) Cuando γ es el borde ∂I de un intervalo compacto I de $\mathbb{R}^2$, tenemos el Teorema de Green elemental.

(b) Cuando γ es una curva rectificable de Jordan arbitraria de $\mathbb{R}^2$, aparece el Teorema de Green en toda su generalidad. Su prueba es difícil y puede verse en el libro de Apóstol: *"Análisis Matemático "* .

Aquí probaremos un Teorema de Green elemental, para el borde de un intervalo de $\mathbb{R}^2$, y el Teorema de Green para (lo que llamamos) un recinto de Green proyectable. Con ambos teoremas se pueden abordar practicamente la totalidad de los casos que se nos presenten.

Sea $I \subset \mathbb{R}^2$ el intervalo $I := [a,b]\times[c,d]$ con vértices $A = (a,c),\ B = (b,c),\ C = (b,d)$ y $D = (a,d)$. Consideraremos su borde ∂I como curva orientada en el sentido contrario al horario, naturalmente rectificable y suma ó yuxtaposición de los segmentos orientados $\vec{AB},\ \vec{BC},\ \vec{CD}$ y $\vec{DA}$, que son las caras de I, es decir

$$\partial I = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA}.$$

Consideraremos las caras de I parametrizadas de la siguiente forma:

(i) $\vec{AB} = [[([a,b],\varphi_1)]]$ con $\varphi_1(t) = (t,c),\ \forall t \in [a,b]$.

(ii) $\vec{BC} = [[([c,d],\varphi_2)]]$ con $\varphi_2(t) = (b,t),\ \forall t \in [c,d]$.

(iii) $\vec{CD} = [[([a,b],\varphi_3)]]$ con $\varphi_3(t) = (a+b-t,d),\ \forall t \in [a,b]$.

(iv) $\vec{DA} = [[([c,d],\varphi_4)]]$ con $\varphi_4(t) = (a,c+d-t),\ \forall t \in [c,d]$.

Proposición 6.15. *[Teorema de Green para un intervalo de $\mathbb{R}^2$] Sean $I = [a,b]\times[c,d] \subset \mathbb{R}^2$ un intervalo cerrado, ∂I el borde de I considerado como curva de Jordan según se describe más arriba y $f = (f_1,f_2) : I \to \mathbb{R}^2$ función continua tal que existen $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \in \mathcal{R}(\overset{\circ}{I})$. Entonces existen las siguientes integrales que verifican*

$$\int_I \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) = \int_{\partial I} \vec{f}.$$

Demostración. La integral $\int_I (\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2})$ existe por hipótesis y la circulación $\int_{\partial I} \vec{f}$ también existe porque ∂I es curva rectificable y f es continua sobre ∂I (ver la Proposición 6.14). Aplicando el T. de Fubini se tiene que

$$\int_I -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\int_a^b \left[\int_c^d \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2\right] dx_1 = -\int_a^b [f_1(x_1,d) - f_1(x_1,c)]dx_1 =$$

$$= \int_a^b f_1(x_1,c)dx_1 - \int_a^b f_1(x_1,d)dx_1 = \int_{\vec{AB}} \vec{f} - \int_{\vec{DC}} \vec{f} = \int_{\vec{AB}} \vec{f} + \int_{\vec{CD}} \vec{f}.$$

De modo análogo se obtiene

$$\int_I \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \int_{\overrightarrow{BC}} \vec{f} + \int_{\overrightarrow{DA}} \vec{f},$$

y de ambas igualdades sale el enunciado. ■

El siguiente Teorema de Green se refiere a **un recinto de Green proyectable** R, noción que describimos a continuación. Consideraremos un subconjunto $R \subset \mathbb{R}^2$ tal que existen un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y dos funciones continuas C^1 a trozos $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ con $f(t) < g(t),\ t \in (a,b)$, de modo que $R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$. Por tanto:

(a) R es un subconjunto compacto con $\overset{\circ}{R} \neq \emptyset$ y **proyectable sobre el eje OX**, en el sentido de que, si $x \in [a,b]$, entonces $\{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in R\} = [f(x), g(x)]$ es un segmento cerrado, que sólo cuando $x = a$ ó $x = b$ puede reducirse a un punto.

(b) El borde ∂R es una curva rectificable y orientada en sentido contrario al horario, que puede expresarse como suma ó yuxtaposición $\partial R = \alpha^1 + \alpha^2 - \alpha^3 - \alpha^4$ de las siguientes curva rectificables orientadas:

(b1) $\alpha^1 = [[([a,b], \varphi^1)]]$ tal que $\varphi^1(t) = (t, f(t)),\ t \in [a,b]$.

(b2) $\alpha^2 = [[([f(b), g(b)], \varphi^2)]]$ tal que $\varphi^2(t) = (b, t),\ t \in [f(b), g(b)]$.

(b3) $\alpha^3 = [[([a,b], \varphi^3)]]$ tal que $\varphi^3(t) = (t, g(t)),\ t \in [a,b]$.

(b4) $\alpha^4 = [[([f(a), g(a)], \varphi^4)]]$ tal que $\varphi^4(t) = (a, t),\ t \in [f(a), g(a)]$.

(c) Así que ∂R es una curva de Jordan C^1 a trozos (luego rectificable) en $\mathbb{R}^2$, cuya región interior es $\overset{\circ}{R} \neq \emptyset$.

Proposición 6.16 (T. de Green para un recinto de Green proyectable)**.** *Sea γ una curva de Jordan C^1 a trozos tal que $\gamma = \partial R$, siendo $R \subset \mathbb{R}^2$ un recinto de Green que se proyecta sobre el eje OX, como se describe más arriba. Sea $F = (F_1, F_2) : R \to \mathbb{R}^2$ función continua tal que existen y son continuas en R las derivadas parciales $\frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \frac{\partial F_1}{\partial x_2}$. Entonces existen las siguientes integrales que verifican*

$$\int_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) = \int_\gamma \vec{F}.$$

Demostración. (A) Utilizando la descripción de γ que precede, se tiene

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_{\alpha^1} \vec{F} + \int_{\alpha^2} \vec{F} - \int_{\alpha^3} \vec{F} - \int_{\alpha^4} \vec{F}$$

siendo

$$\int_{\alpha^1} \vec{F} = \int_a^b F_1 \circ \varphi^1 \cdot d\varphi_1^1 + \int_a^b F_2 \circ \varphi^1 \cdot d\varphi_2^1 = \int_a^b F_1(x_1, f(x_1)) dx_1 + \int_a^b F_2(x_1, f(x_1)) f'(x_1) dx_1,$$

$$\int_{\alpha^2} \vec{F} = \int_{f(b)}^{g(b)} F_1 \circ \varphi^2 \cdot d\varphi_1^2 + \int_{f(b)}^{g(b)} F_2 \circ \varphi^2 \cdot d\varphi_2^2 = 0 + \int_{f(b)}^{g(b)} F_2(b, x_2) dx_2,$$

$$-\int_{\alpha^3} \vec{F} = -\int_a^b F_1 \circ \varphi^3 \cdot d\varphi_1^3 - \int_a^b F_2 \circ \varphi^3 \cdot d\varphi_2^3 = -\int_a^b F_1(x_1, g(x_1)) dx_1 - \int_a^b F_2(x_1, g(x_1)) g'(x_1) dx_1$$

y

$$-\int_{\alpha^4} \vec{F} = -\int_{f(a)}^{g(a)} F_1 \circ \varphi^4 \cdot d\varphi_1^4 - \int_{f(a)}^{g(a)} F_2 \circ \varphi^4 \cdot d\varphi_2^4 = 0 - \int_{f(a)}^{g(a)} F_2(a, x_2) dx_2.$$

(B) Por otra parte tenemos

$$\int_R -\tfrac{\partial F_1}{\partial x_2} = -\int_a^b \left[\int_{f(x_1)}^{g(x_1)} \tfrac{\partial F_1}{\partial x_2} dx_2 \right] dx_1 = \int_a^b F_1(x_1, f(x_1)) dx_1 - \int_a^b F_1(x_1, g(x_1)) dx_1.$$

Aplicando la regla de Leibnitz sabemos que

$$\frac{d}{dx_1} \left(\int_{f(x_1)}^{g(x_1)} F_2(x_1, x_2) dx_2 \right) = F_2(x_1, g(x_1)) g'(x_1) - F_2(x_1, f(x_1)) f'(x_1) +$$
$$+ \int_{f(x_1)}^{g(x_1)} \tfrac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_2,$$

de donde obtenemos

$$\int_R \tfrac{\partial F_2}{\partial x_1} = \int_a^b \left[\int_{f(x_1)}^{g(x_1)} \tfrac{\partial F_2}{\partial x_1} dx_2 \right] dx_1 =$$
$$= \int_a^b \left[\frac{d}{dx_1} \left(\int_{f(x_1)}^{g(x_1)} F_2(x_1, x_2) dx_2 \right) - F_2(x_1, g(x_1)) g'(x_1) + F_2(x_1, f(x_1)) f'(x_1) \right] dx_1 =$$
$$= \int_{f(b)}^{g(b)} F_2(b, x_2) dx_2 - \int_{f(a)}^{g(a)} F_2(a, x_2) dx_2 - \int_a^b F_2(x_1, g(x_1)) g'(x_1) dx_1 +$$
$$+ \int_a^b F_2(x_1, f(x_1)) f'(x_1) dx_1.$$

(C) Sumando y comparando con (A) se comprueba que el enunciado es válido. ■

Capítulo 7

Campos vectoriales

7.1. El gradiente

Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, su producto escalar se indica por $\langle x, y \rangle$ (ó bien $x \bullet y$), es decir

$$x \bullet y = \langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Si $n = 3$, $x \times y$ indica su producto vectorial, es decir:

$$x \times y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, -x_1 y_3 + x_3 y_1, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto. Toda aplicación $f : G \to \mathbb{R}^n$ recibe el nombre de **campo vectorial**, mientras que las aplicaciones $f : G \to \mathbb{R}$ se denominan **campos escalares.** Un campo vectorial $f = (f_1, ..., f_n) : G \to \mathbb{R}^n$ (ó escalar $f : G \to \mathbb{R}$) se dice continuo, diferenciable, de clase C^k, etc., sii lo son cada una de sus componentes $f_i,\ i = 1, ..., n$. Si $\varphi : G \to \mathbb{R}$ es un campo escalar tal que existen las derivadas parciales $\partial\varphi/\partial x_i,\ i = 1, ..., n$, **el gradiente** de f se denota por $\nabla\varphi$ (ó $grad(f)$) y es el campo vectorial $\nabla\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\forall x \in G, \quad \nabla\varphi(x) := (\tfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x), ..., \tfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x)).$$

Decimos que un campo vectorial $F : G \to \mathbb{R}^n$ **deriva de un potencial** $\varphi : G \to \mathbb{R}$ sii $F = \nabla\varphi$.

Proposición 7.1. *Sean $G \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y $\varphi, \psi : G \to \mathbb{R}$ campos escalares tales que existen los gradientes $\nabla\varphi$ y $\nabla\psi$. Entonces existen los siguientes gradientes y se verifica:*

(1) $\nabla(\varphi + \psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi$.

(2) $\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$.

(3) Si $x \in G$ y $\psi(x) \neq 0$, entonces $\nabla(\varphi/\psi)(x) = (\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi)(x)/\psi^2(x)$.

Demostración. Es inmediata. ■

Proposición 7.2. *Sean $G \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto, $\varphi : G \to \mathbb{R}$ un campo escalar que posee gradiente $\nabla\varphi$ continuo en G y $\gamma \in \mathcal{CO}(\mathbb{R}^n)$ una curva orientada C^1 a trozos de extremos inicial y final x_0, y_0, respectivamente, tal que $\gamma^* \subset G$. Entonces existe la circulación $\int_\gamma \overrightarrow{\nabla\varphi}$ que verifica*

$$\int_\gamma \overrightarrow{\nabla\varphi} = \varphi(y_0) - \varphi(x_0).$$

Demostración. Sean $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto y $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 a trozos tales que $\gamma = [[([a,b], f)]]$. Sea $F(t) := \varphi \circ f(t), \ \forall t \in [a,b]$. Observemos que, salvo en un conjunto finito de puntos de $[a,b]$, existe la derivada $F'(t)$ y que $F'(t) = \langle \nabla\varphi(f(t)), f'(t) \rangle$. Por la Proposición 6.14 sabemos que existe la circulación $\int_\gamma \overrightarrow{\nabla\varphi}$, que verifica

$$\int_\gamma \overrightarrow{\nabla\varphi} = \int_a^b \langle \nabla\varphi(f(t)), f'(t) \rangle = \int_a^b F'(t) = F(b) - F(a) = \varphi(y_0) - \varphi(x_0).$$

■

Si $G \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto, un campo vectorial $F : G \to \mathbb{R}^n$ se dice **conservativo** sii F es continuo y para toda curva orientada $\gamma \in \mathcal{CO}(\mathbb{R}^n)$ que sea C^1 a trozos con $\gamma^* \subset G$, la circulación $\int_\gamma \overrightarrow{F}$ sólo depende de los extremos de γ. La Proposición 7.2 prueba que todo campo vectorial continuo que deriva de un potencial es conservativo.

Proposición 7.3. *Sean $G \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y $F : G \to \mathbb{R}^n$ un campo conservativo. Entonces existe un campo escalar $\phi : G \to \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla\phi$.*

Demostración. Bastará probar la existencia del potencial ϕ cuando G es conexo, que en nuestro caso equivale a decir conexo por caminos ó conexo por poligonales. Sean $x_0 \in G$ fijo y, para cada $y \in G$, $\gamma(x_0, y)$ una poligonal dentro de G uniendo x_0 con y. Definimos $\phi : G \to \mathbb{R}$ tal que

$$\forall y \in G, \quad \phi(y) := \int_{\gamma(x_0,y)} \overrightarrow{F},$$

circulación que no depende de la poligonal elegida por ser F conservativo. Calculemos

$D_i\phi$:

$$D_i\phi(y) = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\phi(y+\lambda e_i)-\phi(y)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\int_{[y,y+\lambda e_i]}\vec{F}}{\lambda} =$$
$$= \lim_{\lambda\to 0}\frac{\int_0^\lambda F_i(y+te_i)dt}{\lambda} =$$
$$[\text{por TVM del CI } \int_0^\lambda F_i(y+te_i)dt = F_i(y+\xi e_i)\lambda,\ \xi\in[0,\lambda]]$$
$$= \lim_{\lambda\to 0} F_i(y+\xi e_i) = F_i(y),$$

en donde hemos aplicado el TVM del CI y la continuidad de F_i. ■

NOTA. En la literatura aparece el nombre de **forma**, que en nuestro contexto es lo mismo que campo.

Decimos que un campo (ó forma) $F : G \to \mathbb{R}^n$ es:

(i) **exacto** si deriva de un potencial.

(ii) **localmente exacto**, si localmente tiene potencial, es decir, por cada $x \in G$ existen un entorno abierto $V^x \subset G$ de x y un campo escalar $\phi^x : V^x \to \mathbb{R}$ tal que $F \restriction V^x = \nabla\phi^x$.

(iii) **cerrado** si F es C^1 y $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ para $i, j \in \{1, ..., n\}$.

Proposición 7.4. *Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto.*

(1) Sean $n = 1$ y $\omega : G \to \mathbb{R}$ una forma escalar. Si ω es continua, ω es exacta y, si $\omega \in C^1$, entonces ω es exacta y cerrada.

(2) Si $\omega : G \to \mathbb{R}^n$ es forma localmente exacta de clase C^1, ω es cerrada.

Demostración. (1) Sea ω continua. Dada una componente conexa U de G, bastará construir en U un potencial ϕ de ω. Sea $x_0 \in U$ y para todo $y \in \overline{U}$ definimos

$$\phi(y) = \int_{x_0}^{y} \omega(t)dt.$$

Es inmediato, por la continuidad de ω, que $\phi'(y) = \omega(y)$, $\forall y \in U$, es decir, ϕ es un potencial de ω.

El resto de (1) es inmediato.

(2) Es consecuencia del Teorema de Schwarz sobre las derivadas cruzadas. ■

Ejemplo. Una forma cerrada, localmente exacta pero no (globalmente) exacta. Para todo $(x_1, x_2) \in U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definimos

$$\omega(x_1, x_2) = \left(\frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right).$$

Sean $U_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,\infty)\}$ y $U_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-\infty,0]\}$. Es claro que se trata de dos abiertos tales $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = U_1 \cup U_2$. Definimos:

(1) $\phi_1 : U_1 \to (0,2\pi)$ tal que $\phi_1(x_1,x_2) = \arctan(x_2/x_1)$.

(2) $\phi_2 : U_2 \to (-\pi,\pi)$ tal que $\phi_2(x_1,x_2) = \arctan(x_2/x_1)$.

Es claro que ϕ_i es un potencial de ω en $U_i,\ i = 1,2$. Sin embargo, ω no tiene potencial globalmente en U, porque no existe una definición continua (una determinación) de arc tg en U.

Proposición 7.5. *[Lema de Poincaré] Sean $G \subset \mathbb{R}^n$ una región estrellada respecto de $x_0 \in G$ y $\omega : G \to \mathbb{R}^n$ una forma cerrada. Entonces ω es exacta en G.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad suponemos $x_0 = 0$. Para todo $x \in G$ definimos $\phi(x)$ del siguiente modo
$$\phi(x) := \int_0^1 \langle \omega(tx), x\rangle dt.$$
Queremos ver que $D_i\phi = \omega_i,\ i = 1,...,n$. Vemos que $D_1\phi = \omega_1$. Para $i = 2,...,n$ la prueba es análoga. Aplicando el T. de Leibnitz sobre derivación de integrales y que $D_1\omega_i = D_i\omega_1$ obtenemos
$$\begin{aligned} D_1\phi(x) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\int_0^1 [\sum_{i=1}^n x_i\omega_i(tx_1,...,tx_n)]dt\right] = \\ &= \int_0^1 [\omega_1(tx) + tx_1D_1\omega_1(tx) + ... + tx_nD_1\omega_n(tx)]dt = \\ &= \int_0^1 [\omega_1(tx) + tx_1D_1\omega_1(tx) + ... + tx_nD_n\omega_1(tx)]dt = \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}[t\omega_1(tx)]dt = t\omega_1(tx)|_0^1 = \omega_1(x). \end{aligned}$$
■

Corolario 7.6. *Toda forma cerrada es localmente exacta.*

Demostración. Basta aplicar el Lema de Poincaré y que las bolas son estrelladas. ■

Proposición 7.7. *Sean $G \subset \mathbb{R}^2$ región simplemente conexa y $F : G \to \mathbb{R}^2$ forma continua localmente exacta. Entonces F es exacta en G.*

Demostración. Si $R \subset G$ es un intervalo compacto, consideraremos su borde ∂R como curva orientada (en sentido anti-horario) cerrada simple.

Aserto 1. Para todo $x \in G$ existe $r_x > 0$ tal que $B(x,r_x) \subset G$, F tiene potencial en $\overset{\circ}{B}(x,r_x)$ y $\int_{\partial R} \vec{F} = 0$ para todo intervalo compacto $R \subset \overset{\circ}{B}(x,r_x)$.

En efecto, basta aplicar la Proposición 7.2.

Aserto 2. Si $R \subset G$ es un intervalo compacto, se verifica que $\int_{\partial R} \overrightarrow{F} = 0$.

En efecto, por cada punto $x \in R$ elegimos $r_x > 0$ de modo que se verifique el Aserto 1. Como R es compacto y

$$R \subset \cup\{\overset{\circ}{B}(x, r_x/2) : x \in R\},$$

se verifica que $R \subset \cup_{i=1}^{m} \overset{\circ}{B}(x_i, r_{x_i}/2)$, para ciertos puntos $x_i \in R$, $i = 1, ..., m$. Sea $\pi := \{R_1, ..., R_p\}$ una partición grilla de R de modo que $\|\pi\| < \text{mín}\{r_{x_i}/2 : i = 1, ..., m\}$. Entonces:

(1) Cada rectángulo R_j está dentro de alguna bola abierta $\overset{\circ}{B}(x_i, r_{x_i})$, para algún $i \in \{1, ..., m\}$.

(2) En consecuencia, $\int_{\partial R_j} \overrightarrow{F} = 0$ por Aserto 1.

(3) Como

$$\int_{\partial R} \overrightarrow{F} = \sum_{j=1}^{p} \int_{\partial R_j} \overrightarrow{F}$$

obtenemos que el Aserto 2 es cierto.

Fijemos $x_0 \in G$.

Aserto 3. Si $x \in G$ y $\gamma_i(x_0, x)$, $i = 1, 2$, son dos poligonales dentro de G de lados paralelos a los ejes uniendo x_0 con x, se verifica que

$$\int_{\gamma_1(x_0,x)} \overrightarrow{F} = \int_{\gamma_2(x_0,x)} \overrightarrow{F}.$$

En efecto, observemos que la curva orientada $\gamma := \gamma_1(x_0, x) - \gamma_2(x_0, x)$ verifica $\gamma = \sum_{i=1}^{q} \partial R_i$, siendo $R_i \subset G$, $i = 1, ..., q$, rectángulos de lados paralelos a los ejes (aquí se aplica que G es simplemente conexo). Por tanto, del Aserto 2 sale que

$$0 = \int_{\gamma} \overrightarrow{F} = \int_{\gamma_1(x_0,x)} \overrightarrow{F} - \int_{\gamma_2(x_0,x)} \overrightarrow{F},$$

lo que prueba el Aserto 3.

Así que podemos definir consistentemente la función $\phi : G \to \mathbb{R}$ de modo que

$$\forall x \in G,\ \phi(x) = \int_{\gamma(x_0,x)} \overrightarrow{F},$$

siendo $\gamma(x_0, x)$ una poligonal dentro de G que una x_0 con x. A continuación, un cálculo análogo al efectuado en la Proposición 7.3 prueba que $F_i = D_i\phi$, $i = 1, ..., n$. ■

7.2. El rotacional

Sean $G \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y $f = (f_1, f_2, f_3) : G \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial. El rotacional de f es el campo vectorial definido en G por

$$rot\ f := \nabla \times f = (i\frac{\partial}{\partial x_1}, j\frac{\partial}{\partial x_2}, k\frac{\partial}{\partial x_3}) \times (f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} =$$
$$= (D_2 f_3 - D_3 f_2, D_3 f_1 - D_1 f_3, D_1 f_2 - D_2 f_1).$$

Decimos que f es **irrotacional** sii $rot\ f = 0$. Sean $\phi : G \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $f : G \to \mathbb{R}^3$ uno vectorial. Es trivial que

(a) f loc. exacto y $C^1 \iff f$ es cerrado $\Rightarrow f$ es irrotacional $\overset{+C^1}{\Rightarrow} f$ es cerrado.

(b) $rot(grad\ \phi) = 0$, si $grad(\phi) \in C^1$.

(c) $rot(f + g) = rot\ f + rot\ g$, $rot(\phi f) = \phi \cdot rot\ f + \nabla\phi \times f$.

7.3. La divergencia

Sean $G \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : G \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial. **La divergencia** de f es

$$div\ f = \nabla \bullet f := \langle (D_1, ..., D_n), (f_1, ..., f_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} D_i f_i.$$

Si $div\ f = 0$ decimos que f es un campo **incompresible ó solenoidal**. Se tiene que

(a)$\nabla \bullet (\nabla \times f) = 0$, es decir, $div(rot\ f) = 0$.

(b) $div(f + g) = div\ f + div\ g$.

(c) $div(\phi f) = \phi \cdot div\ f + \nabla\phi \bullet f$.

Proposición 7.8. *Sean $G \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y $f : G \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 tal que $div\ f = 0$. Entonces f es localmente un rotacional.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $0 \in G$ y que $B(0, r) \subset G$. Vamos a construir una función $g : \overset{\circ}{B}(0, r) \to \mathbb{R}^3$ tal que $f \restriction \overset{\circ}{B}(0, r) = rot\ g$. Para cada $(x_1, x_2, x_3) \in \overset{\circ}{B}(0, r)$ definimos

$$g_1(x_1, x_2, x_3) := \int_0^{x_3} f_2(x_1, 0, t_3)dt_3 - \int_0^{x_2} f_3(x_1, t_2, 0)dt_2.$$

Diferenciando obtenemos

$$D_3 g_1(x_1, x_2, x_3) = f_2(x_1, 0, x_3)\ ,\ D_2 g_1(x_1, x_2, x_3) = -f_3(x_1, x_2, 0).$$

Definimos

$$g_2(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{x_3} \left[\int_0^{x_1} D_3 f_3(t_1, x_2, t_3)dt_1 \right] dt_3,$$

de donde derivando llegamos a

$$D_3g_2(x) = \int_0^{x_1} D_3f_3(t_1, x_2, x_3)dt_1,$$

$$D_1g_2(x) = \int_0^{x_3} D_3f_3(x_1, x_2, t_3)dt_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) - f_3(x_1, x_2, 0).$$

Definimos

$$g_3(x) = -\int_0^{x_2} \left[\int_0^{x_1} D_2f_2(t_1, t_2, x_3)dt_1\right] dt_2 +$$

$$+\int_0^{x_2} \left[f_1(x_1, t_2, x_3) + \int_0^{x_1} [D_2f_2(t_1, t_2, x_3) + D_3f_3(t_1, t_2, x_3)]dt_1\right] dt_2.$$

Diferenciando

$$\begin{aligned} D_2g_3(x) &= -\int_0^{x_1} D_2f_2(t_1, x_2, x_3)dt_1 + f_1(x) + \int_0^{x_1} [D_2f_2(t_1, x_2, x_3) + D_3f_3(t_1, x_2, x_3)]dt_1 = \\ &= f_1(x) + \int_0^{x_1} D_3f_3(t_1, x_2, x_3)dt_1, \\ D_1g_3(x) &= -\int_0^{x_2} D_2f_2(x_1, t_2, x_3)dt_2 + \int_0^{x_2} div\ f(x_1, t_2, x_3)dt_2 = \\ &= -\int_0^{x_2} D_2f_2(x_1, t_2, x_3)dt_2 = \\ &= -f_2(x) + f_2(x_1, 0, x_3). \end{aligned}$$

Combinando los anteriores resultados, obtenemos que $rot\ g = f$. ■

Un ejemplo. Veamos un campo vectorial $f : G \to \mathbb{R}^3$ tal que $div\ f = 0$ (por tanto, es un rotacional localmente) pero que, globalmente, no es un rotacional. Sea $G := \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < a < \|x\| < b < \infty\}$ y para todo $x \in G$ definamos $f(x) = x/\|x\|^3$. Se verifica trivialmente que $div\ f = 0$, pero no existe un campo $g : G \to \mathbb{R}^3$ tal que $f = rot\ g$ por el Teorema de Stokes (ver Cap. 8).

7.4. El operador laplaciano Δ

Si $G \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto y $\phi : G \to \mathbb{R}$ un campo escalar, el laplaciano de ϕ se define como

$$\Delta\phi = \nabla^2\phi := div(grad\ \phi) = D_{11}\phi + ... + D_{nn}\phi.$$

La ecuación de Laplace es $\Delta\phi = 0$. Decimos que ϕ es una función armónica si satisface la ecuación de Laplace en G.

Si $f : G \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial, definimos

$$\Delta f := (\Delta f_1, ..., \Delta f_n).$$

7.5. Fórmulas del Análisis Vectorial

(f, g, h son campos vectoriales; ϕ, ψ son campos escalares ; c es constante. Definimos $V := (f \bullet \nabla)g$ de modo que $V_i := f \bullet \nabla g_i,\ i = 1, ..., n$.)

(1) $\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$.

(2) $\nabla(c\phi) = c\nabla\phi$.

(3) $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$.

(4) $\nabla(\phi/\psi) = (\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi)/\psi^2$, cuando $\psi(x) \neq 0$.

(5) $div(f + g) = div\ f + div\ g$.

(6) $rot(f + g) = rot\ f + rot\ g$.

(7) $\nabla(\langle f, g\rangle) = (f \bullet \nabla)g + (g \bullet \nabla)f + f \times rot\ g + g \times rot\ f$.

(8) $div(\phi f) = \phi\ div\ f + f \bullet \nabla\phi$.

(9) $div(f \times g) = g \bullet rot\ f - f \bullet rot\ g$.

(10) $div(rot\ f) = 0$.

(11) $rot(\phi f) = \phi\ rot\ f + \nabla\phi \times f$.

(12) $rot(f \times g) = f \cdot div\ g - g \cdot div\ f + (g \bullet \nabla)f - (f \bullet \nabla)g$.

(13) $rot(rot\ f) = grad(div\ f) - \Delta f$.

(14) $rot(grad\ \phi) = 0$.

(15) $\nabla(f \bullet f) = 2(f \bullet \nabla)f + 2f \times rot\ f$.

(16) $\Delta(\phi\psi) = \phi\Delta\psi + \psi\Delta\phi + 2(\nabla\phi \bullet \nabla\psi)$.

(17) $div(\nabla\phi \times \nabla\psi) = 0$.

(18) $\nabla \bullet (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) = \phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi$.

Capítulo 8

Superficies en $\mathbb{R}^3$. Teorema de Stokes. Teorema de Gauss

8.1. Superficies paramétricas

Definición 8.1. *Una superficie paramétrica de* $\mathbb{R}^3$ *es un par* $S = (R, T)$ *donde*

(1) $R = \overline{G} = G \cup \gamma^*$ *es un recinto de Jordan de* $\mathbb{R}^2$*, es decir,* γ *es una curva de Jordan rectificable de* $\mathbb{R}^2$ *y* G *es su interior.*

(2) $T : R \to \mathbb{R}^3$ *es una aplicación de clase* C^1.

Denotaremos también $S = T(R)$. *Si* T *es inyectiva decimos que* S *es simple. Si* $S = (R, T)$ *es una superficie paramétrica, definimos:*

(a) **Borde de** S. *Si* $\gamma = [[([a, b], \phi)]]$*, el borde de* S *(abrev.,* ∂S*) es la curva orientada cerrada rectificable de* $\mathbb{R}^3$ *definida por* $\partial S := [[([a, b], T \circ \phi)]]$. *Si* S *es simple,* ∂S *es también simple.*

(b) **Normal** $\tilde{n}(P_0)$ **a** S **en** $P_0 := T(t_0),\ t_0 = (u_0, v_0)$. *Dicha normal* $\tilde{n}(P_0)$ *se define como*

$$\tilde{n}(P_0) := T_u(t_0) \times T_v(t_0).$$

Decimos que $P_0 = T(t_0)$ *es un punto regular de* S *si* $\tilde{n}(P_0) \neq 0$ *y singular si* $\tilde{n}(P_0) = 0$.

(c) **Tangente** $\tau(P_0)$ **a** S **en un punto regular** $P_0 = T(t_0)$. *Se define como*

$$\tau(P_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x - T(t_0), \tilde{n}(P_0)\rangle = 0\}.$$

(d) **Ecuación paramétrica**. *Es simplemente* $x = (x_1, x_2, x_3) = T(u, v),\ (u, v) \in R$. *Siempre disponemos de esta ecuación.*

(e) **Ecuación explícita.** S *tiene ecuación explícita si* $T(u, v) = (u, v, T_3(u, v)),\ \forall (u, v) \in R$*, en cuyo caso dicha ecuación explícita es* $x_3 = T_3(x_1, x_2),\ \forall (x_1, x_2) \in R$.

(f) **Ecuación implícita.** S *tiene ecuación implícita si existe una función* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *tal que* $x \in S$ *sii* $g(x) = 0$. *Si* S *tiene la ecuación explícita, digamos,* $x_3 = T_3(x_1, x_2)$*, entonces* S *tiene la ecuación implícita* $x_3 - T_3(x_1, x_2) = 0, (x_1, x_2) \in R$.

Proposición 8.2. *Sea $S = (R, T)$ una superficie paramétrica y $t_0 = (u_0, v_0) \in \overset{\circ}{R}$.*

(1) Se tiene que

$$\tilde{n}(T(t_0)) = \left(J\left(\frac{T_2, T_3}{u, v}\right), J\left(\frac{T_3, T_1}{u, v}\right), J\left(\frac{T_1, T_2}{u, v}\right) \right)(t_0),$$

siendo $J\left(\frac{T_i, T_j}{u,v}\right)$ el jacobiano

$$J\left(\frac{T_i, T_j}{u, v}\right) = \begin{vmatrix} D_u T_i & D_u T_j \\ D_v T_i & D_v T_j \end{vmatrix} = D_u T_i \cdot D_v T_j - D_u T_j \cdot D_v T_i.$$

(2) Si $T(t_0)$ es un punto regular de S, entonces S admite representación explícita en un entorno de $T(t_0)$.

Demostración. (1) Teniendo en cuenta que $\tilde{n}(t_0) = T_u(t_0) \times T_v(t_0)$, basta hacer las cuentas para obtener la expresión de $\tilde{n}(t_0)$.

(2) Por hipótesis $\tilde{n}(t_0) \neq 0$, por lo que una de sus tres componentes es no nula, digamos, $J(\frac{T_1, T_2}{u,v})(t_0) \neq 0$. Sea $T(t_0) = x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$. Por el T. de la función inversa existen $r > 0$, $\phi : U := \overset{\circ}{B}((x_1^0, x_2^0), r) \to R$ y V entorno abierto de x^0 en $\mathbb{R}^3$ tales que

(i) $(T_1, T_2) \circ \phi = id_U$.

(ii) $\forall (x_1, x_2) \in U$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in S \cap V$ sii existe $(u, v) \in R$ tal que $x_3 = T_3(u, v) = T_3 \circ \phi(x_1, x_2)$.

Por tanto sobre la bola abierta U tenemos la representación explícita

$$\forall (u, v) \in U, \quad (x_1, x_2, x_3) = (u, v, T_3 \circ \phi(u, v)).$$

∎

NOTA (A). (I) Si la superficie $S = (R, T)$ tiene representación explícita, digamos, $S := \{(u, v, \phi(u, v)) : (u, v) \in R\}$, entonces

$$T_u(u, v) = (1, 0, \phi_u), \quad T_v(u, v) = (0, 1, \phi_v),$$

de donde obtenemos que

$$\tilde{n}(T(u, v)) = (-\phi_u, -\phi_v, 1) \quad \text{y} \quad \|\tilde{n}(T(u, v))\| = \sqrt{1 + \phi_u^2 + \phi_v^2}.$$

(II) **Suma de superficies paramétricas**. Dos superficies paramétricas S_1, S_2 son **sumables ó pegables** sii $S_1 \cap S_2 = \partial S_1 \cap \partial S_2$, en cuyo caso su suma, que denotamos por $S_1 + S_2$, es un par formado por

(i) **Un conjunto**: $S_1 \cup S_2$.

(ii) **Un borde**: $\partial(S_1 + S_2)$, que presenta dos aspectos o caras:

(iia) aspecto conjuntista: $\partial(S_1 + S_2) = cl[(\partial S_1 \cup \partial S_2) \setminus (\partial S_1 \cap \partial S_2)]$ (cl = clausura).

(iib) aspecto funcional: $\partial(S_1 + S_2) = \partial S_1 + \partial S_2$, es decir, la circulación $\int_{\partial(S_1+S_2)} \vec{\omega}$ de un campo ω vectorial verifica $\int_{\partial(S_1+S_2)} \vec{\omega} = \sum_{i=1}^{2} \int_{\partial S_i} \vec{\omega}$.

Si S_3 es otra superficie paramétrica sumable a $S_1 + S_2$, la suma $S_1 + S_2 + S_3$ consta de

(a) **Un conjunto**: $S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

(b) **Un borde**: $\partial(S_1 + S_2 + S_3)$, que tiene dos aspectos:

(b1) aspecto conjuntista: $\partial(S_1 + S_2 + S_3) = cl[(\cup_{i=1}^{3} \partial S_i) \setminus \bigcup_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{3} (\partial S_i \cap \partial S_j)]$.

(b2) aspecto funcional: $\partial(S_1 + S_2 + S_3) = \partial S_1 + \partial S_2 + \partial S_3$, es decir, la circulación $\int_{\partial(S_1+S_2+S_3)} \vec{\omega}$ de un campo ω vectorial verifica $\int_{\partial(S_1+S_2+S_3)} \vec{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \int_{\partial S_i} \vec{\omega}$. Y así sucesivamente.

(III) Decimos que S es **una superficie de** $\mathbb{R}^3$ sii $S = S_1 + ... + S_n$, siendo cada S_i una superficie paramétrica simple, suma que consta de:

(a) Un conjunto: $S = \cup_{i=1}^{n} S_i$.

(b) Un borde: ∂S, que tiene dos aspecto, a saber:

(b1) Como conjunto $\partial S = cl[(\cup_{i=1}^{n} \partial S_i) \setminus \bigcup_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} (\partial S_i \cap \partial S_j)]$.

(b2) Como funcional $\partial S = \sum_{i=1}^{n} \partial S_i$, es decir, la circulación $\int_{\partial S} \vec{\omega}$ de un campo ω vectorial verifica $\int_{\partial S} \vec{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial S_i} \vec{\omega}$.

(IV) Una superficie S de $\mathbb{R}^3$ se dice **cerrada** sii $\partial S = \emptyset$ (como conjunto) y $\partial S = 0$ (funcionalmente). Por ejemplo, la esfera es una superficie cerrada.

8.2. Área de una superficie

La aproximación de la longitud de un arco mediante poligonales no tiene análogo en el cálculo del área de una superficie. En otras palabras, el área de una superficie no es, en general, el límite de las áreas de las superficies poliédricas inscritas, como prueba el siguiente clásico ejemplo de Schwarz (1890).

Contraejemplo de Schwarz. Sea S una superficie cilíndrica de altura h y radio r. Vamos a intentar aproximarla mediante una superficie poliédrica $P(m,n)$ formada por triángulos (como el ABC de Figura 8.1) obtenidos del siguiente modo: (i) dividimos la altura h en m partes iguales de longitud h/m; (ii) dividimos la circunferencia en n partes iguales de $2\pi/n$ radianes cada una; (iii) en cada una de estas divisiones encajamos un triángulo como el ABC de la Figura 8.1. La superficie poliédrica $P(m,n)$ es la superficie suma de todos estos triángulos. El área de cada triángulo ABC es

$$r \cdot sen\frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{(\frac{h}{m})^2 + (r - r \cdot cos\frac{\pi}{n})^2} = r \cdot sen\frac{\pi}{n}\sqrt{(\frac{h}{m})^2 + 4r^2 \cdot sen^4\frac{\pi}{2n}}.$$

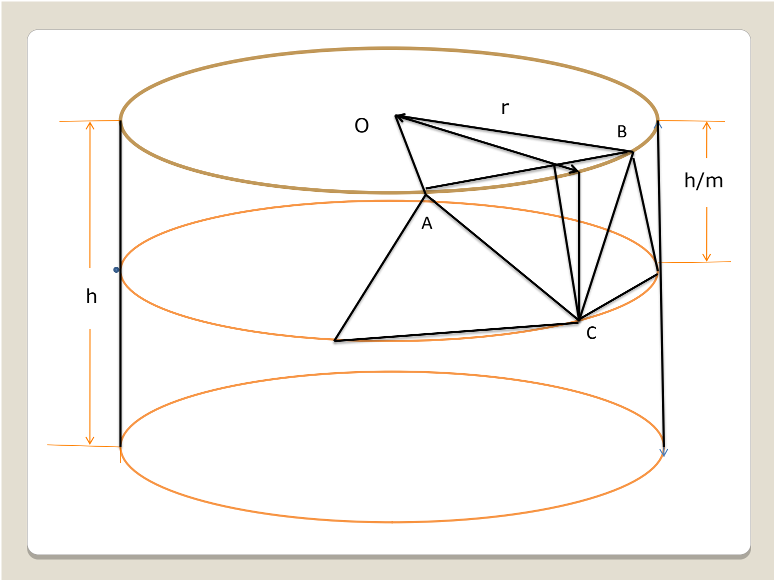

Figura 8.1: Cilindro

Así que el área de la superficie poliédrica $P(m,n)$ es

$$2mnr \cdot sen\frac{\pi}{n}\sqrt{(\frac{h}{m})^2 + 4r^2 \cdot sen^4\frac{\pi}{2n}} = 2\pi r\frac{sen\frac{\pi}{n}}{\pi/n}\sqrt{h^2 + 4m^2r^2(\frac{sen\ \pi/2n}{\pi/2n})^4 \cdot (\frac{\pi}{2n})^4} =$$
$$= 2\pi r \cdot \frac{sen\frac{\pi}{n}}{\pi/n}\sqrt{h^2 + \frac{4r^2\pi^4}{2^4}(\frac{sen\ \pi/2n}{\pi/2n})^4 \cdot \frac{m^2}{n^4}},$$

cuyo límite, para $m,n \to \infty$, depende de $\lim_{m,n\to\infty} \frac{m^2}{n^4}$, y este límite puede ser cualquier valor de $[0,+\infty]$, moviendo adecuadamente m,n hacia el $+\infty$.

Definición 8.3. *(a) Sea $S = (R,T)$ una superficie paramétrica simple. Definimos el área de S como*

$$\acute{A}rea\ de\ (S) = \int_R \|\tilde{n}(T(u,v))\| dudv.$$

(b) Sea $S = S_1 + ... + S_n$ superficie suma de las superficies paramétricas simples $S_1, ..., S_n$. Definimos

$$\acute{A}rea\ de\ (S) = \sum_{i=1}^{n}\ \acute{a}rea\ (S_i).$$

NOTA (B). Sea $S = (R,T)$ superficie paramétrica que admite representación explícita $x_3 = \phi(x_1,x_2)$, $(x_1,x_2) \in R \subset \mathbb{R}^2$. Como $\tilde{n}(u,v,\phi(u,v)) = (-\phi_u(u,v), -\phi_v(u,v), 1)$, se tiene que

$$\text{área } (S) = \int_R \sqrt{1+\phi_u^2+\phi_v^2}\, dudv.$$

8.3. Integrales de superficie. Teorema de Stokes

Definición 8.4. *Sea $S = (R, T)$ una superficie paramétrica simple.*

(I) Si $f : S \to \mathbb{R}$ es una función continua, la integral $\int_S f$ de f sobre S se define de la siguiente manera:

$$\int_S f := \int_R f \circ T \cdot \|\tilde{n}(u, v)\| dudv.$$

(II) Sea $f : S \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial. La integral de superficie $\int_S \vec{f}$ de f sobre S se define como

$$\int_S \vec{f} = \int_R \langle f, \tilde{n}\rangle dudv = \int_R \left[f_1 \cdot J(\tfrac{T_2,T_3}{u,v}) + f_2 \cdot J(\tfrac{T_3,T_1}{u,v}) + f_3 \cdot J(\tfrac{T_1,T_2}{u,v}) \right] dudv =$$
$$= \int_S f_1 dx_2 dx_3 + \int_S f_2 dx_3 dx_1 + \int_S f_3 dx_1 dx_2,$$

en donde hemos puesto $\int_S f_k dx_i dx_j := \int_R f_k \circ T(u, v) J(\frac{T_i,T_j}{u,v}) dudv$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Si $T(u, v) = (u, v, \phi(u, v))$ (es decir, se trata de una representación explícita), las anteriores expresiones se reducen a

$$\int_S \vec{f} = \int_R [-f_1(u, v, \phi(u, v))\phi_u(u, v) - f_2(u, v, \phi(u, v))\phi_v(u, v) + f_3(u, v, \phi(u, v))] dudv.$$

Proposición 8.5. *[Teorema de Stokes] Sean*

(1) $\Gamma = [[([a, b], \alpha)]]$ curva de Jordan en $\mathbb{R}^2$ con α de clase C^1 a trozos, G interior de Γ y $R := \overline{G}$ recinto de Jordan.

(2) $S = (R, T)$ superficie paramétrica simple con T de clase C^2.

(3) $f : S \to \mathbb{R}^3$ campo vectorial continuo con rot f continuo.

(4) $\partial S = \gamma$ siendo $\gamma = [[([a, b], T \circ \alpha)]]$.

Se verifica que γ es una curva de Jordan C^1 a trozos y

$$\int_\gamma \vec{f} = \int_S \vec{rot}\, f \quad (\textit{Fórmula de Stokes}).$$

Demostración. Que γ es una curva de Jordan en $\mathbb{R}^3$ de clase C^1 a trozos sale de las condiciones exigidas a α y T. Se verifica:

$$\int_\gamma \vec{f} = \int_{[a,b]} \langle f \circ T \circ \alpha(t), (T \circ \alpha)'(t)\rangle dt = \int_{[a,b]} (\sum_{k=1}^{3} f_k(T \circ \alpha(t))(T_k \circ \alpha)'(t))dt =$$

$$[\text{sustituimos } (T_k \circ \alpha)'(t) = D_u T_k(\alpha(t)) \cdot \alpha_1'(t) + D_v T_k(\alpha(t)) \cdot \alpha_2'(t)]$$

$$= \int_{[a,b]} \left[\left(\sum_{k=1}^{3} f_k \circ T \cdot D_u T_k \right) \circ \alpha(t)\alpha_1'(t) + \left(\sum_{k=1}^{3} f_k \circ T \cdot D_v T_k \right) \circ \alpha(t)\alpha_2'(t) \right] dt =$$

$$= \int_{[a,b]} [\langle f \circ T, D_u T\rangle \circ \alpha(t)\alpha_1'(t) + \langle f \circ T, D_v T\rangle \circ \alpha(t)\alpha_2'(t)]dt =$$

[ponemos $g_1(u,v) = \langle f \circ T, D_u T\rangle(u,v)$, $g_2(u,v) = \langle f \circ T, D_v T\rangle(u,v)$ y $g = (g_1, g_2) : R \to \mathbb{R}^2$]

$$= \int_{[a,b]} \langle g \circ \alpha, \alpha'\rangle(t)dt = \int_\Gamma \vec{g} = \int_R [D_u g_2 - D_v g_1]dudv,$$

en donde hemos aplicado el T. de Green en la última línea.

Por otra parte

$$\int_S \overrightarrow{rot}\, f =$$

$$= \int_R [(D_2 f_3 - D_3 f_2) J \left(\tfrac{T_2, T_3}{u,v} \right) + (D_3 f_1 - D_1 f_3) J \left(\tfrac{T_3, T_1}{u,v} \right) + (D_1 f_2 - D_2 f_1) J \left(\tfrac{T_1, T_2}{u,v} \right)]dudv.$$

Bastará probar que sobre R se verifica

$$D_u g_2 - D_v g_1 = (D_2 f_3 - D_3 f_2) J \left(\tfrac{T_2, T_3}{u,v} \right) + (D_3 f_1 - D_1 f_3) J \left(\tfrac{T_3, T_1}{u,v} \right) + (D_1 f_2 - D_2 f_1) J \left(\tfrac{T_1, T_2}{u,v} \right).$$

Se tiene que

$$D_u g_2 = \left\langle \begin{pmatrix} D_1 f_1 \\ D_1 f_2 \\ D_1 f_3 \end{pmatrix} D_u T_1 + \begin{pmatrix} D_2 f_1 \\ D_2 f_2 \\ D_2 f_3 \end{pmatrix} D_u T_2 + \begin{pmatrix} D_3 f_1 \\ D_3 f_2 \\ D_3 f_3 \end{pmatrix} D_u T_3, \begin{pmatrix} D_v T_1 \\ D_v T_2 \\ D_v T_3 \end{pmatrix} \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_{uv} T_1 \\ D_{uv} T_2 \\ D_{uv} T_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$D_v g_1 = \left\langle \begin{pmatrix} D_1 f_1 \\ D_1 f_2 \\ D_1 f_3 \end{pmatrix} D_v T_1 + \begin{pmatrix} D_2 f_1 \\ D_2 f_2 \\ D_2 f_3 \end{pmatrix} D_v T_2 + \begin{pmatrix} D_3 f_1 \\ D_3 f_2 \\ D_3 f_3 \end{pmatrix} D_v T_3, \begin{pmatrix} D_u T_1 \\ D_u T_2 \\ D_u T_3 \end{pmatrix} \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_{uv} T_1 \\ D_{uv} T_2 \\ D_{uv} T_3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Restando y poniendo

$$D_i f := \begin{pmatrix} D_i f_1 \\ D_i f_2 \\ D_i f_3 \end{pmatrix}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
D_u g_2 - D_v g_1 = &\left\langle D_1 f, D_u T_1 \begin{pmatrix} D_v T_1 \\ D_v T_2 \\ D_v T_3 \end{pmatrix} - D_v T_1 \begin{pmatrix} D_u T_1 \\ D_u T_2 \\ D_u T_3 \end{pmatrix} \right\rangle + \\
&+ \left\langle D_2 f, D_u T_2 \begin{pmatrix} D_v T_1 \\ D_v T_2 \\ D_v T_3 \end{pmatrix} - D_v T_2 \begin{pmatrix} D_u T_1 \\ D_u T_2 \\ D_u T_3 \end{pmatrix} \right\rangle + \\
&+ \left\langle D_3 f, D_u T_3 \begin{pmatrix} D_v T_1 \\ D_v T_2 \\ D_v T_3 \end{pmatrix} - D_v T_3 \begin{pmatrix} D_u T_1 \\ D_u T_2 \\ D_u T_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \\
= &\left\langle D_1 f, \begin{pmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} D_u T_1 & D_u T_2 \\ D_v T_1 & D_v T_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} D_u T_1 & D_u T_3 \\ D_v T_1 & D_v T_3 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle D_2 f, \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} D_u T_2 & D_u T_1 \\ D_v T_2 & D_v T_1 \end{bmatrix} \\ 0 \\ \begin{bmatrix} D_u T_2 & D_u T_3 \\ D_v T_2 & D_v T_3 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \right\rangle + \\
&+ \left\langle D_3 f, \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} D_u T_3 & D_u T_1 \\ D_v T_3 & D_v T_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} D_u T_3 & D_u T_2 \\ D_v T_3 & D_v T_2 \end{bmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \\
= &D_1 f_2 \cdot J\left(\tfrac{T_1, T_2}{u, v}\right) - D_1 f_3 \cdot J\left(\tfrac{T_3, T_1}{u, v}\right) + (-D_2 f_1) \cdot J\left(\tfrac{T_1, T_2}{u, v}\right) + D_2 f_3 \cdot J\left(\tfrac{T_2, T_3}{u, v}\right) + \\
&+ D_3 f_1 \cdot J\left(\tfrac{T_3, T_1}{u, v}\right) - D_3 f_2 \cdot J\left(\tfrac{T_2, T_3}{u, v}\right),
\end{aligned}$$

expresión que coincide con la de más arriba. ■

8.4. Superficies orientadas

Una **superficie paramétrica elemental** (abrev., spe) S es una superficie paramétrica $S = (R, T)$ simple cuyos puntos, excepto, quizás, un número finito, son todos regulares. Hay dos normales unitarias en cada punto regular $T(t_0)$ de una spe S, a saber $\pm\tilde{n}(t_0)/\|\tilde{n}(t_0)\|$.

Orientar una spe S es definir una aplicación continua $R \ni t \to n(t)$ de modo que $n(t)$ sea una de las dos normales unitarias a S en $T(t)$, es decir, $n(t) = \tilde{n}(t)/\|\tilde{n}(t)\|$ ó $n(t) = -\tilde{n}(t)/\|\tilde{n}(t)\|$. Fijada la normal unitaria $n(t)$ queda orientada la spe S y queda fijado el sentido positivo de recorrido del borde ∂S de S, que es el que deja a $n(t)$ a la izquierda. Indicaremos por (S, n) al par formado por la spe S y la normal unitaria continua n elegida sobre S y por $-(S, n)$ a la misma spe S pero con normal unitaria $-n(t)$.

Si $f : S \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial, **la integral de f sobre la spe orientada**

(S,n), es decir, sobre S con normal unitaria n, se define como

$$\int_{(S,n)} \overrightarrow{f}\, d\sigma = \int_R \langle f, n(t)\rangle \|\tilde{n}(t)\| du dv,\ t=(u,v)\in R.$$

Observemos que

$$\int_{-(S,n)} \overrightarrow{f}\, d\sigma = -\int_{(S,n)} \overrightarrow{f}\, d\sigma.$$

Decimos que una superficie S **se ha orientado** si se ha descompuesto como suma $S = S_1 + ... + S_m$, siendo cada S_i una spe sobre la que se ha elegido una normal unitaria n^i continua sobre S_i. Indicaremos por (S,n) al par formado por la superficie $S = S_1 + ... + S_m$ y las orientaciones $(n^i)_{i=1}^m =: n$ sobre las spe $S_i,\ i=1,..,m$. Si $f: S \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial, **se define la integral de f sobre la superficie orientada (S,n) como**

$$\int_{(S,n)} \overrightarrow{f}\, d\sigma := \sum_{i=1}^m \int_{(S_i,n^i)} \overrightarrow{f}\, d\sigma_i.$$

Elegida una orientación para la superficie general $S = S_1 + ... + S_m$ (es decir, se han fijado las normales unitarias n^i en cada S_i), se dice que dicha orientación es **una buena orientación** si, cuando $\partial S_i \cap \partial S_j \neq \emptyset,\ i\neq j$, los sentidos de recorrido de $\partial S_i \cap \partial S_j$, considerado como parte de ∂S_i con normal n^i y de ∂S_j con normal n^j, son opuestos.

Ejemplo. La banda de Möbius se puede orientar, pero no se le puede dar una buena orientación.

Proposición 8.6. *Sea (S,n) una superficie cerrada de clase C^1 con buena orientación n y sea $f: S\to\mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1. Entonces $\int_{(S,n)} (\overrightarrow{rot}\, f)\, d\sigma = 0$.*

Demostración. La superficie S se descompone como suma de spe, digamos, $S = S_1 + ... + S_m$, y está dotada de la buena orientación $n := (n^i)_{i=1}^m$, siendo n^i una normal unitaria sobre S_i. Como S es cerrada y tiene buena orientación, cada borde ∂S_i se descompone en uno ó varios tramos y cada uno de estos tramos es compartido con otro borde, digamos ∂S_j, y los sentidos de recorrido de dicho tramo, como parte de ∂S_i y ∂S_j, son opuestos. Este hecho implica que, funcionalmente, $\sum_{i=1}^m \partial S_i = 0$, es decir, $\sum_{i=1}^m \int_{\partial S_i} \overrightarrow{g} = 0$ para todo campo vectorial g. Por tanto

$$\int_{(S,n)} \overrightarrow{rot}\, f d\sigma = \sum_{i=1}^m \int_{(S_i,n^i)} \overrightarrow{rot}\, f\, d\sigma_i =$$

[aplicamos el T. de Stokes a cada spe S_i]

$$= \sum_{i=1}^m \int_{\partial S_i} \overrightarrow{f} = 0.$$

■

8.5. Teorema de Gauss

Un compacto K de $\mathbb{R}^3$ es un **sólido elemental** si verifica los siguientes requisitos:

(1) $\overset{\circ}{K} =: G \neq \emptyset$.

(2) Su borde topológico $\partial K = \partial G =: S$ es una superficie cerrada con las peculiaridades que a continuación se describen.

(3) Toda recta paralela a los ejes corta a S ó en dos puntos ó en un segmento compacto. Las proyecciones sobre los planos coordenados son recintos de Jordan tales que para cada uno de ellos, v.g., para la proyección R sobre el plano $x_3 = 0$ existen funciones $\phi_1, \phi_2 : R \to \mathbb{R}$ de C^1 verificando que

(31)
$$K = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in R,\ \phi_1(x_1, x_2) \leq x_3 \leq \phi_2(x_1, x_2)\},$$

(32) La superficie S se descompone como suma $S = S_2 + (-S_1) + S_3$ siendo S_1, S_2 spe con representación explícita:

$$S_1 := \{(x_1, x_2, \phi_1(x_1, x_2)) : (x_1, x_2) \in R\},$$
$$S_2 := \{(x_1, x_2, \phi_2(x_1, x_2)) : (x_1, x_2) \in R\},$$

y S_3 la superficie lateral (no es spe, pero sí suma de spe) con normal ortogonal a $\vec{k}$. A $S = \partial K$ se le da **la orientación natural**, es decir, con la normal unitaria n hacia fuera de K, resultando ser (S, n) una superficie cerrada bien orientada.

Decimos que un subconjunto $K \subset \mathbb{R}^3$ es un **sólido** sii K es compacto con $\overset{\circ}{K} =: G \neq \emptyset$ y $K = K_1 + ... + K_m$, suma que hay que entender en el siguiente sentido:

(1) Cada K_i es un sólido elemental, $K = \cup_{i=1}^m K_i$ y $\overset{\circ}{K}_i \cap \overset{\circ}{K}_j = \emptyset,\ i \neq j$.

(2) Si $\partial K_i \cap \partial K_j \neq \emptyset$, las orientaciones de $\partial K_i \cap \partial K_j$ como parte de ∂K_i y de ∂K_j (es decir, n^i y n^j) son opuestas.

(3) $(\partial K, n)$, siendo n la normal unitaria hacia fuera del sólido, es una superficie cerrada bien orientada tal que $\partial K = \partial K_1 + ... + \partial K_m$, suma que debe entenderse en el siguiente sentido:

(31) Como conjunto $\partial K = cl[(\cup_{i=1}^m \partial K_i) \setminus (\cup_{\substack{1 \leq i,j \leq m \\ i \neq j}} \partial K_i \cap \partial K_j)]$ (cl significa clausura ó cierre).

(32) Funcionalmente se tiene que para todo campo vectorial $f : K \to \mathbb{R}^3$

$$\int_{(\partial K, n)} \vec{f}\ d\sigma = \sum_{i=1}^m \int_{(\partial K_i, n^{(i)})} \vec{f}\ d\sigma_i.$$

NOTA . Si S es una spe, S tiene contenido 0 (por la Proposición 8.2) y por tanto $S \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$. Luego si $K \subset \mathbb{R}^3$ es un sólido, ∂K es de contenido 0, $\partial K \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$ y $K \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$.

Proposición 8.7. *[Teorema de Gauss] Sean $K \subset \mathbb{R}^3$ un sólido y $f : K \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo tal que existen y son continuas en K las derivadas parciales $D_i f_i$, $i = 1, 2, 3$. Entonces $\int_K div\ f = \int_{(\partial K,n)} \vec{f}\ d\sigma$.*

Demostración. (I) En primer término suponemos que K es un sólido elemental. Habrá que probar que

$$\int_K div\ f = \int_K (D_1 f_1 + D_2 f_2 + D_3 f_3) = \int_{(\partial K,n)} \vec{if_1}\ d\sigma + \int_{(\partial K,n)} \vec{jf_2}\ d\sigma + \int_{(\partial K,n)} \vec{kf_3}\ d\sigma,$$

para lo que bastará ver que

$$\int_K D_1 f_1 = \int_{(\partial K,n)} \vec{if_1}\ d\sigma\ ;\ \int_K D_2 f_2 = \int_{(\partial K,n)} \vec{jf_2}\ d\sigma\ ;\ \int_K D_3 f_3 = \int_{(\partial K,n)} \vec{kf_3}\ d\sigma.$$

A continuación probamos que $\int_K D_3 f_3 = \int_{(\partial K,n)} \vec{kf_3}\ d\sigma$. Las otras igualdades son análogas. Sean R el recinto de Jordan proyección sobre el plano $x_3 = 0$ y $\phi_1, \phi_2 : R \to \mathbb{R}$ tales que

$$K = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in R, \phi_1(x_1, x_2) \leq x_3 \leq \phi_2(x_1, x_2)\}.$$

Sea $\partial K = S_2 + (-S_1) + S_3$, siendo $S_i = \{(x_1, x_2, \phi_i(x_1, x_2)) : (x_1, x_2) \in R\}$, $i = 1, 2$, spe y S_3 la superficie lateral de K, superficies que orientamos con la normal unitaria n^i hacia fuera de K. Puesto que $K, \overset{\circ}{K} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$ y $D_3 f_3 \in \mathcal{R}(\overset{\circ}{K})$, podemos aplicar el T. de Fubini obteniendo

$$\int_K D_3 f_3 = \int_R \left[\int_{\phi_1(x_1,x_2)}^{\phi_2(x_1,x_2)} D_3 f_3(x_1, x_2, t_3) dt_3 \right] dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_R f_3(x_1, x_2, \phi_2(x_1, x_2)) dx_1 dx_2 - \int_R f_3(x_1, x_2, \phi_1(x_1, x_2)) dx_1 dx_2.$$

Por otra parte

$$\int_{(\partial K,n)} \vec{kf_3}\ d\sigma = \int_{(S_2,n^2)} \vec{kf_3}\ d\sigma + \int_{-(S_1,n^1)} \vec{kf_3}\ d\sigma + \int_{(S_3,n^3)} \vec{kf_3}\ d\sigma =$$

$$[\text{observemos que } k \bullet n^3 = 0 \ \text{ sobre } S_3]$$

$$= \int_{(S_2,n^2)} \vec{kf_3}\ d\sigma - \int_{(S_1,n^1)} \vec{kf_3}\ d\sigma =$$

$$= \int_R f_3(x_1, x_2, \phi_2(x_1, x_2)) k \bullet (-D_u \phi_2, -D_v \phi_2, 1) dx_1 dx_2 -$$

$$- \int_R f_3(x_1, x_2, \phi_1(x_1, x_2)) k \bullet (-D_u \phi_1, -D_v \phi_1, 1) dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_R f_3(x_1, x_2, \phi_2(x_1, x_2)) dx_1 dx_2 - \int_R f_3(x_1, x_2, \phi_1(x_1, x_2)) dx_1 dx_2 = \int_K D_3 f_3,$$

como queríamos demostrar.

(II) Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un sólido general tal que $K = K_1 + ... + K_m$, siendo K_i sólido elemental $i = 1, ..., m$. Entonces

$$\int_K div\ f = \sum_{i=1}^{m} \int_{K_i} div\ f = \sum_{i=1}^{m} \int_{(\partial K_i, n^i)} \vec{f}\ d\sigma = \int_{(\partial K, n)} \vec{f}\ d\sigma.$$

■