CÁLCULO INTEGRAL. HOJA N.1

1. Calcula: (a) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$; (b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)...(2n)}$.

2. Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ tq $,\forall t\in[0,1], f(t)=t$, si $t\in\mathbb{Q}$, y $f(t)=1-t$, si $t\in\mathbb{I}$. Calcula $\underline{\int}_0^1 f$ y $\overline{\int}_0^1 f$.

3. Sean $f:[1,+\infty)\to[0,+\infty)$ función decreciente y $x_n := f(1)+f(2)+\cdots+f(n)-\int_1^n f(t)dt$. Prueba que $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0\in[0,f(1)]$. Deduce de aquí que $\sum_{n\geq 1} n^{-2}\leq 2$.

4. Prueba que $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}(sen\ x)^n dx = 0 = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{sen\ nx}{n^2+x^2}dx$.

5. (a) Sea $f:[0,\infty]\to\mathbb{R}$ tq $f(x)\to\alpha$ para $x\to\infty$ y $f\in\mathcal{R}(J)$ para todo intervalo acotado $J\subset\mathbb{R}$. Prueba que $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\alpha$.

(b) Sea $a_n := \int_0^1 x^n\cdot sen\ \pi x\cdot dx$. Prueba que $\sum_{n\geq 0} a_n = \int_0^{\pi}\frac{sen\ x}{x}dx$.
(c) Prueba que, si $g(x)=\int_0^1 t^k sen\ tx\ dt,\ k>0$, entonces $xg'(x)+(k+1)g(x)=sen\ x$.
(d) Prueba que $\int_a^b\frac{dt}{Lt}<\frac{2b}{Lb}$, siendo $e^2<a<b$.

6. (a) Para $x>0$ sea $f(x)=\int_{1/x}^1\frac{1}{t}sen(\frac{1}{t})dt$. Prueba que existe $\lim_{x\downarrow 0} f(x)$ y que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.
(b) Prueba que $\lim_{x\uparrow\pi/2}\int_0^{sen\ x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}=\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2sen^2t}}$ para $0<k<1$.

7. Sean $f\in\mathcal{R}([a,b])$ y $\pi=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ tal que existe g_i primitiva de f en (x_{i-1},x_i). Prueba que existen los límites laterales $g_i(x_{i-1}^+),\ g_i(x_i^-)$ y que $\int_a^b f(t)dt=\sum_{i=1}^n(g_i(x_i^-)-g_i(x_{i-1}^+))$.

8. (a) Prueba que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=sen(\frac{1}{x})$, si $x\neq 0$, y $f(0)=0$, tiene primitiva en $\mathbb{R}$.
(b) Sean $x_0\in[a,b]$ y $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que existe $\lim_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$. Prueba que f no tiene primitiva en $[a,b]$.

9. Sea $I\subset\mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto.
(a) Prueba que la relación de finura $\leq$ en $\Pi(I)$ no es antisimétrica y que, en general, los supremos no son únicos.
(b) Sea $\pi\in\Pi(I)$. Prueba que $v(I)=\sum_{J\in\pi}v(J)$.
(c) Sea $\{J_i: i=1,\ldots,p\}$ una familia de subintervalos compactos de I tales que $I=\cup_{i=1}^p J_i$. Prueba que $v(I)\leq\sum_{i=1}^p v(J_i)$.
(d) Sea $\{J_i: i=1,\ldots,p\}$ una familia de intervalos compactos de $\mathbb{R}^n$ tales que $I\subset\cup_{i=1}^p J_i$. Prueba que $v(I)\leq\sum_{i=1}^p v(J_i)$.

10. (a) Sean $I\subset\mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto y $\{J_i: i\geq 1\}$ una familia de intervalos compactos de $\mathbb{R}^n$ tales que $I\subset\cup_{i\geq 1}J_i$. Prueba que $v(I)\leq\sum_{i\geq 1}v(J_i)$.

(b) Sean $I_1,I_2,\ldots,I_p$ y $\{J_i: i\geq 1\}$ rectángulos compactos de $\mathbb{R}^n$ tales que: (i) los $I_i,\ i=1,...,p$, no se solapan; (ii) $\cup_{i=1}^p I_i\subset\cup_{j\geq 1}J_j$. Prueba que $\sum_{i=1}^p v(I_i)\leq\sum_{j\geq 1}v(J_j)$.

11. Sean $I\subset\mathbb{R}^n$ un intervalo compacto, $f\in\mathcal{R}(I),\ f\geq 0$ y $\int_I f=0$. Prueba que si f es continua en x_0, entonces $f(x_0)=0$.

12. Sean $I\subset\mathbb{R}^n$ intervalo compacto, $1\leq p<\infty,\ f\in C(I,\mathbb{R}),\ \|f\|_p := [\int_I|f(t)|^p dt]^{1/p}$ y $\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)|: t\in I\}$. Prueba que $\|f\|_p \underset{p\to\infty}{\to}\|f\|_\infty$.

13. (a) Calcula $\int_I (x-1)^{[3y]-1}$, donde $I=[2,3]\times[0,1]$.
(b) Calcula $\int_I \frac{y^3-2xy^2+x^2y+x-1}{(x-y)^2(x-1)}$, $I=[2,3]\times[0,1]$.

14. (a) Halla las derivadas de $f(x)=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+x^2}}$ y de $g(x)=\int_0^1 \frac{sen\ tx}{x}dt$.
(b) ¿Para qué valores de n la integral $\int_0^a \frac{x^n}{\sqrt{x^3+a^3}}dx$ no depende de a?
(c) Sea $I=[-2,2]\times[-1,1]$. Halla $\int_I \max\{x,y\}$, $\int_I |\max\{x,y\}|$.

15. Sean $I=[0,1]^2$ y $f:I\to\mathbb{R}$.
(a) Sea $f(x,y)=0$, si $y=0$ ó $x\in\mathbb{I}$ ó $y\in\mathbb{I}$ ($\mathbb{I}$=irracionales), y $f(x,y)=1/q$, si $x,y\in\mathbb{Q}$ con $y=p/q$ fracción irreducible. Prueba que $f\in\mathcal{R}(I)$ y $\int_I f=0$.

(b) Sea $f(x,y)=1$, si $x\in\mathbb{Q}$, y $f(x,y)=2y$, si $x\in\mathbb{I}$. Prueba que $f\notin\mathcal{R}(I)$. Calcula $\underline{\int}_I f$ y $\overline{\int}_I f$.

(c) Sea $f(x,y)=x$, si $x>y$, y $f(x,y)=y^2$, si $x\le y$. Prueba que $f\in\mathcal{R}(I)$ y calcula $\int_I f$.

16. Sean $I\subset\mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto y $f,g:I\to\mathbb{R}$ tales que $f,g\in\mathcal{R}(I)$. Prueba que $\max\{f,g\},\ \min\{f,g\}\in\mathcal{R}(I)$.

17. Sean $I\subset\mathbb{R}$ un intervalo compacto, $f\in\mathcal{R}(I)$, $f_a(x)=f(x-a)$, $\forall x\in I+a$. Prueba que $f_a\in\mathcal{R}(I+a)$ y que $\int_{I+a} f_a=\int_I f$.

18. Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ tal que $f(0)=0$ y $f(t)=1/2^n$ para $\frac{1}{2^{n+1}}<t\le\frac{1}{2^n}$, $n=0,1,2,...$
(a) Prueba que $f\in\mathcal{R}([0,1])$ y calcula $\int_0^1 f(t)dt$.
(b) Calcula $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

19. Sean $I=[0,2]^2$ y $f(x,y)=x^{[y]}\cdot y^{[x]}$, si $x\neq 0\neq y$, y $f(x,y)=0$, si $x=0$ ó $y=0$, para $(x,y)\in I$, siendo $[x]$ la parte entera de x. Prueba que $f\in\mathcal{R}(I)$ y calcula $\int_I f$.

20. (a) Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Prueba que $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)sen\ nx\ dx=0$.
(b) Calcula $\lim_{x\to 0}\big(x\int_0^x e^{t^2}dt\big)\big(\int_0^x e^{t^2}sen\ t\ dt\big)^{-1}$.

CÁLCULO INTEGRAL. HOJA N. 2

1. (a) Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto y $f : I \to \mathbb{R}$ tal que $f \in \mathcal{R}(I),\ f \geq 0$ y $\{f > 0\}$ medida 0. Prueba que $\int_I f = 0$.

(b) Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto y $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada tal que $\{f \neq 0\}$ cont. 0. Prueba que $f \in \mathcal{R}(I)$ y que $\int_I f = 0$.

2. Demuestra que en las definiciones de cont. 0 y medida 0 se pueden sustituir los intervalos por: (i) intervalos abiertos; (ii) por cubos cerrados; (iii) por cubos abiertos.

3. Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto y $f : I \to \mathbb{R}$ tal que $f \in \mathcal{R}(I)$. Demuestra que el grafo $G(f) := \{(x, f(x) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in I\}$ tiene cont. 0.

4. (a) Sea $I \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto y $f \in \mathcal{R}(I)$ tal que $f \geq 0$ y $\int_I f = 0$. Demuestra que para cada $r > 0$ el conjunto $\{f > r\}$ es de cont. 0. Deduce de aquí que $\{f > 0\}$ es medida 0.

(b) Sea $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ y $f, g \in \mathcal{R}(A)$ tales que $m(A) > 0$ y $f(x) < g(x),\ \forall x \in A$. Prueba que $\int_A f < \int_A g$.

5. (a) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medida 0 tal que $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. Prueba que $m(A) = 0$. Prueba que si $f \in \mathcal{R}(A)$ entonces $\int_A f = 0$.

(b) Sea $H \subset \mathbb{R}^n$ tal que, $\forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, verificando $H \subset A_\epsilon$ y $m(A_\epsilon) \leq \epsilon$. Prueba que H es de contenido 0.

6. (a) Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ un intervalo compacto y $f \in \mathcal{R}(I)$.

(a1) Sean $f \geq 0$ y $K^f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in I, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Prueba que $K^f \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n+1})$ y que $m(K^f) = \int_I f$.

(a2) Sean $f \geq 0$ y $H^f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in I, 0 \leq y < f(x)\}$. Prueba que $H^f \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n+1})$ y que $m(H^f) = \int_I f$.

(b) Prueba que (a) es válido si se sustituye I por cualquier $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$.

7. (a) Sean $n < m,\ n, m \in \mathbb{N},\ H \subset \mathbb{R}^n$ y $g : H \to \mathbb{R}^m$ una función Lipschitz. Prueba que $g(H)$ es medida 0 y que, si H es acotado, $g(H)$ es contenido 0.
(b) Sean $n < m,\ n, m \in \mathbb{N},\ \Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Prueba que $g(\Omega)$ es medida 0 y que, si $\overline{H} \subset \Omega$ y H es acotado, entonces $g(H)$ es contenido 0.
(c) Sean $p, q \in \mathbb{N},\ n = p + q,\ J \subset \mathbb{R}^p,\ K \subset \mathbb{R}^q$ intervalos compactos, $I = J \times K$ y $M \subset I$ subconjunto de contenido 0. Sean $M_x := \{y \in K : (x, y) \in M\},\ \forall x \in J$, y $H := \{x \in J : M_x$ no contenido 0 en $\mathbb{R}^q\}$. Prueba que H es medida 0.

8. (a) Prueba que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, y = sen(1/x)\}$ tiene contenido 0.
(b) Prueba que si $H \subset \mathbb{R}$ es medida 0, entonces $H \times \mathbb{R}$ es medida 0 en $\mathbb{R}^2$.

9. (a) Sean $f, g \in \mathcal{R}([0, 1]),\ f(x) \geq m > 0,\ \forall x \in [0, 1],\ I = [0, 1]^2,\ F : I \to \mathbb{R}$ tales que $F(x, y) = f(x)^{g(y)}$. Prueba que $F \in \mathcal{R}(I)$.
(b) Sean $I = [0, a]^2,\ a > 0$, y $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par. Prueba que

$$\int_I f(x - y)dxdy = 2 \int_0^a (a - t)f(t)dt.$$

10. Sean $H \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto acotado y $H^{(i)}$:=conjunto derivado de $H^{(i-1)}$, $i \geq 1$, con $H^{(0)} = H$. Prueba que, si $H^{(m)}$ tiene contenido 0, para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces H tiene contenido 0.

11. Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ un intervalo compacto, $f : I \to \mathbb{R},\ f \geq 0$ y $P(f) := \{x \in I : f(x) > 0\}$.

(a) Si $f \in \mathcal{R}(I)$ y $\int_I f = 0$, entonces $P(f)$ tiene medida 0, aunque, en general, no contenido 0. Poner un contraejemplo.

(b) Poner un ejemplo de una función $f : I \to [0, +\infty)$ acotada tal que $P(f)$ tenga medida 0, pero $f \notin \mathcal{R}(I)$.

12. (a) Halla la J-medida en $\mathbb{R}^3$ de la intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = a^2 = x^2 + z^2$.

(b) Halla el volumen de la región limitada por $z = x + y, z = 6, x = 0, y = 0$ y $z = 0$.

(c) Sean $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x^2\}$. Calcula $\int_R (x^2 + y^2) dx \cdot dy$.

(d) Calcula $\int_R (x^2 + y^2 + z^2) dx \cdot dy \cdot dz$, siendo $R \subset \mathbb{R}^3$ la región limitada por $x + y + z = a, a > 0, x = 0, y = 0$ y $z = 0$.

(e) Halla el volumen en $\mathbb{R}^3$ del cuerpo limitado por $z = 4 - x^2, x = 0, y = 0, y = 6$ y $z = 0$.

14. (a) Calcular el volumen del cuerpo K siendo:

(a1) K es el cuerpo comprendido entre los cilíndros $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4$, el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

(a2) $K = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x^2 + y^2 \leq z\}$.

(a3) $K = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \leq ay\}$.

(b) Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = |x^2 + y^2 - 1|$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ y $B = [-2, 2]^2$. Halla $\int_A f$ y $\int_B f$.

CÁLCULO INTEGRAL. HOJA N. 3

1. Sea $(G(n))_{n\geq 1}$ una sucesión decreciente de números reales tq $G(n) \underset{n\to\infty}{\downarrow} 0$. Definimos $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ de modo que $f(0)=1$, $f(x)=0$, si x es irracional, y $f(x)=G(n)$, si x tiene la forma $x=m/n$ fracción irreducible. Calcular la oscilación $O(f,x)$ de f en cada punto $x\in[0,1]$ y probar que $f\in\mathcal{R}([0,1])$. Supongamos que $G(n)=1/n$ y sea $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ tq $g(0)=0$ y $g(x)=1$, si $0<x\leq 1$. Probar que $g\circ f\notin\mathcal{R}([0,1])$.

2. Sean $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ un subconjunto abierto y $f:\Omega\to\mathbb{R}$ una función tal que existen y son continuas las derivadas parciales cruzadas $D_{12}f(x,y)$, $D_{21}f(x,y)$, $\forall(x,y)\in\Omega$. Utiliza el Teorema de Fubini para probar que $D_{12}f(x,y)=D_{21}f(x,y)$, $\forall(x,y)\in\Omega$.

3. Expresar las siguientes integrales iteradas como integrales triples sobre un recinto y calcularlas.
(a) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdydx$; (b) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^1 dzdydx$; (c) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{z}}\int_0^{\sqrt{z-x^2}} dydxdz$.
(d) $\int_0^1\int_0^x\int_0^{x^2+y^2}(x-2y-3z)dzdydx$; (e) $\int_0^1\int_0^z\int_0^{\sqrt{z^2-x^2}} dydxdz$.
(f) $\int_0^1\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x+2y+3z)dydxdz$.

4. Sea Σ la superficie de $\mathbb{R}^3$ generada por las rectas que cortan perpendicularmente al eje OZ y se apoyan en la circunferencia $x^2+z^2=1, y=1$. Calcular el volumen del cuerpo $M\subset\mathbb{R}^3$ limitado por la superficie Σ y los planos $y=0, y=1$.

5. Prueba que $A\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$ y calcula $m(A)$ en los siguientes casos:
(a) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leq 1\}$.
(b) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, x+y+z\leq a, az\leq xy\},\ a>0$.
(c) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2z^2\leq x^2+y^2\leq 1+z^2\}$.

6. (a) Sea $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ una función continua tal que existe y es continua $D_yf(x,y)$. Sea $F(y):=\int_a^b f(x,y)dx,\ \forall y\in[c,d]$. Demuestra que $F'(y)=\int_a^b D_yf(x,y)dx,\ \forall y\in[c,d]$ (forma abreviada de la regla de Leibnitz).

(b) Sea $f(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$. Calcula la derivada $f'(x)$ y deduce de aquí el valor de $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$. Sugerencia: prueba que $f'(x)+g'(x)=0$ siendo $g(x):=(\int_0^x e^{-t^2}dt)^2$.

(c) Sean $M\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ y $f:M\to\mathbb{R}$ tal que $f\restriction int(M)\in C^1(int(M),\mathbb{R})$ y $D_1f(x)\neq 0,\ \forall x\in int(M)$. Prueba que, para cada $t\in\mathbb{R}$, el conjunto $E=\{x\in M : f(x)\leq t\}$ es J-medible.

7. Calcular las siguientes integrales $\int_A f$ siendo:
(a) $f(x,y,z)=z^2$ y $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2Rz\geq x^2+y^2+z^2\geq R^2\}$.
(b) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x^2+y^2)^{1/2}\leq z\leq 3\}$.
(c) $f(x,y,z)=z$ y $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2z^2\leq x^2+y^2\leq z^2+1, 0\leq z\}$.
(d) $f(x,y,z)=x^2$ y $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(z-1)^2\leq 1, 4z^2\geq 3(x^2+y^2)\}$.
(e) $f(x,y,z)=zy\sqrt{x^2+y^2}$ y $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq z\leq x^2+y^2, 0\leq y\leq\sqrt{2x-x^2}\}$.
(f) $f(x,y,z)=z$ y $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leq 2, x^2+y^2\leq z\}$.

8. Calcula el volumen del conjunto A siendo:
(a) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leq a^2, x^2+y^2\leq z^2\}$.
(b) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq\frac{z^2}{c^2}+1, 0\leq z\leq 1\}$.
(c) A es el cuerpo de revolución generado al girar alrededor de la recta $y+x=0$ el recinto plano R limitado por la parábola $y=x-x^2$ y el eje OX.
(d) A es el cuerpo de revolución generado al girar alrededor del eje OX el recinto plano $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq y\leq 2a, 0\leq x\leq e^{|y-a|}\}, a>0$.

9. Calcula: (a) el volumen de la bola $B(0;r)$ de $\mathbb{R}^n$; (b) el volumen de $B(0;4)\setminus B(0;2)$ en $\mathbb{R}^4$.

10. (A) Sea $M\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ tal que $m(M)>0$ y definamos el baricentro $b=(b_1,\cdots,b_n)$ de M de modo que $b_i=m(M)^{-1}\int_M x_i dx_1 dx_2\cdots dx_n$. (a) Prueba que, si M es simétrico respecto de un punto $a\in\mathbb{R}^n$, entonces $b=a$. (b) Prueba que, si M es simétrico respecto de un hiperplano H, entonces $b\in H$.

(B) Sea $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le a^2, z^2 sen^2\alpha\ge(x^2+y^2)cos^2\alpha,\ z\ge 0\}$, siendo $0\le\alpha\le\pi$. Hallar: (a) el volumen de C; (b) el baricentro de C; (c) el baricentro de la semiesfera $E=\{x^2+y^2+z^2\le a^2, z\ge 0\}$.

11. Sea $E\subset\mathbb{R}^2$ el cuadrilátero curvilíneo limitado por las parábolas:

$$y^2=a^3x,\quad y^2=b^3x,\quad x^2=c^3y,\quad x^2=d^3y,\quad 0<a<b,\quad 0<c<d.$$

Calcular el volumen del cuerpo de revolución generado al girar E alrededor del eje OY.

12. Sea R el recinto limitado por el eje OX y el arco de la cicloide $x(\theta)=a(\theta-sen\ \theta),\ y(\theta)=a(1-cos\ \theta),\ 0\le\theta\le 2\pi$. Calcular el área de R y el volumen de los cuerpos de revolución que genera R al girar alrededor de: (a) el eje OX; (b) el eje OY; (c) la recta $x=\pi a$.

13. Calcula las siguientes integrales iteradas:

(a) $\int_0^1\big(\int_x^{\sqrt{2x-x^2}}\frac{1}{(4+x^2+y^2)^2}dy\big)dx$; (b) $\int_0^2\big(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}(x^2+y^2)dy\big)dx$.

(c) $\int_1^2\big(\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}\frac{dy}{(x^2+y^2)^2}\big)dx$; (d) $\int_0^3\big(\int_{4y/3}^{\sqrt{25-y^2}}\frac{y}{(x+y)^2}dx\big)dy$.

14. (a) Sea $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\ge 0, z\ge 0, 0\le y\le 1, x+z\le 1\}$. Probar que $M, g(M)\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$ y calcular $m(g(M))$, siendo $g(x,y,z)=(e^{2z}+e^{2y}, e^{2x}-e^{2z}, x-y)$.

(b) Calcular $\int_E xyz(1-x-y-z)dxdydz$ mediante el cambio $x+y+z=u, y+z=uv, z=uvw$, siendo E el tetraedro $E=\{x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x+y+z\le 1\}$.

15. Dada $f:[\alpha,\beta]\to[0,\infty),\ f\in\mathcal{R}([\alpha,\beta]),\ \beta-\alpha\le 2\pi$, sea

$$P(f):=\{(r\cdot cos\ \theta, r\cdot sen\ \theta) : \alpha\le\theta\le\beta, 0\le r\le f(\theta)\}.$$

Probar que $P(f)$ es J-medible y que $m(P(f))=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)d\theta$. Calcular el área del:

(a) recinto limitado por el bucle de la lemniscata $r^2=a^2cos2\theta$.

(b) recinto limitado por el cardioide $r=a(1+cos\theta)$.

16. Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ función continua par y $A:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le R^2\}$. Probar que:

$$\int_A f(ax+by)\cdot\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy=\pi\int_0^R f(kt)(R^2-t^2)dt,\ k=\sqrt{a^2+b^2}.$$

CÁLCULO INTEGRAL. HOJA N. 4

1. (a) Probar que toda función polinómica es de variación acotada en todo compacto $K \subset \mathbb{R}$.
(b) Probar que $E = \{(x,y) \subset \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, a \leq xy \leq b, y^2 - x^2 \leq 1, x \leq y\}$ es J-medible. Mediante un adecuado cambio de variable calcular

$$I = \int_E (y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)dxdy, \ 0 < a \leq b.$$

2. Calcular las siguientes integrales $\int_T f$ siendo:

(a) $f(x,y) = y \cdot e^{-xy}$ y $T = [0,a]^2, \ a > 0$.

(b) $f(x,y) = x$ y T el recinto limitado por el cardioide $\rho = 1 + cos\ \theta$.

(c) $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $T = \{(x,y) : 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9, 2 \leq xy \leq 4, 0 \leq x, 0 \leq y\}$.

(d) $f(x,y,z) = x^2 z$ y T el recinto limitado por $(\frac{x^2}{4} + y^2)z^2 = 4, \ z = 1, \ z = 2$.

(e) $f(x,y,z) = z \cdot e^{-(x^2+y^2)}$ y T el recinto limitado por el semicono $2(x^2 + y^2) = z^2, z \geq 0$, y el hiperboloide $x^2 + y^2 = z^2 - 1$.

(f) $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $T = \{(x^2 + y^2)^2 \leq 4(x^2 - y^2), x \geq 0\}$.

(g) $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{-3/2}$ y $T = \{x \leq y, x + y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(h) $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $T = \{x^2 + y^2 \leq 2y, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$.

3. (a) Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ el recinto limitado por las parábolas $y^2 = x, \ y^2 = 2x, \ x^2 = 2y$. Halla el área de A.

(b) En el paraboloide de revolución $2z = x^2 + y^2$ se encaja una esfera de radio $\sqrt{5}$ y centro en el eje OZ, de modo que son tangentes en los puntos de contacto. Determina el volumen del hueco que queda entre el paraboloide y la esfera.

4. Calcula la masa del sólido $S \subset \mathbb{R}^3$ limitado por un cilindro circular recto de radio R y altura H, si la densidad en cada punto es igual al cuadrado de la distancia entre el punto y el centro de la base del cilindro.

5. (A) Estudiar si los siguientes arcos $([0,1], f)$ son rectificables siendo: (1) $f(t) = (t, t \cdot sen(1/t))$, si $t \neq 0$, y $f(0) = 0$; (2) $f(t) = (t, t^2 \cdot sen(1/t))$, si $t \neq 0$, y $f(0) = 0$; (3) $f(t) = (t, \sqrt{t} \cdot sen(1/t))$, si $t \neq 0$, y $f(0) = 0$.

(B) Calcula la longitud de los siguientes arcos $([a,b], \varphi)$ siendo: (a) $[a,b] = [0, 2\pi]$ y $\varphi(t) = (t - sen\ t, 1 - cos\ t)$; (b) $[a,b] = [0,\pi]$ y $\varphi(t) = (cos^3 t, sen^2\ t)$; (c) $[a,b] = [0,1]$ y $\varphi(t) = (t, e^t)$; (d) $[0,2]$ y $\varphi(t) = (t^2/2, t)$; (e) $\rho(\theta) = 1 + cos\ \theta$ y $\theta \in [0, 2\pi]$; (f) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

6. Calcula las siguientes áreas:

(a) Área del recinto situado entre el eje OX y un lazo el cicloide $x = a(\theta - sen\ \theta), \ y = a(1 - cos\ \theta)$.

(b) Área limitada por el bucle del folium de Descartes $x^3 + y^3 = axy$.

(c) Área limitada por la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ y los rayos de argumento $\pi/6$ y $-\pi/6$.

7. Calcula las siguientes longitudes:

(a) Longitud del arco de cicloide comprendido entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi$.

(b) Longitud de un paso de la hélice $x = a \cdot cos\ t, y = a \cdot sen\ t, Z = kt$.

(c) Longitud de la primera espira de la espiral de Arquímedes $\rho = k\theta$.

(d) Longitud de la espiral logarítmica $\rho = k \cdot e^{a\theta}$ entre los argumentos θ_1 y θ_2.

(e) Longitud de la elipse $x(t) = (a \cdot sen\ t, b \cdot cos\ t)$.

(d) Longitud del astroide o hipocicloide de ecuaciones $\phi(t) = (a \cdot cos^3 t, a \cdot sen^3 t)$. Calcula el área encerrada por el astroide.

8. Aplica el T. de Green a las siguientes integrales curvilíneas $\int_{\partial R} \vec{f}$ siendo:

(a) $f(x, y) = (2xy - x^2, x + y^2)$ y R la región limitada por $y = x^2, y^2 = x$.

(b) $f(x, y) = (x^2 y \cdot cos\ x + 2xy \cdot sen\ x - y^2 e^x, x^2 sen\ x - 2ye^x)$ y R el recinto limitado por la hipocicloide.

(c) $f(x, y) = (2(x^2 + y^2), (x + y)^2)$ y R el triángulo de vértices $A(1, 1), B(2, 2)$ y $C(1, 3)$.

(d) $f(x, y) = (-x^2 y, xy^2)$ y $R = \{x^2 + y^2 \leq r\}$.

9. Calcula las integrales dobles $\int_T f$ siendo:

(a) $f(x, y) = x$, T el recinto limitado por $y^2 = x, y^2 = 2x, x^2 = y, x^2 = 2y$.

(b) $f(x, y) = xy(x^2 + y^2)$, $T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9, 2 \leq xy \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$.

(c) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2+xy)}$, $T := \{x^2 + y^2 + xy \leq 1\}$.

(d) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : bx + ay \leq ab, 0 \leq x, 0 \leq y\}$, $a, b > 0$.

(e) $f(x, y) = y\sqrt{x^2 + y^2}$, $T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 - x^2 \geq y \geq x^2 - a^2\}$, $a > 0$.

CÁLCULO INTEGRAL. HOJA N. 5

1. Sea $C \subset \mathbb{R}^3$ una curva con densidad lineal de masa $\rho(x,y,z)$ y masa total $M := \int_C \rho$.
(a) Calcula el centro de gravedad de C si C es la semicircunferencia $x^2+y^2=1, y \geq 0, z=0$ y la densidad ρ es contante.
(b) Calcula la masa M de C si $\rho(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ y C es la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ con el plano $x+y+z=1$.
(c) Sea C la curva $\gamma(t) = (cos\ t, sen\ t, t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$ con densidad lineal $\rho(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Calcula la masa M de C, el centro de gravedad de C y el momento de inercia I de C respecto del eje OZ (el momento de inercia I_E respecto de un eje E es $I_E := \int_C dist^2((x,y,z),E)\cdot \rho(x,y,z))$.

2. Halla las siguientes integrales curvilíneas $\int_\gamma \vec{f}$ siendo:
(a) $f(x,y) = (x,-y)$ y γ el borde del triángulo ABC con $A(1,0), B(0,1)$ y $C(0,0)$.
(b) $f(x,y) = (y^2,x^2)$ y γ la mitad superior de la elipse $\{(a\cdot cos\ t, b\cdot sen\ t) : t \in [0,2\pi]\}$ recorrida positivamente.
(c) $f(x,y) = (x,y)$ y γ el primer cuadrante de la elipse $\{(a\cdot cos\ t, b\cdot sen\ t) : t \in [0,2\pi]\}$ recorrido positivamente.
(d) $f(x,y) = (x,-y)$ y γ la elipse $\{(a\cdot cos\ t, b\cdot sen\ t) : t \in [0,2\pi]\}$ recorrida positivamente.
(e) $f(x,y) = \frac{(xy^2,x^2y)}{x^2+y^2}$ y γ el brazo derecho de la lemniscata recorrido positivamente.
(f) $f(x,y) = (2a-y,x)$ y γ el primer arco de la cicloide para $t \in [0,2\pi]$.
(g) $f(x,y) = (x,y)$ y γ cualquier arco que una $(-1,2)$ con $(2,3)$.
(h) $f(x,y) = (6xy^2-y^3, 6x^2y-3xy^2)$ y γ un arco que una $(1,2)$ con $(3,4)$
(i) $f(x,y) = (y^2,x^2)$ y $\gamma(t) = (2cos\ t, 3sen\ t), 0 \leq t \leq \pi$.
(j) $f(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$ y $\gamma(t) = (cos\ t, sen\ t, 7t), 0 \leq t \leq 2\pi$.
(k) $\int_\gamma 2xy\ dx + (x^2+z)\ dy + y\ dz$ siendo γ el segmento que va de $(1,0,2)$ a $(3,4,1)$.
(l) $\int_\gamma sen\ z\ dx + cos\ z\ dy - \sqrt{3}xy\ dz$ siendo γ el camino $\gamma(t) = (cos^3 t, sen^3 t, t), 0 \leq t \leq 7\pi/2$.
(m) $\int_\gamma y^2 cos(xy^2)dx + 2xy\ cos(xy^2)dy + y\ dz$ siendo $\gamma(t) = (t^4, sen^3(\pi t/2)), 0 \leq t \leq 1$.
(n) Calcula el trabajo realizado por la fuerza $F(x,y,z) = (x,y,z)$ al moverse por la parábola $y=x^2, z=0$, desde el punto $(-1,1,0)$ al punto $(2,4,0)$.

3. Halla el potencial de los siguientes campos F, caso de existir:
(a) $F(x,y) = (2xy^3, 3x^2y^2)$; (b) $F(x,y) = (sen\ 2x\ cos^2 y, -sen^2 x\ sen\ 2y)$;
(c) $F(x,y) = (3x^2+2y\ sen\ 2x, 2sen\ x^2+6y^2)$;(d) $F(x,y,z) = (2xyz+sen\ x, x^2z, x^2y)$;
(e) $F(x,y,z) = (2xyz+z^2-2y^2+1, x^2z-4xy, x^2y+2xz-2)$;
(f) $F(x,y) = (-2xy, x^2)(x^4+y^2)^{-1}$ en el abierto $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;
(g) $F(x,y) = (P,Q)$ con $P(x,y) = Q(y,x) = (x^2+y^2)(3x^2-y^2)/(x^2y)$ (¡Ojo! $P \neq Q$) en $\Omega = \{x>0, y>0\}$;
(h) $F(x,y,z) = (2xy, x^2+Lz, y/z)$ en $\Omega = \{z>0\}$.

4. (a) Calcula $\int_C y^2 dx + x\ dy$ siendo: (a1) $C = [-1,1]^2$; (a2) $C = \{x^2+y^2=4\}$.
(b) Área de la región interior de la curva $\gamma(t) = (a\ cos^3 t, a\ sen^3 t), 0 \leq t \leq 2\pi, a>0$.
(c) Trabajo realizado por la fuerza $F(x,y) = (y+3x, 2y-x)$ al desplazarse por la elipse $4x^2+y^2=4$ en sentido positivo.
(d) $\int_{\partial C}(y^2+x^3)dx + x^4 dy$ siendo ∂C el borde de $C = [0,1]^2$ en sentido positivo.
(e) Área del interior de uno de los pétalos de la rosa de cuatro pétalos $\rho = 3sen\ 2\theta$.

5.(a) Sea $f(x,y,z) = (3x^2y, x^3+y^3, 0)$. Comprueba que $\nabla \times f = 0$. Halla un potencial φ tal que $\nabla\varphi = f$.
(b) Prueba que todo campo vectorial g verifica $\nabla \times (\nabla \times g) = -\Delta g + \nabla(\nabla \bullet g)$.

(c) Sea $f(x,y,z) = (y,x,0)$. Halla un campo g tal que $f = \nabla \times g$.

(d) Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región en la que se verifica el T. de Green y $f : D \to \mathbb{R}$ una función armónica. Calcula $\int_{\partial D} D_y f\ dx - D_x f\ dy$.

(e) Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $\phi(x,y) = \frac{1}{2}L(x^2+y^2), \forall (x,y) \neq 0$. Sea $F(x,y) = (D_y\phi, -D_x\phi)$ definido en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y C una curva de Jordan rectificable que rodea al 0. Halla $\int_C \vec{F}$.

6. Sea γ una curva de Jordan rectificable y $R = \overline{U} = U \cup \gamma^*$, siendo U la región interior de γ. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto con $R \subset \Omega$ y $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones C^2.

(a) Prueba la *primera y la segunda identidad de Green* en $\mathbb{R}^2$:

$$\int_R v\Delta u + \int_R \nabla u \bullet \nabla v = \int_\gamma v\nabla u \bullet \vec{\mathbf{N}}, \quad \int_R (v\Delta u - u\Delta v) = \int_\gamma (v\nabla u \bullet \vec{\mathbf{N}} - u\nabla v \bullet \vec{\mathbf{N}}),$$

siendo $\mathbf{N}$ la normal unitaria exterior a γ.

(b) Demuestra que, si u es armónica en U y $u \restriction \gamma^* = 0$, entonces $u = 0$.

(c) Deduce de (a) que, si u, v son armónicas en U, entonces $\int_\gamma v\nabla u \bullet \vec{\mathbf{N}} = \int_\gamma u\nabla v \bullet \vec{\mathbf{N}}$.

7. (a) Halla el área del helicoide $\varphi(r,\theta) = (r\ cos\theta, r\ sen\theta, \theta), 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 3\pi$.

(b) Halla el área del toro $T(\phi,\theta) = ((R+cos\phi)cos\theta, (R+cos\phi)sen\theta, sen\phi), \phi, \theta \in [0, 2\pi], R \geq 1$.

(c) Demuestra que los conjuntos $\{x^2 + y^2 + z^2 = a^2, b \leq z \leq c\}$ y $\{x^2 + y^2 = a^2, b \leq z \leq c\}$ tienen el mismo área para $-a \leq b \leq c \leq a$.

8. Halla las integrales de superficie $\int_S \vec{f}$ siguientes siendo:

(a) $f(x,y,z) = (xy, -x^2, x+z)$ y $S = \{2x + 2y + z = 6, x \geq 0, z \geq 0\}$.

(b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ y $S = \{2 - x^2 - y^2 = z \geq 0\}$.

(c) $f(x,y,z) = (2x-z, x^2y, -xz^2)$ y $S = \partial K$ donde K es el cubo cerrado $K = [(0,0,0),(1,1,1)]$.

(d) $f(x,y,z) = (xz^2, x^2y - z^3, 2xy + y^2z)$ y $S = \partial K$ donde $K = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0\}$.

(e) $f = \nabla \times g$, con $g(x,y,z) = (3y, -xz, yz^2)$, y $S = \{x^2 + y^2 = 2z \leq 4\}$.

9. Calcular las siguientes integrales de superficie $\int_S rotF$ mediante su transformación en integral de línea siendo:

(a) $F(x,y,z) = (y^2, xy, xz)$ y $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$.

(b) $F(x,y,z) = (y,z,x)$ y $S = \{z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$.

(c) $F(x,y,z) = (xz, -y, x^2y)$ y $S = \partial T \setminus \{y = 0\}$, siendo T el tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $3x + y + 3z = 6$.

10. (a) Calcula la fuerza gravitatoria con que una esfera maciza homogénea de radio R y densidad constante δ atrae a un punto material de masa m, situado a una distancia $d \geq R$ del centro de la esfera. Prueba que el resultado es el mismo que si toda la masa de la esfera estuviera concentrada en el centro.

(b) Calcula el potencial gravitatorio determinado por una masa puntual M situada en el origen de $\mathbb{R}^3$. Halla el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria ejercida por M sobre una masa puntual m, que pasa del punto (x_1, y_1, z_1) al punto (x_2, y_2, z_2).

(c) Sean $0 < r_1 < r_2$ y consideremos las bolas $B(0; r_i)$, $i = 1, 2$, en $\mathbb{R}^3$. Supongamos que la bola $B(0; r_1)$ está vacía pero que en el cuerpo $B(0; r_2) \setminus B(0; r_1)$ hay una masa distribuida homogéneamente con densidad constante $\rho > 0$. Calcula el campo y el potencial gravitatorio determinados por dicha masa en cada uno de los puntos de $\mathbb{R}^3$.

(d) Sea $B(0; R)$ la bola de centro 0 y radio $R > 0$ en $\mathbb{R}^3$. Supongamos que la bola $B(0; R)$ posee una masa distribuida homogéneamente con densidad constante $\rho > 0$. Calcula el campo y el potencial gravitatorio determinados por dicha masa en cada uno de los puntos de $\mathbb{R}^3$.

CÁLCULO INTEGRAL. HOJA N. 6

1. Calcula las integrales de superficie $\int_S f$ siendo:

(a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ y S el helicoide $\varphi(r, \theta) = (r\ cos\theta, r\ sen\theta, \theta), 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 3\pi$.

(b) $f(x, y, z) = x$ y $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y, (x, y) \in [0, 1] \times [-1, 1])\}$.

(c) $f(x, y, z) = xy$ y S la superficie del tetraedro τ limitado por los planos $z = 0, y = 0, x + z = 1$ y $x = y$.

(d) $f(x, y, z) = x^4 - y^4 + y^2 z^2 - z^2 x^2 + 1$ y $S = \{z \geq 0, 2x \geq x^2 + y^2 = z^2\}$.

(e) $f(x, y, z) = (x, y, z)$ y $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ con normal unitaria $\mathbf{N}$ hacia fuera.

(f) $f(x, y, z) = (x^3, 0, 0)$ y $S = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z \geq 0\}$ con normal unitaria $\mathbf{N}$ con componente no negativa sobre el eje OZ.

(g) $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ y $S = \{z^2 = x^2 + y^2, 1 \leq z \leq 2\}$ con normal unitaria $\mathbf{N}$ hacia fuera.

2. Una partícula de masa m se mueve en $\mathbb{R}^3$ a lo largo de una curva γ bajo la acción de un campo de fuerzas F. Sea su energía cinética $e(t) = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v(t)}\|^{\mathbf{2}}$ en el instante t, siendo $\mathbf{v(t)}$ la velocidad de la partícula.

(a) Demuestra que la variación de la energía cinética en el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ es igual al trabajo realizado por la fuerza F durante dicho intervalo.

(b) Supongamos que F procede de un potencial ϕ, es decir, $F = \nabla\phi$, y sea $E(t) := e(t) - \phi(\gamma(t))$ la energía mecánica de la partícula. Prueba la ley de conservación de la energía mecánica: si una partícula se mueve bajo el efecto de un campo de fuerzas que deriva de un potencial, su energía mecánica $E(t)$ se mantiene constante.

3. Calcula las siguientes integrales de superficie $\int_{(S,\mathbf{n})} rot\ F$ siendo:

(a) $F(x, y, z) = (y^2, xy, xz)$ y $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ con normal unitaria $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ tal que $n_3 \geq 0$.

(b) $F(x, y, z) = (y, z, x)$ y $S = \{z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$ con normal unitaria $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ tal que $n_3 \geq 0$.

(c) $F(x, y, z) = (xz, -y, x^2 y)$ y $S = S_1 + S_2 + S_3$ siendo $S_i, i = 1, 2, 3$, las tres caras laterales (falta la base) del tetraedro $\tau = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 3x + y + 3z \leq 6\}$ con normal unitaria $\mathbf{n}$ hacia fuera.

(d) $F(x, y, z) = (z^2 y - x, y, x^2)$ y $S = S_1 + S_2$ con normal unitaria $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ tal que $n_3 \geq 0$, siendo $S_1 = \{x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$ y $S_2 = \{x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, z \geq 1\}$.

(e) $F(x, y, z) = (3y, -xz, yz^2)$ y $S = \{2z = x^2 + y^2, z \leq 2\}$ con normal unitaria $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ tal que $n_3 \leq 0$.

4. Comprueba los valores de las siguientes integrales de línea:

(a) $\int_C y\ dx + z\ dy + x\ dz = \pi a^2 \sqrt{3}$ siendo $C = \{x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0\}$.

(b) $\int_C (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz = 2\pi a b^2$ siendo $C = \{x^2 + y^2 + z^2 = 2ax, x^2 + y^2 \leq 2bx, z \geq 0\}$ con $0 < b < a$.

(c) $\int_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz = 9a^3/2$ siendo $C = \partial K \cap \{x + y + z = 3a/2\}$ y $K = [0, a]^3$.

5. Estudia si alguno de los siguientes campos F es rotacional de algún otro G (es decir, si $F = rot\ G$) y calcula G en su caso: (a) $F(x, y, z) = (x, y, z)$; (b) $F(x, y, z) = (x^2 + 1, z - 2xy, y)$; (c) $F(x, y, z) = (xz, -yz, y)$.

6. Sean S una superficie y $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dos funciones de clase C^2. Demuestra que

$$\int_{\partial S} f \nabla g = \iint_S \nabla f \times \nabla g, \quad \int_{\partial S} (f \nabla g + g \nabla f) = 0.$$

7. (A) Sea $F(x,y,z) = -GM\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ la fuerza gavitatoria por unidad de masa determinada por una masa puntual M situada en el origen: (a) Demuestra que $div\ F = 0$; (b) Demuestra que $F \neq rot\ H$ para todo campo vectorial $H : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1.

(B) Sea $F(x,y,z) = (-y,x,0)$: (a) Demuestra que $rot\ F \neq 0$; (b) Si F es el campo de velocidades de un fluido, calcula la trayectoria de una partícula que en el instante $t = 0$ está situada en el punto (x_0, y_0, z_0).

(C) Sea $G(x,y,z) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$: (a) Demuestra que $rot\ G = 0$; (b) Si G es el campo de velocidades de un fluido, calcula la trayectoria de una partícula que en el instante $t = 0$ está situada en el punto (x_0, y_0, z_0).

8. Sea V un sólido cuyo borde ∂V es una superficie orientada con normal unitaria hacia fuera del sólido. Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campos.

(a) Si f, F son de clase C^1, prueba que

$$\iiint_V (\nabla f \bullet F + f \nabla \bullet F) = \iint_{\partial V} f\vec{F}.$$

(b) Si f, g son de clase C^2, prueba la *primera y segunda identidad de Green* en $\mathbb{R}^3$:

$$\iiint_V (g\Delta f + \nabla f \bullet \nabla g) = \iint_{\partial V} g\nabla f, \quad \iiint_V (g\Delta f - f\Delta g) = \iint_{\partial V} (g\nabla f - f\nabla g).$$

9. Calcula la integral $\int_{\partial V} \vec{F}$ en los siguientes casos: (a) $F(x,y,z) = (2x^2, y^2, z^2)$ y $V = B(0;1)$; (b) $F(x,y,z) = (xy^2, x^2y, y)$ y $V = \{x^2+y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$; (c) $F(x,y,z) = (x,y,z)$ y $V = [0,1]^3$; (d) $F(x,y,z) = (y,z,xz)$ y $V = \{x^2+y^2 \leq z \leq 1\}$.

10. Sean $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z \leq 2-y\}$, $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2-y, x^2 + y^2 + y \leq 2\}$ y $F(x,y,z) = (y+z, x+z, xz)$. Calcular (i) $vol(K)$; (ii) área(S); (iii) $\int_{\partial K} F$.

11. Hallar los valores de las siguientes circulaciones $\int_C \vec{F}$ siendo:

(a) $F(x,y,z) = (y,z,x)$ y C el arco intersección de $x^2+y^2+z^2 = 4$ con $x+y+z = 0$.

(b) $F(x,y,z) = (y^2+z^2, x^2+z^2, x^2+y^2)$ y $C := \{x^2+y^2+z^2 = 4x, z > 0, x^2+y^2 = 2x\}$.

(c) $F(x,y,z) = (y^2-z^2, z^2-x^2, x^2-y^2)$ y C la curva intersección de la superficie del cubo $[0,a]^3$ y el plano $x+y+z = 3a/2$.

12. Halla el área(A) en los siguientes casos:

(a) $A = \{z = x^2+y^2 \leq 1\}$. Halla el centro de gravedad de A si se supone una densidad superficial uniforme.

(b) $A = \{x^2+y^2+z^2 = a^2, x^2+(y-\frac{a}{2})^2 \leq (\frac{a}{2})^2, z \geq 0\}$; (c) $A = \{x^2+y^2+z^2 \leq a^2, x^2+(y-\frac{a}{2})^2 = (\frac{a}{2})^2\}$; (d) $A = \{x+y+z = a, x^2+y^2 \leq a^2\}$.

(e) $A = \{z^2 = 2xy, 0 \leq z, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$; (f) $A = \{x^2+y^2 = z^2, x^2+y^2+z^2 \leq 2ax, z \geq 0\}$.

13. Calcula las siguientes integrales de superficie:

(a) $\int_S (xz, yz, x^2)$ siendo S la superficie de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$.

(b) $\int_S rot\ (3y, -xz, yz^2)$ siendo S la superficie $2z = x^2+y^2$, $z \leq 2$.

(c) $\int_S rot\ (zx + z^2y + x, z^3yx + y, x^2 + z^4)$ siendo $S = S_1 + S_2$, $S_1 := \{x^2+y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$ y $S_2 := \{x^2+y^2+(z-1)^2 = 1, z \geq 1\}$.