Funciones 1-Baire y universalmente medibles, distancias y contornos de James en espacios de Banach duales

JUAN MANUEL HERNÁNDEZ RUBIO

Tesis Doctoral dirigida por Antonio Suárez Granero
Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid, 2012

Índice general

Prólogo

El trabajo que presentamos está dedicado al estudio de:

(1) **Un tema central: los contornos de James en un espacio de Banach dual** X^*. Cuando K es un subconjunto w^*-compacto de un espacio de Banach dual X^*, un subconjunto B de K se dice que es un *contorno (de James)* de K cuando todo $x \in X$ alcanza en B su máximo sobre K. Por ejemplo, el propio K o el conjunto de los puntos extremos $Ext(K)$ de K son contornos de K. Si B es un contorno de K, siempre ocurre que $\overline{\text{co}}^{w^*}(B) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ pero, en general, $\overline{\text{co}}(B) \neq \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$. Nos vamos a dedicar a estudiar las consecuencias de la igualdad $\overline{\text{co}}(B) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ y de la desigualdad $\overline{\text{co}}(B) \neq \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$. El estudio de los contornos de James y de las propiedades que pasan del contorno B a todo el conjunto $\overline{\text{co}}^{w^*}(K)$, y viceversa, es un campo de investigación de creciente interés (ver, por ejemplo, los artículos [18],[43],[44], [48],[69],[78]). En los siguientes Capítulos vamos a obtener varios tipos de resultados, como por ejemplo:

(11) Resultados de localización. En [61],[62] se prueba que K contiene una estructura, que denominamos una w^*-$\mathbb{N}$-familia, y una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$ siempre que $\overline{\text{co}}(K) \neq \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$. Si $\overline{\text{co}}(B) \neq \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$, ¿qué podemos decir acerca de K ó de B en lo relativo a contener una w^*-$\mathbb{N}$-familia y una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$? Vamos a mostrar que en muchos caso existe en K -y en algunas situaciones en B- una w^*-$\mathbb{N}$-familia y una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$, cuando $\overline{\text{co}}(B) \neq \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$. Aún más, vamos a probar que, en muchas situaciones (que incluyen los contornos $Ext(K)$, contornos $w^*\mathcal{KA}$, etc.), el w^*-compacto K contiene una w^*-$\mathbb{N}$-familia ó una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$ si y sólo si la contiene el contorno $B \subset K$.

(12) Resultados cuantitativos sobre distancias. Estamos interesados en comparar las distancias $DIST(B, C)$ con la distancia $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C)$, cuando C es un subconjunto convexo de X^* y B un contorno de un cierto subconjunto w^*-compacto $K \subset X^*$. Mostramos que para ciertas clases de subconjuntos convexos C existe una constante M tal que $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) \leq M \cdot DIST(B, C)$ para todo subconjunto w^*-compacto K de X^* y todo contorno $B \subset K$. En particular demostramos que $DIST(B, X) = DIST(B(X^{**}), X)$ para todo contorno B de $B(X^{**})$.

(13) Resultados que relacionan la propiedades (P) con los contornos w^*-$\mathcal{CD}$ y la propiedad super-(P) con la igualdad $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$.

(14) Definimos y estudiamos numerosos índices como $Frag(\psi, K)$, $Frag(K)$, $Widht(K)$, $Pindex(\psi, K)$, $Pindex(K)$, $Bindex(\psi, K)$, $Bindex(K)$, *etc.*

(2) **Temas que surgen al estudiar el tema central de los contornos**. Aquí incluimos el estudio de:

(21) Las topologías γ_κ y $\mathcal{T}_\kappa$, κ cardinal infinito, de un espacio dual X^*, que están estrechamente relacionadas con los contornos.

(22) Distintas clases de funciones de Baire: las funciones 1-Baire $\mathcal{B}_1(K)$, las clases de funciones que denotamos $\mathcal{B}_1^{\mathfrak{c}}(K)$, $d\mathcal{B}_1(K)$, $PCP(K)$. Estudiamos la relación entre estas clases de funciones, distancias, índices, etc.

(23 Funciones universalmente medibles y funcionales que verifican el cálculo baricéntrico. Nos interesan, sobre todo, los funcionales de $\ell_\infty(I)^*$ actuando sobre el compacto $(B(\ell_\infty(I)), w^*)$ y los de $\ell_\varphi(I)^*$ actuando sobre el compacto $(B(\ell_\varphi(I)), w^*)$, siendo φ una función de Orlicz.

Capítulo 1

Introducción

En este Capítulo introducimos la notación y las definiciones de muchos de los conceptos que luego se utilizarán. También hacemos una recopilación de resultados de [39],[51], [52],[55],etc., que serán el punto de partida y la base de las investigaciones que aquí desarrollamos.

La notación que utilizamos es la habitual (ver [76] y [37]). Si I es un conjunto, $|I|$ es el cardinal de I y $\mathfrak{c} := |\mathbb{R}|$. Por $\uplus$ indicamos la unión disjunta. ω_0 (ó ω) y ω_1 denotarán el primer ordinal infinito y el primer ordinal incontable, respectivamente. LO y NLO serán la clase de los ordinales límites y la de los ordinales no límites (es decir, sucesores de alguien), respectivamente. Si α es un ordinal, pondremos $LO(\alpha) := \{\beta \in LO : \beta \leq \alpha\}$ y $LO(< \alpha) := \{\beta \in LO : \beta < \alpha\}$. Análogamente, escribiremos $NLO(\alpha)$ y $NLO(< \alpha)$.

Sean $(Y, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subset Y$ un subconjunto.

(1) Si $x \in \overline{A}$, la "tightness" de x respecto de A es el cardinal $t_{\mathcal{T}}(x, A)$ (ó bien $t(x, A)$ si está claro la topología $\mathcal{T}$ a usar) definido por

$$t_{\mathcal{T}}(x, A) = \text{mín}\{|D| : D \subset A, x \in \overline{D}\}.$$

(2) Sea κ un cardinal. Definimos A_κ como

$$A_\kappa := \{x \in X : x \in \overline{A} \text{ y } t_{\mathcal{T}}(x, A) \leq \kappa\}. \tag{1.1}$$

Decimos que A **es κ-$\mathcal{T}$-cerrado** sii $A_\kappa \subset A$. Las siguientes propiedades son inmediatas:

(21) $A_\kappa := \cup\{\overline{C} : C \subset A, |C| \leq \kappa\}$. En particular $A_n = A$ para $1 \leq n < \aleph_0$.

(22) Sean κ_1, κ_2 cardinales. Entonces: (i) Si $\kappa_1 \leq \kappa_2$, se tiene $A_{\kappa_1} \subset A_{\kappa_2}$; (ii) $(A_{\kappa_1})_{\kappa_2} = A_{\kappa_1 \vee \kappa_2}$.

Si I es un conjunto con la topología discreta, βI será la compactificación Stone-Čech de I y $I^* = \beta I \setminus I$. Si κ es un cardinal, pondremos $I_\kappa := \{z \in \beta I : t(z, I) \leq \kappa\}$ y $I^*(\kappa) = \{z \in I^* : t(z, I) \geq \kappa\}$. La κ-ésima capa $C(\kappa, I^*)$ de I^* se define como

$$C(\kappa, I^*) := I^*(\kappa) \setminus I^*(\kappa^+),$$

siendo κ^+ el cardinal siguiente a κ. Es claro que $I^*(n) = \emptyset$, para $1 \leq n < \aleph_0$, y que

$$I^* = \uplus_{\aleph_0 \leq \kappa \leq |I|} C(\kappa, I^*).$$

Una secuencia $\{(U_m, V_m) : m \geq 1\}$ de pares de subconjuntos de un conjunto I se dice que es *independiente* si $U_m \cap V_m = \emptyset$, $\forall m \geq 1$, y $(\bigcap_{m \in M} U_m) \cap (\bigcap_{n \in N} V_n) \neq \emptyset$ para todo par de subconjuntos finitos disjuntos no vacíos M, N de $\mathbb{N}$.

Se consideran sólo espacios de Banach sobre el cuerpo de los números reales. Si X es un espacio de Banach, indicamos por $B(X)$ y $S(X)$ la bola unidad cerrada y la esfera unidad de X, respectivamente, y por X^* su dual topológico. Si $x \in X$ y $x^* \in X^*$, indicaremos por $\langle x^*, x\rangle$ (o bien $x^*(x)$) el número real resultado de la acción de x^* sobre x. La topología débil* $\sigma(X^*, X)$ del espacio de Banach dual X^* se denota por w^* y la topología débil $\sigma(X, X^*)$ del espacio X por w.

Si A, B son subconjuntos de un espacio de Banach X entonces:

(1) $[A]$ y $\overline{[A]}$ denotarán el subespacio generado y el subespacio cerrado generado por A, respectivamente; $\mathrm{co}(A)$ será la clausura convexa de A, $\overline{\mathrm{co}}(A)$ la $\|\cdot\|$-clausura de $\mathrm{co}(A)$ y, caso de ser A subconjunto del dual X^*, $\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(A)$ indicará la w^*-clausura de $\mathrm{co}(A)$.

(2) Si $A, C \subset X$ son dos subconjuntos no vacíos, definimos la distancia entre A y C como $dist(A, C) := \text{ínf}\{\|a - c\| : a \in A, c \in C\}$. Claramente, $dist(A, C) = dist(C, A)$.

(3) Si $C \subset X$ es un subconjunto y $x \in X$, definimos la distancia $dist(x, C)$ de x a C como

$$dist(x, C) := dist(\{x\}, C) = \text{ínf}\{\|x - c\| : c \in C\}.$$

Cuando $C \subset X$ es un subconjunto convexo, la distancia $dist(x, C)$ satisface (ver [60, Lemma 2.1]):

$$dist(x, C) = \sup_{\varphi \in S(X^*)} \text{ínf}\{|\langle \varphi, (x - c)\rangle| : c \in C\} = \sup_{\varphi \in S(X^*)} 0 \vee \text{ínf}\langle \varphi, x - C\rangle.$$

Aún más, si $x \notin \overline{C}$, entonces:

$$dist(x, C) = \sup_{\varphi \in S(X^*)} \text{ínf}\langle \varphi, x - C\rangle.$$

Observemos que, si $X^\perp = \{z \in X^{***} : z(x) = 0,\ \forall x \in X\}$ y $Q : X^{**} \to \frac{X^{**}}{X}$ es la aplicación cociente canónico, entonces:

$$dist(x^{**}, X) = \sup\{z(x^{**}) : z \in S(X^\perp)\} = \|Qx^{**}\|.$$

(4) Si $A, C \subset X$ son dos subconjuntos convexos, de T. de separación de Hahn-Banach se deduce que

$$\begin{aligned} dist(A, C) &= \sup\{0 \vee (\text{ínf}\langle \psi, A\rangle - \sup\langle \psi, C\rangle) : \psi \in S(X^*)\} = \\ &= \sup\{0 \vee \text{ínf}\langle \psi, A - C\rangle : \psi \in S(X^*)\} = \\ &= dist(0, A - C). \end{aligned}$$

(5) Si $A, C \subset X$ son subconjuntos arbitrarios, definimos la distancia $DIST(A, C)$ como $DIST(A, C) := \sup\{dist(a, C) : a \in A\}$. Observemos que, en general, $DIST(A, C) \neq DIST(C, A)$. Si C es convexo, se verifica que $DIST(\overline{\text{co}}(A), C) = DIST(\text{co}(A), C) = DIST(A, C)$. Si $A, C \subset X$ son dos subconjuntos convexos, se tiene

$$DIST(A, C) = \sup\{0 \vee (\sup\langle\psi, A\rangle - \sup\langle\psi, C\rangle) : \psi \in S(X^*)\}.$$

Un subconjunto convexo cerrado Y de un espacio de Banach X tiene la propiedad (C) de Corson (abreviadamente, $Y \in (C)$) si $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$ cuando $\{C_i : i \in I\}$ es una familia de subconjuntos convexos cerrados de Y verificando que $\bigcap_{i\in J} C_i \neq \emptyset$ para todo subconjunto contable J de I.

Si K es un espacio compacto Hausdorff, $M_R(K)$ denotará el espacio de las medidas Radon sobre el σ-álgebra de los borelianos $\mathcal{B}_o(K)$ de K y $\mathcal{P}_R(K)$ la familia de probabilidades Borel de tipo Radon sobre K. $M_R^a(K)$ y $M_R^d(K)$ serán las familias de medidas Radon puramente atómicas y difusas sobre K, respectivamente. Recordemos que $M_R(K) = C(K)^*$ y que $(\mathcal{P}_R(K), w^*)$ es un subconjunto convexo w^*-compacto de $B(M_R(K))$.

Si K es un subconjunto w^*-compacto de un espacio de Banach dual X^* y μ una probabilidad Borel de tipo Radon sobre K, $r(\mu)$ denotará el baricentro ó resultante de μ. Recordemos que:

(i) $r(\mu) \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$;

(ii) $x^* \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ si y sólo si existe una probabilidad Radon μ sobre K tal que $r(\mu) = x^*$;

(iii) $r(\mu)(x) = \int_K x^*(x) d\mu(x^*)$ para todo $x \in X$.

Si (X, τ) es un espacio topológico, se dice que un subconjunto $Y \subset X$ es *contablemente determinado* (abrev., $\mathcal{CD}$) en (X, τ) si existe un subconjunto $\Sigma' \subset \Sigma := \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y una aplicación usco (= upper-semicontinuous compact) $\Phi : \Sigma' \to 2^X$ tal que $\Phi(\sigma)$ es un subconjunto compacto no vacío de X, para todo $\sigma \in \Sigma'$, e $Y = \bigcup_{\sigma\in\Sigma'} \Phi(\sigma)$ (ver [94, p. 11]). Recordemos que una aplicación $\phi : \Sigma' \to 2^X$ es *semicontinua superiormente (= upper-semicontinuous)* si para todo $\sigma \in \Sigma'$ y para todo subconjunto abierto U de X, tal que $\phi(\sigma) \subset U$, existe un entorno G de σ en Σ' con $\Phi(G) \subset U$. Cuando $\Sigma' = \Sigma$ se dice que Y es *$\mathcal{K}$-analítico* (abrev., $\mathcal{KA}$). Si (X, τ) es Hausdorff, todo subconjunto $\mathcal{K}$-analítico de X es universalmente medible en X ([94, p. 42 and p. 346]). La unión, la intersección y el producto de una familia contable de subconjuntos $\mathcal{K}$-analíticos (resp., $\mathcal{CD}$), así como los subconjuntos cerrados y las imágenes continuas de subconjuntos $\mathcal{K}$-analíticos (resp., $\mathcal{CD}$), son también $\mathcal{K}$-analíticos (resp., $\mathcal{CD}$). Todo espacio $\mathcal{CD}$ es Lindelof. Un subconjunto $Y \subset X^*$ de un espacio de Banach dual X^* es $w^*\mathcal{KA}$ (resp., $w^*\mathcal{CD}$) si Y es $\mathcal{K}$-analítico (resp., $\mathcal{CD}$) en (X^*, w^*).

1.1. Funciones 1-Baire y universalmente medibles

Sea (T, τ) un espacio topológico Hausdorff. Entonces:

(a) Una función real $f : T \to \mathbb{R}$ se dice que es 1-Baire (abrev., $f \in \mathcal{B}_1(T)$) si existe una secuencia $\{f_n : n \geq 1\}$ en el espacio $C(T)$ de las funciones reales continuas sobre T tal que $f_n \to f$ puntualmente sobre T. $\mathcal{B}_{1b}(T)$ denotará la familia de las funciones reales acotadas $f : T \to \mathbb{R}$ que son 1-Baire. $\mathcal{B}_{1b}(T)$ es, con la norma del supremo, un subespacio cerrado de $\ell_\infty(T)$.

(b) Una función $f : T \to \mathbb{R}$ es universalmente medible si f es μ-medible para todo subconjunto compacto $K \subset T$ y toda medida Borel Radon $\mu \in M_R(K)$. El colectivo de las funciones $f : T \to \mathbb{R}$ universalmente medibles se indicará por $\mathcal{U}(T)$.

(c) Si $k \in T$ sea $\mathcal{V}^k$ la familia de los entornos abiertos de k en T. Definimos la oscilación de $Osc(f,k)$ de $f : T \to \mathbb{R}$ en $k \in T$ como:

$$Osc(f,k) = \lim_{V \in \mathcal{V}^k} \big(\sup\{f(i) - f(j) : i, j \in V\}\big).$$

La oscilación de f en T es $Osc(f) = \sup\{Osc(f,k) : k \in T\}$.

1.2. Copias de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$

Vamos a utilizar el siguiente resultado debido a Talagrand [106].

Proposición 1.1. *(Talagrand [106]) Sean τ un cardinal con cofinalidad verificando cf$(\tau) > \aleph_0$, X un espacio de Banach y $A \subset X$ un subconjunto. Los siguientes enunciados son equivalentes*

(1) A posee una copia de la base de $\ell_1(\tau)$.

(2) $\overline{\mathrm{co}}(A)$ posee una copia de la base de $\ell_1(\tau)$.

(3) En $\overline{[A]}$ hay una copia de $\ell_1(\tau)$.

Demostración. Las implicaciones (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) son obvias.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sea $E := \overline{[A]}$ y sea $T : \ell_1(\tau) \to E$ un isomorfismo entre $\ell_1(\tau)$ y su imagen. Su adjunto $T^* : E^* \to \ell_\infty(\tau)$ es un operador cociente que es w*-w*-continuo. Sean $0 < \eta$ tal que $\eta B(\ell_\infty(\tau)) \subset T^*(B(E^*))$ y $W := T^{*-1}(B(\ell_\infty(\tau))) \cap \frac{1}{\eta}B(E^*)$. Es inmediato que se puede tomar W como la bola unidad de E^* para una cierta norma dual $|||\cdot|||$ equivalente a la norma dada. Con esta nueva norma se tiene obviamente que $T^*(B((E^*, |||\cdot|||))) = T^*(W) = B(\ell_\infty(\tau)) = [-1,1]^\tau$. Por [106, Theorem 4] se concluye que A posee una copia de la base de $\ell_1(\tau)$. ■

Notas. (1) El requisito cf$(\tau) > \aleph_0$ en la proposición anterior es necesario (además de suficiente). En efecto, sean τ un cardinal con cf$(\tau) = \aleph_0$ y τ_n, $n \geq 1$, ordinales verificando $\tau_n < \tau_{n+1} < \tau$ y $\bigcup_{n\geq 1} \tau_n = \tau$. Sea $\{e_i : i < \tau\}$ la base canónica de $\ell_1(\tau)$. Consideremos el subconjunto $A \subset \ell_1(\tau)$ tal que $A := \bigcup_{n \geq 1}\{\frac{1}{n}e_i : i < \tau_n\}$. Es inmediato que $\ell_1(\tau) = \overline{[A]}$ y, sin embargo, A no posee una copia de la base de $\ell_1(\tau)$.

(2) La cofinalidad cf$(\mathfrak{c})$ verifica cf$(\mathfrak{c}) > \aleph_0$ ya que para todo cardinal infinito α se verifica que cf$(2^\alpha) > \alpha$ (ver [66, p. 78]) y porque $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

1.3. Espacios Plichko. Espacios con generador proyectivo

Sea X un espacio de Banach. Se dice que X es 1-Plichko (ver [68, Theor. 4.15 y Theor. 4.16]) si X posee un subconjunto $M \subset X$ tal que $X = \overline{[M]}$ y el subespacio de X^*

$$\{x^* \in X^* : \{x \in M : \langle x^*, x\rangle \neq 0\} \text{ es contable}\}$$

es 1-normante sobre X. Un espacio de Banach es Plichko si puede renormarse de modo que sea 1-Plichko.

Un par (W, Φ) es generador proyectivo (abrev., (PG)) del espacio de Banach X si:

(a) $W \subset X^*$ es un subconjunto $\mathbb{Q}$-lineal.

(b) Para todo $x \in X$ se verifica $\|x\| = \sup\langle W \cap B(X^*), x\rangle$.

(c) $\Phi : W \to 2^X$ es una multifunción tal que $|\Phi(w)| \leq \aleph_0$, $\forall w \in W$, y para todo subconjunto $B \subset W$ que sea $\mathbb{Q}$-lineal se verifica $\Phi(B)^\perp \cap \overline{B}^{w^*} = \{0\}$.

Si X posee generador proyectivo (abrev., $X \in (PG)$), entonces X admite una PRI, es decir, una resolución proyectiva de la identidad (ver [37, Prop. 6.1.7]). La clase de los espacios de Banach con (PG) es muy amplia e incluye a los WCG, WCD, WLD, espacios 1-Plichko, etc.

Un sistema de Markusevic en X es un sistema biortogonal $\{(x_i, x_i^*) : i \in I\} \subset X \times X^*$ tal que la familia $\{x_i^* : i \in I\}$ es total sobre $M := \overline{[\{x_i : i \in I\}]}$, es decir, si $x \in M$ verifica $\langle x_i^*, x\rangle = 0$, $\forall i \in I$, entonces $x = 0$.

1.4. La propiedad (P)

Dado un cierto subconjunto w^*-compacto $K \subset X^*$ de un espacio de Banach dual X^*, es de gran interés estudiar condiciones intrínsecas respecto de K, para que se verifique $\overline{\text{co}}^{w^*}(H) = \overline{\text{co}}(H)$ para todo subconjunto w^*-compacto $H \subset K$. Para ello vamos a introducir *los conjuntos de Pettis* ó conjuntos con la *propiedad* (P), que definimos de la siguiente manera:

Definición 1.2. *Un subconjunto $Y \subset X^*$ de un espacio de Banach dual X^* es un conjunto de Pettis ó es un conjunto con la propiedad (P) si todo subconjunto w^*-compacto $H \subset Y$ verifica que $\overline{\text{co}}^{w^*}(H) = \overline{\text{co}}(H)$.*

La noción que acabamos de definir es una extrapolación (a todos los conjuntos de X^*) del concepto de "Pettis set" (ver [107, pg. 79]), noción que Talagrand dice haber tomado de Saab. Haydon caracterizó la propiedad (P) en espacios de Banach duales X^*, considerados globalmente, de la siguiente forma (ver [65]):

Teorema 1.3 (Haydon [65])**.** *Para todo espacio de Banach X los siguientes asertos son equivalentes:*

(1) X no posee una copia de ℓ_1.

(2) X^* tiene la propiedad (P), es decir, $\overline{\text{co}}(K) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ para todo subconjunto w^*-compacto K de X^*.

(3) Para todo subconjunto w^*-compacto K de X^*, el conjunto de los puntos extremos $Ext(K)$ de K verifica $\overline{\text{co}}(Ext(K)) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$.

(4) Todo $z \in X^{**}$ es universalmente medible sobre $(B(X^*), w^*)$.

Ocurre, sin embargo, que aunque X posea una copia de ℓ_1, pueden existir en X^* subconjuntos con la propiedad (P), lo que indica que la propiedad (P) es una propiedad "local ". En consecuencia, se puede pensar en dar una caracterización de la propiedad (P) de tipo "intrínseco". Dicha caracterización aparece en [61], [62] y la vemos a continuación. Comenzaremos viendo las nociones de w^*-$\mathbb{N}$-familia, $Pindex(X)$, $Width(X)$, *etc.*, que se introdujeron en [61, Definition 3.5] y [62, Definition 2.1].

Definición 1.4. *(1) Sea X un espacio de Banach. Un subconjunto $\mathcal{F}$ de X^* es una w^*-$\mathbb{N}$-familia de anchura $d > 0$ si $\mathcal{F}$ es acotado y tiene la forma*

$$\mathcal{F} = \{\eta_{M,N} : M, N \text{ subconjuntos disjuntos de } \mathbb{N}\},$$

y existen dos secuencias $\{r_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{x_m : m \geq 1\} \subset B(X)$ tales que para todo par de subconjuntos disjuntos M, N de $\mathbb{N}$ se tiene

$$\eta_{M,N}(x_m) \geq r_m + d, \ \forall m \in M, \quad y \ \ \eta_{M,N}(x_n) \leq r_n, \ \forall n \in N.$$

Además, si $r_m = r_0$, $\forall m \geq 1$, decimos que $\mathcal{F}$ es una w^*-$\mathbb{N}$-familia uniforme en X^*.

(2) Definimos el P-índice de un subconjunto Y de X^* (abrev., $Pindex(Y)$) y la anchura de Y (abrev., $Width(Y)$) de la siguiente forma:

$$Pindex(Y) := \sup\{DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(H), \overline{\text{co}}(H)) : H \text{ subconjunto } w^*\text{-compacto de } Y\}$$

y

$$Width(Y) := \sup\{d \geq 0 : \text{ existe una } w^*\text{-}\mathbb{N}\text{-familia } \mathcal{A} \subset Y \text{ de anchura } \geq d\}.$$

(3) Si $\psi \in X^{**}$, definimos el P-índice de ψ respecto del subconjunto Y de X^* (abrev., $Pindex(\psi, Y)$) de la siguiente forma:

$$Pindex(\psi, Y) := \sup\{\sup\langle\psi, \overline{\text{co}}^{w^*}(H)\rangle - \sup\langle\psi, \overline{\text{co}}(H)\rangle : H \text{ subconjunto } w^*\text{-compacto de } Y\}.$$

Nota 1.5. (ver [61, Remark 3.4] y [62, Remark 2.2])

(1) Si $\mathcal{F} := \{\eta_{M,N} : \ M, N$ subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}\}$ es una w^*-$\mathbb{N}$-familia en el espacio de Banach dual X^* y si $(M_i, N_i)_{i<\mathfrak{c}}$ es una familia independiente de partes de $\mathbb{N}$ con cardinal $\mathfrak{c}$, entonces se prueba mediante un argumento bien conocido (ver [29, p. 209]) que la familia $\{\eta_{M_i,N_i} : i < \mathfrak{c}\}$ es equivalente a la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$. Aún más, el mismo

argumento de [29, p. 206] prueba que la secuencia $\{x_n : n \geq 1\} \subset B(X)$ asociada a $\mathcal{F}$ es equivalente a la base de ℓ_1.

(2) Por tanto, si un espacio de Banach dual X^* posee una w^*-$\mathbb{N}$-familia, entonces X posee una copia de ℓ_1. Y viceversa, si X posee una copia de ℓ_1, entonces X^* contiene una w^*-$\mathbb{N}$-familia. En efecto, sea $i : \ell_1 \to X$ un isomorfismo entre ℓ_1 y $i(\ell_1)$. Sea $i^* : X^* \to \ell_\infty$ su operador adjunto, que es un operador cociente tal que $B(\ell_\infty) \subset i^*(\|i^{-1}\|B(X^*))$. Por cada par M, N de subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}$ elegimos $\eta_{M,N} \in \|i^{-1}\|B(X^*)$ tal que $i^*(\eta_{M,N}) = 1\!\!1_M - 1\!\!1_N$. Entonces $\{\eta_{M,N} : M, N \text{ subconjuntos disjuntos de } \mathbb{N}\}$ es una w^*-$\mathbb{N}$-familia en X^*.

(3) Por (1) si un subconjunto Y de un espacio de Banach dual X^* contiene una w^*-$\mathbb{N}$-familia, cierto subconjunto de Y es equivalente a la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$. Al revés no es verdad, en general, pues si tomamos, por ejemplo, en el espacio dual $\ell_1(\mathfrak{c}) = c_0(\mathfrak{c})^*$ el conjunto $Y := B(\ell_1(\mathfrak{c}))$, entonces Y contiene una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$ y, sin embargo, Y no posee ninguna w^*-$\mathbb{N}$-familia porque $c_0(\mathfrak{c})$ carece de copias de ℓ_1.

(4) Sea $\mathcal{A} = \{\eta_{M,N} : M, N \text{ subconjuntos disjuntos de } \mathbb{N}\}$ una w^*-$\mathbb{N}$-familia de anchura $\delta > 0$ en el espacio de Banach dual X^*, asociada a las secuencias $\{r_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{x_m : m \geq 1\} \subset B(X)$. Afirmamos que para todo $0 < \eta < \delta$ existe un subconjunto infinito $\mathbb{N}_\eta \subset \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{A}_\eta := \{\eta_{M,N} : M, N \text{ subconjuntos disjuntos de } \mathbb{N}_\eta\}$ es una w^*-$\mathbb{N}$-familia uniforme de anchura $\eta > 0$ asociada a la secuencia $\{x_m : m \in \mathbb{N}_\eta\} \subset B(X)$ y a cierto número $r_0 \in \mathbb{R}$. En efecto, como la secuencia $\{r_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ es acotada, existe cierto $r_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{N}_\eta := \{m \in \mathbb{N} : r_0 + \eta - \delta \leq r_m \leq r_0\}$ es un conjunto infinito. Ahora es fácil ver que $\mathcal{A}_\eta := \{\eta_{M,N} : M, N \text{ subconjuntos disjuntos de } \mathbb{N}_\eta\}$ es una w^*-$\mathbb{N}$-familia uniforme de anchura $\eta > 0$ asociada a r_0 y a la secuencia $\{x_m : m \in \mathbb{N}_\eta\} \subset B(X)$.

(5) Si X es un espacio de Banach y $A \subset X^*$ es un subconjunto, es fácil ver que A posee una w^*-$\mathbb{N}$-familia sii la posee $\overline{A}$.

(6) Observemos que si A es un subconjunto de un espacio de Banach X, A posee una copia de la base de $\ell_1(\tau)$, siendo τ un cierto cardinal, sii $\overline{A}$ posee una copia de la base de $\ell_1(\tau)$. En efecto, sea $\{u_i : i < \tau\} \subset \overline{A}$ una copia de la base de $\ell_1(\tau)$ verificando para cierto $0 < C < \infty$ que

$$C^{-1} \sum_{i<\tau} |\lambda_i| \leq \| \sum_{i<\tau} \lambda_i u_i \| \leq C \sum_{i<\tau} |\lambda_i|, \ \forall (\lambda_i)_{i<\tau} \in \ell_1(\tau).$$

Si $e_i \in A$ es tal que $\|e_i - u_i\| \leq \frac{C^{-1}}{2}$, $i < \tau$, entonces se ve fácilmente que $\{e_i : i < \tau\}$ es equivalente a la base de $\ell_1(\tau)$ ya que se verifica

$$\tfrac{1}{2}C^{-1} \sum_{i<\tau} |\lambda_i| \leq \| \sum_{i<\tau} \lambda_i e_i \| \leq (C + \tfrac{1}{2}C^{-1}) \sum_{i<\tau} |\lambda_i|.$$

(7) Es claro que todo subconjunto $Y \subset X^*$ verifica

$$Pindex(Y) = \sup\{Pindex(\psi, Y) : \psi \in S(X^{**})\}.$$

La propiedad (P) se caracteriza perfectamente a través de las w^*-$\mathbb{N}$-familias como se ve en la siguiente proposición.

Proposición 1.6. *Sean X un espacio de Banach e Y un subconjunto de X^*. Los siguientes asertos son equivalentes*

(1) Y no tiene la propiedad (P).

(2) Existe un funcional $\psi \in X^{**}$ que no es universalmente medible sobre Y.

(3) Existe un subconjunto w^*-compacto H de Y que contiene una w^*-$\mathbb{N}$-familia.

Demostración. Véase la prueba en [62, Proposition 2.5]. ■

Los conjuntos convexos que carecen de una w^*-$\mathbb{N}$-familia tienen buenas propiedades de control como se ve a continuación.

Proposición 1.7. *Sean X un espacio de Banach y C un subconjunto convexo de X^* sin w^*-$\mathbb{N}$-familias (en particular, esto ocurre si C carece de copias de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$). Entonces C tiene 3-control dentro de X^*, esto es, para todo subconjunto w^*-compacto K de X^* se tiene que $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) \leq 3DIST(K, C)$.*

Demostración. Ver la prueba en [61, Proposition 3.5]. ■

Proposición 1.8. *Sea X un espacio de Banach y C un subconjunto convexo de X^*. Los siguientes asertos son equivalentes:*

(i) C carece de una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$.

(ii) C tiene universalmente 3-control, esto es, si $\overline{[C]}$ es (isomorfo a) un subespacio de algún espacio de Banach dual V^*, entonces C tiene 3-control dentro de V^*.

(iii) C tiene universalmente control, esto es, si $\overline{[C]}$ es (isomorfo a) un subespacio de algún espacio de Banach dual V^*, entonces C tiene control dentro de V^*.

Demostración. Ver la Proposition 3.7 de [61]. ■

Proposición 1.9. *Para un espacio de Banach Y los siguientes asertos son equivalentes:*

(0) Y es universalmente Krein-Šmulian.

(0') Si X es un espacio de Banach y Z un subespacio de X^* isomorfo a Y, (Z, w^*) satisface el Teorema de Krein-Šmulian.

(1) Y es fuertemente universalmente Krein-Šmulian.

(1') Si X es un espacio de Banach y Z un subespacio de X^* isomorfo a Y, (Z, w^*) satisface el Teorema fuerte de Krein-Šmulian.

(2) Y tiene universalmente 3-control, esto es, para todo espacio de Banach X y todo subespacio Z de X^* isomorfo a Y se tiene $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z) \leq 3DIST(K, Z)$ para todo subconjunto w^*-compacto K de X^*.

(3) Y tiene control universal, esto es, si X es un espacio de de Banach y Z un subespacio de X^* isomorfo a Y, existe una constante $1 \leq M < \infty$ tal que $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z) \leq M \cdot DIST(K, Z)$ para todo subconjunto w^*-compacto K de X^*.

(4) Y carece de copias de $\ell_1(\mathfrak{c})$.

Demostración. Ver la Proposition 4 de [59]. ■

Proposición 1.10. *Si K es un subconjunto w^*-compacto del espacio de Banach dual X^*, se verifica $Pindex(K) = Width(K)$.*

Demostración. Este resultado sale de [62, Lemma 2.4] y de la prueba de [62, Proposition 2.5]. ■

Si $K \subset X^*$ es un subconjunto w^*-compacto del dual X^* de un espacio de Banach X, se define el conjunto $Ext(K)$ de los puntos extremos de K como $Ext(K) = Ext(\overline{\text{co}}^{w^*}(K))$, es decir, como el conjunto de los puntos extremos de $\overline{\text{co}}^{w^*}(K)$. Sabemos que $Ext(K) \neq \emptyset$, $Ext(K) \subset K$ y que $\overline{\text{co}}^{w^*}(Ext(K)) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ (ver [24]). Intentamos investigar cuándo ocurre que $\overline{\text{co}}(Ext(K)) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$. Puesto que $\overline{\text{co}}(Ext(K)) \subset \overline{\text{co}}(K) \subset \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$, si $\overline{\text{co}}(Ext(K)) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$, entonces $\overline{\text{co}}(K) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$, pero el recíproco puede ser falso. Si X es un espacio de Banach, decimos que un subconjunto $Y \subset X^*$ verifica *la propiedad* (E) sii para todo subconjunto w^*-compacto $K \subset Y$ se verifica que $\overline{\text{co}}(Ext(K)) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$.

Lema 1.11. *Sean X un espacio de Banach, $\varphi \in S(X^{**})$, S un subconjunto acotado de X^*, r, δ dos números reales con $\delta > 0$ de modo que, si V es un subconjunto w^*-abierto de X^* con $V \cap S \neq \emptyset$, existen vectores $\xi, \eta \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap S)$ tales que $\varphi(\xi) > r + \delta$ y $\varphi(\eta) < r$. Entonces $K := \overline{S}^{w^*}$ contiene una w^*-$\mathbb{N}$-familia $\mathcal{A}$ de anchura $width(\mathcal{A}) \geq \delta$.*

Demostración. Por la prueba de [65, 2.LEMMA] existe una secuencia $\{x_n : n \geq 1\} \subset S(X)$ tal que para todo par de subconjuntos finitos disjuntos $M, N \subset \mathbb{N}$ se verifica

$$\emptyset \neq \Big(\bigcap_{m \in M} \{\xi \in S : \xi(x_n) > r + \delta\}\Big) \cap \Big(\bigcap_{n \in N} \{\eta \in S : \eta(x_n) < r\}\Big).$$

Por tanto si ponemos

$$A_n = \{\xi \in K : \xi(x_n) \geq r + \delta\}, \ B_n = \{\eta \in K : \eta(x_n) \leq r\}, \ \forall n \geq 1,$$

entonces, para todo par de subconjuntos finitos disjuntos $M, N \subset \mathbb{N}$, el subconjunto w^*-compacto $(\bigcap_{m \in M} A_m) \cap (\bigcap_{n \in N} B_n)$ de K es no vacío. Puesto que K es w^*-compacto concluimos que para todo par de subconjuntos disjuntos (finitos ó infinitos) $M, N \subset \mathbb{N}$

$$\emptyset \neq \Big(\bigcap_{m \in M} A_m\Big) \cap \Big(\bigcap_{n \in N} B_n\Big) \subset K.$$

Finalmente por cada par de subconjuntos disjuntos (finitos ó infinitos) $M, N \subset \mathbb{N}$ elegimos $\eta_{M,N} \in (\bigcap_{m \in M} A_m) \cap (\bigcap_{n \in N} B_n)$. Obviamente se verifica

$$\eta_{M,N}(x_m) \geq r + \delta, \ \forall m \in M, \quad \text{y } \eta_{M,N}(x_n) \leq r, \ \forall n \in N,$$

es decir, que K posee una w^*-$\mathbb{N}$-familia $\mathcal{A}$ de anchura $width(\mathcal{A}) \geq \delta$. ■

Proposición 1.12. *Sea X un espacio de Banach.*

(A) Sea H un subconjunto w^*-compacto del dual X^* tal que $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(H), \overline{\text{co}}(Ext(H)) > 0$. Entonces H contiene una w^*-$\mathbb{N}$-familia.

(B) Sea $Y \subset X^*$ un subconjunto del dual X^*. Son equivalentes

(B1) Y posee la propiedad (P).

(B2) Y posee la propiedad (E).

Demostración. (A) Sea $C := \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$. Por el teorema de Hahn-Banach y el teorema de Bishop-Phelps, existe $\phi \in S(X^{**})$ tal que ϕ es un funcional soporte de C y

$$r_0. = \sup\langle\varphi, C\rangle > \sup\langle\varphi, \overline{\text{co}}(Ext(H))\rangle.$$

Por la prueba de [65, Proof of 3.1.Proposition] existen $m \in \mathbb{N}$ y un subconjunto no-vacío $S \subset C$ tales que, para todo subconjunto w^*-abierto $V \subset X^*$ con $V \cap S \neq \emptyset$, existen $\xi \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap S)$ y $\eta \in V \cap S$ tales que $\langle\varphi, \eta\rangle < r_0 - \frac{1}{m} < r_0 = \langle\varphi, \xi\rangle$. Ahora basta aplicar el Lema 1.11 y [62, Proposition 2.5].

(B) $(B2) \Rightarrow (B1)$ es obvio y $(B1) \Rightarrow (B2)$ sale de (A).

■

1.5. Índices sobre un w^*-compacto $K \subset X^*$

Definimos a continuación ciertos índices, algunos de ellos (el $Pindex$) ya introducidos antes.

Definición 1.13. *Dados un espacio de Banach X, un subconjunto w^*-compacto $K \subset X^*$ y un funcional $\psi \in X^{**}$, definimos los siguientes índices:*

(1) $Pindex(\psi, K) = \sup\{\sup\langle\psi, \overline{\text{co}}^{w^*}(W)\rangle - \sup\langle\psi, W\rangle : W \subset K \ \textit{subconjunto } w^*\textit{-compacto}\}$,

(2) $Pindex(K) := \sup\{DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(W), \overline{\text{co}}(W) : W \subset K \ \textit{subconjunto } w^*\textit{-compacto}\}$,

(3) $Eindex(\psi, K) = \sup\{\sup\langle\psi, \overline{\text{co}}^{w^*}(W)\rangle - \sup\langle\psi, Ext(W)\rangle : W \subset K \ \textit{subc. } w^*\textit{-compacto}\}$,

(4) $Eindex(K) := \sup\{DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(W), \overline{\text{co}}(Ext(W)) : W \subset K \ \textit{subconjunto } w^*\textit{-compacto}\}$,

(5) $$Bindex(\psi, K) := \sup\{\sup\langle\psi, \overline{\text{co}}^{w^*}(W)\rangle - \sup\langle\psi, \overline{\text{co}}(B)\rangle : W \subset K \ w^*\textit{-compacto} \ \textit{y } B \subset W \ \textit{contorno de } W\},$$

(6) $Bindex(K) = \sup\{DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(W), \overline{\text{co}}(B)) : W \subset K \ w^*\textit{-compacto y } B \ \textit{contorno de } W\}$.

NOTA. Sea K un subconjunto w^*-compacto de X^*.

(a) Por el T. de Hahn-Banach se verifica que

$$Xindex(K) = \sup\{Xindex(\psi, K) : \psi \in B(X^{**})\},$$

para $X = P, \ X = E$ y $X = B$.

(b) Claramente para $\psi \in X^{**}$

$$Bindex(\psi, K) \geq Eindex(\psi, K) \geq Pindex(\psi, K),$$

de donde

$$Bindex(K) \geq Eindex(K) \geq Pindex(K).$$

(c) K es (P) sii $Pindex(K) = 0$ sii $Eindex(K) = 0$ (ver Prop. 1.12).

(d) Si X es un espacio de Banach, es claro que $2 \geq Bindex(B(X^*)) \geq 0$. Sea $X = \ell_1$. Considerando en $B(X^*)$ la w^*-$\mathbb{N}$-familia de sus puntos extremos $\mathbb{1}_M - \mathbb{1}_N$, $M \uplus N = \mathbb{N}$, obtenemos que $Width(B(\ell_\infty)) = Pindex(B(\ell_\infty)) = Bindex(B(\ell_\infty)) = 2$.

(e) En consecuencia, dado un espacio de Banach hay dos casos:

Caso 1. X contiene una copia de ℓ_1. Entonces X contiene copias ϵ-isométricas de ℓ_1 para todo $\epsilon > 0$, lo que unido al punto (d) anterior nos permite afirmar que

$$Width(B(X^*)) = Pindex(B(X^*)) = Bindex(B(X^*)) = 2.$$

Caso 2. X no contiene una copia de ℓ_1. Entonces $B(X^*) \in (P)$ y

$$Width(B(X^*)) = Pindex(B(X^*)) = Eindex(B(X^*)) = 0,$$

aunque puede ser $Bindex(B(X^*)) > 0$.

1.6. Igualdad y desigualdad de Simons

La igualdad y desigualdad de Simons son importantes resultados que utilizaremos a menudo. Se trata de asertos equivalentes entre sí.

Proposición 1.14 (Igualdad de Simons). *Sean E un espacio de Banach y $B \subset G \subset E^*$ subconjuntos tales que todo elemento de E alcanza sobre B su máximo en G. Entonces, si $(x_n)_{n\geq 1}$ es una secuencia acotada de E, se verifica que*

$$\sup_{b\in B} \limsup_{n\to\infty} \langle b, x_n\rangle = \sup_{g\in G} \limsup_{n\to\infty} \langle g, x_n\rangle.$$

Demostración. Ver [103, SUP-LIMSUP Theorem]. ■

Proposición 1.15 (Desigualdad de Simons). *Sean X un conjunto y $\{f_n : n \geq 1\} \subset \ell_\infty(X)$ una secuencia uniformemente acotada. Supongamos que Y es un subconjunto de X tal que, si $\lambda_n \geq 0$ y $\sum_{n\geq 1} \lambda_n = 1$, existe $y \in Y$ tal que*

$$\sum_{n\geq 1} \lambda_n f_n(y) = \sup\{\sum_{n\geq 1} \lambda_n f_n(x) : x \in X\}.$$

Entonces

$$\sup_{y\in Y} \limsup_{n} f_n(y) \geq \inf\{\sup\{g(x) : x \in X\} : g \in co((f_n)_n)\}.$$

Demostración. Ver [102, 2. Lemma]. ■

1.7. El cálculo baricéntrico

Sean X un espacio de Banach e Y un subconjunto del espacio de Banach dual X^*. Recordemos que una aplicación $f : Y \to \mathbb{R}$ se dice *universalmente medible sobre* Y (para la w^* topología) si para todo subconjunto w^*-compacto W de Y y toda medida Borel Radon μ sobre W ocurre que $f \restriction W$ es μ-medible.

Definición 1.16. *Sean X un espacio de Banach y $\psi \in X^{**}$.*

(A) Si $K \subset X^*$ es un subconjunto w^*-compacto de X^*, decimos que ψ verifica el cálculo baricéntrico sobre K sii

(1) ψ es universalmente medible sobre K.

(2) Para toda probabilidad Borel de tipo Radon μ sobre K se verifica

$$\int_K \psi(k) d\mu = \psi(r(\mu)).$$

(B) Sea Y un subconjunto de X^*. Decimos que ψ verifica el cálculo baricéntrico sobre Y sii ψ verifica el cálculo baricéntrico sobre todo subconjunto w^*-compacto K de Y.

La siguiente proposición relaciona el *Pindex* y el cálculo baricéntrico en conjuntos con la propiedad (P).

Proposición 1.17. *Sean X un espacio de Banach y $Y \subset X^*$ un subconjunto de X^*. Son equivalentes:*

(0) $Pindex(Y) = 0$, es decir, $Pindex(\psi, K) = 0$ para todo $\psi \in X^{**}$ y todo subconjunto w^*-compacto $K \subset Y$.

(1) $Y \in (P)$.

(2) Toda $\psi \in X^{**}$ verifica el cálculo baricéntrico sobre Y.

Demostración. (0) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que $Y \notin (P)$, es decir, que existe un subconjunto w^*-compacto $W \subset K$ tal que $\overline{\text{co}}(W) \neq \overline{\text{co}}^{w^*}(W)$. Por tanto existe $\psi \in X^{**}$ tal que $\sup\langle \psi, \overline{\text{co}}^{w^*}(W)\rangle - \sup\langle \psi, W\rangle > 0$, de donde $Pindex(\psi, K) > 0$. Hemos llegado a una contradicción que prueba que $Y \in (P)$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Fijemos $\psi \in S(X^{**})$ y un cierto subconjunto w^*-compacto K de Y. Tenemos que probar que ψ verifica el cálculo baricéntrico sobre K. En primer término $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) = \overline{\text{co}}(K)$ porque $Y \in (P)$. Sea $H := \overline{\text{co}}^{w^*}(K) = \overline{\text{co}}(K)$. Por [62, Proposition 2.5, Proposition 3.8] se tiene que $H \in (P)$ y $\psi \in X^{**}$ es universalmente medible sobre H. Probemos que ψ verifica el cálculo baricéntrico sobre H. En caso contrario, por [65, 4.1.Proposition] se verifica que:

"Existe un par de números reales r, δ con $\delta > 0$ y existe una probabilidad Borel Radon μ sobre H tales que, si $W := supp(\mu)$, para todo subconjunto w^*-abierto V de

X^* con $V \cap W \neq \emptyset$ se verifica que

$$\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(V \cap W) \cap \{\psi < r\} \neq \emptyset \ \text{ y } \ \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(V \cap W) \cap \{\psi > r + \delta\} \neq \emptyset.\text{''} \tag{1.2}$$

Sea $\mathcal{F}$ una familia finita de subconjuntos w^*-abiertos V de X^* con $V \cap W \neq \emptyset$, $\forall V \in \mathcal{F}$. Por (1.2) existen vectores $\tilde{\eta}_V,\ \tilde{\xi}_V \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(V \cap W),\ V \in \mathcal{F}$, tales que

$$\langle \psi, \tilde{\eta}_V \rangle < r < r + \delta < \langle \psi, \tilde{\xi}_V \rangle. \tag{1.3}$$

Puesto que $B(X)$ es w^*-denso en $B(X^{**})$, existe $x_{\mathcal{F}} \in S(X)$ tal que

$$\forall V \in \mathcal{F}, \quad \langle \tilde{\eta}_V, x_{\mathcal{F}} \rangle < r < r + \delta < \langle \tilde{\xi}_V, x_{\mathcal{F}} \rangle. \tag{1.4}$$

Finalmente, por razones de densidad y convexidad, existen vectores $\eta_V,\ \xi_V \in V \cap W$, $V \in \mathcal{F}$, tales que

$$\forall V \in \mathcal{F}, \quad \langle \eta_V, x_{\mathcal{F}} \rangle < r < r + \delta < \langle \xi_V, x_{\mathcal{F}} \rangle. \tag{1.5}$$

De [62, Proposición 3.8] y de (1.5) sale que $W \notin (P)$, es decir, $H \notin (P)$, lo que contradice (1) y prueba la implicación.

(2) $\Rightarrow$ (0). Supongamos que $Pindex(\psi, K) > 0$ para cierto $\psi \in X^{**}$ y cierto subconjunto w^*-compacto $K \subset Y$. Esto quiere decir que existen $\epsilon > 0$, un subconjunto w^*-compacto $W \subset K$ y un punto $w_0 \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(W)$ tales que $\langle \psi, w_0 \rangle > \sup\langle \psi, W \rangle + \epsilon$. Sea $\mu \in \mathcal{P}_R(W)$ tal que $r(\mu) = w_0$. Entonces, por (2) ocurre que $\langle \psi, w_0 \rangle = \int_W \psi(w) d\mu$, pero también

$$\int_W \psi(w) d\mu \leq \int_W (\langle \psi, w_0 \rangle - \epsilon) d\mu = \langle \psi, w_0 \rangle - \epsilon < \langle \psi, w_0 \rangle.$$

Llegamos a una contradicción que prueba la implicación (2) $\Rightarrow$ (0). ■

CONTRAEJEMPLO. Si X es un espacio de Banach y $\psi \in X^{**}$ es universalmente medible sobre (X^*, w^*), ¿verifica siempre ψ el cálculo baricéntrico sobre (X^*, w^*)? Veamos que la respuesta es negativa. Para ello utilizamos el siguiente contraejemplo de Choquet [1, Example I.2.10]. Sea $X = C([0,1])$ y, si $\mu \in X^* = M_R([0,1])$, sea $\mu = \mu_a + \mu_d$ la descomposición de μ en su parte atómica μ_a y su parte difusa μ_d. Sea $\psi \in X^{**}$ tal que $\psi(\mu) = \mu_a([0,1])$. Se tiene que:

(1) Sea $W \subset B(M_R([0,1]))$ el compacto $W := [0,1]$ y λ la probabilidad de Lebesgue sobre W. Entonces $\lambda \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(W)$, $\psi(\lambda) = 0$ y $\psi \restriction W = 1$. Por tanto $Pindex(\psi, B(X^*)) \geq 1$ y ψ no verifica el cálculo baricéntrico sobre $B(X^*)$.

(2) En [1, Collorary I.2.9] se prueba que $\psi \restriction \mathcal{P}_R([0,1])$ es 2-Baire.

Veamos que ψ es Borel-medible sobre la bola $(B(X^*), w^*)$.

(a) Sea $q : K := \mathcal{P}_R([0,1]) \times \mathcal{P}_R([0,1]) \times [0,1] \to B(X^*)$ tal que $q((\mu_1, \mu_2, t)) = t\mu_1 - (1-t)\mu_2$. Se verifica que q es continua y sobreyectiva. Es una identificación.

(b) La aplicación $\tilde{\psi} : K \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\psi}(\mu, \nu, t) = t\psi(\mu) - (1-t)\psi(\nu)$ es trivialmente 2-Baire y, por tanto, Borel-medible.

(c) Sobre K se verifica la igualdad $\psi \circ q = \tilde{\psi}$. Por tanto, para todo $A \subset \mathbb{R}$, tanto $\tilde{\psi}^{-1}(A)$ como ${}^c(\tilde{\psi}^{-1}(A)) = \tilde{\psi}^{-1}({}^cA)$ son q-saturados.

(d) Sea $U \subset \mathbb{R}$ un abierto arbitrario. Queremos ver que $\psi^{-1}(U) \cap B(X^*) \in \mathcal{B}_o(B(X^*))(=$ borelianos de $(B(X^*), w^*)$. Observemos que $\psi^{-1}(U) \cap B(X^*) = q(\tilde{\psi}^{-1}(U))$. Pero $\tilde{\psi}^{-1}(U)$ y su complementario $\tilde{\psi}^{-1}({}^cU)$ son Borel-medibles en K y, por tanto, analíticos (ver [70, (14.11) Th., pag. 88]). En consecuencia $q(\tilde{\psi}^{-1}(U))$ y $q(\tilde{\psi}^{-1}({}^cU))$ son analíticos y complementarios en $B(X^*)$, es decir, son Borel-medibles. Esto prueba que ψ es Borel-medible sobre $B(X^*)$.

Por tanto ψ es universalmente medible sobre $B(X^*)$ (de hecho es Borel-medible) pero no verifica el cálculo baricéntrico porque $Pindex(\psi, B(X^*)) \geq 1$.

1.8. El espacio $\mathcal{S}eq(X^{**}; A)$

Si $A \subset X^*$ es un subconjunto de un espacio de Banach dual X^*, definimos $\mathcal{S}eq(X^{**}; A)$ como el conjunto de los funcionales $\psi \in X^{**}$ tales que existe una secuencia $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ tal que $\langle a, x_n \rangle \underset{n\to\infty}{\to} \langle \psi, a \rangle$ para todo $a \in A$. Obviamente, $\mathcal{S}eq(X^{**}; A)$ es un subespacio vectorial de X^{**} y, sin pérdida de generalidad, se puede considerar siempre que $A \subset B(X^*)$. Denotaremos $\mathcal{S}eq(X^{**})$ en lugar de $\mathcal{S}eq(X^{**}; X^*)$ y diremos que un elemento $z \in X^{**}$ es secuencial sii $z \in \mathcal{S}eq(X^{**})$. Claramente, si $A \subset X^*$ es un subconjunto acotado, entonces $z \upharpoonright A \in \mathcal{B}_{1b}((A, w^*))$ para todo $z \in \mathcal{S}eq(X^{**}; A)$. En [81] se prueba que $\mathcal{S}eq(X^{**})$ es un subespacio $\|\cdot\|$-cerrado de X^{**}.

Proposición 1.18. *Si X es un espacio de Banach se verifica $\mathcal{S}eq(X^{**}) = \mathcal{B}_1(B(X^*)) \cap X^{**}$.*

Demostración. Ver [87]. ∎

Para comodidad del lector damos la prueba del siguiente lema elemental. Otra versión más general aparece en Cap.2 (Lema 2.4).

Lema 1.19. *[[87, SUBLEMMA, REMARK, pags. 378, 379]] Sean X un espacio de Banach, $D \subset X$ un subconjunto convexo y $u \in \mathcal{S}eq(X^{**}) \cap \overline{D}^{w^*}$. Entonces existe una sucesión $\{d_n : n \geq 1\} \subset D$ tal que $d_n \underset{n\to\infty}{\to} u$ en (X^{**}, w^*).*

Demostración. Sea $\{x_n : n \geq 1\}$ una sucesión (acotada) de X tal que $x_n \underset{n\to\infty}{\to} u$ en (X^{**}, w^*). Sea $C_n := co_{\mathbb{Q}}(\{x_k : k \geq n\})$ el conjunto de las combinaciones $\mathbb{Q}$-convexas de $\{x_k : k \geq n\}$. Observemos que si y_n se elige arbitrariamente en C_n, se verifica que $y_n \underset{n\to\infty}{\to} u$ en (X^{**}, w^*).

Aserto. $dist(\overline{C_n}, \overline{D}) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

En efecto, supongamos que $dist(\overline{C_m}, \overline{D}) > 0$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Por el teorema de separación de Hahn-Banach existe un cierto $x^* \in X^*$ tal que

$$\inf \langle x^*, C_m \rangle > \sup \langle x^*, D \rangle. \tag{1.6}$$

Entonces $\langle u, x^*\rangle \geq \inf\langle x^*, C_m\rangle$, porque $u \in \overline{C_m}^{w^*}$, y también $\sup\langle x^*, D\rangle \geq \langle u, x^*\rangle$, porque $u \in \overline{D}^{w^*}$. Aplicando (1.6) se concluye que $\langle u, x^*\rangle > \langle u, x^*\rangle$, una contradicción que prueba el Aserto.

Gracias al Aserto podemos elegir $u_n \in C_n$ y $d_n \in D$ de modo que $\|u_n - d_n\| \leq 2^{-n}$, $n \geq 1$. Como $u_n \underset{n\to\infty}{\to} u$ en (X^{**}, w^*), también $d_n \underset{n\to\infty}{\to} u$ en (X^{**}, w^*). ■

Corolario 1.20. *(1) Sea X un espacio de Banach y $Z \subset X$ un subespacio. Entonces $\mathcal{S}eq(Z^{**}) = Z^{**} \cap \mathcal{S}eq(X^{**})$.*

(2) En la clase de los espacios de Banach X la propiedad $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$ es estable por paso a cocientes y subespacios.

Demostración. Las demostraciones son inmediatas utilizando el Lema 1.19. ■

Sea X un espacio de Banach.

(i) Se dice que X es WSC (weakly sequentially complete) si y sólo si toda secuencia de Cauchy en (X, w) es w-convergente en X.

(ii) Se dice que X es Grothendieck sii toda secuencia $(x_n^*)_n \subset X^*$ w^*-convergente es w-convergente.

Proposición 1.21. *Sea X un espacio de Banach.*

(a) El aserto "$\mathcal{S}eq(X^{**}) = X$" es equivalente a el aserto "X es WSC".

(b) Si X^* es Grothendieck, entonces $\mathcal{S}eq(X^{**}) = X$. En particular, si $X = \ell_1(I)$, I conjunto arbitrario, ó $X = L_1(\mu)$, μ medida σ-finita, se verifica que $\mathcal{S}eq(X^{**}) = X$.

Demostración. (a) es inmediato.

(b) Si X^* es Grothendieck, X es WSC. ■

NOTA. Hay espacios de Banach X que son WSC sin que X^* sea Grothendieck. Por ejemplo el espacio JH de James-Hagler [63]. De hecho, todo espacio Schur y todo espacio $\mathcal{L}_1$ es WSC, aunque su dual no es necesariamente Grothendieck.

Sea K un espacio compacto Hausdorff y consideremos el espacio de Banach $X := C(K)$. Entonces

$$X^* = \ell_1(K) \oplus_1 M_R^d(K) \ \text{ y } \ X^{**} = \ell_\infty(K) \oplus_\infty M_R^d(K)^*,$$

siendo $M_R^d(K)$ el espacio de las medidas de Radon difusas sobre K. Si $f \in C(K)$ y $J : X \to X^{**}$ es la inclusión canónica, entonces $J(f) = f \oplus \tilde{f}$, que es el elemento de $\ell_\infty(K) \oplus_\infty M_R^d(K)^*$ definido del siguiente modo. Sea $z \oplus \mu \in \ell_1(K) \oplus M_R^d(K) = X^*$. Entonces:

$$\langle J(f), z \oplus \mu\rangle = \langle f \oplus \tilde{f}, z \oplus \mu\rangle = \sum_{k\in K} f(k) z_k + \int_K f \cdot d\mu.$$

Si $f \in \mathcal{B}_{1b}(K)$, definimos $\langle \tilde{f}, \mu \rangle = \int_K f \cdot d\mu, \ \forall \mu \in M_R^d(K)$. Es claro que $\tilde{f} \in M_R^d(K)^*$ y que $\|\tilde{f}\|_{X^{**}} \leq \|f\|_{\ell_\infty}$.

Proposición 1.22. *Sea K un espacio compacto Hausdorff y $X := C(K)$. Si $f \in \mathcal{B}_{1b}(K)$ y $z \oplus \mu \in \ell_1(K) \oplus M_R^d(K) = X^*$ definimos*

$$\langle f \oplus \tilde{f}, z \oplus \mu \rangle = \sum_{k \in K} f(k) z_k + \int_K f \cdot d\mu.$$

Entonces $f \oplus \tilde{f} \in X^{**}$ y la aplicación $(\mathcal{B}_{1b}(K), \|\cdot\|_\infty) \ni f \to \Phi(f) = f \oplus \tilde{f} \in X^{**}$ es un isomorfismo isométrico sobre su imagen, que es $\Phi(\mathcal{B}_{1b}(K)) = \mathcal{S}eq(X^{**})$.

Demostración. Es claro que ,$\forall f \in \mathcal{B}_{1b}(K), \ \Phi(f) \in X^{**}$ y que:

$$\|\Phi(f)\| = \|f \oplus \tilde{f}\| = \|f\|_{\ell_\infty(K)} \vee \|\tilde{f}\|_{X^{**}} = \|f\|_{\ell_\infty(K)}.$$

Es decir Φ es una isometría. Como Φ es lineal, concluimos que Φ es un isomorfismo isométrico entre $(\mathcal{B}_{1b}(K), \|\cdot\|_\infty)$ y su imagen $\Phi(\mathcal{B}_{1b}(K))$. Observemos que $\Phi \restriction C(K) = J$, siendo $J : X \to X^{**}$ la inclusión canónica.

Veamos que $\Phi(\mathcal{B}_{1b}(K)) = \mathcal{S}eq(X^{**})$. En primer término, $\Phi(\mathcal{B}_{1b}(K)) \subset \mathcal{S}eq(X^{**})$, porque si $f \in \mathcal{B}_{1b}(K)$ y $(f_n)_n \subset C(K)$ es una sucesión con $\|f_n\| \leq \|f\|$ y $f_n \to f$ puntualmente sobre K, entonces trivialmente $J(f_n) = f_n \oplus \tilde{f}_n \to f \oplus \tilde{f} = \Phi(f)$ en (X^{**}, w^*).

Sea ahora $z = z_1 + z_2 \in \mathcal{S}eq(X^{**})$ con $z_1 \in \ell_\infty(K)$ y $z_2 \in M_R^d(K)^*$. Por hipótesis existe una secuencia acotada $(f_n)_n \subset C(K)$ tal que en (X^{**}, w^*) se verifica $J(f_n) = f_n \oplus \tilde{f}_n \to z$. De aquí que $f_n \to z_1$ puntualmente sobre K, de donde $z_1 \in \mathcal{B}_{1b}(K)$.

Aserto. $z_2 = \tilde{z}_1$ y por tanto $z = \Phi(z_1)$.

En efecto, teniendo en cuenta que $(f_n)_n$ es una secuencia acotada tal que $f_n \to z_1$ puntualmente sobre K y aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada, obtenemos para toda $\mu \in M_R^d(K)$ lo siguiente

$$\begin{aligned} \langle z_2, \mu \rangle = \langle z, \mu \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle f_n \oplus \tilde{f}_n, \mu \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle \tilde{f}_n, \mu \rangle = \\ = \lim_{n \to \infty} \int_K f_n \cdot d\mu = \int_K z_1 \cdot d\mu = \langle \tilde{z}_1, \mu \rangle. \end{aligned}$$

■

Proposición 1.23. *Sean X un espacio de Banach y $K \subset X^*$ un subconjunto convexo w^*-compacto. Entonces $\mathcal{S}eq(X^{**}; K)$ es norma-cerrado en X^{**}.*

Demostración. Sea $T : X \to C(K)$ tal que $T(x) = x \restriction K, \ \forall x \in X$.

Aserto 1. $T^{**}(\mathcal{S}eq(X^{**}; K)) \subset \mathcal{S}eq(C(K)^{**})$.

En efecto, sean $\psi \in \mathcal{S}eq(X^{**}; K)$ y $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ tales que $\langle k, x_n\rangle \underset{n\to\infty}{\to} \langle \psi, k\rangle$ para todo $k \in K$. Obviamente, $\psi \upharpoonright K \in \mathcal{B}_{1b}(K)$. Además, la convexidad y compacidad de K implican que $Tx_n \to T^{**}\psi$ en $(C(K)^{**}, w^*)$. En efecto, sea $\mu \in \mathcal{P}_R(K)$. Se tiene que

$$\langle \mu, Tx_n\rangle = \langle T^*\mu, x_n\rangle = \langle r(\mu), x_n\rangle.$$

Por otra parte

$$\langle T^{**}\psi, \mu\rangle = \langle \psi, T^*\mu\rangle = \langle \psi, r(\mu)\rangle.$$

Como $r(\mu) \in K$ y $x_n \to \psi$ en K, concluimos que $Tx_n \to T^{**}\psi$ en $(C(K)^{**}, w^*)$, es decir, $T^{**}\psi \in \mathcal{S}eq(C(K)^{**})$.

Aserto 2. $T^{**}(\overline{\mathcal{S}eq(X^{**}; K)}) \subset \mathcal{S}eq(C(K)^{**})$.

En efecto, observemos que $\mathcal{S}eq(C(K)^{**})$ es norma-cerrado en $C(K)^{**}$ (ver [81]) y que $\mathcal{S}eq(X^{**}; K) \subset (T^{**})^{-1}(\mathcal{S}eq(C(K)^{**}))$ por Aserto 1.

Sea $\psi \in \overline{\mathcal{S}eq(X^{**}; K)}$ con $\|\psi\| \leq 1$. Entonces $T^{**}\psi \in \mathcal{S}eq(C(K)^{**})$ y también $T^{**}\psi \in \overline{T(B(X))}^{w^*}$. Por [87, Sublemma, p. 379] concluimos que existe una secuencia $(y_n)_{n\geq 1} \subset B(X)$ de modo que $T^{**}y_n \to T^{**}\psi$ sobre $C(K)^*$. En particular, $y_n \to \psi$ sobre K, lo que prueba que $\psi \in \mathcal{S}eq(X^{**}; K)$. ■

Cuestión 1. *Sean X un espacio de Banach y K un subconjunto w^*-compacto de X^* con $K \in (P)$. ¿Es $\mathcal{S}eq(X^{**}; K)$ norma-cerrado en X^{**}? Notemos que la respuesta sería afirmativa si definimos $\mathcal{S}eq(X^{**}; K)$ como el conjunto de los $z \in X^{**}$ para los que existe* **una secuencia** $(x_n)_n$ **uniformemente acotada sobre** K *tal que $x_n \to \psi$ sobre K.*

Proposición 1.24. *Sean K un espacio compacto Hausdorff y $D \subset K$ un subconjunto. Entonces $\mathcal{S}eq(C(K)^{**}; D)$ es norma-cerrado en $C(K)^{**}$.*

Demostración. Sea $\psi_0 \in \overline{\mathcal{S}eq(C(K)^{**}; D)}$ y sea $(\varphi_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{S}eq(C(K)^{**}; D)$ tal que $\varphi_n \to \psi_0$ en la norma de $C(K)^{**}$. Suponemos además que $\forall k \geq 1$

$$\forall n \geq k,\ \|\varphi_n - \varphi_k\| \leq 2^{-k}.$$

Entonces, poniendo $\varphi_0 = 0$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{n}(\varphi_i - \varphi_{i-1}) = \varphi_n \to \psi_0 \text{ en } (C(K)^{**}, \|\cdot\|).$$

Para cada $k \geq 1$ elegimos $(f_{kn})_{n\geq 1} \subset C(K)$ tal que

(a) $f_{kn} \underset{n\to\infty}{\to} \varphi_k - \varphi_{k-1}$ sobre D.

(b) $\|f_{kn}\| \leq 2^{-k+1},\ \forall n \geq 1$.

Sea $\psi_n := \sum_{k\geq 1} f_{kn}$. Entonces $\psi_n \in C(K)$ y $\psi_n \to \psi_0$ sobre D. ■

Capítulo 2

Las topologías γ_K y $\mathcal{T}_K$ y las distancias $dist_K$ en un espacio de Banach dual X^*

2.1. Introducción y preliminares

Si X es un espacio de Banach, κ un cardinal y $A \subset X^{**}$ un subconjunto arbitrario, A_κ indicará el subconjunto definido en (1.1) (ver inicio de Cap. 1), calculado en el espacio topológico (X^{**}, w^*), es decir:

$$A_\kappa := \bigcup \{\overline{D}^{w^*} : D \subset A, |D| \leq \kappa\}.$$

Es fácil ver que X_κ es un subespacio norma-cerrado de X^{**}. Naturalmente, los espacios de Banach separables X verifican $X^{**} = X_{\aleph_0}$ (y los espacios reflexivos $X^{**} = X_\kappa$ para todo cardinal κ), pero también verifican esta igualdad $X^{**} = X_{\aleph_0}$ algunas familias de espacios de Banach no-separable no-reflexivos. Este es el caso, por ejemplo, de la familia de espacios de Banach no-separables y no-reflexivos X tales que X^* posee la propiedad (C) de Corson (por [93, p. 147]).

Claramente $X_\kappa = X$, si $1 \leq \kappa < \aleph_0$, y si $\kappa \geq \aleph_0$ entonces

$$X_\kappa = \bigcup \{\overline{E}^{w^*} : E \subset X \ \text{ subespacio tal que } Dens(E) \leq \kappa\},.$$

En cualquier caso $B(X_\kappa) = (B(X))_\kappa$ y también

$$X_\kappa = \bigcup \{\overline{A}^{w^*} : A \subset X \ \text{ subconjunto acotado tal que } |A| \leq \kappa\}.$$

En X^* definimos las topologías $\mathcal{T}_\kappa$ y γ_κ de la siguiente forma:

(a) $\mathcal{T}_\kappa := \sigma(X^*, X_\kappa)$, es decir, $\mathcal{T}_\kappa$ es la topología en X^* de la convergencia puntual sobre X_κ. Es claro que $w^* \leq \mathcal{T}_\kappa \leq w$ y $\mathcal{T}_n = w^*$ para todo $1 \leq n < \aleph_0$. Si $\kappa \geq Dens(X)$, $\mathcal{T}_\kappa = w$.

(b) Los siguientes asertos son claramente equivalentes:
(b1) $X^{**} = X_\kappa$, es decir, $\mathcal{T}_\kappa = w$.
(b2) X_κ separa puntos y subconjuntos convexos norma-cerrados de X^*.
(b3) $\overline{\text{co}}(D) = \overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_\kappa}(D)$ para todo subconjunto $D \subset X^{**}$.

(c) γ_κ denotará la topología en X^* de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos acotados $A \subset X$ tales que $|A| \leq \kappa$. Claramente, $\gamma_\kappa = \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$(=topología de la norma) para $\kappa \geq Dens(X)$ y también $w^* \leq \mathcal{T}_\kappa \leq \gamma_\kappa \leq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$. En realidad la topología $\mathcal{T}_\kappa$ es, como vamos a ver, la topología débil del espacio (X^*, γ_κ).

Denotaremos $\gamma := \gamma_{\aleph_0}$. La topología γ está muy relacionada con los contornos de James, como comprobaremos en los siguientes Capítulos, y ha sido utilizada con gran provecho por Cascales, Muñoz, Namioka y Orihuela en numerosos artículos (ver [88],[19],[18],[20],[14]) relacionados con contornos de James, la propiedad de Lindelof, etc. En este Capítulo obtenemos numerosos resultados relativos a las topologías γ_κ y $\mathcal{T}_\kappa$, entre los que destacamos los siguientes:

(1) Si κ es un cardinal y Y es subespacio de un espacio de Banach X, entonces $Y_\kappa = X_\kappa \cap Y^{**}$. En consecuencia la propiedad $X^{**} = X_\kappa$ se conserva por paso a subespacios y cocientes.

(2) $\overline{\text{co}}(K) = \overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_\kappa}(K)$ para todo subconjunto w^*-compacto $K \subset X^*$ y todo cardinal $\kappa \geq \aleph_0$.

(3) Si $\kappa \geq \aleph_0$ y $K_1, K_2 \subset X^*$ son dos subconjuntos w^*-compactos tales que

$$dist(\overline{\text{co}}(K_1), \overline{\text{co}}(K_2)) = d > 0,$$

existe $\psi \in S(X_\kappa)$ tal que $\inf\langle \psi, \overline{\text{co}}(K_2)\rangle = \sup\langle \psi, \overline{\text{co}}(K_1)\rangle + d$.

2.2. Propiedades básicas

Proposición 2.1. *Para todo espacio de Banach X y todo cardinal κ se verifica $(X^*, \gamma_\kappa)^* = (X^*, \mathcal{T}_\kappa)^* = X_\kappa$. Por tanto las topologías γ_κ y $\mathcal{T}_\kappa$ tienen los mismos convexos cerrados.*

Demostración. Es claro que $(X^*, \mathcal{T}_\kappa)^* = X_\kappa$ pues $\mathcal{T}_\kappa := \sigma(X^*, X_\kappa)$. Además, como la identidad $id : (X^*, \gamma_\kappa) \to (X^*, \mathcal{T}_\kappa)$ es continua, claramente $X_\kappa \subset (X^*, \gamma_\kappa)^*$. Veamos que $(X^*, \gamma_\kappa)^* \subset X_\kappa$. Sea $u \in (X^*, \gamma_\kappa)^*$. En primer término, $u \in X^{**}$ porque $\gamma_\kappa \leq \tau_{\|\cdot\|}$. Por ser u continuo en la γ_κ topología, existe un subconjunto acotado $A \subset X$ con $|A| \leq \kappa$ tal que para cierto $\epsilon > 0$ se verifica que

$$\{x^* \in X^* : \sup |\langle x^*, A\rangle| \leq \epsilon\} \subset \{x^* \in X^* : |\langle u, x^*\rangle| \leq 1\}. \tag{2.1}$$

Aserto. $u \in \overline{[A]}^{w^*}$.

En efecto, si $u \notin \overline{[A]}^{w^*}$, existe $x_0^* \in X^*$ tal que $x_0^* \perp \overline{[A]}^{w^*}$ pero $\langle u, x_0^*\rangle \neq 0$. El hecho $x_0^* \perp \overline{[A]}^{w^*}$ y (2.1) implican que $|\langle u, \lambda x_0^*\rangle| \leq 1,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, lo que es incompatible con la desigualdad $\langle u, x_0^*\rangle \neq 0$ y prueba el Aserto.

Finalmente, del Aserto sale que $u \in X_\kappa$. ■

Proposición 2.2. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes: (1) X carece de una copia de ℓ_1; (2) $Seq(X^{**}) = X_{\aleph_0}$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $z \in X_{\aleph_0}$. Entonces existe un subespacio cerrado separable $Y \subset X$ tal que $z \in \overline{Y}^{w^*}$. Como Y es separable y carece de copias de ℓ_1, por un resultado de Odell-Rosenthal [87] existe una secuencia $\{y_n : n \geq 1\} \subset Y$ tal que $y_n \stackrel{w^*}{\to} z$. Por tanto $z \in \mathcal{S}eq(X^{**})$. Como siempre $\mathcal{S}eq(X^{**}) \subset X_{\aleph_0}$, concluimos que $X_{\aleph_0} = \mathcal{S}eq(X^{**})$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que X tiene una copia Y isomorfa a ℓ_1. Como $(\ell_1)_{\aleph_0} = \ell_\infty^*$ (obvio, porque ℓ_1 es separable) y $\mathcal{S}eq(\ell_\infty^*) = \ell_1$ (por la Prop. 1.21), existe $u \in Y_{\aleph_0} \setminus \mathcal{S}eq(Y^{**})$. En consecuencia $u \in X_{\aleph_0}$ (porque $Y_{\aleph_0} \subset X_{\aleph_0}$) pero $u \notin \mathcal{S}eq(X^{**})$ por el Cor.1.20. ■

Proposición 2.3. *Sea X un espacio de Banach. Entonces:*

(1) $S(X_{\aleph_0})$ es un contorno de $B(X^{**})$.

(2) Un subconjunto $D \subset X^*$ es w-compacto sii D es $\mathcal{T}_{\aleph_0}$-compacto.

(3) Todos los espacios topológicos $(X^*, \mathcal{T})$, siendo $\mathcal{T} = w$ ó $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\kappa$, $\aleph_0 \leq \kappa$, tienen los mismos compactos y verifican el T. de Krein-Smulian, es decir, si $K \subset X^*$ es $\mathcal{T}$-compacto, entonces $\overline{\mathrm{co}}^{\mathcal{T}}(K)$ es también $\mathcal{T}$-compacto.

Demostración. (1) es inmediato y (2) y (3) salen de (1) y de un resultado de Pfitzner [90, Th. 9]. ■

Lema 2.4. *Sean X un espacio de Banach, $A \subset X$ un subconjunto infinito, $C \subset X$ un subconjunto convexo y $u \in X^{**}$ tal que $u \in \overline{A}^{w^*} \cap \overline{C}^{w^*}$. Entonces la "tightness $t_{w^*}(\cdot,\cdot)$" (ver la definición en el inicio del Capítulo 1 "Introducción") verifica*

$$t_{w^*}(u, C) \leq t_{w^*}(u, A) \leq |A|.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad suponemos que $|A| = t_{w^*}(u, A)$. Sea $co_{\mathbb{Q}}(A)$ el colectivo de las combinaciones convexas de A con coeficientes racionales. Obviamente, $|co_{\mathbb{Q}}(A)| = |A|$ porque A es infinito. Por cada $a \in co_{\mathbb{Q}}(A)$ elegimos $c_a \in \overline{C}$ tal que $\|c_a - a\| \leq 2dist(a, C)$. Es claro que $|\{c_a : a \in co_{\mathbb{Q}}(A)\}| \leq |A|$. Teniendo en cuenta que $t_{w^*}(u, C) = t_{w^*}(u, \overline{C})$, bastará probar el siguiente Aserto.

Aserto. $u \in \overline{\{c_a : a \in co_{\mathbb{Q}}(A)\}}^{w^*}$.

En efecto, si $\epsilon > 0$ y $x_1^*, ..., x_p^* \in S(X^*)$, consideremos el w^*-entorno convexo de u

$$W(u; x_1^*, ..., x_p^*; \epsilon) := \{z \in X^{**} : |\langle z - u, x_i^* \rangle| \leq \epsilon : i = 1, ..., p\}.$$

Sea $A_0 := A \cap W(u; x_1^*, ..., x_p^*; \epsilon/2)$. Es claro que $co(A_0) \subset W(u; x_1^*, ..., x_p^*; \epsilon/2)$.

SubAserto. $dist(\overline{C}, \overline{\text{co}}(A_0)) = dist(\overline{C}, \overline{\text{co}}_{\mathbb{Q}}(A_0)) = 0$.

En efecto, en primer término es claro que $dist(\overline{C}, \overline{\text{co}}(A_0)) = dist(\overline{C}, \overline{\text{co}}_{\mathbb{Q}}(A_0))$ porque $\overline{\text{co}}(A_0) = \overline{\text{co}}_{\mathbb{Q}}(A_0)$. Supongamos que $dist(\overline{C}, \overline{\text{co}}_{\mathbb{Q}}(A_0)) > 0$. Entonces por el teorema de separación de Hahn-Banach existe $x^* \in X^*$ verificando

$$\text{ínf}\langle x^*, C\rangle > \sup\langle x^*, co_{\mathbb{Q}}(A_0)\rangle. \tag{2.2}$$

Por tanto $\langle u, x^*\rangle \geq \text{ínf}\langle x^*, C\rangle$, porque $u \in \overline{C}^{w^*}$, y también $\sup\langle x^*, co_{\mathbb{Q}}(A_0)\rangle \geq \langle u, x^*\rangle$, porque $u \in \overline{A_0}^{w^*} \subset \overline{\text{co}}_{\mathbb{Q}}^{w^*}(A_0)$. Aplicando (2.2) se obtiene que $\langle u, x^*\rangle > \langle u, x^*\rangle$, una contradicción que prueba el SubAserto.

Por tanto existe $a \in co_{\mathbb{Q}}(A_0)$ tal que $\|c_a - a\| \leq \epsilon/2$. De aquí que para $i = 1, ..., p$ se verifica

$$|\langle c_a - u, x_i^*\rangle| \leq |\langle c_a - a, x_i^*\rangle| + |\langle a - u, x_i^*\rangle| \leq \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon = \epsilon.$$

En consecuencia $c_a \in W(u; x_1^*, ..., x_p^*; \epsilon)$, lo que prueba el Aserto y el Lema. ■

Corolario 2.5. *Sean X un espacio de Banach y κ un cardinal.*

(1) Si $Y \subset X$ es un subespacio, se verifica $Y_\kappa = Y^{**} \cap X_\kappa$.

(2) Si $X^{**} = X_\kappa$, se verifica que $Y^{**} = Y_\kappa$ para todo Y espacio de Banach que sea subespacio ó cociente de X.

Demostración. (1) Es claro que $Y_\kappa \subset Y^{**} \cap X_\kappa$. Sea $z \in Y^{**} \cap X_\kappa$. Si $z \in X$, entonces $z \in Y^{**} \cap X = Y \subset Y_\kappa$. Sea $z \notin X$. Por el Lema 2.4 se tiene

$$t_{w^*}(z, Y) \leq t_{w^*}(z, X) \leq \kappa.$$

Por tanto $z \in Y_\kappa$.

(2) Si $Y \subset X$, el resultado es consecuencia de (1). Sea Y un espacio de Banach tal que existe un cociente $Q : X \to Y$. Entonces $Q^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ es también un cociente w^*-w^*-continuo. Sean $u \in Y^{**}$ y $v \in X^{**}$ tales que $Q^{**}v = u$. Puesto que $X^{**} = X_\kappa$, existe un subconjunto $A \subset X$ tal que $|A| \leq \kappa$ y $v \in \overline{A}^{w^*}$. Ya que Q^{**} es w^*-w^*-continuo, concluimos que $u \in \overline{Q(A)}^{w^*}$. Por tanto $Y^{**} = Y_\kappa$. ■

Proposición 2.6. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes; (a) X es reflexivo; (b) $X_\kappa = X$, $\forall\kappa \geq 1$;(c) $X_{\aleph_0} = X$; (d) $(B(X^*), \mathcal{T}_{\aleph_0})$ es compacto; (e) $(B(X^*), \mathcal{T}_\kappa)$ es compacto para todo $\kappa \geq 1$.*

Demostración. Claramente $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d)$. $(d) \Rightarrow (e)$ sale de la Proposición 2.3. $(e) \Rightarrow (a)$ porque $\mathcal{T}_\kappa = w$ para $\kappa \geq Dens(X)$. ■

Proposición 2.7. *Sean I un conjunto infinito, κ un cardinal y $X := \ell_1(I)$. Entonces*

(a) $\mathcal{S}eq(X^{**}) = J(\ell_1(I))$, siendo $J : X \to X^{**}$ la inmersión canónica.

(b) Si κ es infinito, $X_\kappa = M_R(I_\kappa)(=$ medidas de Radon sobre $I_\kappa := \cup\{\overline{J}^{\beta I} : J \subset I, |J| \leq \kappa\})$.

(c) Para todo $\kappa < |I|$, $X^{**} \neq X_\kappa$.

Demostración. (a) es consecuencia de que $\ell_1(I)^* = \ell_\infty(I)$ es Grothendieck y de la Prop. 1.21.

(b) Para $\kappa \geq \aleph_0$ basta tener en cuenta que:

(i) Para todo subconjunto $A \subset \ell_1(I)$ con $|A| \leq \kappa$, existe un subconjunto $J \subset I$ con $|J| \leq \kappa$ tal que $A \subset \ell_1(J)$.

(ii) Para todo $J \subset I$ con $|J| \leq \kappa$, $\overline{\ell_1(J)}^{w^*} = \ell_1(J)^{**} = M_R(\beta J)$, considerado βJ como subconjunto de βI.

(c) es consecuencia de (b). ■

Pasemos a estudiar los siguientes resultados elementales.

Proposición 2.8. *Sean $\kappa \geq \aleph_0$ un cardinal, X un espacio de Banach, A un subconjunto del dual X^* y $z \in X^*$. Son equivalentes:*

(1) $z \in \overline{A}^{\mathcal{T}_\kappa}$.

(2) Para todo subespacio $Y \subset X$ se tiene que $i^*(z) \in \overline{i^*(A)}^{\mathcal{T}_\kappa}$, siendo $i : Y \to X$ la inclusión canónica.

(3) Para todo subespacio $Y \subset X$ con $Dens(Y) \leq \kappa$ se tiene que $i^*(z) \in \overline{i^*(A)}^{\mathcal{T}_\kappa} = \overline{i^*(A)}^{w}$, siendo $i : Y \to X$ la inclusión canónica.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) porque los operadores adjuntos i^* son $\mathcal{T}_\kappa$-$\mathcal{T}_\kappa$-continuos. (2) $\Rightarrow$ (3) es obvio.

(3) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que $z \notin \overline{A}^{\mathcal{T}_\kappa}$. Entonces existen $\epsilon > 0$ y $u_i \in X_\kappa, i = 1, \ldots, r$, tales que $W(z; u_1, \ldots, u_r; \epsilon) \cap A = \emptyset$, siendo

$$W(z; u_1, \ldots, u_r; \epsilon) := \{x^* \in X^* : |\langle u_i, z - x^*\rangle| < \epsilon, \ i = 1, \ldots, r\}$$

un entornos abierto "standard" de z en $(X^*, \mathcal{T}_\kappa)$. Sea $Y \subset X$ un subespacio con $Dens(Y) \leq \kappa$ tal que $u_i \in Y$, $i = 1, 2, \ldots, r$, y $i : Y \to X$ la inclusión canónica. Entonces

$$W(i^*(z); u_1, \ldots, u_r; \epsilon) := \{y^* \in Y^* : |\langle u_i, i^*z - y^*\rangle| < \epsilon, \ i = 1, \ldots, r\}$$

es un entorno abierto de i^*z en $(Y^*, \mathcal{T}_\kappa)$ que verifica

$$(i^*)^{-1}(W(i^*z; u_1, \ldots, u_r; \epsilon)) = W(z; u_1, \ldots, u_r; \epsilon).$$

Por tanto $W(i^*(z); u_1, \ldots, u_r; \epsilon) \cap i^*(A) = \emptyset$. Hemos llegado a una contradicción con (3) que prueba el enunciado.

Si I es un conjunto y $J \subset I$ un subconjunto, $P_J : \ell_\infty(I) \to \ell_\infty(J)$ será la aplicación restricción a J, es decir, $P_J(x) = x \upharpoonright J$, $\forall x \in \ell_\infty(I)$. Observemos que $P_J = i_J^*$, siendo $i_J : \ell_1(J) \to \ell_1(I)$ la aplicación inclusión canónica.

Proposición 2.9. *Sean I un conjunto infinito, $\kappa \geq \aleph_0$ un cardinal, A un subconjunto convexo de $\ell_\infty(I)$ y $z \in \ell_\infty(I)$. Son equivalentes*

(1) $z \in \overline{A}^{\mathcal{T}_\kappa}$.

(2) Para todo subconjunto $J \subset I$ con $|J| \leq \kappa$, se verifica que $P_J(z) \in \overline{P_J(A)}$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $i : \ell_1(J) \to \ell_1(I)$ la inclusión canónica. Entonces $i^* = P_J$ y $i^*z \in \overline{P_J(A)}^{\mathcal{T}_\kappa}$ por la Proposición 2.8. Finalmente observemos que $\overline{P_J(A)}^{\mathcal{T}_\kappa} = \overline{P_J(A)}$ porque $Dens(\ell_1(J)) \leq \kappa$ y $P_J(A)$ es convexo.

(2) $\Rightarrow$ (1). Sea $Y \subset \ell_1(I)$ un subespacio con $Dens(Y) \leq \kappa$. Elegimos $J \subset I$ subconjunto con $|J| \leq \kappa$ de modo que el soporte de los elementos de Y caiga dentro de J. Así que, de hecho, Y es un subespacio de $\ell_1(J)$. Sean $i_2 : \ell_1(J) \to \ell_1(I)$, $i_1 : Y \to \ell_1(J)$ y $i : Y \to \ell_1(I)$ las inclusiones canónicas, que verifican trivialmente $i = i_2 \circ i_1$ y $P_J = i_2^*$. Por hipótesis $P_J(z) \in \overline{P_J(A)} = \overline{P_J(A)}^{\mathcal{T}_\kappa}$. Por lo tanto

$$i^*(z) = i_1^* \circ i_2^*(z) = i_1^*(P_J(z)) \in i_1^*(\overline{P_J(A)}) \subset \overline{i_1^* \circ P_J(A)} = \overline{i^*(A)}.$$

Ahora basta aplicar la Proposición 2.8 para obtener (1). ■

2.3. $\overline{\text{co}}(K) = \overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_\kappa}(K)$ para todo w^*-compacto $K \subset X^*$ y todo $\kappa \geq \aleph_0$

Si X es un espacio de Banach, $\aleph_0 \leq \kappa$ y $K \subset X^*$ es un subconjunto w^*-compacto, se verifica (como para cualquier subconjunto $A \subset X^*$, naturalmente) que:

$$\overline{\text{co}}(K) \subset \overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_\kappa}(K) \subset \overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(K) \subset \overline{\text{co}}^{w^*}(K). \tag{2.3}$$

Lo que hace especiales a los subconjuntos w^*-compactos $K \subset X^*$, en relación con las topologías $\mathcal{T}_\kappa$, es que $\overline{\text{co}}(K) = \overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_\kappa}(K)$, $\forall \kappa \geq \aleph_0$, como vamos a ver. Para probar esta igualdad, teniendo en cuenta (2.3), bastará probarla para $\kappa = \aleph_0$, y esto es lo que hacemos a continuación. En primer término vemos que es suficiente considerar los espacios duales $\ell_1(I)^* = \ell_\infty(I)$.

Proposición 2.10. *Son equivalentes:*

(1) Para todo espacio de Banach dual X^* y todo subconjunto w^*-compacto $K \subset X^*$ se verifica que $\overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(K) = \overline{\text{co}}(K)$.

(2) Para todo conjunto no contable I y todo subconjunto w^*-compacto $K \subset \ell_\infty(I)$ se verifica que $\overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(K) = \overline{\text{co}}(K)$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) es obvio. Probemos que (2) $\Rightarrow$ (1). Como (1) es trivialmente cierto para X separable, suponemos que X es no-separable y elegimos I un conjunto con $|I| = Dens(X)$. Es bien conocido que existe un operador 1-cociente $Q : \ell_1(I) \to X$. Sea $K \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto. Por (2) se verifica $\overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(Q^*(K)) = \overline{\text{co}}(Q^*(K))$. Por otra parte $Q^*(X^*)$ es un subespacio $\mathcal{T}_{\aleph_0}$-cerrado de $\ell_\infty(I)$ (pues es w^*-cerrado) y $Q^* : X^* \to Q^*(X^*)$ es un isomorfismo para las topología $\tau_{\|\cdot\|}$, w^* y $\mathcal{T}_{\aleph_0}$. En consecuencia $\overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(K) = \overline{\text{co}}(K)$. ■

Por tanto, en vista de la anterior proposición, el lugar "natural" en donde indagar, para resolver la cuestión anterior, es el espacio $\ell_\infty(I)$, con I incontable.

Lema 2.11. *Sean I un conjunto, $K \subset [0,1]^I$ un subconjunto compacto, $z \in [0,1]^I$ y $\epsilon > 0$ de modo que para todo subconjunto finito $F \subset I$ existe $k_F \in K$ tal que $|\pi_i(k_F - z)| \leq \epsilon$, $\forall i \in F$, siendo π_i la i-ésima coordenada. Entonces existe $k_0 \in K$ tal que $\|k_0 - z\|_\infty \leq \epsilon$.*

Demostración. Basta observar que, por razones de compacidad, la red $\{k_F : F \subset I \text{ finito}\}$ tiene una subred que converge a cierto $k_0 \in K$, que claramente verifica $\|k_0 - z\|_\infty \leq \epsilon$. ■

Proposición 2.12. *Sean I un conjunto no vacío. Entonces todo subconjunto w^*-compacto $K \subset \ell_\infty(I)$ verifica que $\overline{\text{co}}(K) = \overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(K)$.*

Demostración. En primer término el enunciado es trivialmente cierto si $|I| \leq \aleph_0$, pues en tal caso $(\ell_1(I))_{\aleph_0} = \ell_\infty(I)^*$ y, por tanto, $\mathcal{T}_{\aleph_0} = w$ en $\ell_\infty(I)$.

Supongamos $|I| > \aleph_0$. Fijemos $z \in \overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(K)$. Por la Prop. 2.9 ocurre que $P_J(z) \in \overline{\text{co}}(P_J(K))$ para todo subconjunto contable $J \subset I$.

Aserto. Fijemos $\epsilon > 0$. Entonces existen $p \in \mathbb{N}$ y $\lambda_i \in \mathbb{Q}^+$, $i = 1, 2, ..., p$, con $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ de modo que, si $H_\epsilon := \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot K$, se tiene que existe $k_\epsilon \in H_\epsilon$ tal que $\|z - k_\epsilon\| \leq \epsilon$.

En efecto, consideremos en I la topología discreta, que es la topología asociada a la métrica completa ,$\forall i, j \in I, \delta(i,j) = 1$, si $i \neq j$, y 0 si $i = j$. En $I^{\mathbb{N}}$ consideramos la topología producto τ_p, que es la topología asociada a la métrica completa

$$\forall \alpha = (\alpha_n)_n, \beta = (\beta_n)_n \in I^{\mathbb{N}},\ d(\alpha, \beta) := \sum_{n \geq 1} \frac{\delta(\alpha_n, \beta_n)}{2^n}.$$

La base "standard" $\mathcal{B}$ para la topología τ_p es la siguiente. Se considera el conjunto $I^{<\mathbb{N}} := \cup_{n \geq 1} I^n$. Sean $s, t \in I^{<\mathbb{N}}$ y $\sigma \in I^{\mathbb{N}}$.

(i) Si $s \in I^n$, decimos que la longitud de s es n y ponemos $|s| = n$.

(ii) Decimos que s precede a t (abrev., $s \prec t$) sii $|s| \leq |t|$ y $s = (t(1), ..., t(n)) := t \upharpoonright n$.

(iii) Decimos que s precede a σ (abrev., $s \prec \sigma$) sii $s = (\sigma(1), ..., \sigma(n)) =: \sigma \restriction n$.

Con estas notaciones la base $\mathcal{B}$ es $\mathcal{B} := \{N_s : s \in I^{<\mathbb{N}}\}$ siendo $N_s := \{\sigma \in I^{\mathbb{N}} : s \prec \sigma\}$, $\forall s \in I^{<\mathbb{N}}$.

Observación. Cada elemento $J \in I^{\mathbb{N}}$ lo veremos, en primer término, como una sucesión de elementos de I, a saber, $J = (J(1), J(2), ...)$. Pero también consideraremos a J, cuando pongamos P_J, como un subconjunto (finito ó infinito) de I, a saber, $J := \{J(n) : n \in \mathbb{N}\}$.

Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de las familias finitas $D \subset \mathbb{Q}^+$ (sin orden) tales $\sum_{d \in D} d = 1$. Es claro que $|\mathcal{F}| = \aleph_0$. Por la Prop. 2.9 se verifica que $P_J(z) \in \overline{\text{co}}(P_J(K))$ para cada $J \in I^{\mathbb{N}}$. Esto quiere decir que podemos elegir una familia $D^J \in \mathcal{F}$, digamos $D^J = \{q_1^J, ..., q_{s_J}^J\}$, y $k_n^J \in K$, $n = 1, ..., s_J$, tales que $\|P_J(z) - \sum_{n=1}^{s_J} q_n^J \cdot P_J(k_n^J)\|_{\ell_\infty(J)} \leq \epsilon$. Los elegimos además de modo que $D^{J_1} = D^{J_2}$, si, como subconjuntos, $J_1 = J_2$.

Por cada $D \in \mathcal{F}$, sea $W(D) = \{J \in I^{\mathbb{N}} : D^J = D\}$. Es claro que $I^{\mathbb{N}} = \cup_{D \in \mathcal{F}} W(D)$. Como por el T. de Baire $I^{\mathbb{N}}$ es de 2ª categoría, existirá un $(\lambda_1, ..., \lambda_p) = D_0 \in \mathcal{F}$ tal que $int(\overline{W(D_0)}) \neq \emptyset$, es decir, que existe $s \in I^{<\mathbb{N}}$ tal que $N_s \subset \overline{W(D_0)}$. Sea $H_\epsilon := \sum_{d \in D_0} dK$. Sea $F \subset I$ un subconjunto finito arbitrario y $t \in I^{<\mathbb{N}}$ tal que $s \prec t$ y que $F \subset t$ (considerado t como subconjunto de I). Como N_t es un abierto tal que $N_t \subset N_s$, debe ocurrir que $N_t \cap W(D_0) \neq \emptyset$. Por tanto, existe $J \in I^{\mathbb{N}}$ tal que $t \prec J$ y $D^J = D_0$. Así que existen $k_i, ..., k_p \in K$ tales que, si $k_J := \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot k_i \in H_\epsilon$, se verifica $\|P_J(z) - P_J(k_J)\| \leq \epsilon$. En particular, para todo $i \in F \subset J$ se verifica que $|\pi_i(z - k_J)| \leq \epsilon$. Por el Lema 2.11 existe $k_\epsilon \in H_\epsilon$ tal que $\|z - k_\epsilon\| \leq \epsilon$.

Finalmente observemos que $\epsilon > 0$ es arbitrario y que $H_\epsilon \subset co(K)$, $\forall \epsilon > 0$. Por tanto $z \in \overline{\text{co}}(K)$. ■

Proposición 2.13. *Sea X un espacio de Banach. Entonces todo subconjunto w^*-compacto K de X^* verifica que $\overline{\text{co}}(K) = \overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_\kappa}(K)$, $\forall \kappa \geq \aleph_0$.*

Demostración. Sale de (2.3), de la Prop. 2.10 y la Prop. 2.12. ■

2.4. Espacios de Asplund y Lindelof

En esta sección hacemos ciertas observaciones en el sentido de que la propiedad de Lindelof es productiva, para las topologías $\gamma := \gamma_{\aleph_0}$ y $\mathcal{T}_{\aleph_0}$ en un espacio de Banach dual X^*. Comencemos tomando como punto de partida los siguientes hechos:

(HECHO A) Un espacio de Banach X es un espacio de Asplund sii Y^* es separable para todo subespacio separable $Y \subset X$ sii X^* es RNP.

(HECHO B) La topología γ de X^* es la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos $B(Y^{**}) \subset X^{**}$, siendo $Y \subset X$ subespacio separable.

Proposición 2.14. *Sea X un espacio de Banach separable. Son equivalentes:*

(1) X es Asplund; (2) (X^*, w) es Lindelof.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Si X es Asplund, X^* es separable y, por tanto, $\|\cdot\|$-Lindelof. En consecuencia (X^*, w) es Lindelof.

(2) $\Rightarrow$ (1). Si (X^*, w) es Lindelof, X^* es RNP por un resultado de Edgar [34, Th. 1.8] y, por tanto, X es Asplund. ■

Proposición 2.15. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(a) X es Asplund; (b) (X^*, γ) es Lindelof; (c) $(X^*, \mathcal{T}_{\aleph_0})$ es Lindelof

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ está probado en [88, TH. B] y $(b) \Rightarrow (c)$ es obvio porque $\mathcal{T}_{\aleph_0} \leq \gamma$.

$(c) \Rightarrow (a)$. Sean $Y \subset X$ un subespacio separable y $i : Y \to X$ la inclusión canónica. Claramente (Y^*, w) es Lindelof y, por la Prop. 2.14, Y^* es separable. En consecuencia X es Asplund. ■

Proposición 2.16. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(a) (X^*, γ) es Lindelof ;(b) $(X^*, \gamma)^n$ es Lindelof para $n = 1, 2, \ldots.$

(a') $(X^*, \mathcal{T}_{\aleph_0})$ es Lindelof ;(b') $(X^*, \mathcal{T}_{\aleph_0})^n$ es Lindelof para $n = 1, 2, \ldots.$

Demostración. Es claro que $(a) \Rightarrow (a')$ y $(b) \Rightarrow (b')$ porque $\mathcal{T}_{\aleph_0} \leq \gamma$.

$(a) \Rightarrow (b)$. En primer término (a) implica que X es Asplund por la Prop. 2.15, de donde X^n es también Asplund para todo $n \geq 1$. Observemos que $((X^n)^*, \gamma) = (X^*, \gamma)^n$, $\forall n \geq 1$. Aplicando otra vez la Prop. 2.15 obtenemos (b).

$(a') \Rightarrow (b')$. La prueba es análoga a la de $(a) \Rightarrow (b)$ teniendo en cuenta que $((X^n)^*, \mathcal{T}_{\aleph_0}) = (X^*, \mathcal{T}_{\aleph_0})^n$, $\forall n \geq 1$.

$(b') \Rightarrow (a)$ sale aplicando la Prop. 2.15. ■

2.5. Las distancia $dist_\kappa$ y el poder separador de X_κ

Si $C, D \subset X^*$ son subconjuntos convexos y $z \in X^*$, se han definido las distancias $dist(z, C)$, $dist(C, D)$ y $DIST(C, D)$ en Cap.1. A la vista de estas definiciones, para todo cardinal κ, podemos definir las siguientes distancias.

Definición 2.17. *Sean X un espacio de Banach y $C, D \subset X^*$ dos subconjuntos convexos.*

(1) Definimos la distancia $dist_\kappa(z, C)$ de un punto $z \in X^*$ a C como

$$dist_\kappa(z, C) := \sup\{\text{ínf}\{|\langle \psi, z - c\rangle| : c \in C\} : \psi \in S(X_\kappa)\} =$$
$$= \sup\{0 \vee \text{ínf}\langle \psi, x - C\rangle : \psi \in S(X_\kappa)\}.$$

(2) La distancia $dist_\kappa(C,D)$ *se define como*

$$dist_\kappa(C,D) := \sup\{0 \vee (\operatorname{ínf}\langle\psi, C\rangle - \sup\langle\psi, D\rangle) : \psi \in S(X_\kappa)\} = \\ = \sup\{0 \vee (\operatorname{ínf}\langle\psi, C - D\rangle) : \psi \in S(X_\kappa)\} = dist_\kappa(0, C-D).$$

(3) La distancia $DIST_\kappa(C,D)$ *se define como*

$$DIST_\kappa(C,D) := \sup\{0 \vee (\sup\langle\psi, C\rangle - \sup\langle\psi, D\rangle) : \psi \in S(X_\kappa)\}.$$

Estamos interesados en estudiar la "capacidad" de separación de los subespacios $X_\kappa \subset X^{**}$ en relación con los subconjuntos convexos de X^*.

NOTAS. Sean $\kappa \geq 1$ un cardinal, X un espacio de Banach, C y D subconjuntos convexos de X^* y $z \in X^*$. Entonces

(1) Es claro que $dist_\kappa = dist$ para $\kappa \geq Dens(X)$. En general, $dist(z,C) \geq dist_\kappa(z,C) \geq 0$ para todo cardinal κ. Es inmediato ver que

$$dist_\kappa(z,C) = dist_\kappa(z, \overline{C}^{\mathcal{T}_\kappa}) \text{ y que } \quad dist_\kappa(z,C) = 0 \text{ sii } z \in \overline{C}^{\mathcal{T}_\kappa}.$$

En consecuencia, si $z \in \overline{C}^{\mathcal{T}_\kappa} \setminus \overline{C}$, ocurre que $dist_\kappa(z,C) = 0$ pero $dist(z,C) > 0$.

(2) Si $z \notin \overline{C}^{\mathcal{T}_\kappa}$ entonces

$$dist_\kappa(z,C) = \sup\{\operatorname{ínf}\langle\psi, z - C\rangle : \psi \in S(X_\kappa)\}.$$

(3) Es claro que $dist(D,C) \geq dist_\kappa(D,C) \geq dist_\rho(D,C) \geq dist_{\aleph_0}(D,C)$ para cardinales tales que $\aleph_0 \leq \rho \leq \kappa$. Además $dist_\kappa(D,C) = dist_\kappa(\overline{D}^{\mathcal{T}_\kappa}, \overline{C}^{\mathcal{T}_\kappa})$.

(4) $dist_\kappa = dist$ sii $X^{**} = X_\kappa$. En efecto, es claro que, si $X^{**} = X_\kappa$, entonces $dist_\kappa = dist$. Supongamos que $X^{**} \neq X_\kappa$. Entonces existen un subconjunto convexo $\|\cdot\|$-cerrado $D \subset X^*$ y un punto $u \in X^*$ tales que $u \notin D$ pero $u \in \overline{D}^{\mathcal{T}_\kappa}$. En consecuencia, $dist(u,D) > 0$ pero $dist_\kappa(u,D) = 0$.

(5) Si $\kappa \geq \aleph_0$ y $dist_\kappa(D,C) = d_0 > 0$, existe $\psi_0 \in S(X_\kappa)$ tal que $\operatorname{ínf}\langle\psi_0, D - C\rangle = d_0$. En efecto, por la definición de $dist_\kappa$, por cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\psi_n \in S(X_\kappa)$ tal que $\operatorname{ínf}\langle\psi_n, D - C\rangle > d_0 - \frac{1}{n}$. Ahora es suficiente tomar como ψ_0 cualquier punto de w^*-acumulación de $\{\psi_n : n \geq 1\}$.

A pesar de que el hecho $dist(D,C) > 0$ no asegura que sea $dist_\kappa(D,C) > 0$, existen numerosos pares importantes de subconjuntos convexos $D, C \subset X^*$ para los que $dist(D,C) = dist_\kappa(D,C) > 0$.

Lema 2.18. *Sean X un espacio de Banach, $K \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto y $z \in X^*$. Entonces $dist(z, \overline{\mathrm{co}}(K)) = dist_\kappa(z, \overline{\mathrm{co}}(K))$ para todo cardinal $\aleph_0 \leq \kappa$.*

Demostración. Como para todo cardinal $\aleph_0 \leq \kappa$ se verifica que

$$dist(z, \overline{\text{co}}(K)) \geq dist_\kappa(z, \overline{\text{co}}(K)) \geq dist_{\aleph_0}(z, \overline{\text{co}}(K)),$$

bastará probar el enunciado para $\kappa = \aleph_0$. Sin pérdida de generalidad hacemos $z = 0$. Supongamos que $dist(0, \overline{\text{co}}(K)) = 0$, es decir, $0 \in \overline{\text{co}}(K)$. Entonces claramente $dist_{\aleph_0}(0, \overline{\text{co}}(K)) = dist_{\aleph_0}(0, \overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(K)) = 0$ y $0 \in \overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(K)$. Supongamos ahora que $0 \notin \overline{\text{co}}(K)$ y sea $d_0 = dist(0, \overline{\text{co}}(K)) > 0$. Probamos a continuación que $dist_{\aleph_0}(0, \overline{\text{co}}(K)) = d_0$. Fijemos $\epsilon > 0$ tal que $d_0 > \epsilon > 0$. Entonces $\overline{\text{co}}(K + \epsilon B(X^*)) = \overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(K + \epsilon B(X^*))$ por la Prop. 2.13 y también:

$$0 \notin \overline{co(K) + \epsilon B(X^*)} = \overline{\text{co}}(K + \epsilon B(X^*)) = \overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(K + \epsilon B(X^*)).$$

En consecuencia $dist_{\aleph_0}(0, \overline{\text{co}}(K + \epsilon B(X^*))) > 0$, de donde

$$\begin{aligned} 0 < dist_{\aleph_0}(0, \overline{\text{co}}(K + \epsilon B(X^*))) &= dist_{\aleph_0}(0, co(K + \epsilon B(X^*))) = \\ &= \sup\{\text{ínf}\langle \psi, K + \epsilon B(X^*)\rangle : \psi \in S(X_{\aleph_0})\} = \\ &= \sup\{\text{ínf}\langle \psi, K\rangle : \psi \in S(X_{\aleph_0})\} - \epsilon = dist_{\aleph_0}(0, \overline{\text{co}}(K)) - \epsilon. \end{aligned}$$

Es decir, $dist_{\aleph_0}(0, \overline{\text{co}}(K)) > \epsilon$. Como $\epsilon < d_0$ es arbitrario, concluimos que

$$dist_{\aleph_0}(0, \overline{\text{co}}(K)) = d_0 = dist(0, \overline{\text{co}}(K)).$$

■

Proposición 2.19. *Sean X un espacio de Banach y $K_1, K_2 \subset X^*$ dos subconjuntos w^*-compactos tales que $dist(\overline{\text{co}}(K_1), \overline{\text{co}}(K_2)) = d_0 > 0$. Si κ es un cardinal infinito, existe $\psi \in S(X_\kappa)$ tal que*

$$\text{ínf}\langle \psi, \overline{\text{co}}(K_2) - \overline{\text{co}}(K_1)\rangle = \text{ínf}\langle \psi, \overline{\text{co}}(K_2)\rangle - \sup\langle \psi, \overline{\text{co}}(K_1)\rangle = d_0. \tag{2.4}$$

Por tanto $dist_\kappa(\overline{\text{co}}(K_2), \overline{\text{co}}(K_1)) = d_0$.

Demostración. En primer término observemos que

$$co(K_2 - K_1) = co(K_2) - co(K_1) \subset \overline{\text{co}}(K_2) - \overline{\text{co}}(K_1) \subset \overline{\text{co}}(K_2 - K_1).$$

Por el Lema 2.18

$$\begin{aligned} dist_\kappa(0, \overline{\text{co}}(K_2 - K_1)) &= dist(0, \overline{\text{co}}(K_2 - K_1)) = \\ &= dist(0, \overline{\text{co}}(K_2) - \overline{\text{co}}(K_1)) = dist(\overline{\text{co}}(K_2), \overline{\text{co}}(K_1)) = d_0 > 0. \end{aligned}$$

Por (5) de las NOTAS anteriores existe $\psi \in S(X_\kappa)$ tal que

$$d_0 = \text{ínf}\langle \psi, \overline{\text{co}}(K_2 - K_1)\rangle = \text{ínf}\langle \psi, \overline{\text{co}}(K_2) - \overline{\text{co}}(K_1)\rangle = \text{ínf}\langle \psi, \overline{\text{co}}(K_2)\rangle - \sup\langle \psi, \overline{\text{co}}(K_1)\rangle.$$

■

Proposición 2.20. *Sean κ un cardinal infinito, X un espacio de Banach, $K \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto y $D \subset X^*$ un subconjunto convexo tales que $Dens(D, \mathcal{T}_\kappa) \leq \kappa$ y $dist(\overline{\text{co}}(K), D) = d_0 > 0$. Entonces existe $\psi \in S(X_\kappa)$ tal que*

$$\text{ínf}\langle \psi, \overline{\text{co}}(K)\rangle = \sup\langle \psi, D\rangle + d_0,$$

y por tanto $dist_\kappa(\overline{\text{co}}(K), D) = d_0$.

Demostración. Sea $D_0 \subset D$ un subconjunto $\mathcal{T}_\kappa$-denso en D con $|D_0| \leq \kappa$. Sea $F \subset D_0$ un subconjunto finito. Como F es un w^*-compacto y

$$dist(\overline{\text{co}}(K), co(F)) \geq dist(\overline{\text{co}}(K), D) = d_0 > 0,$$

por la Prop. 2.19 existe $\psi_F \in S(X_\kappa)$ tal que

$$\langle \psi_F, h\rangle \geq \langle \psi_F, c\rangle + d_0, \ \forall h \in \overline{\text{co}}(K), \ \forall c \in co(F).$$

La red $\mathcal{B} := \{\psi_F : F \subset D_0 \text{ finito}\} \subset B(X_\kappa) \subset B(X^{**})$ tiene una subred convergente, digamos, a cierto $\varphi \in B(X^{**})$. Puesto que $|\mathcal{B}| \leq \kappa$, de hecho, $\varphi \in B(X_\kappa)$. Claramente

$$\text{ínf}\langle \varphi, \overline{\text{co}}(K)\rangle \geq \sup\langle \varphi, co(D_0)\rangle + d_0.$$

Puesto que $\|\varphi\| \leq 1$ debe ser

$$\text{ínf}\langle \varphi, \overline{\text{co}}(K)\rangle = \sup\langle \varphi, co(D_0)\rangle + d_0,$$

por lo que $\varphi \in S(X_\kappa)$, y esto termina la prueba. ■

Proposición 2.21. *Sean κ un cardinal infinito, X un espacio de Banach, $C, D \subset X^*$ dos subconjuntos convexos tales que $Dens(C, \mathcal{T}_\kappa) \leq \kappa \geq Dens(D, \mathcal{T}_\kappa)$ y $dist(C, D) = d_0 > 0$. Entonces existe $\psi \in S(X_\kappa)$ tal que*

$$\text{ínf}\langle \psi, \overline{\text{co}}(K)\rangle = \sup\langle \psi, D\rangle + d_0$$

y por tanto $dist_\kappa(C, D) = d_0$.

Demostración. Sea $C_0 \subset C$ un subconjunto $\mathcal{T}_\kappa$-denso en C tal que $|C_0| \leq \kappa$. Sea $E \subset C_0$ un subconjunto finito. Por la Proposición 2.20 existe $\psi_E \in S(X_\kappa)$ tal que

$$\text{ínf}\langle \psi_E, \overline{\text{co}}(E)\rangle \geq \langle \psi_E, D\rangle + d_0.$$

La red $\mathcal{B} := \{\psi_E : E \subset C_0 \text{ finito}\} \subset S(X_\kappa) \subset B(X^{**})$ posee una subred que w^*-converge a cierto $\psi \in B(X^{**})$. Puesto que $|C_0| \leq \kappa \geq \aleph_0$, claramente $|\mathcal{B}| \leq \kappa$ y $\psi \in X_\kappa$. Por tanto

$$\text{ínf}\langle \psi, co(C_0)\rangle = \text{ínf}\langle \psi, C\rangle \geq \sup\langle \psi, D\rangle + d_0.$$

De hecho $\text{ínf}\langle \psi, C\rangle = \sup\langle \psi, D\rangle + d_0$ y $\|\psi\| = 1$ porque $dist(C, D) = d_0 > 0$. Esto completa la prueba. ■

A continuación vemos que la distancia $dist(\cdot,\cdot)$ y las distancias $dist_\kappa(\cdot,\cdot), \kappa \geq \aleph_0$, coinciden en $\overline{\text{co}}^{w^*}(K)$, cuando $K \subset X^*$ es un subconjunto w^*-compacto metrizable. Puesto que $dist(\cdot,\cdot) \geq dist_\kappa(\cdot,\cdot) \geq dist_{\aleph_0}(\cdot,\cdot)$, $\forall \kappa \geq \aleph_0$, bastará probar la igualdad entre $dist(\cdot,\cdot)$ y $dist_{\aleph_0}(\cdot,\cdot)$. Precisamos los siguientes lemas.

Lema 2.22. *Sean X un espacio de Banach y $K \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto w^*-metrizable. Entonces $\overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ es también w^*-metrizable.*

Demostración. Consideremos el espacio $C(K)$ de las funciones reales continuas sobre K, que es un espacio de Banach separable, por ser (K, w^*) métrico compacto. Sea $T : X \to C(K)$ el operador lineal y continuo tal que $Tx := x \upharpoonright K$, $\forall x \in X$. Sea $\mathcal{P}_R(K)$ subconjunto de $C(K)^*$ formado por las probabilidades Borel de tipo Radon sobre K con la w^*-topología. Sabemos el conjunto $(\mathcal{P}_R(K), w^*)$ con la w^*-topología es convexo métrico compacto tal que $T^*(\mathcal{P}_R(K)) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$, siendo T^* una aplicación w^*-w^*-continua. En consecuencia, el espacio $C(\overline{\text{co}}^{w^*}(K))$ se sumerge isométricamente dentro del espacio $C(\mathcal{P}_R(K))$, que es separable. Así que $C(\overline{\text{co}}^{w^*}(K))$ es también separable y, por tanto, $(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), w^*)$ es metrizable. ■

Lema 2.23. *Sean X un espacio de Banach y $K \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto w^*-metrizable. Entonces existe un subespacio separable $E \subset X$ tal que, si $i : E \to X$ es la inclusión canónica y $i^* : X^* \to E^*$ el cociente adjunto, se verifica que*

(1) i^* es un homeomorfismo entre $(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), w^*)$ y su imagen $(i^*(\overline{\text{co}}^{w^*}(K)), w^*)$.

(2) i^* es una isometría entre $(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \|\cdot\|)$ y su imagen $(i^*(\overline{\text{co}}^{w^*}(K)), \|\cdot\|)$.

Demostración. Sea $D := \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$, que es w^*-metrizable por Lema 2.22. Consideremos a $B(X) \upharpoonright D$ como subconjunto del espacio $C(D)$ de las funciones reales continuas sobre D, que es separable. Como $B(X) \upharpoonright D$ es separable para la norma de $C(D)$, se puede elegir una familia contable $\{f_n : n \geq 1\} \subset B(X)$ densa en $B(X) \upharpoonright D$ para la norma de $C(D)$. Sean $E := \overline{[\{f_n : n \geq 1\}]}$, que es un subespacio separable de X, e $i : E \to X$ la inclusión canónica. Entonces

(1) i^* es un homeomorfismo entre (D, w^*) y su imagen $(i^*(D), w^*)$ porque E separa puntos de D.

(2) i^* es una isometría entre $(D, \|\cdot\|)$ y su imagen $(i^*(D), \|\cdot\|)$. En efecto, sean $d_1, d_2 \in D$. Por la elección de la familia $\{f_n : n \geq 1\} \subset B(X)$ Se tiene que

$$\|d_1 - d_2\| = \sup\{|\langle x, d_1 - d_2\rangle| : x \in B(X)\} = \sup\{|\langle f_n, d_1 - d_2\rangle| : n \geq 1\} =$$
$$= \sup\{|\langle e, d_1 - d_2\rangle| : e \in B(E)\} = \|i^* d_1 - i^* d_2\|.$$

■

Proposición 2.24. *Sean X un espacio de Banach y $K \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto w^*-metrizable. Entonces para todo par de subconjuntos $A, B \subset \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$ con B convexo se verifica que $dist_{\aleph_0}(A,B) = dist(A,B)$ y $DIST_{\aleph_0}(A,B) = DIST(A,B)$.*

Demostración. Bastará probar que $dist_{\aleph_0}(z,B) = dist(z,B)$ para todo $z \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$. Por Lema 2.23 podemos suponer que X es separable. De aquí que $X_{\aleph_0} = X^{**}$ y por tanto $dist_{\aleph_0}(\cdot,\cdot) = dist(\cdot,\cdot)$. ∎

Capítulo 3

Funciones 1-Baire y funciones universalmente medibles

3.1. Introducción

El objetivo de este Capítulo es la introducción y el estudio de ciertas familias de funciones (funciones de tipo Baire, funciones con la propiedad del punto de continuidad, universalmente medibles, etc.) y de ciertos índices relacionados con las anteriores familias. En los capítulos siguientes utilizaremos todas estas nociones. Con más detalle acometemos las siguientes tareas:

(a) Estudiamos ciertas familias de funciones de tipo Baire, que denotamos por $\mathcal{B}_1^\epsilon(K)$, $d\mathcal{B}_1(K)$ y $PCP(K)$. Introducimos los índices de fragmentación $Frag(\psi, K)$, $Frag(K)$ y los relacionamos con la distancia $dist(\psi, \mathcal{B}_1^\epsilon(K))$.

(b) Caracterizamos la igualdad $\mathcal{B}_1(K) = PCP(K)$ para un compacto Hausdorff K.

(c) Introducimos y estudiamos las clases $\mathcal{U}^\epsilon(K)$ de funciones ϵ-universalmente medibles y el índice de medibilidad $Med(\psi, K)$, que relacionamos con los índices de fragmentabilidad y distancias.

3.2. Funciones 1-Baire

Comenzaremos introduciendo la terminología a utilizar. Sean X, Y espacios topológicos Hausdorff y $f : X \to Y$.

(a) Se dice que f **es 1-Baire** si existe una secuencia $\{f_n : n \geq 1\}$ en el espacio $C(X, Y)$ de las funciones continuas de X en Y tal que $f_n \to f$ puntualmente sobre X. Denotaremos por $\mathcal{B}_1(X, Y)$ el espacio de las funciones 1-Baire de X en Y. Cuando (Y, d) es un espacio métrico, denotaremos por $\mathcal{B}_{1b}(X, Y)$ al **espacio de las funciones 1-Baire acotadas** de X en Y.

(b) Si (Y, d) es un espacio métrico y $\epsilon \geq 0$, $\mathcal{B}_1^\epsilon(X, Y)$ (resp., $\mathcal{B}_{1b}^\epsilon(X, Y)$) será la familia de las funciones (resp., las funciones acotadas) $f : X \to Y$ verificando que para todo

$\eta > \epsilon$ y todo subconjunto no-vacío $F \subset X$ existe un abierto $V \subset X$ tal que $V \cap F \neq \emptyset$ y $\mathrm{diam}(f(V \cap F)) \leq \eta$. Es claro que $\mathcal{B}_1^{\epsilon_1}(X,Y) \subset \mathcal{B}_1^{\epsilon_2}(X,Y)$, para $0 \leq \epsilon_1 \leq \epsilon_2$, y que $\mathcal{B}_1^0(X,Y) = \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{B}_1^{\epsilon}(X,Y)$.

(c) Denotaremos por $d\mathcal{B}_1(X,Y)$ al espacio de las funciones $f : X \to Y$ tales que $f^{-1}(U) \in \Sigma_2^0(X) = \mathcal{F}_\sigma(X)$, $\forall U \in T_Y$, es decir, que $f^{-1}(U)$ es un subconjunto $\mathcal{F}_\sigma$ de X, para todo abierto U de Y. Si (Y,d) es un espacio métrico, $d\mathcal{B}_{1b}(X,Y)$ denotará al espacio de los elementos acotados $f \in d\mathcal{B}_1(X,Y)$.

(d) Denotaremos por $PCP(X,Y)$ al espacio de las funciones $f : X \to Y$ con la **propiedad del punto de continuidad**, es decir, tales que, para todo subconjunto cerrado no vacío $F \subset X$, $f \restriction F$ tiene un punto de continuidad en F. Estas funciones se pueden encontrar en la literatura científica bajo distintos notaciones. Por ejemplo, en [107, p. 78], para K compacto Hausdorff, nuestro espacio $PCP(K,\mathbb{R})$ se denota por $B_r'(K)$. Si (Y,d) es un espacio métrico se prueba fácilmente que $PCP(X,Y) \subset \mathcal{B}_1^0(X,Y)$.

(e) Cuando $Y = \mathbb{R}$ escribiremos $\mathcal{B}_1(X)$, $\mathcal{B}_{1b}(X)$, $d\mathcal{B}_1(X)$, $PCP(X)$, etc., en lugar de $\mathcal{B}_1(X,\mathbb{R})$, $\mathcal{B}_{1b}(X,\mathbb{R})$, $d\mathcal{B}_1(X,\mathbb{R})$, $PCP(X,\mathbb{R})$, etc.

(f) Recordemos que un espacio topológico Hausdorff X es **hereditariamente Baire** sii todos los subconjuntos cerrados de X son espacios de Baire. Como todo espacio de Baire es 2ª categoría (en sí mismo), todo espacio hereditariamente Baire es hereditariamente 2ª categoría (en sí mismo) para los subconjuntos cerrados.

Estamos interesados especialmente en los espacios $\mathcal{B}_{1b}^{\epsilon}(X,Y)$, que vamos a utilizar frecuentemente en lo que sigue.

Proposición 3.1. *Sea X un espacio topológico Hausdorff.*

(1) Para todo $\lambda > 0$ y todo $\epsilon \geq 0$ se tiene que $\lambda B_1^{\epsilon}(X) = B_1^{\lambda\epsilon}(X)$.

(2) Si $\epsilon_1, \epsilon_2 \geq 0$, entonces $B_1^{\epsilon_1}(X) + B_1^{\epsilon_2}(X) = B_1^{\epsilon_1+\epsilon_2}(X)$.

(3) $\forall \epsilon \geq 0$, $B_{1b}^{\epsilon}(X) \subset \ell_\infty(X)$ es un subconjunto cerrado convexo y simétrico respecto de 0.

(4) $\mathcal{B}_{1b}^0(X)$ es un subespacio cerrado de $\ell_\infty(X)$.

Demostración. (1) y (2) son de comprobación inmediata.

(3) Que $\mathcal{B}_{1b}^{\epsilon}(X)$ es simétrico respecto de 0 sale de la propia definición de $\mathcal{B}_{1b}^{\epsilon}(X)$. Por (1) y (2) $\mathcal{B}_{1b}^{\epsilon}(X)$ es convexo. Veamos que $\mathcal{B}_{1b}^{\epsilon}(X)$ es cerrado en $\ell_\infty(X)$. Sea $f \in \ell_\infty(X)$ tal que $f \in \overline{\mathcal{B}_{1b}^{\epsilon}(X)}$. Sean $\emptyset \neq A \subset X$ y $\eta > \epsilon$. Elegimos $g \in \mathcal{B}_{1b}^{\epsilon}(X)$ tal que $\|f-g\| \leq \frac{1}{3}(\eta-\epsilon)$. Como $g \in \mathcal{B}_{1b}^{\epsilon}(X)$, existe un abierto $U \subset X$ tal que $U \cap A \neq \emptyset$ y $diam(g(U \cap A)) \leq \epsilon + \frac{1}{3}(\eta-\epsilon)$. En consecuencia

$$diam(f(U \cap A)) \leq diam(g(U \cap A)) + 2\|f-g\| \leq \eta,$$

lo que prueba que $f \in \mathcal{B}_{1b}^{\epsilon}(X)$. Por tanto, $\mathcal{B}_{1b}^{\epsilon}(X)$ es cerrado en $\ell_\infty(X)$.

(4) Por (1), (2) y (3) es claro que $\mathcal{B}_{1b}^0(X)$ es un subespacio cerrado de $\ell_\infty(X)$. ∎

En la literatura hay numerosos resultados que relacionan entre sí los espacios $\mathcal{B}_1(X,Y)$, $\mathcal{B}_1^0(X,Y), d\mathcal{B}_1(X,Y)$, etc. Sin ánimo de ser exhaustivos, recogemos a continuación algunos de ellos.

Proposición 3.2. *(1) Para todo X espacio topológico Hausdorff y todo espacio métrico (Y,d) se verifica $\mathcal{B}_1(X,Y) \subset d\mathcal{B}_1(X,Y)$.*

(2) Para todo espacio métrico (X,d) se verifica $\mathcal{B}_1(X) = d\mathcal{B}_1(X)$.

Demostración. (1) Sean $f \in \mathcal{B}_1(X,Y)$ y $U \in T_Y$. Probemos que $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}_\sigma(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ pongamos

$$U_n := \{y \in U : dist(y, {}^cU) \geq 1/n\}.$$

Cada U_n es cerrado verificando

$$U_n \subset \overset{\circ}{U}_{n+1} \subset U \quad \text{y} \quad \bigcup_{n\geq 1} U_n = U.$$

Sea $(f_m)_{m\geq 1} \subset C(X,Y)$ tal que $f_m \to f$ puntualmente sobre X. Entonces

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{k\geq 1} \bigcap_{m\geq k} f_m^{-1}(U_k),$$

lo que prueba que $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}_\sigma(X)$.

(2) La inclusión $\mathcal{B}_1(X) \subset d\mathcal{B}_1(X)$ sale de (1), mientras que la inclusión contraria está probada en el (24.10) Theorem, pg. 192, de [70]. ■

NOTA. En general $\mathcal{B}_1(X,Y) \neq d\mathcal{B}_1(X,Y)$, incluso para X,Y espacios métricos compactos. En efecto, $\mathcal{B}_1([0,2],\{0,1\}) \neq d\mathcal{B}_1([0,2],\{0,1\})$ pues, si $f := \mathbb{1}_{[0,1]}$, $f \in d\mathcal{B}_1([0,2],\{0,1\})$ pero $f \notin \mathcal{B}_1([0,2],\{0,1\})$ (ver pg. 192 de [70]).

Proposición 3.3. *Sean X espacio topológico Hausdorff, (Y,d) espacio métrico y $f \in \mathcal{B}_1(X,Y)$. Entonces el conjunto D de los puntos de discontinuidad de f en X es un subconjunto $\mathcal{F}_\sigma$ de 1^a categoría de X.*

Demostración. (Tomada de [72], pags. 394 y 397) Si $\epsilon \geq 0$, definimos

$$E(\epsilon) := \{x \in X : Osc(f,x) \geq \epsilon\}.$$

$E(\epsilon)$ es un subconjunto cerrado de X. Como $D = \cup_{n\geq 1} E(1/n)$, bastará probar que $E(\epsilon)$ es 1ª categoría para un cierto $\epsilon > 0$ fijo. Sea $(f_m)_{m\geq 1} \subset C(X,Y)$ tal que $f_m \to f$ puntualmente sobre X. Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea

$$A_k := \{x \in X : d(f_m(x), f_k(x)) \leq \epsilon/4, \forall m \geq k\}.$$

Es claro que A_k es un cerrado de X y que $X = \bigcup_{k\geq 1} A_k$, de donde

$$E(\epsilon) = (E(\epsilon) \cap A_1) \cup (E(\epsilon) \cap A_2) \cup ....$$

Aserto. $E(\epsilon) \cap A_k \subset Fr(A_k),\ \forall k \geq 1$.

En efecto, bastará ver que $E(\epsilon) \cap \overset{\circ}{A}_k = \emptyset$. Sea $x \in \overset{\circ}{A}_k$. Como f_k es continua, existe un entorno abierto G de x tal que $x \in G \subset \overset{\circ}{A}_k$ de modo que

$$d - diam(f_k(G)) < \epsilon/4.$$

Por tanto, si $x', x" \in G$, se tiene que

$$d(f(x'), f(x")) \leq \tfrac{3}{4}\epsilon < \epsilon,$$

lo que prueba que $Osc(f, x) < \epsilon$, es decir, que $x \notin E(\epsilon)$.

Para terminar bastará observar que $Fr(A_k)$ es diseminado. ■

Proposición 3.4. *Sean X, Y espacios topológicos de modo que Y es 2º Axioma y $f \in d\mathcal{B}_1(X,Y)$. Entonces el subconjunto $D_f \subset X$ de los puntos de discontinuidad de f verifica $D_f = \cup_{n\geq 1} H_n$ siendo H_n cerrado diseminado, es decir, D_f es un $\mathcal{F}_\sigma$ de 1ª categoría.*

Demostración. Sea $\{V_n : n \geq 1\}$ una base contable de la topología de Y. Es inmediato que

$$D_f = \bigcup_{n\geq 1} (f^{-1}(V_n) \setminus int(f^{-1}(V_n))).$$

Por otra parte, como $f \in d\mathcal{B}_1(X,Y)$, $f^{-1}(V_n)$ es un $\mathcal{F}_\sigma$, así como también lo es $f^{-1}(V_n) \setminus int(f^{-1}(V_n))$, digamos

$$f^{-1}(V_n) \setminus int(f^{-1}(V_n)) = \bigcup_{k\geq 1} F_{nk}$$

donde cada F_{nk} es cerrado y, además, $int(F_{nk}) = \emptyset$ pues $int(f^{-1}(V_n) \setminus int(f^{-1}(V_n))) = \emptyset$. Esto termina la prueba. ■

Corolario 3.5. *Sea X un espacio topológico Hausdorff.*

(A) Sea (Y, d) espacio métrico. Entonces:

(A1) Si X es un espacio de Baire y $f \in \mathcal{B}_1(X,Y)$, el conjunto de los puntos de continuidad X_f de f en X es un subconjunto $\mathcal{G}_\delta$ denso en X.

(A2) Sea X hereditariamente Baire. Entonces $\mathcal{B}_1(X,Y) \subset PCP(X,Y) = \mathcal{B}_1^0(X,Y)$. En particular, $\mathcal{B}_1(X) \subset PCP(X) = \mathcal{B}_1^0(X)$.

(A3) Si X es hereditariamente Baire y Y es separable, se tiene que $\mathcal{B}_1(X,Y) \subset d\mathcal{B}_1(X,Y) \subset PCP(X,Y)$.

Demostración. (A1) Por la Proposición 3.3 el conjunto D de los puntos de discontinuidad de f en X es un $\mathcal{F}_\sigma$ de 1ª categoría. En consecuencia, como X es un espacio de Baire, el conjunto $X_f = {}^cD$ de los puntos de continuidad de f en X es un subconjunto $\mathcal{G}_\delta$ denso en X.

(A2) (a) Que $\mathcal{B}_1(X, Y) \subset PCP(X, Y)$ es consecuencia de (A1) y de que X es heredita-riamente Baire.

(b) Como para todo espacio topológico X, trivialmente, $PCP(X, Y) \subset \mathcal{B}_1^0(X, Y)$, pasamos a probar que, si $f \in \mathcal{B}_1^0(X, Y)$, entonces $f \in PCP(X, Y)$. Puesto que para todo cerrado $F \subset X$ se tiene que $f \in \mathcal{B}_1^0(F, Y)$, bastará probar que f posee en X un punto de continuidad al menos. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$G_n := \{x \in X : Osc(f, X) < 1/n\}.$$

Aserto. Si $m \in \mathbb{N}$, G_m es un abierto denso en X.

En efecto, es claro, por las propiedades de la función $Osc(f, \cdot)$, que G_m es un abierto de X. Veamos que es denso. Sea $V_1 \subset X$ un abierto arbitrario no vacío de X. Puesto que $f \in \mathcal{B}_1^0(X, Y)$, existe un abierto $U \subset X$ tal que $U \cap V_1 \neq \emptyset$ y d-diam$(f(U \cap V_1)) < 1/m$. Claramente $U \cap V_1 \subset G_m$ y esto prueba que G_m es denso en X.

Por tanto, como X es Baire, $G := \cap_{m \geq 1} G_m$ es un subconjunto denso en X y, además, G es el conjunto de los puntos de continuidad de f en X. Esto completa la prueba.

(A3) Sea $F \subset X$ un subconjunto cerrado y $f \in d\mathcal{B}_1(X, Y)$. Por la Prop. 3.4 y por ser F un espacio de Baire, el conjunto de los puntos de continuidad de $f \restriction F$ es un subconjunto $\mathcal{G}_\delta$ de F denso no vacío. Esto prueba que $d\mathcal{B}_1(X, Y) \subset PCP(X, Y) = \mathcal{B}_1^0(X, Y)$. La inclusión $\mathcal{B}_1(X, Y) \subset d\mathcal{B}_1(X, Y)$ sale de la Prop. 3.2. ■

NOTA. Por la Proposición 3.5, si X es hereditariamente Baire, $\mathcal{B}_{1b}(X) \subset \mathcal{B}_{1b}^0(X)$, aunque, en general, $\mathcal{B}_{1b}(X) \neq \mathcal{B}_{1b}^0(X)$. Sin embargo, si X es métrico completo entonces $\mathcal{B}_{1b}(X) = PCP_b(X) = \mathcal{B}_{1b}^0(X) = d\mathcal{B}_{1b}(X)$. Esto puede verse en [11, 1E, 1C] ó en el siguiente resultado debido a Stegall.

Proposición 3.6 (Stegall)**.** *Sean T un espacio métrico completo, Z un espacio de Banach y $f : T \to Z$. Son equivalentes:*

(1) $f \in \mathcal{B}_1(T, Z)$.

(2) $f \in PCP(T, Z)$.

(3) $f \restriction K$ tiene un punto de continuidad en K, para todo compacto $K \subset T$.

(4) $h \circ f \in \mathcal{B}_1(T, \mathbb{R})$ para toda función continua $h : Z \to \mathbb{R}$.

(5) $f \in d\mathcal{B}_1(T, Z)$.

Demostración. Ver [104, Theorem 4]. ■

Definición 3.7. *(A) Sean X un espacio topológico Hausdorff, (Y,d) espacio métrico y $f : X \to Y$.*

(A1) Definimos **el índice de fragmentación** *$Frag(f,X)$ de f sobre X como*

$$Frag(f,X) = \text{ínf}\{\epsilon \geq 0 : f \in \mathcal{B}_1^\epsilon(X,Y)\}.$$

(A2) Si $\epsilon > 0$, decimos que un subconjunto $F \subset X$ es **un conjunto de ϵ-oscilación de f ó que f ϵ-oscila en F** *sii*

$$\text{ínf}\{diam(f(U \cap F)) : U \subset X \quad abierto\ , U \cap F \neq \emptyset\} > \epsilon.$$

(A3) Si $Y = \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$, decimos que un subconjunto $F \subset X$ es **un conjunto de ϵ-oscilación uniforme de f ó que f ϵ-oscila uniformemente en F** *sii existen $s, t \in \mathbb{R}, \epsilon < t - s$, tales que*

$$\text{ínf}\langle f, U \cap F\rangle < s < t < \sup\langle f, U \cap F\rangle$$

para todo U abierto de X verificando $U \cap F \neq \emptyset$.

(B) Sean X un espacio de Banach y $K \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto. Definimos **el índice de fragmentación** *$Frag(K)$ como*

$$Frag(K) = \sup\{Frag(\psi, K) : \psi \in S(X^{**})\}.$$

NOTA. Por tanto, si $Frag(f,X) = \epsilon > \eta > 0$, de la propia definición sale que existe un cerrado no vacío $F \subset X$ sobre el que f η-oscila. Es decir, que para $\eta > 0$, existe un conjunto $\emptyset \neq F \subset X$ de η-oscilación de f sii $Frag(f,X) > \eta$.

Proposición 3.8. *Sean (X, T_X) un espacio topológico Hausdorff, $0 \leq \epsilon < \infty$ y $f \in \ell_\infty(X)$. Entonces*

$$dist(f, B_{1b}^\epsilon(X)) = \sup\{\tfrac{1}{2}(Frag(f,X) - \epsilon), 0\}.$$

En particular, si $\epsilon = 0$ se tiene que $dist(f, B_{1b}^0(X)) = \frac{1}{2}Frag(f,X)$.

Demostración. (A) Probemos, en primer lugar, que

$$dist(f, B_{1b}^\epsilon(X)) \geq \sup\{\tfrac{1}{2}(Frag(f,X) - \epsilon), 0\}.$$

Bastará comprobar que $\frac{1}{2}(Frag(f,X) - \epsilon) \leq dist(f, B_{1b}^\epsilon(X))$. Comencemos viendo el siguiente aserto.

Aserto 1. Para todo $g \in B_{1b}^\epsilon(X)$ se verifica $\frac{1}{2}(Frag(f,X) - \epsilon) \leq \|f - g\|_\infty$.

En efecto, cojamos $\eta > 0$ tal que $\epsilon < \eta < \infty$. Puesto que $g \in B_{1b}^\epsilon(X)$, para todo subconjunto $F \subset X$ no vacío existe un abierto $V \subset X$ tal que

$$V \cap F \neq \emptyset \quad \text{y} \quad diam(g(V \cap F)) \leq \eta.$$

De aquí que $diam(f(V \cap F)) \leq 2\|f-g\|_\infty + \eta$ y también $Frag(f,X) \leq 2\|f-g\|_\infty + \epsilon$, es decir, $\frac{1}{2}(Frag(f,X)-\epsilon) \leq \|f-g\|_\infty$.

En consecuencia

$$\tfrac{1}{2}(Frag(f,X)-\epsilon) \leq \text{ínf}\{\|f-g\|_\infty : g \in B_1^\epsilon(X)\} = dist(f, B_1^\epsilon(X)).$$

(B) Veamos a continuación que $dist(f, B_{1b}^\epsilon(X)) \leq \sup\{\frac{1}{2}(Frag(f,X)-\epsilon), 0\}$. Si $0 \leq Frag(f,X) \leq \epsilon$ (es decir, $f \in B_{1b}^\epsilon(X)$), el resultado es obvio. Supongamos que $\epsilon < Frag(f,X) < \infty$. Cojamos $\eta > 0$ tal que $Frag(f,X) - \epsilon < \eta$. Como $Frag(f,X) < \eta + \epsilon$, existen un ordinal ξ y una familia de abiertos $\{U_\alpha : \alpha < \xi\}$ de X tales que:

(i) $U_\alpha \subset U_\beta$, para $\alpha \leq \beta < \xi$, y $X = \bigcup_{\alpha<\xi} U_\alpha$.

(ii) Para todo $\beta < \xi$ se tiene que $\emptyset \neq G_\beta := U_\beta \setminus \bigcup_{\alpha<\beta} U_\beta$ y $\text{diam}(f(G_\beta)) < \eta + \epsilon$.

Sean $s_\beta := \sup f(G_\beta)$ y $l_\beta := \text{ínf}\, f(G_\beta)$ para $\beta < \xi$. Aprovechando que $X = \biguplus_{\beta<\xi} G_\beta$, definimos $g : X \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$\forall \beta < \xi,\ \forall i \in G_\beta,\ g(i) = \left[f(i) \wedge (s_\beta - \tfrac{\eta}{2})\right] \vee \left[l_\beta + \tfrac{\eta}{2}\right].$$

Se comprueba fácilmente que $\|f-g\|_\infty \leq \frac{\eta}{2}$. Además tenemos el siguiente aserto.

Aserto 2. $g \in B_{1b}^\epsilon(X)$.

En efecto, por construcción de g necesariamente $\text{diam}(g(G_\beta)) \leq \epsilon$, $\forall \beta < \xi$. Sea $F \subset X$ un subconjunto no vacío y definamos

$$\beta_0 = \text{ primer elemento de } \{\beta < \xi : U_\beta \cap F \neq \emptyset\}.$$

Entonces $\emptyset \neq U_{\beta_0} \cap F \subset G_{\beta_0}$ por lo que $\text{diam}(g(U_{\beta_0} \cap F)) \leq \epsilon$ y esto prueba que $g \in B_{1b}^\epsilon(X)$.

Por tanto $dist(f, B_{1b}^\epsilon(X)) \leq \frac{\eta}{2}$ y de aquí $dist(f, B_{1b}^\epsilon(X)) \leq \frac{1}{2}(Frag(f,X)-\epsilon)$. ■

NOTA. La fórmula $dist(f, B_{1b}^0(X)) = \frac{1}{2}Frag(f,X)$ se utilizará en la Prop. 5.1.

3.3. Conjuntos de ϵ-oscilación y de ϵ-oscilación uniforme

Vamos a ver a continuación que tener un conjunto de ϵ-oscilación, tenerlo de ϵ-oscilación uniforme y verificar $Frag(f,X) > \epsilon$ son equivalentes, para espacios hereditariamente Baire. Esto es importante para resultados posteriores.

Proposición 3.9. *Sean X un espacio topológico Hausdorff hereditariamente Baire, $\epsilon \geq 0$ y $f : X \to \mathbb{R}$. Los siguientes asertos son equivalentes:*

(1) $f \in B_1^\epsilon(X)$.

(2) Para todo subconjunto cerrado $F \subset X$ y todo par de números reales $s < t$ tales $t - s > \epsilon$, ó bien $\overline{F \cap \{f \leq s\}} \neq F$ ó bien $\overline{F \cap \{f \geq t\}} \neq F$.

(3) Para todo subconjunto cerrado no vacío $F \subset X$ y todo par de números reales $s < t$ con $t - s > \epsilon$ se tiene que $int_F(\overline{F \cap \{f \leq s\}}) \cap int_F(\overline{F \cap \{f \geq t\}}) = \emptyset$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). En caso contrario existirían un cerrado $F \subset X$ y un par de números reales $s < t$ tales $t - s > \epsilon$ de modo que $\overline{F \cap \{f \leq s\}} = F = \overline{F \cap \{f \geq t\}} \neq F$. Por tanto, si $U \subset X$ es un abierto tal que $U \cap F \neq \emptyset$, se verifica que $diam(f(U \cap F)) > t - s > \epsilon$, lo que no puede ser porque $f \in \mathcal{B}_1^\epsilon(X)$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Supongamos que no se verifica (3), es decir, que existen un subconjunto cerrado no vacío $F \subset X$ y dos números reales $s < t$ con $t - s > \epsilon$ tales que $int_F(\overline{F \cap \{f \leq s\}}) \cap int_F(\overline{F \cap \{f \geq t\}}) \neq \emptyset$. Sean

$$U = int_F(\overline{F \cap \{f \leq s\}}) \cap int_F(\overline{F \cap \{f \geq t\}})$$

y $H = \overline{U}$. Entonces $\overline{H \cap \{f \leq s\}} = H = \overline{H \cap \{f \geq t\}}$, lo que contradice (2) y prueba la implicación.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sea $F \subset X$ un subconjunto cerrado no vacío de X y $\eta > \epsilon$. Vamos a encontrar un subconjunto abierto $V \subset X$ tal que $V \cap F \neq \emptyset$ y $diam(f(V \cap F)) \leq \eta$. Para todo par $s < t$ de números reales con $t - s > \epsilon$ sea

$$G_{st} = int_F(F \cap \{f > s\}) \cup int_F(F \cap \{f < t\}).$$

Observemos que cada G_{st} es denso en F, porque

$$G_{st} = int_F(F \setminus \overline{F \cap \{f \leq s\}}) \cup int_F(F \setminus \overline{F \cap \{f \geq t\}}),$$

de donde $\overline{G_{st}} = F \setminus \left[int_F(\overline{F \cap \{f \leq s\}}) \cap int_F(\overline{F \cap \{f \geq t\}})\right] = F$.

Sea $Y = \bigcap\{G_{st} : s, t \in \mathbb{Q}, s < t, t - s > \epsilon\}$. Entonces Y es denso en F, porque F es Baire. Para cada $y \in Y$ definimos

$$U(y) := \inf\{t > f(y) : y \in int_F(F \cap \{f < t\})\}, \ \inf(\emptyset) = +\infty,$$

y

$$L(y) := \sup\{s < f(y) : y \in int_F(F \cap \{f > s\})\}, \ \sup(\emptyset) = -\infty.$$

Aserto. Para todo $y \in Y$, se tiene $-\infty < L(y) \leq f(y) \leq U(y) < +\infty$ y $U(y) - L(y) \leq \epsilon$.

En efecto, fijemos $y \in Y$. Es claro que

$$-\infty \leq L(y) \leq f(y) \leq U(y) \leq +\infty.$$

Probemos que $U(y) - L(y) \leq \epsilon$. Supongamos que $U(y) - L(y) > \epsilon$. En tal caso podemos hallar $s, t \in \mathbb{Q}$ tales que $L(y) < s < t < U(y)$ y $t - s > \epsilon$. Entonces $y \notin int_F(F \cap \{f > s\})$ y $y \notin int_F(F \cap \{f < t\})$, de donde sale $y \notin G_{st}$, una contradicción.

Finalmente observemos que el hecho $U(y) - L(y) \leq \epsilon < \infty$ implica $-\infty < L(y)$ y $U(y) < +\infty$. Esto prueba el Aserto.

Sea $x \in Y$ arbitrario, $\eta > \epsilon$ y $s, t \in \mathbb{Q}$ tales que $s < L(x) \leq U(x) < t$ y $\epsilon < t - s \leq \eta$. Entonces $x \in int_F(F \cap \{f > s\}) \cap int_F(F \cap \{f < t\})$. Sea $V \subset X$ un subconjunto abierto tal que

$$V \cap F = int_F(F \cap \{f > s\}) \cap int_F(F \cap \{f < t\}).$$

Entonces $V \cap F \neq \emptyset$ y $diam(f(V \cap F)) \leq t - s \leq \eta$. ■

Corolario 3.10. *Sea X un espacio topológico Hausdorff hereditariamente Baire, $f \in \mathbb{R}^X$ y $\eta > 0$. Son equivalentes:*

(a) Existe $\emptyset \neq F \subset X$ conjunto de η-oscilación de f, es decir, $Frag(f, F) > \eta$.

(b) Existe $\emptyset \neq H \subset X$ conjunto de η-oscilación uniforme de f.

Demostración. Sale inmediatamente de la Proposición 3.9. ■

NOTA. Si X es un espacio de Banach, $\eta > 0$, $\psi \in X^{**}$ y $A \subset X^*$ es un subconjunto de η-oscilación de ψ, entonces $\overline{\text{co}}^{w^*}(A)$ es también un conjunto de η-oscilación de ψ (es de inmediata comprobación).

Proposición 3.11. *Sean X un espacio de Banach, $K \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto y $\psi \in X^{**}$ tal que $Frag(\psi, K) > \epsilon > 0$. Entonces existe una w^*-$\mathbb{N}$-familia $\mathcal{A} \subset K$ tal que $width(\mathcal{A}) \geq \epsilon$. Por tanto $Width(K) \geq Frag(K)$.*

Demostración. Como $Frag(\psi, K) > \epsilon > 0$, entonces $\psi \restriction K \notin \mathcal{B}_{1b}^{\epsilon}(K)$. Por la Prop. 3.9 (ver [60, Proposition 6.1]) existe un subconjunto no vacío w^*-compacto $F \subset K$ y dos números reales $s < t$ con $t - s > \epsilon$ tales que $\overline{F \cap \{\psi \leq s\}}^{w^*} = F = \overline{F \cap \{\psi \geq t\}}^{w^*}$. Así que existen dos números reales $s' < t'$ con $s < s' < t' < t$ y $t' - s' > \epsilon$ tales que todo subconjunto w^*-abierto $V \subset X^*$ con $V \cap F \neq \emptyset$ satisface

$$\text{ínf}\langle \psi, V \cap F \rangle \leq s < s' < t' < t \leq \sup\langle \psi, V \cap F \rangle.$$

Por tanto, si $\mathcal{F}$ es una familia finita de subconjuntos w^*-abiertos de X^* con $V \cap F \neq \emptyset$, $\forall V \in \mathcal{F}$, por la w^*-densidad de $B(X)$ en $B(X^{**})$ existe $x_{\mathcal{F}} \in B(X)$ tal que

$$\text{ínf}\langle V \cap F, x_{\mathcal{F}} \rangle < s' < t' < \sup\langle V \cap F, x_{\mathcal{F}} \rangle, \ \forall V \in \mathcal{F}.$$

De este hecho y de la prueba de la implicación (5) $\Rightarrow$ (6) de [62, Proposition 2.5] obtenemos que K contiene una w^*-$\mathbb{N}$-familia $\mathcal{A}$ tal que anchura$(\mathcal{A}) \geq \epsilon$. ■

Corolario 3.12. *Sea X un espacio de Banach y $K \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto. Son equivalentes:*

(1) K tiene la propiedad (P).

(2) $X^{**} \restriction K \subset \mathcal{B}_{1b}^{0}(K)$, es decir, $\forall \psi \in X^{**}$, $Frag(\psi, K) = 0$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Si $Frag(\psi, K) > 0$ para algún vector $\psi \in X^{**}$, K contendría una w^*-$\mathbb{N}$-familia por la Prop. 3.11, lo que no puede ser por (1).

(2) $\Rightarrow$ (1). Como $\mathcal{B}^0_{1b}(K) \subset \mathcal{U}(K)$ (ver la Prop. 3.22), por (2) se tiene que $X^{**} \upharpoonright K \subset \mathcal{U}(K)$. Este hecho implica que $K \in (P)$ por [62, Prop. 2.5]. ■

3.4. El *Pindex* y el cálculo baricéntrico

Si $K \subset X^*$ es un subconjunto w^*-compacto y $\psi \in X^{**}$ con $\psi \in \mathcal{U}(K)$, vamos a ver que el $Pindex(\psi, K)$ proporciona información sobre la capacidad de ψ de verificar el cálculo baricéntrico.

Proposición 3.13. *Sean X es un espacio de Banach, K un subconjunto w^*-compacto del dual X^* y $\psi \in X^{**}$ tal que $\psi \in \mathcal{U}(K)$. Entonces*

$$Pindex(\psi, K) = \sup\{\langle \psi, r(\mu)\rangle - \int_K \psi(k) d\mu : \mu \in \mathcal{P}_R(K)\}.$$

Demostración. (A) Supongamos que $Pindex(\psi, K) > \epsilon > 0$, es decir, que existe un subconjunto w^*-compacto $W \subset K$ y un punto $w_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(W)$ tales que $\langle \psi, w_0\rangle > \sup\langle \psi, W\rangle + \epsilon$. Sea $\mu \in \mathcal{P}_R(W)$(=probabilidades Borel Radon sobre W) tal que $w_0 = r(\mu)$. Entonces

$$\langle \psi, w_0\rangle - \langle \psi, w\rangle = \langle \psi, w_0 - w\rangle > \epsilon, \ \forall w \in W,$$

y por tanto

$$\langle \psi, w_0\rangle - \int_W \langle \psi, w\rangle d\mu = \int_W \langle \psi, w_0 - w\rangle d\mu \geq \epsilon.$$

En consecuencia

$$Pindex(\psi, K) \leq \sup\{\langle \psi, r(\mu)\rangle - \int_K \psi(k) d\mu : \mu \in \mathcal{P}_R(K)\}.$$

(B) Supongamos que existen $\epsilon > 0$ y una probabilidad $\mu \in \mathcal{P}_R(K)$ tales que

$$\langle \psi, r(\mu)\rangle > \int_K \psi(k) \cdot d\mu + \epsilon.$$

Vamos a probar que $Pindex(\psi, K) > \epsilon$. Sean $m := \inf\langle \psi, K\rangle$, $M := \sup\langle \psi, K\rangle$ y $\{m = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = M\}$ una partición del intervalo $[m, M]$ de modo que

$$t_i - t_{i-1} = (M - m)/p < \eta < \tfrac{1}{2}[\langle \psi, r(\mu)\rangle - \int_K \psi(k) \cdot d\mu - \epsilon].$$

Denotemos $K_i := \{k \in K : t_{i-1} \leq \langle \psi, k\rangle < t_i\}$, $i = 1, \ldots, p-1$, y $K_p = \{k \in K : t_{p-1} \leq \langle \psi, k\rangle \leq t_p\}$. Observemos que cada K_i es μ-medible porque $\psi \in \mathcal{U}(K)$. Sean $\mu_i := \mu \upharpoonright K_i$, $i = 1, \ldots, p$. Entonces

$$r(\mu) = \sum_{i=1}^{p} \|\mu_i\| r(\tfrac{\mu_i}{\|\mu_i\|}).$$

(Si $\mu_i = 0$ ponemos $\frac{\mu_i}{\|\mu_i\|} = 0$ y $r(0) = 0$). Claramente

$$\epsilon + 2\eta < \langle \psi, r(\mu) \rangle - \int_K \psi(k) d\mu = \sum_{i=1}^{p} \|\mu_i\| [\langle \psi, r(\tfrac{\mu_i}{\|\mu_i\|}) \rangle - \int_{K_i} \psi(k) d(\tfrac{\mu_i}{\|\mu_i\|})]. \tag{3.1}$$

Puesto que $\sum_{i=1}^{p} \|\mu_i\| = \|\mu\| = 1$, de (3.1) sale que existe $j \in \{1, \ldots, p\}$ tal que

$$\epsilon + 2\eta < \langle \psi, r(\tfrac{\mu_j}{\|\mu_j\|}) \rangle - \int_{K_j} \psi(k) d(\tfrac{\mu_j}{\|\mu_j\|}).$$

A continuación elegimos una sucesión de compactos $H_n \subset K_j$ tales que $\frac{\mu_j}{\|\mu_j\|}(H_n) \uparrow 1$ y denotamos $\nu_n := (\mu_j \restriction H_n)/\mu_j(H_n)$, que es un probabilidad con soporte dentro de H_n. Es claro que para $n \to \infty$ se verifica

$$r(\nu_n) \to r(\tfrac{\mu_j}{\|\mu_j\|}) \text{ en norma y que } \int_{H_n} \psi(k) d\nu_n \to \int_{K_j} \psi(k) d(\tfrac{\mu_j}{\|\mu_j\|}).$$

Por tanto existe $q_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $q \geq q_0$ se verifica

$$\epsilon + 2\eta < \langle \psi, r(\nu_q) \rangle - \int_{H_q} \psi(k) d\nu_q. \tag{3.2}$$

A continuación practicamos una traslación y hacemos que $0 \in H_q$ para un cierto $q \geq q_0$, conservando las notaciones. Observemos que el $Pindex(\psi, K)$ no varía ni tampoco la desigualdad (3.2), pero ahora $\langle \psi, H_q \rangle \subset (-\eta, \eta)$. Por tanto tras la traslación

$$\epsilon + 2\eta < \langle \psi, r(\nu_q) \rangle - \int_{H_q} \psi(k) d\nu_q \leq \langle \psi, r(\nu_q) \rangle + \eta \;\Rightarrow\; \epsilon + \eta < \langle \psi, r(\nu_q) \rangle.$$

En consecuencia

$$Pindex(\psi, K) \geq \langle \psi, r(\nu_q) \rangle - \sup \langle \psi, H_q \rangle > \epsilon + \eta - \eta = \epsilon.$$

■

Corolario 3.14. *Sean X es un espacio de Banach, K un subconjunto w^*-compacto del dual X^* y $\psi \in X^{**}$ tal que $\psi \in \mathcal{U}(K)$. Son equivalentes:*

(1) ψ verifica el cálculo baricéntrico sobre K.

(2) $Pindex(\psi, K) = 0$.

Demostración. Sale directamente de la Prop. 3.13. ■

3.5. La igualdad $\mathcal{B}_1(K) = PCP(K)$ para un compacto K

Si K es un compacto Hausdorff, sabemos que $\mathcal{B}_1(K) \subset PCP(K)$ por Cor. 3.5. Queremos hallar condiciones para que se verifique la igualdad $\mathcal{B}_1(K) = PCP(K)$.

Proposición 3.15. *Sea (X, T_X) un espacio topológico.*

(A) Son equivalentes:(A1) todo cerrado de X es un $\mathcal{G}_\delta$; (A2) todo abierto de X es un $\mathcal{F}_\sigma$.

(B) Son equivalentes:

(B1) X carece de cadenas incontables estrictamente decrecientes de subconjuntos cerrados, es decir, no existe en X una familia de subconjuntos cerrados no vacíos distintos dos a dos $\{H_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tales que $H_\beta \subset H_\alpha$ para $\alpha < \beta < \omega_1$.

(B2) X carece de cadenas incontables estrictamente crecientes de subconjuntos abiertos.

(B3) (X, T_X) es HL (= hereditariamente Lindelof).

(C) Si (X, T_X) es regular y HL, todo cerrado de X es un $\mathcal{G}_\delta$.

(D) Si (X, T_X) es un espacio compacto Hausdorff, son equivalentes (A1),(A2), (B1), (B2) y (B3).

Demostración. (A) es trivial.

(B) La equivalencia $(B1) \Leftrightarrow (B2)$ es trivial.

$(B2) \Rightarrow (B3)$. Sea $\{U_i : i \in I\}$ una familia arbitraria de abiertos de X y $\mathcal{U} := \cup_{i\in I} U_i$. Hay que hallar un subconjunto contable $J \subset I$ tal que $\mathcal{U} = \cup_{j\in J} U_j$. A continuación construimos una cadena estrictamente creciente de subconjuntos abiertos $\{G_\alpha : \alpha < \xi\}$ de X. Usamos inducción:

Etapa 1. Sea $i_1 \in I$ arbitrario. Hacemos $G_1 := U_{i_1}$. Si $G_1 = \mathcal{U}$, hemos terminado. En caso contrario pasamos a la etapa siguiente.

Etapa 2. Como $G_1 \neq \mathcal{U}$, existe $i_2 \in I$ tal que $U_{i_2} \setminus G_1 \neq \emptyset$. Hacemos $G_2 := G_1 \cup U_{i_2}$. Si $G_2 = \mathcal{U}$, hemos terminado. En caso contrario pasamos a la siguiente etapa.

Etapa α. Supongamos construidos los abiertos $\{G_\beta : \beta < \alpha\}$ formando una cadena de abiertos estrictamente creciente de modo que $\mathcal{U} \neq \cup_{\beta<\alpha} G_\beta$. Elegimos $i_\alpha \in I$ de modo que $U_{i_\alpha} \setminus \cup_{\beta<\alpha} G_\beta \neq \emptyset$ y hacemos $G_\alpha := U_{i_\alpha} \bigcup (\cup_{\beta<\alpha} G_\beta)$. Si $G_\alpha = \mathcal{U}$, hemos terminado. En caso contrario pasamos a la etapa $\alpha + 1$.

El proceso continúa hasta llegar a un primer ordinal ξ tal que $\mathcal{U} = \cup_{\alpha<\xi} G_\alpha$. Como $\{G_\alpha : \alpha < \xi\}$ es una cadena estrictamente creciente de abiertos, obtenemos que $\xi < \omega_1$ por la hipótesis (B2). Finalmente observemos que $\cup_{\alpha<\xi} G_\alpha = \cup_{\alpha<\xi} U_{i_\alpha}$ y esto termina la prueba de $(B2) \Rightarrow (B3)$.

$(B3) \Rightarrow (B1)$. Sea $\{H_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una cadena estrictamente decreciente de subconjuntos cerrados de X. Por (B3) existe una familia contable de ordinales $\{\alpha_n : n \geq 1\} \subset \omega_1$

tales que

$$\bigcup_{\alpha<\omega_1} {}^cH_\alpha = \bigcup_{n\geq 1} {}^cH_{\alpha_n}.$$

Sea $\alpha_0 = \sup_{n\geq 1} \alpha_n$ que verifica $\alpha_0 < \omega_1$ y

$$\bigcup_{n\geq 1} {}^cH_{\alpha_n} \subset {}^cH_{\alpha_0}.$$

Por tanto para $\alpha_0 \leq \alpha < \omega_1$ se tiene que $H_\alpha = H_{\alpha_0}$, que es una contradicción que prueba que en X no hay cadenas estrictamente decrecientes de subconjuntos cerrados.

(C) Sea $H \subset X$ un subconjunto cerrado tal que $\emptyset \neq H \neq X$. Aprovechando que X es regular, por cada $x \in X\backslash H$, elegimos un entorno cerrado V^x de x tal que $x \in V^x \subset X\backslash H$. Es claro que

$$X \setminus H = \cup_{x\in X\setminus H} V^x.$$

Por ser X un espacio HL, existe una familia contable $\{x_n : n \geq 1\} \subset X \setminus H$ tal que $X \setminus H = \cup_{n\geq 1} V^{x_n}$. Sea $F_m := \cup_{i=1}^m V^{x_i},\ m \geq 1$. Es claro que cada F_m es un subconjunto cerrado de $X \setminus H$ y que se verifica

$$H = \cap_{m\geq 1} {}^cF_m.$$

Por tanto H es un $\mathcal{G}_\delta$.

(D) Teniendo en cuenta lo probado más arriba, bastará demostrar que $(A2) \Rightarrow (B1)$. Supongamos que existe una cadena incontable estrictamente decreciente de cerrados $\{H_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de X. Por (A2) existe una familia contable de cerrados (por tanto compactos) $\{F_m : m \geq 1\}$ de X de modo que

$$\cup_{\alpha<\omega_1} {}^cH_\alpha = X \setminus \cap_{\alpha<\omega_1} H_\alpha = \cup_{m\geq 1} F_m.$$

Por compacidad y ya que la familia de abiertos $\{{}^cH_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es creciente, existe $\alpha_n < \omega_1$ tal que $F_n \subset {}^cH_{\alpha_n}$. Sea $\alpha_0 = \sup_{n\geq 1} \alpha_n$. Se verifica $\alpha_0 < \omega_1$ y que $\cup_{n\geq 1} F_n \subset {}^cH_{\alpha_0}$. Por tanto $H_\alpha = H_{\alpha_0}$ para $\alpha_0 \leq \alpha < \omega_1$, una contradicción que prueba (B1). ■

Lema 3.16. *Sea (X, T_X) un espacio topológico normal y sea $Y \subset X$ un subconjunto ambiguo, es decir, Y es $\mathcal{G}_\delta$ y $\mathcal{F}_\sigma$ simultáneamente. Entonces $\mathbb{1}_Y \in \mathcal{B}_1(X)$.*

Demostración. Sean $\{F_n : n \geq 1\}$ y $\{G_n : n \geq 1\}$ familias de cerrados y abiertos, respectivamente, de X tales que

$$F_n \subset F_{n+1} \subset Y \subset G_{n+1} \subset G_n, \quad \cup_{n\geq 1} F_n = Y = \cap_{n\geq 1} G_n.$$

Por el Lema de Urysohn [36, p. 41] existen funciones continuas $f_n : X \to [0, 1]$ tales que $f_n \restriction {}^cG_n = 0$ y $f_n \restriction F_n = 1$. Es claro que $f_n \to \mathbb{1}_Y$ puntualmente y, por tanto, $\mathbb{1}_Y \in \mathcal{B}_1(X)$. ■

Lema 3.17. *Sean (X, T_X) un espacio topológico, $f_n, f : X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, funciones tales que $\{f_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{B}_1(X)$ y $f_n \to f$ uniformemente sobre X. Entonces $f \in \mathcal{B}_1(X)$.*

Demostración. Ver [70, (24.11) Lemma]. ■

Proposición 3.18. *Sea K un espacio compacto Hausdorff. Son equivalentes:*

(1) $\mathcal{B}_1(K) = PCP(K)$.

(2) K es HL.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que no se verifica (2). Esto quiere decir, por 3.15, que existe un subconjunto cerrado no vacío $F \subset K$, que no es un $\mathcal{G}_\delta$.

Aserto 1. $\mathbb{1}_F \notin \mathcal{B}_1(K)$.

En efecto, en caso contrario existiría una sucesión $(f_n)_n \subset C(K)$ tal que $f_n \to \mathbb{1}_F$ puntualmente sobre K. Sea

$$G_n := \cup_{m \geq n}\{x \in K : f_m(x) > 1 - \tfrac{1}{n}\}, \quad n \geq 1.$$

Claramente G_n es un abierto tal que $F \subset G_n$, $\forall n \geq 1$, y además

$$F = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq n} \{x \in K : f_m(x) > 1 - \tfrac{1}{n}\} = \bigcap_{n \geq 1} G_n.$$

Llegamos a una contradicción que prueba el Aserto 1.

Aserto 2. $\mathbb{1}_F \in PCP(K)$.

En efecto, sea $C \subset K$ un subconjunto cerrado no vacío. Queremos ver que $\mathbb{1}_F$ tiene un punto de continuidad en C. Distinguimos dos casos, a saber:

Caso 1. $C \setminus F \neq \emptyset$. En este caso $\mathbb{1}_F$ es continua, relativamente a C, en todo punto $x \in C \setminus F$.

Caso 2. $C \setminus F = \emptyset$, es decir, $C \subset F$. En este caso, $\mathbb{1}_F \upharpoonright C$ es continua, relativamente a C, en todo punto de C.

Por tanto el Aserto 2 es cierto.

Combinando Aserto 1 y Aserto 2 llegamos a una contradicción que prueba la implicación (1) $\Rightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (1). En primer término recordemos que $\mathcal{B}_1(K) \subset PCP(K)$ por el Corolario 3.5. Comencemos probando el siguiente Aserto 3.

Aserto 3. $\mathcal{B}_{1b}(K) = PCP_b(K) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{B}_1(K) = PCP(K)$.

En efecto, la implicación "$\Leftarrow$" es obvia. Veamos la otra implicación "$\Rightarrow$" . Sea $f \in PCP(K)$. Denotemos por $h : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ al homeomorfismo $h(t) = t/(1+|t|)$. Entonces

$h \circ f \in PCP_b(K)$ y, por hipótesis, existe una sucesión $(g_n)_n \subset C(K)$ tal que $g_n \to h \circ f$ puntualmente sobre K. Sea

$$\tilde{g}_n := [g_n \vee (-1 + \tfrac{1}{n})] \wedge (1 - \tfrac{1}{n}),\ n \geq 1.$$

Es claro que

(a) $\tilde{g}_n : K \to (-1, 1)$ es continua y $\tilde{g}_n \to h \circ f$ puntualmente.

(b) $h^{-1} \circ \tilde{g}_n \in C(K)$ y $h^{-1} \circ \tilde{g}_n \to f$ puntualmente.

Por tanto $f \in \mathcal{B}_1(K)$ y esto completa el Aserto 3.

Por tanto, de acuerdo con el Aserto 3, bastará probar que $\mathcal{B}_{1b}(K) = PCP_b(K)$. Así que fijamos $f \in PCP_b(K)$, $f(K) \subset [0, 1]$, y probamos que $f \in \mathcal{B}_{1b}(K)$.

Aserto 4. Sea $\epsilon > 0$. Existen un ordinal $\xi < \omega_1$ y una cadena estrictamente creciente de abiertos $\{U_\alpha : \alpha < \xi\}$ de K tales que

(i) $K = \cup_{\alpha<\xi} U_\alpha$.

(ii) Si $G_\alpha := U_\alpha \setminus \cup_{\beta<\alpha} U_\beta$, para $\alpha < \xi$, entonces $G_\alpha \neq \emptyset$ y $diam(f(G_\alpha)) < \epsilon$.

En efecto, mediante inducción construimos una secuencia de abiertos $\{V_\alpha : \alpha < \xi\}$, para un cierto ordinal ξ, de modo que $G_\alpha := V_\alpha \setminus \cup_{\beta<\alpha} V_\beta,\ \alpha < \xi$, verifique $G_\alpha \neq \emptyset$ y $diam(f(G_\alpha)) < \epsilon$.

Etapa 1. Como $f \in PCP_b(K)$, existe un abierto $V_1 \neq \emptyset$ tal que $diam(f(V_1)) < \epsilon$. Si $V_1 = K$, hemos terminado. En caso contrario pasamos a la siguiente etapa.

Etapa 2. Como $K \setminus V_1$ es un cerrado no vacío, existe un abierto V_2 tal que $\emptyset \neq V_2 \cap (K \setminus V_1)$ y $diam(f(V_2 \cap (K \setminus V_1)) < \epsilon$. Si $K = V_1 \cup V_2$, hemos terminado. En caso contrario pasamos a la siguiente etapa.

Etapa α. Supongamos construidos los abiertos $V_\beta,\ \beta < \alpha$, verificando los requerimientos iniciales y que $K \neq \cup_{\beta<\alpha} V_\beta$. Como $K \setminus \cup_{\beta<\alpha} V_\beta$ es un cerrado no vacío, existe un abierto V_α tal que $\emptyset \neq V_\alpha \cap (K \setminus \cup_{\beta<\alpha} V_\beta)$ y $diam(f(V_\alpha \cap (K \setminus \cup_{\beta<\alpha} V_\beta)) < \epsilon$. Si $K = \cup_{\beta\leq\alpha} V_\beta$, hemos terminado. En caso contrario pasamos a la etapa siguiente.

El proceso continúa hasta llegar a un primer ordinal ξ tal que $K = \cup_{\alpha<\xi} V_\alpha$. La familia $\{V_\alpha : \alpha < \xi\}$ cumple las condiciones exigidas al inicio. Para $\alpha < \xi$ definimos

$$U_\alpha := \cup_{\beta\leq\alpha} V_\beta.$$

Claramente $\{U_\alpha : \alpha < \xi\}$ es una cadena de abiertos estrictamente creciente tal que $G_\alpha = U_\alpha \setminus \cup_{\beta<\alpha} U_\beta$. Como K es HL, por la Proposición 3.15 concluimos que $\xi < \omega_1$ y esto termina la prueba del Aserto 4.

Aserto 5. Sea $\epsilon > 0$. Existe $f_\epsilon : K \to [0, 1],\ f_\epsilon \in \mathcal{B}_1(K)$, tal que $\|f - f_\epsilon\| \leq \epsilon$ en $\ell_\infty(K)$.

En efecto, por Aserto 4 existe una cadena estrictamente creciente de abiertos $\{U_\alpha : \alpha < \xi\}$, para cierto $\xi < \omega_1$, tal que $K = \cup_{\alpha<\xi} U_\alpha$, $\emptyset \neq G_\alpha := U_\alpha \setminus \cup_{\beta<\alpha} U_\beta$, para

$\alpha < \xi$ y $diam(f(G_\alpha)) < \epsilon/2$. Observemos que cada G_α es un $\mathcal{F}_\sigma$ no vacío de K, por la Proposición 3.15 y por ser K un espacio HL.

Sea $q \geq 0$ el mayor entero tal que $q\epsilon/2 \leq 1$ y consideremos los siguientes subintervalos de $[0, 1]$:

$$I_0 := [0, \tfrac{\epsilon}{2}],\ I_1 := [\tfrac{\epsilon}{2}, 2\tfrac{\epsilon}{2}], ..., I_q := [q\tfrac{\epsilon}{2}, 1].$$

Para $n = 0, 1, .., q$, definimos $\tilde{L}_n \subset \xi$ como sigue

$$\tilde{L}_n := \{\alpha < \xi : f(G_\alpha) \cap I_n \neq \emptyset\}.$$

Como $\cup_{n=0}^q I_n = [0, 1]$ y $f(K) \subset [0, 1]$, es claro que $\cup_{n=0}^q \tilde{L}_n = \xi$. Sean

$$L_1 := \tilde{L}_1,\ L_2 := \tilde{L}_2 \setminus L_1,\ L_3 := \tilde{L}_3 \setminus (L_1 \cup L_2), ..., L_q := \tilde{L}_q \setminus (L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_{q-1}).$$

Se verifica que:

(*) Los subconjuntos $L_1, ..., L_q$ son disjuntos dos a dos y $\cup_{n=0}^q L_n = \xi$.

(**) Si $\alpha < \xi$ verifica $\alpha \in L_n$, para cierto $n \in \{0, 1, ..., q\}$, entonces, como $f(G_\alpha) \cap I_n \neq \emptyset$ y $diam(f(G_\alpha)) < \epsilon/2$, se tiene que

$$f(G_\alpha) \subset ((n-1)\tfrac{\epsilon}{2}, (n+2)\tfrac{\epsilon}{2})$$

y por tanto $|f(x) - n\frac{\epsilon}{2}| < \epsilon$ para todo $x \in G_\alpha$. Sea

$$f_\epsilon := \sum_{n=0}^{q} n\tfrac{\epsilon}{2} \cdot \mathbb{1}_{\cup_{\alpha \in L_n} G_\alpha}.$$

Se tiene que :

(a) Los subconjuntos $\cup_{\alpha \in L_n} G_\alpha$, $0 \leq n \leq q$, son $\mathcal{F}_\sigma$ y disjuntos dos a dos (porque los L_n son disjuntos) tales que $K = \biguplus_{n=0}^q (\cup_{\alpha \in L_n} G_\alpha)$. Por tanto, cada subconjunto $\cup_{\alpha \in L_n} G_\alpha$, $0 \leq n \leq q$, es también un $\mathcal{G}_\delta$. Por el Lema 3.16 concluimos que $\mathbb{1}_{\cup_{\alpha \in L_n} G_\alpha} \in \mathcal{B}_1(K)$, por lo que $f_\epsilon \in \mathcal{B}_1(K)$.

(b) $\|f - f_\epsilon\| \leq \epsilon$ en $\ell_\infty(K)$.

En efecto, fijemos $x \in K$ y elijamos $n \in \{0, 1, ..., q\}$ (hay sólo un n) tal que $x \in G_\alpha$ para cierto $\alpha \in L_n$. Por (**) sabemos que $|f(x) - n\frac{\epsilon}{2}| < \epsilon$. Entonces

$$|f(x) - f_\epsilon(x)| = |f(x) - n\tfrac{\epsilon}{2}| \leq \epsilon.$$

Finalmente basta aplicar el Lema 3.17. ■

Proposición 3.19. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(1) X es separable.

(2) $(B(X^*), w^*)$ es metrizable.

(3) $(B(X^*), w^*)$ es HL.

(4) $\mathcal{B}_1(B(X^*)) = PCP(B(X^*)))$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) son implicaciones bien conocidas.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) sale de la Proposición 3.18.

(3) $\Rightarrow$ (1). Por cada $x \in X$ pongamos

$$U_x := \{x^* \in B(X^*) : \langle x^*, x \rangle > 0\}.$$

Claramente

$$B(X^*) \setminus \{0\} = \cup_{x \in S(X)} U_x.$$

Como $(B(X^*), w^*)$ es HL, podemos escribir

$$B(X^*) \setminus \{0\} = \cup_{n \geq 1} U_{x_n}$$

para una cierta familia $\{x_n : n \geq 1\} \subset S(X)$. Esto quiere decir que $X = \overline{[\{x_n : n \geq 1\}]}$, es decir, que X es separable. ■

3.6. Funciones universalmente medibles

Si (X, Σ, μ) es un espacio de probabilidad, indicaremos por $(\Sigma, \mu)^+$ (ó bien $\mathcal{M}(\mu)^+$) a la familia de subconjuntos μ-medibles A tales que $\mu(A) > 0$. Si K es un compacto Hausdorff, entonces:

(1) $\mathcal{U}(K)$ indicará el espacio de las funciones reales $f : K \to \mathbb{R}$ que son universalmente medibles, es decir, μ-medibles para toda medida Borel de tipo Radon sobre K.

(2) Si $\epsilon \geq 0$, denotaremos por $\mathcal{U}^\epsilon(K)$ al conjunto de las funciones reales $f : K \to \mathbb{R}$ que son ϵ-universalmente medibles, es decir, tales que $\forall \eta > \epsilon, \forall \mu \in \mathcal{P}_R(K)$ y $\forall B \in (\mathcal{B}_o(K), \mu)^+$, existe $A \subset B, A \in (\mathcal{B}_o(K), \mu)^+$, tal que $diam(f(A)) \leq \eta$. Es claro que $\mathcal{U}^0(K) = \cap_{\epsilon > 0} \mathcal{U}^\epsilon(K)$.

(3) Indicaremos por $\mathcal{U}_b^\epsilon(K)$ y $\mathcal{U}_b(K)$ a las familias de elementos acotados de $\mathcal{U}^\epsilon(K)$ y $\mathcal{U}(K)$, respectivamente.

Lema 3.20. *Sean K un espacio compacto Hausdorff, $0 \leq \epsilon < \eta < \infty$, $f \in \mathcal{U}^\epsilon(K)$, $\mu \in \mathcal{P}_R(K)$, $A \in (\mathcal{B}_o(K), \mu)^+$ y $\rho > 0$. Entonces existe un subconjunto compacto $W_\rho \subset A$ tal que $Osc(f, W_\rho) \leq \eta$ y $\mu(A \setminus W_\rho) \leq \rho$.*

Demostración. Comenzaremos probando el siguiente Aserto.

Aserto. Existe una familia contable de subconjuntos compactos $\{K_\alpha : \alpha < \beta\}$, $\beta < \omega_1$, disjuntos dos a dos, tales que: (i) $\mu(A) = \sum_{\alpha < \beta} \mu(K_\alpha)$; (ii) $diam f(K_\alpha) < \eta$, $\forall \alpha < \beta$.

Para probar el Aserto hacemos la siguiente construcción utilizando inducción transfinita.

Etapa 1. Elegimos $A_1 \subset A$ tal que $A_1 \in (\mathcal{B}_o(K), \mu)^+$ y $diam f(A_1) < \eta$. Esto se puede hacer porque $f \in \mathcal{U}^\epsilon(K)$. A continuación, utilizando la regularidad de μ, elegimos un subconjunto compacto $K_1 \subset A_1$ de modo que $\mu(K_1) > 0$. Si $\mu(A) = \mu(K_1)$, el proceso acaba aquí. En caso contrario, pasamos a la siguiente etapa.

Etapa 2. Elegimos $A_2 \subset A \setminus K_1$ tal que $A_2 \in (\mathcal{B}_o(K), \mu)^+$ y $diamf(A_2) < \eta$. A continuación, elegimos un subconjunto compacto $K_2 \subset A_2$ de modo que $\mu(K_2) > 0$. Si $\mu(A) = \mu(K_1) + \mu(K_2)$, el proceso acaba aquí. En caso contrario, pasamos a la siguiente etapa.

Etapa γ. Sea γ un ordinal y supongamos que se han construido los subconjuntos compactos $\{K_\alpha : \alpha < \gamma\}$ de A, disjuntos dos a dos, verificando $\mu(K_\alpha) > 0$ (por tanto $\gamma < \omega_1$) y que $\mu(A) > \sum_{\alpha<\gamma} \mu(K_\alpha)$. Elegimos $A_\gamma \subset A \setminus \bigcup_{\alpha<\gamma} K_\alpha$ tal que $A_\gamma \in (\mathcal{B}_o(K), \mu)^+$ y $diamf(A_\gamma) < \eta$. Elegimos un subconjunto compacto $K_\gamma \subset A_\gamma$ tal que $\mu(K_\gamma) > 0$.

Es claro que el proceso se puede prolongar hasta la etapa $\beta < \omega_1$ y nos proporciona los compactos $\{K_\alpha : \alpha < \beta\}$, $\beta < \omega_1$, verificando (i) y (ii).

Puesto que $\mu(A) = \sum_{\alpha<\beta} \mu(K_\alpha)$, podemos elegir un subconjunto finito $F \subset [1, \beta)$ de modo que, si $W_\rho := \bigcup_{\alpha \in F} K_\alpha$, entonces $\mu(A \setminus W_\rho) \le \rho$ y, además, $Osc(f, W_\rho) < \eta$ porque los compactos K_α son disjuntos dos a dos y $diamf(K_\alpha) < \eta$. ■

Proposición 3.21. *Sea K un compacto Hausdorff.*

(1) $\forall \lambda > 0,\ \forall \epsilon \ge 0,\ \lambda \mathcal{U}^\epsilon(K) = \mathcal{U}^{\lambda\epsilon}(K)$.

(2) $\forall \epsilon_1, \epsilon_2 \ge 0,\ \mathcal{U}^{\epsilon_1}(K) + \mathcal{U}^{\epsilon_2}(K) = \mathcal{U}^{\epsilon_1+\epsilon_2}(K)$.

(3) $\forall \epsilon \ge 0$, $\mathcal{U}_b^\epsilon(K) \subset \ell_\infty(K)$ *es un subconjunto convexo cerrado simétrico respecto del* 0 *de* $\ell_\infty(K)$.

(4) $\mathcal{U}_b^0(K)$ *es un subespacio cerrado de* $\ell_\infty(K)$.

(5) $\mathcal{U}(K) = \mathcal{U}^0(K)$.

Demostración. (1) y (2) son de comprobación inmediata.

(3) Que $\mathcal{U}_b^\epsilon(K)$ es simétrico respecto de 0 sale de la propia definición de $\mathcal{U}_b^\epsilon(K)$. $\mathcal{U}_b^\epsilon(K)$ es convexo por (1) y (2). Veamos que $\mathcal{U}_b^\epsilon(K)$ es cerrado en $\ell_\infty(K)$. Sea $f \in \ell_\infty(K)$ tal que $f \in \overline{\mathcal{U}_b^\epsilon(K)}$. Sean $\mu \in \mathcal{P}_R(K)$, $B \in (\mathcal{B}_o(K), \mu)^+$ y $\eta > \epsilon$. Elegimos $g \in \mathcal{U}_b^\epsilon(K)$ tal que $\|f - g\| \le \frac{1}{3}(\eta - \epsilon)$. Como $g \in \mathcal{U}_b^\epsilon(K)$, existe $A \subset B$, $A \in (\mathcal{B}_o(K), \mu)^+$ tal que $diam(g(A)) \le \epsilon + \frac{1}{3}(\eta - \epsilon)$. En consecuencia

$$diam(f(A)) \le diam(g(A)) + 2\|f - g\| \le \eta,$$

lo que prueba que $f \in \mathcal{U}_b^\epsilon(K)$. Por tanto, $\mathcal{U}_b^\epsilon(K)$ es cerrado en $\ell_\infty(K)$.

(4) Por (1), (2) y (3) es claro que $\mathcal{U}_b^0(K)$ es un subespacio cerrado de $\ell_\infty(K)$.

(5) Probemos, en primer término, que $\mathcal{U}(K) \subset \mathcal{U}^0(K)$. Para ello bastará ver que dados $f \in \mathcal{U}(K)$, $\mu \in \mathcal{P}_R(K)$, $\eta > 0$ y $A \in (\mathcal{B}_o(K), \mu)^+$, existe $B \in (\mathcal{B}_o(K), \mu)^+$, $B \subset A$, de modo que $diam(f(B)) < \eta$. Por el Teorema de Lusin existe un subconjunto compacto $L \subset A$ tal que $f \restriction L$ es continua y $\mu(L) > 0$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $sop(\mu \restriction L) = L$. Puesto que $f \restriction L$ es continua, se puede hallar un abierto V de K tal que $V \cap L \neq \emptyset$ y $diamf(V \cap L) < \eta$. Teniendo en cuenta que $\mu(V \cap L) > 0$ (porque $L = sop(\mu \restriction L)$), basta coger $B := V \cap L$.

Pasemos a probar que $\mathcal{U}^0(K) \subset \mathcal{U}(K)$. Sea $f \in \mathcal{U}^0(K)$. Por el T. de Lusin, para ver que $f \in \mathcal{U}(K)$ bastará probar que dados $\mu \in \mathcal{P}_R(K)$, $A \in (\mathcal{B}_o(K), \mu)^+$ y $0 < \eta \leq \mu(A)$, existe un subconjunto compacto $L \subset A$ tal que $\mu(A \setminus L) \leq \eta$ y $f \restriction K$ es continua. Por el Lema 3.20 existe una secuencia de subconjuntos compactos $K_n \subset A$ tales que $Osc(f, K_n) \leq 1/n$ y $\mu(A \setminus K_n) \leq \eta/2^n$. Sea $L := \bigcap_{n\geq 1} K_n$. Obviamente L es un subconjunto compacto de A tal que $Osc(f, L) = 0$ (es decir, $f \restriction L$ es continua) y además $\mu(A \setminus L) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A \setminus K_n) \leq \eta$. ■

Proposición 3.22. *Sea K un compacto Hausdorff. Entonces para todo $\epsilon \geq 0$ se verifica que $\mathcal{B}_1^\epsilon(K) \subset \mathcal{U}^\epsilon(K)$. Por tanto $\mathcal{B}_1^0(K) \subset \mathcal{U}^0(K) = \mathcal{U}(K)$.*

Demostración. Sean $\epsilon < \eta < \infty$, $\mu \in \mathcal{P}_R(K)$, $A \in (\mathcal{B}_o(K), \mu)^+$ y $f \in \mathcal{B}_1^\epsilon(K)$. Queremos encontrar un subconjunto $B \subset A$ tal que $B \in (\mathcal{B}_o(K), \mu)^+$ y $diamf(B) < \eta$. Por la regularidad de μ existe un compacto $H \subset A$ tal que $\mu(H) > 0$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $sop(\mu \restriction H) = H$. Por la definición de $\mathcal{B}_1^\epsilon(K)$, existe un abierto V en K de modo que $V \cap H \neq \emptyset$ y $diamf(V \cap H) < \eta$. Ahora basta hacer $B := V \cap H$. ■

Definición 3.23. *Si K es un compacto Hausdorff y $f : K \to \mathbb{R}$,* **el índice de medibilidad** *(abrev., $Med(f, K)$) de f en K se define como*

$$Med(f, K) := \inf\{\epsilon \geq 0 : f \in \mathcal{U}^\epsilon(K)\}.$$

Para el caso en que K es la bola unidad cerrada $B(X^*)$ con la w^*-topología del dual X^* de un espacio de Banach X, disponemos del siguiente resultado.

Proposición 3.24. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(0) $Pindex(B(X^*)) = 0$, es decir, $X^* \in (P)$; en otras palabras, todo subconjunto w^*-compacto $K \subset X^*$ verifica $\overline{\text{co}}(K) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$.

(1) X carece de una copia de ℓ_1.

(2) $X^{**} \subset PCP(B(X^*))$, es decir, para todo $z \in X^{**}$ y todo K subconjunto w^*-compacto de X^*, ocurre que $z \restriction K$ tiene un punto de continuidad sobre K.

(3) $Frag(B(X^*)) = 0$, es decir, $X^{**} \subset \mathcal{B}_{1b}^0(B(X^*))$.

(4) $X^{**} \subset \mathcal{U}_b(B(X^*))$, es decir, $Med(\psi, B(X^*)) = 0$, $\forall \psi \in X^{**}$.

Demostración. La equivalencia (4) $\Leftrightarrow$ (0) $\Leftrightarrow$ (1) se debe a Haydon [65].

(1) $\Rightarrow$ (2). Si (2) es falso, existirá un subconjunto w^*-compacto K de $B(X^*)$ y un vector $z \in X^{**}$ de modo que $z \restriction K$ carece de puntos de continuidad en K. Por Lemma 2 y Lemma 3 de [87] esto implica que X posee una copia de ℓ_1, lo que contradice (1).

La implicación (2) $\Rightarrow$ (3) es inmediata pues $PCP(B(X^*)) = \mathcal{B}_1^0(B(X^*))$.

La implicación (3) $\Rightarrow$ (4) sale de la Proposición 3.22. ■

NOTAS. (A) Veamos un contraejemplo: un compacto Hausdorff K tal que $\mathcal{B}_1(K) \neq PCP(K)$. Sea X un espacio de Banach tal que: (i) X carece de una copia de ℓ_1; (ii) $X^{**} \neq \mathcal{S}eq(X^{**})$. Por ejemplo, sea $X := c_0(I)$ con I incontable. Sean $K := (B(X^*), w^*)$ y $\psi \in X^{**} \setminus \mathcal{S}eq(X^{**})$. Entonces:

(a) $\psi \in PCP(K)$ por la Proposición 3.24 y porque X carece de copias de ℓ_1.

(b) $\psi \notin \mathcal{B}_1(K)$ porque $\mathcal{B}_1(K) \cap X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$ (Odell-Rosenthal, ver [87]).

(B) En la Prop. 3.18 y la Prop. 3.19 hemos visto que:

(B1) Si K es un compacto Hausdorff, entonces $\mathcal{B}_1(K) = PCP(K)$ sii K es HL (= hereditariamente Lindelof).

(B2) Si X es un espacio de Banach, el compacto $K := (B(X^*), w^*)$ verifica que $\mathcal{B}_1(K) = PCP(K)$ sii K es metrizable sii X es separable.

Proposición 3.25. *Sean $\epsilon > 0$, K un compacto Hausdorff y $f : K \to \mathbb{R}$ una función acotada. Son equivalentes:*

(1) $f \notin \mathcal{U}_b^\epsilon(K)$.

(2) Existen $\mu \in \mathcal{P}_R(K)$, $r_0 \in \mathbb{R}$, $B_0 \in \mathcal{M}(\mu)^+$ y $\eta > \epsilon$ tales que para todo $B \in \mathcal{M}(\mu)^+$ con $B \subset B_0$ se verifica

$$\text{ínf} f(B) < r_0 < r_0 + \eta < \sup f(B).$$

(3) $Med(f, K) > \epsilon$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Por hipótesis existen $\mu \in \mathcal{P}_R(K)$, $\eta > \epsilon$ y $A \in \mathcal{M}(\mu)^+$ tales que para todo $B \in \mathcal{M}(\mu)^+$ con $B \subset A$ se verifica que $diam(f(B)) > \eta$. Sea

$$r_1 := \sup\{\text{ínf} f(B) : B \subset A,\ B \in (\mathcal{M}(\mu))^+\}.$$

A continuación elegimos $B_0 \subset A,\ B_0 \in \mathcal{M}(\mu)^+$ tal que

$$r_1 - \text{ínf} f(B_0) < \tfrac{\eta-\epsilon}{10}. \tag{3.3}$$

Sea $B \subset B_0$ tal que $B \in (\mathcal{M}(\mu))^+$. Se tiene:

(i) $\sup f(B) - \text{ínf} f(B) > \eta > \epsilon$ por la hipótesis.

(ii) $\text{ínf} f(B_0) \leq \text{ínf} f(B) \leq r_1$.

(iii) Sea $r_0 := r_1 + \frac{\eta-\epsilon}{10}$. Entonces $\text{ínf} f(B) < r_0 < r_0 + \epsilon$ por (ii).

(iv) Además se tiene aplicando (3.3) que

$$\sup f(B) > \eta + \text{ínf} f(B) \geq \eta + \text{ínf} f(B_0) > \eta + r_1 - \tfrac{\eta-\epsilon}{10} = = r_0 + \tfrac{\eta-\epsilon}{10} + \eta - \tfrac{\eta-\epsilon}{10} = r_0 + \eta.$$

Las implicaciones (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) salen de las definiciones. ■

Corolario 3.26. *Sean K un compacto Hausdorff y $f : K \to \mathbb{R}$. Se verifica que*

$$Med(f,K) \leq Frag(f,K).$$

Demostración. Sale inmediatamente de la Prop. 3.25, la Prop. 3.22 y de las definiciones de $Frag(f,K)$ y $Med(f,K)$. ■

Proposición 3.27. *Sean K_1, K_2 dos compactos Hausdorff, $\varphi : K_1 \to K_2$ una aplicación continua sobreyectiva y $f \in \ell_\infty(K_2)$. Entonces:*

(1) Para todo $\epsilon \geq 0$ se verifica que $f \in \mathcal{U}_b^\epsilon(K_2)$ sii $f \circ \varphi \in \mathcal{U}_b^\epsilon(K_1)$.

(2) $Med(f,K_2) = Med(f \circ \varphi, K_1)$.

Demostración. (1) Supongamos que $f \in \mathcal{U}_b^\epsilon(K_2)$ y probemos que $f \circ \varphi \in \mathcal{U}_b^\epsilon(K_1)$. Sean $\eta > 0$, $\nu \in \mathcal{P}_R(K_1)$ y $B \in (\mathcal{B}_o(K_1),\nu)^+$. Podemos suponer que B es un cerrado (es decir, un compacto) de K_1. Sea $\rho := \nu \restriction B$ y $\mu := \varphi(\rho)$. Por hipótesis existe $D \in (\mathcal{B}_o(\varphi(B)),\mu)^+$ tal que $diam f(D) \leq \eta$. Sea $A := \varphi^{-1}(D) \cap B$. Es claro que $A \in (\mathcal{B}_o(B),\rho)^+ \subset (\mathcal{B}_o(K_1),\nu)^+$ y, además, $diam(f \circ \varphi(A)) = diam f(D) \leq \eta$, lo que prueba que $f \circ \varphi \in \mathcal{U}_b^\epsilon(K_1)$.

La prueba de que $f \in \mathcal{U}_b^\epsilon(K_2)$, si $f \circ \varphi \in \mathcal{U}_b^\epsilon(K_1)$, es análoga y se deja como ejercicio.

(2) es consecuencia de (1) ■

Proposición 3.28. *Sean K un espacio compacto Hausdorff, $\epsilon \geq 0$ y $f \in \ell_\infty(K)$. Entonces*

$$dist(f,\mathcal{U}_b^\epsilon(K)) \geq \sup\{\tfrac{1}{2}(Med(f,K) - \epsilon), 0\}.$$

En particular, si $\epsilon = 0$ se tiene $dist(f,\mathcal{U}_b(K)) \geq \frac{1}{2}Med(f,K)$.

Demostración. Para probar que

$$dist(f,\mathcal{U}_b^\epsilon(K)) \geq \sup\{\tfrac{1}{2}(Med(f,K) - \epsilon), 0\}.$$

bastará comprobar que $dist(f,\mathcal{U}_b^\epsilon(K)) \geq \frac{1}{2}(Med(f,K) - \epsilon)$. Comencemos viendo el siguiente aserto.

Aserto 1. Para todo $g \in \mathcal{U}_b^\epsilon(K)$ se verifica $\frac{1}{2}(Med(f,K) - \epsilon) \leq \|f - g\|_\infty$.

En efecto, cojamos $\eta > 0$ tal que $\epsilon < \eta < \infty$. Puesto que $g \in \mathcal{U}_b^\epsilon(K)$, para toda medida $\mu \in \mathcal{P}_R(K)$ y todo subconjunto $B \in (\mathcal{B}_o(K),\mu)^+$, existe un subconjunto $A \subset B$ tal que $A \in (\mathcal{B}_o(K),\mu)^+$ y $\mathrm{diam}(g(A)) \leq \eta$ ($\mathrm{diam}(\emptyset) = 0$). Por tanto

$$diam(f(A)) \leq 2\|f - g\|_\infty + diam(g(A)) \leq 2\|f - g\|_\infty + \eta.$$

De aquí que $Med(f,K) \leq 2\|f - g\|_\infty + \epsilon$, es decir, $\frac{1}{2}(Med(f,K) - \epsilon) \leq \|f - g\|_\infty$.

En consecuencia

$$\tfrac{1}{2}(Med(f,K) - \epsilon) \leq \inf\{\|f - g\|_\infty : g \in \mathcal{U}_b^\epsilon(K)\} = dist(f,\mathcal{U}_b^\epsilon(K)).$$

■

Capítulo 4

Distancias a $\mathcal{B}_{1b}(H)$, $\mathcal{S}eq(X^{**})$ y $\mathcal{S}eq(C(K)^{**})$

4.1. Introducción

En este Capítulo nos dedicamos a obtener estimaciones de distancias, que se utilizarán en los capítulos siguientes. Más concretamente, vamos a obtener, entre otros, los siguientes resultados. Sean X un espacio de Banach, K un subconjunto w^*-compacto de X^*, $H := \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$, B un contorno de K, $d > 0$ y $\psi \in X^{**}$ tales que:

$$\sup\langle\psi, \overline{\text{co}}^{w^*}(K)\rangle > \sup\langle\psi, \overline{\text{co}}(B)\rangle + d. \tag{4.1}$$

En función de $d > 0$ obtenemos las siguientes estimaciones:

(1) Sea $T : X \to C(K)$ tal que $Tx := x \restriction K$. Entonces

$$dist(T^{**}\psi, \mathcal{S}eq(C(K)^{**})) \geq \tfrac{1}{2}d.$$

(2) Sea $T : X \to C(H)$ tal que $Tx := x \restriction H$ y consideremos $\psi \restriction H$ y $\mathcal{B}_{1b}(H)$ dentro de $\ell_\infty(H)$. Entonces:

$$dist(\psi \restriction H, \mathcal{B}_{1b}(H)) \leq dist(T^{**}\psi, \mathcal{S}eq(C(H)^{**})) \leq 3 \cdot dist(\psi \restriction H, \mathcal{B}_{1b}(H)),$$

y

$$dist(\psi \restriction H, \mathcal{B}_{1b}(H)) \geq \tfrac{1}{6}d.$$

(3) Si $H \subset B(X^*)$, entonces $dist(\psi, \mathcal{S}eq(X^{**})) \geq \frac{1}{2}d$.

Observemos lo siguiente:

(a) Por un resultado de Haydon (ver Teorema 1.3 y Prop. 3.24), X carece de copias de ℓ_1 sii $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) = \overline{\text{co}}(K) = \overline{\text{co}}(Ext(K))$ para todo subconjunto w^*-compacto $K \subset X^*$ sii para todo $\psi \in X^{**}$ y todo subconjunto w^*-compacto $K \subset X^*$, si $B = K$ ó $B = Ext(K)$, se verifica:

$$\sup\langle\psi, \overline{\text{co}}^{w^*}(K)\rangle = \sup\langle\psi, B\rangle.$$

(b) Sin embargo, aún suponiendo que X carece de copias de ℓ_1, puede ocurrir que exista algún subconjunto w^*-compacto $K \subset X^*$ y algún contorno B de K tal que $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) \neq \overline{\text{co}}(B)$ (naturalmente $B \neq K$ y $B \neq Ext(K)$ si $\ell_1 \not\subseteq X$; ver Contraejemplos de Cap. siguiente). En tal caso existen $d > 0$ y $\psi \in X^{**}$ verificando la desigualdad (4.1) (es decir, $Bindex(\psi, K) > d$) y ψ sería universalmente medible sobre $B(X^*)$, si X carece de copias de ℓ_1.

(d) Aunque en las estimaciones que obtenemos aquilatamos más, de entrada, un funcional $\psi \in X^{**}$ que verifique (4.1) no puede ser 1-Baire sobre $B(X^*)$. En efecto, si lo fuese, entonces $\psi \in \mathcal{B}_{1b}(B(X^*)) \cap X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$ (por T. de Odell-Rosenthal). Así que existiría una secuencia $(x_n)_n \subset X$ tal que $x_n \to \psi$ en la w^* topología. Por la igualdad de Simons obtendríamos que:

$$\sup\langle \psi, B\rangle = \sup\{\lim_{n\to\infty}\langle b, x_n\rangle : b \in B\} = \sup\{\limsup_{n\to\infty}\langle b, x_n\rangle : b \in B\} =$$
$$= \sup\{\limsup_{n\to\infty}\langle h, x_n\rangle : h \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)\} = \sup\{\lim_{n\to\infty}\langle h, x_n\rangle : h \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)\} =$$
$$= \sup\langle \psi, \overline{\text{co}}^{w^*}(K)\rangle,$$

lo que contradice (4.1).

4.2. Distancia a $\mathcal{B}_{1b}(H)$ para H convexo

Sean $H \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto de un espacio de Banach dual X^*, B un contorno de H y $T : X \to C(H)$ el operador continuo tal que $Tx := x \restriction H$, $\forall x \in X$, y $\varphi \in \mathcal{B}_{1b}((H, w^*))$. Entonces

(1) Para toda probabilidad $\mu \in \mathcal{P}_R(H)$, $T^*\mu$ es la resultante $r(\mu)$ ó baricentro de μ. Por tanto $T^*\mu \in \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$.

(2) Si $\varphi \in \mathcal{B}_{1b}(H)$, definimos $\tilde{\varphi} \in C(H)^{**}$ como el (único) elemento de $\mathcal{S}eq(C(H)^{**})$ tal que $S^*(\tilde{\varphi}) = \varphi$ (ver Proposición 4.1). Es decir, como $\varphi \in \mathcal{B}_{1b}(H)$, φ es Borel-medible sobre H y

$$\forall \mu \in M_R(H),\ \tilde{\varphi}(\mu) := \int_H \varphi d\mu.$$

(3) $C(H)^*$ es el espacio $M_R(H)$ de las medidas de Radon sobre H. Más concretamente

$$C(H)^* = M_R(H) = \ell_1(H) \oplus_1 M_R^d(H) \tag{4.2}$$

siendo $\ell_1(H)$ el espacio de las medidas puramente atómicas sobre H y $M_R^d(H)$ el de las medidas difusas ó puramente no-atómicas. Además

$$C(H)^{**} = \ell_\infty(H) \oplus_\infty (M_R^d(H))^*.$$

Si $S : \ell_1(H) \to C(H)^*$ es la inclusión canónica asociada a la descomposición (4.2), $S^* : C(H)^{**} \to \ell_\infty(H)$ es un cociente canónico.

Proposición 4.1. *Sean K un espacio compacto Hausdorff y $S : \ell_1(K) \to C(K)^*$ la inclusión canónica isométrica tal que, $\forall a := (a_k)_{k\in K} \in \ell_1(K), S(a)$ es la medida de Radon puramente atómica $\sum_{k\in K} a_k \cdot \mathbb{1}_{\{k\}}$. Entonces $S^* : C(K)^{**} \to \ell_\infty(K)$ es un cociente tal que*

(1) $S^*(\mathcal{S}eq(C(K)^{**})) = \mathcal{B}_{1b}(K)$.

(2) S^* es un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{S}eq(C(K)^{**})$ y $\mathcal{B}_{1b}(K)$.

Demostración. (1) Sea $\psi \in C(K)^{**}$. Entonces $S^*(\psi) = \psi \restriction K$, considerando a K canónicamente sumergido en $C(K)^*$, de modo que a cada punto $k \in K$ le hacemos corresponder la medida de Dirac δ_k de masa 1 sobre k. Si $(f_n)_{n\geq 1} \subset C(K)$ verifica que $f_n \overset{w^*}{\to} \psi$, entonces $f_n \to \psi \restriction K$ puntualmente sobre K. Por tanto $S^*(\psi) \in \mathcal{B}_{1b}(K)$. Y viceversa, sea $\varphi \in \mathcal{B}_{1b}(K)$ y sea $(f_n)_{n\geq 1} \subset C(K)$ verificando $f_n \to \varphi$ puntualmente sobre K. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\|f_n\| \leq \|\varphi\|$, $\forall n \geq 1$, de donde, por el T. de la Convergencia Dominada, se tiene que

$$\int_K f_n(k)d\mu \underset{n\to\infty}{\to} \int_K \varphi(k)d\mu.$$

Por tanto, si definimos $\langle\tilde{\varphi}, \mu\rangle = \int_K \varphi(k)d\mu$, $\forall \mu \in C(K)^*$, se verifica que $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}eq(C(K)^{**})$ y $S^*(\tilde{\varphi}) = \varphi$.

(2) Bastará probar que, si $\psi \in \mathcal{S}eq(C(K)^{**})$, entonces $\|S^*(\psi)\| = \|\psi\|$, es decir, que

$$\|\psi\| = \sup\{|\langle\psi, \mathbb{1}_k\rangle| : k \in K\} =: \|\psi \restriction K\| = \|S^*(\psi)\|.$$

De entrada obviamente $\|\psi\| \geq \|S^*(\psi)\|$. Para probar la desigualdad contraria, sea $(f_n)_{n\geq 1} \subset C(K)$ verificando $f_n \overset{w^*}{\to} \psi$. En particular, $(f_n)_{n\geq 1} \subset C(K)$ es una sucesión uniformemente acotada y $f_n \to \psi$ puntualmente sobre K. Así que por el T. de la Convergencia Dominada, se tiene que

$$\forall \mu \in C(K)^*,\ \langle\psi, \mu\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, \mu\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_K f_n(k)d\mu = \int_K \psi(k)d\mu.$$

En consecuencia

$$\|\psi\| = \sup\{|\langle\psi, \mu\rangle| : \mu \in B(C(K)^*)\} = \sup\{|\int_K \psi(k)d\mu| : \mu \in B(C(K)^*)\} \leq \|\psi \restriction K\|.$$

■

Proposición 4.2. *Sea K un compacto Hausdorff y $z \in C(K)^{**}$. Supongamos que $z = z_1 + z_2$, con $z_1 \in \ell_\infty(K)$ y $z_2 \in M_R^d(K)^*$. Entonces, si $0 < \eta < \|z_2\| - \|z_1\|$, existe un subconjunto w^*-cerrado $S \subset K$ tal que z η-oscila uniformemente sobre el subconjunto w^*-compacto convexo $\mathcal{P}_R(S) \subset \mathcal{P}_R(K)$. Por tanto*

$$Frag(z, \mathcal{P}_R(K)) \geq \|z_2\| - \|z_1\|.$$

Demostración. Sean $0 < \epsilon$ tal que $\eta + \epsilon < \|z_2\| - \|z_1\|$ y $\nu \in \mathcal{P}_R(K)$ tales que $|\langle z, \nu\rangle| > \|z_2\| - \epsilon$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\langle z, \nu\rangle > \|z_2\| - \epsilon$. A continuación consideramos la restricción $z \upharpoonright L_1(\nu) \in L_1(\nu)^* = L_\infty(\nu)$ y elegimos $\varphi : K \to \mathbb{R}$ función Borel acotada tal que

$$\eta - \epsilon < \langle z, \nu\rangle = \int_K \varphi \cdot d\nu \leq \int_K \varphi^+ \cdot d\nu.$$

Por tanto, para toda medida $\rho \in M_R(K)$ tal que $\rho << \nu$, se verifica

$$\langle z, \rho\rangle = \int_K \varphi \cdot \frac{d\rho}{d\nu} \cdot d\nu = \int_K \varphi \cdot d\rho.$$

Sea $E := \{k \in K : \varphi^+(k) \geq \eta - \epsilon\}$. Claramente $\nu(E) > 0$. Definimos $\mu \in \mathcal{P}_R(K)$ de modo que

$$\mu(B) = \frac{\nu(B \cap E)}{\nu(E)},\ \forall B \in \mathcal{B}_o(K).$$

Claramente $\mu << \nu$. Sea $S := sop(\mu)$ el soporte de μ, que es un subconjunto w^*-compacto de K. Se tiene lo siguiente:

(i) Sea $\mathcal{P}_\mu := \{\tau \in \mathcal{P}_R(K) : \tau << \mu\}$. Se prueba fácilmente que $\mathcal{P}_\mu$ es un subconjunto w^*-denso de $\mathcal{P}_R(S)$.

(ii) Si $\rho \in \mathcal{P}_\mu$, entonces $\rho << \mu << \nu$, de donde $\rho({}^cE) = 0$ (porque $\mu({}^cE) = 0$) y

$$\langle z, \rho\rangle = \int_K \varphi \cdot d\rho = \int_E \varphi \cdot d\rho = \int_E \varphi^+ \cdot d\rho \geq \eta - \epsilon$$

(iii) Sea $\mathcal{P}_R^a(S)$ la familia de elementos puramente atómicos de $\mathcal{P}_R(S)$. Se tiene que $\mathcal{P}_R^a(S)$ es un subconjunto w^*-denso de $\mathcal{P}_R(S)$ tal que para todo $\rho \in \mathcal{P}_R^a(S)$ se tiene $|\langle z, \rho\rangle| \leq \|z_1\|$ porque

$$\|z_1\| = \sup\{\langle z, \rho\rangle| : \rho \in \ell_1(K)\}.$$

Sea $V \subset \mathcal{P}_R(K)$ un subconjunto w^*-abierto (relativo) de $\mathcal{P}_R(K)$ tal que $V\mathcal{P}_R(S) \neq \emptyset$. Entonces $V \cap \mathcal{P}_R^a(S) \neq \emptyset \neq V \cap \mathcal{P}_\mu$, por lo que

$$\sup\langle z, V \cap \mathcal{P}_R^a(S)\rangle \leq \|z_1\| < \|z_2\| - \epsilon \leq \text{ínf}\langle z, \mathcal{P}\mu\rangle.$$

Como $\eta < \|z_2\| - \|z_1| + \epsilon$, concluimos que $\mathcal{P}_R(S)$ es un subconjunto de η-oscilación uniforme de z en $\mathcal{P}_R(K)$. Esto termina la prueba. ∎

Corolario 4.3. *Sean K un compacto Hausdorff y $\psi \in C(K)^{**} \cap \mathcal{B}_{1b}^0(\mathcal{P}_R(K))$ (por ejemplo, $\psi \in \mathcal{S}eq(C(K)^{**})$). Entonces $Frag(\psi, K) = 0$ y, si $\psi = \psi_1 + \psi_2$ con $\psi_1 \in \ell_\infty(K)$ y $\psi_2 \in M_R^d(K)^*$, se verifica que $\|\psi\| = \|\psi_1\| \geq \|\psi_2\|$.*

Demostración. Como $\psi \in \mathcal{B}_{1b}^0(\mathcal{P}_R(K))$, se tiene que $Frag(\psi, \mathcal{P}_R(K)) = 0$. Ahora basta aplicar la Proposición 4.2. ∎

Proposición 4.4. *Sean X un espacio de Banach, $K \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto, $T : X \to C(K)$ tal que $Tx := x \restriction K$ y $\psi \in X^{**}$. Entonces*

$$Frag(\psi, K) \leq Frag(T^{**}\psi, \mathcal{P}_R(K)) \leq Frag(\psi, \overline{\text{co}}^{w^*}(K)).$$

Por tanto, si K es convexo, $Frag(\psi, K) = Frag(T^{**}\psi, \mathcal{P}_R(K))$.

Demostración. Como en $\mathcal{P}_R(K)$ hay una copia homeomorfa de K, es claro que $Frag(\psi, K) \leq Frag(T^{**}\psi, \mathcal{P}_R(K))$. Veamos que $Frag(T^{**}\psi, \mathcal{P}_R(K)) \leq Frag(\psi, \overline{\text{co}}^{w^*}(K))$. Sean $\epsilon := Frag(\psi, \overline{\text{co}}^{w^*}(K))$, $\eta > \epsilon$ y $\emptyset \neq A \subset \mathcal{P}_R(K)$. Es claro que $T^*(A) \subset \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$. Por hipótesis existe un subconjunto w^*-abierto $V \subset X^{**}$ tal que $V \cap T^*(A) \neq \emptyset$ y $diam(\langle \psi, V \cap T^*(A) \rangle) \leq \eta$. Sea $W := T^{*-1}(V) \cap \mathcal{P}_R(K)$, que es un subconjunto w^*-abierto de $\mathcal{P}_R(K)$ tal que

(i) $W \cap A \neq \emptyset$ y $T^*(W \cap A) = V \cap T^*(A)$.

(ii) $\langle T^{**}\psi, W \cap A \rangle = \langle \psi, T^*(W \cap A) \rangle = \langle \psi, V \cap T^*(A) \rangle$, de donde $diam \langle T^{**}\psi, W \cap A \rangle \leq \eta$.

Esto prueba que $Frag(T^{**}\psi, \mathcal{P}_R(K)) \leq Frag(\psi, \overline{\text{co}}^{w^*}(K))$. ■

Lema 4.5. *Sean K un subconjunto compacto Hausdorff y $\psi, \varphi \in \ell_\infty(K)$ tales que $Frag(\varphi, K) = 0$ (es decir, $\varphi \in \mathcal{B}_{1b}^0(K)$). Entonces $Frag(\psi + \varphi, K) = Frag(\psi, K)$.*

Demostración. Sea $\epsilon = Frag(\psi, K)$. Entonces $\psi \in \mathcal{B}_{1b}^\epsilon(K)$, de donde $\psi + \varphi \in \mathcal{B}_{1b}^\epsilon(K) + \mathcal{B}_{1b}^0(K) = \mathcal{B}_{1b}^\epsilon(K)$, por lo que $Frag(\psi + \varphi, K) \leq Frag(\psi, K)$. Por un argumento análogo se tiene

$$Frag(\psi, K) = Frag(\psi + \varphi - \varphi, K) \leq Frag(\psi + \varphi, K).$$

En consecuencia, $Frag(\psi + \varphi, K) = Frag(\psi, K)$. ■

Proposición 4.6. *Sean X un espacio de Banach, $K \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto, $T : X \to C(K)$ siendo $Tx := x \restriction K$, $\forall x \in X$, y $\psi \in X^{**}$ tales que*

$$0 < a = dist(T^{**}\psi, \mathcal{S}eq(C(K)^{**})) - dist(\psi \restriction K, \mathcal{B}_{1b}(K)).$$

Entonces

$$a \leq Frag(T^{**}\psi, \mathcal{P}_R(K)) \leq Frag(\psi, \overline{\text{co}}^{w^*}(K)).$$

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $\varphi \in \mathcal{B}_{1b}(K)$ tales que $\|\psi - \varphi\| < dist(\psi \restriction K, \mathcal{B}_{1b}(K)) + \epsilon$ en $\ell_\infty(K)$. Combinando con la hipótesis obtenemos que

$$\|T^{**}\psi - \tilde{\varphi}\| > \|\psi - \varphi\| - \epsilon + a.$$

Por otra parte, tenemos la descomposición

$$T^{**}\psi - \tilde{\varphi} = z_1 + z_2, \;\; z_1 \in \ell_\infty(K), \;\; z_2 \in M_R^d(K)^*,$$

siendo $z_1 := (\psi - \varphi) \restriction K \in \ell_\infty(K)$. Por la Proposición 4.2 se tiene

$$Frag(T^{**}\psi - \tilde{\varphi}, \mathcal{P}_R(K)) \geq a - \epsilon.$$

Como $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}eq(C(K)^{**})$, resulta $Frag(\tilde{\varphi}, \mathcal{P}_R(K)) = 0$. Por el Lema 4.5 obtenemos

$$a - \epsilon \leq Frag(T^{**}\psi, \mathcal{P}_R(K)).$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario concluimos que

$$a \leq Frag(T^{**}\psi, \mathcal{P}_R(K)).$$

Finalmente la desigualdad $Frag(T^{**}\psi, \mathcal{P}_R(K)) \leq Frag(\psi, \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K))$ está probada en la Proposición 4.4. ■

Proposición 4.7. *Sean X un espacio de Banach, $H \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto convexo, $T : X \to C(H)$ tal que $Tx := x \upharpoonright H$, $\forall x \in X$, $\psi \in X^{**}$ y $\varphi \in \mathcal{B}_{1b}(H)$. Entonces*

$$\|\psi - \varphi\|_{\ell_\infty(H)} \overset{(a)}{\leq} \|T^{**}\psi - \tilde{\varphi}\|_{C(H)^{**}} \overset{(b)}{\leq} 3\|\psi - \varphi\|_{\ell_\infty(H)}.$$

En consecuencia

$$dist(\psi \upharpoonright H, \mathcal{B}_{1b}(H)) \leq dist(T^{**}\psi, \mathcal{S}eq(C(H)^{**})) \leq 3dist(\psi \upharpoonright H, \mathcal{B}_{1b}(H)).$$

Demostración. Sabemos que $C(H)^{**} = \ell_\infty(H) \oplus_\infty M_R^d(H)^*$. El vector $T^{**}\psi - \tilde{\varphi} \in C(H)^{**}$ se descompone de la siguiente manera

$$T^{**}\psi - \tilde{\varphi} = z_1 + z_2,\ z_1 \in \ell_\infty(H),\ z_2 \in M_R^d(H)^*,$$

siendo $z_1 = (\psi - \varphi) \upharpoonright H \in \ell_\infty(H)$.

(a) La desigualdad (a) es obvia porque $\|z_1\| \leq \|z_1 + z_2\|$.

(b) Supongamos que $\|\psi - \varphi\| < \eta$ en $\ell_\infty(H)$. Queremos probar que $\|T^{**}\psi - \tilde{\varphi}\| < 3\eta$, de donde se deduce inmediatamente que $\|T^{**}\psi - \tilde{\varphi}\| \leq 3\|\psi - \varphi\|$. Supongamos que $\|T^{**}\psi - \tilde{\varphi}\| \geq 3\eta$. Entonces

$$\|z_2\| > \|z_1\| \text{ y } \|z_2\| - \|z_1\| > 2\eta.$$

Aplicando Proposición 4.4, Lema 4.5 y Proposición 4.2 obtenemos

$$Frag(\psi, H) \geq Frag(T^{**}\psi, \mathcal{P}_R(H)) \geq \|z_2\| - \|z_1\| > 2\eta. \tag{4.3}$$

Aserto. $Frag(\psi, H) < 2\eta$.

En efecto, aplicando el Lema 4.5 se tiene

$$Frag(\psi, H) = Frag(\psi - \varphi, H) \leq 2\|\psi - \varphi\| < 2\eta.$$

Hemos llegado a una contradicción con (4.3) que prueba el enunciado. ■

Proposición 4.8. *Sean X un espacio de Banach, $H \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto convexo, $T : X \to C(H)$ tal que $Tx := x \upharpoonright H$, $\forall x \in X$, y $\psi \in X^{**}$ tal que $\psi \upharpoonright H \in \mathcal{B}^0_{1b}(H)$. Entonces:*

(A1) $T^{**}\psi \in \mathcal{B}^0_{1b}(\mathcal{P}_R(H))$ y, $\forall \varphi \in \mathcal{B}_{1b}(H)$, se tiene $T^{**}\psi - \tilde{\varphi} \in \mathcal{B}^0_{1b}(\mathcal{P}_R(H))$ y $\|T^{**}\psi - \tilde{\varphi}\| \leq \|\psi - \varphi\|_{\ell_\infty(H)}$.

(A2) $\forall \varphi \in \mathcal{B}_{1b}(H)$, $\|T^{**}\psi - \tilde{\varphi}\| = \|\psi - \varphi\|_{\ell_\infty(H)}$ y $dist(T^{**}\psi, \mathcal{S}eq(C(H)^{**})) = dist(\psi \upharpoonright H, \mathcal{B}_{1b}(H))$.

Demostración. (A1) Por la Proposición 4.4 sabemos que

$$Frag(T^{**}\psi, \mathcal{P}_R(H)) = Frag(\psi, H).$$

Como $Frag(\psi, H) = 0$ (porque $\psi \in \mathcal{B}^0_{1b}(H)$), concluimos que $Frag(T^{**}\psi, \mathcal{P}_R(H)) = 0$, es decir, $T^{**}\psi \in \mathcal{B}^0_{1b}(\mathcal{P}_R(H))$. Por tanto, $\forall \varphi \in \mathcal{B}_{1b}(H)$, se tiene $T^{**}\psi - \tilde{\varphi} \in \mathcal{B}^0_{1b}(\mathcal{P}_R(H))$ por Lema 4.5. Finalmente que $\|T^{**}\psi - \tilde{\varphi}\| \leq \|\psi - \varphi\|_{\ell_\infty(H)}$ sale de la Proposición 4.2.

(A2) sale de (1) y de la Proposición 4.7. ■

Recordemos que, para $\psi \in X^{**}$ y $K \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto, el $Bindex(\psi, K)$ y el $Bindex(K)$ se han definido en la Def. 1.13.

Lema 4.9. *Sean X un espacio de Banach, $K \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto, B un contorno de K, $w_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$, $\psi \in X^{**}$ y $d > 0$ tales que*

$$\langle \psi, w_0 \rangle > \sup\langle \psi, \overline{\text{co}}(B) \rangle + d. \tag{4.4}$$

Entonces:

(I) Si $K \subset B(X^*)$, $dist(\psi, \mathcal{S}eq(X^{**})) \geq \frac{1}{2}d$.

(II) Se tiene que $dist(T^{**}\psi, \mathcal{S}eq(C(K)^{**})) \geq \frac{1}{2}d$ siendo $T : X \to C(K)$ tal que $Tx := x \upharpoonright K$. En consecuencia $dist(T^{**}\psi, \mathcal{S}eq(C(K)^{**})) \geq \frac{1}{2}Bindex(\psi, K)$.

Demostración. (I) Supongamos que $dist(\psi, \mathcal{S}eq(X^{**})) < \frac{1}{2}d$ y sea $\varphi \in \mathcal{S}eq(X^{**})$ tal que $\|\psi - \varphi\| < \frac{1}{2}d$. Como $\varphi \in \mathcal{S}eq(X^{**})$, por la igualdad de Simons se verifica $\sup\langle \varphi, \overline{\text{co}}^{w^*}(K)\rangle = \sup\langle \varphi, \overline{\text{co}}(B)\rangle$. Por tanto

$$\begin{aligned} \langle \psi, w_0 \rangle < \langle \varphi, w_0 \rangle + \tfrac{1}{2}d \leq \sup\langle \varphi, \overline{\text{co}}^{w^*}(K)\rangle + \tfrac{1}{2}d = \\ = \sup\langle \varphi, \overline{\text{co}}(B)\rangle + \tfrac{1}{2}d \leq \sup\langle \psi, \overline{\text{co}}(B)\rangle + d. \end{aligned}$$

Hemos llegado a una desigualdad en contradicción con (4.4), lo que prueba el enunciado.

(II) (A) Supongamos que $\|\psi\| = 1$. Sea $r_0 := \sup\langle \psi, \overline{\text{co}}(B)\rangle$. Supongamos que el resultado es falso. Entonces existen $\varphi \in \mathcal{B}_{1b}(K)$, un número real d' con $0 < d' < d$ y un vector $e \in B(C(K)^{**})$ tales que $T^{**}\psi = \tilde{\varphi} + \frac{d'}{2}e$ en $C(K)^{**}$. Sean

$$U := \{z \in B(X^{**}) : \langle z, w_0 \rangle \geq r_0 + d\} \text{ y } V := \{x \in B(X) : \langle w_0, x \rangle \geq r_0 + d\}.$$

Claramente, $U = \overline{V}^{w^*}$, $\psi \in U$, $T^{**}\psi \in \overline{TV}^{w^*}$ y

$$\tilde{\varphi} = T^{**}\psi - \tfrac{d'}{2}e \in \overline{TV}^{w^*} + \tfrac{d'}{2}B(C(K)^{**}) = \overline{TV + \tfrac{d'}{2}B(C(K))}^{w^*}.$$

Puesto que $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}eq(C(K)^{**})$, por [87, REMARK, p. 379] existen secuencias $\{x_n : n \geq 1\} \subset V$ y $\{f_n : n \geq 1\} \subset B(C(K))$ tales que

$$T^{**}x_n + \tfrac{d'}{2}f_n \to \tilde{\varphi} \text{ en } (C(K)^{**}, w^*). \tag{4.5}$$

Por la igualdad de Simons [103, SUP-LIMSUP TH., p. 69] se tiene:

$$\sup_{p\in B} \limsup_{n\to\infty} \langle p, x_n\rangle = \sup_{h\in\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)} \limsup_{n\to\infty} \langle h, x_n\rangle.$$

Por otra parte, si $p \in B$ y δ_p es la probabilidad de Dirac de masa 1 sobre p, se tiene por (4.5) que

$$\lim_{n\geq 1} \langle T^{**}x_n + \tfrac{d'}{2}f_n, \delta_p\rangle \to \langle \tilde{\varphi}, \delta_p\rangle = \varphi(p),$$

de donde obtenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \langle p, x_n\rangle = \limsup_{n\to\infty} \langle T^{**}x_n, \delta_p\rangle = \limsup_{n\to\infty} \left[\langle T^{**}x_n + \tfrac{d'}{2}f_n, \delta_p\rangle - \langle \tfrac{d'}{2}f_n, \delta_p\rangle\right] =$$
$$= \varphi(p) + \limsup_{n\to\infty} \left[-\langle \tfrac{d'}{2}f_n, \delta_p\rangle\right] \leq \varphi(p) + \tfrac{d'}{2} = \psi(p) - \tfrac{d'}{2}\langle e, \delta_p\rangle + \tfrac{d'}{2} \leq r_0 + d'.$$

Por tanto

$$\sup_{p\in B} \limsup_{n\to\infty} \langle p, x_n\rangle \leq r_0 + d'.$$

Por otra parte, como $w_0 \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$ y $x_n \in V$, $\forall n \geq 1$, se tiene que

$$\sup_{h\in\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)} \limsup_{n\to\infty} \langle h, x_n\rangle \geq \limsup_{n\to\infty} \langle w_0, x_n\rangle \geq r_0 + d.$$

Concluimos que $r_0 + d' \geq r_0 + d$, esto es, $d' \geq d$, una contradicción. Esto completa la prueba en el caso $\|\psi\| = 1$.

(B) Sea $\psi \in X^{**}$ arbitrario, pero tal que $\psi \neq 0$. De la desigualdad (4.4) obtenemos $\langle \psi/\|\psi\|, w_0\rangle > \sup\langle \psi/\|\psi\|, \overline{\mathrm{co}}(B)\rangle + d/\|\psi\|$. De (A) sale que

$$dist(T^{**}(\psi/\|\psi\|), \mathcal{S}eq(C(K)^{**})) \geq \frac{d}{2\|\psi\|},$$

y finalmente $dist(T^{**}\psi, \mathcal{S}eq(C(K)^{**})) \geq \frac{1}{2}d$.

(C) Sea $W \subset K$ un subconjunto w^*-compacto y denotemos $T_1(x) = x \restriction W$, $\forall x \in X$. Es inmediato que $dist(T^{**}\psi, \mathcal{S}eq(C(K)^{**})) \geq dist(T_1^{**}\psi, \mathcal{S}eq(C(W)^{**}))$, de donde por lo anterior obtenemos

$$dist(T^{**}\psi, \mathcal{S}eq(C(K)^{**})) \geq \tfrac{1}{2}Bindex(\psi, K).$$

■

Proposición 4.10. *Sean X un espacio de Banach, H un subconjunto convexo w^*-compacto de $B(X^*)$, $w_0 \in H$, $B \subset H$ un contorno de H, $d > 0$ y $\psi \in X^{**}$ tales que*

$$\langle \psi, w_0 \rangle > \sup \langle \psi, B \rangle + d.$$

Entonces $dist(\psi, Seq(X^{**}, H)) \geq \frac{d}{2}$. En particular, si $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$, entonces $\overline{\mathrm{co}}(B) = \overline{\mathrm{co}}^*(K)$ para todo subconjunto w^*-compacto $K \subset X^*$ y todo contorno B de K.

Demostración. Sea $T : X \to C(H)$ el operador restricción tal que $Tx = x \restriction H$, $\forall x \in X$. Observemos que $\|T\| \leq 1$ porque $H \subset B(X^*)$.

Aserto. $T^{**}(\mathcal{S}eq(X^{**}; H)) \subset \mathcal{S}eq(C(H)^{**})$.

En efecto, sea $z \in \mathcal{S}eq(X^{**}; H)$. Entonces $z \restriction H \in \mathcal{B}_{1b}(H)$ y de la Proposición 4.7 sale que

$$dist(T^{**}z, \mathcal{S}eq(C(H)^{**})) \leq 3dist(z \restriction H, \mathcal{B}_{1b}(H)) = 0.$$

Como $\mathcal{S}eq(C(H)^{**})$ es un subespacio cerrado de $C(H)^{**}$ (por [81]), concluimos que $T^{**}z \in \mathcal{S}eq(C(H)^{**})$ (ver también la prueba del Aserto 1 de la Proposición 1.23).

Como $\|T\| \leq 1$ se tiene que

$$dist(\psi, Seq(X^{**}, H)) \geq dist(T^{**}\psi, \mathcal{S}eq(C(H)^{**})).$$

Del Lema 4.9 obtenemos que $dist(\psi, Seq(X^{**}, H)) \geq \frac{d}{2}$. ∎

Proposición 4.11. *Sean X un espacio de Banach, $H \subset X^*$ un subconjunto convexo w^*-compacto, B un contorno de H, $w_0 \in H$, $\psi \in X^{**}$ y $d > 0$ tales que*

$$\langle \psi, w_0 \rangle > \sup \langle \psi, \overline{\mathrm{co}}(B) \rangle + d.$$

Entonces $dist(\psi \restriction H, \mathcal{B}_{1b}(H)) \geq \frac{1}{6}d$ en $\ell_\infty(H)$.

Demostración. La prueba sale de la Proposición 4.7 y el Lema 4.9. ∎

Proposición 4.12. *Si X es un espacio de Banach y $H \subset X^*$ un subconjunto convexo w^*-compacto de X^*, entonces para todo $\psi \in X^{**}$ se verifica*

$$dist(\psi \restriction H, \mathcal{B}_{1b}(H)) \geq \tfrac{1}{6} Bindex(\psi, H).$$

Demostración. Como $dist(\psi \restriction H, \mathcal{B}_{1b}(H)) \geq dist(\psi \restriction W, \mathcal{B}_{1b}(W))$ para todo subconjunto w^*-compacto convexo $W \subset H$, bastará probar que, si existen un subconjunto w^*-compacto convexo $W \subset H$, $d > 0$, $w_0 \in H$ y un contorno B de W tales que

$$\langle \psi, w_0 \rangle > \sup \langle \psi, \overline{\mathrm{co}}(B) \rangle + d,$$

entonces $dist(\psi \restriction W, \mathcal{B}_{1b}(W)) \geq \frac{1}{6}d$, lo que sale de la Proposición 4.11. ∎

Corolario 4.13. *Sean X un espacio de Banach, H un subconjunto convexo w^*-compacto de X^*, $C \subset X$ un subconjunto convexo y $\psi \in X^{**}$ tal que $\psi \in \overline{C}^{w^*}$. Son equivalentes:*

(1) $\psi \upharpoonright H \in \mathcal{B}_{1b}(H)$.

(2) Existe una secuencia $(x_n)_{n\geq 1} \subset C$ tal que $x_n \to \psi$ sobre H.

Demostración. (2) $\Rightarrow$ (1) es obvio.

(1) $\Rightarrow$ (2). Sea $T : X \to C(H)$ el operador tal que $T(x) = x \upharpoonright H$. Puesto que $\psi \upharpoonright H \in \mathcal{B}_{1b}(H)$, de la Prop. 4.7 sale que

$$dist(T^{**}\psi, \mathcal{S}eq(C(H)^{**})) \leq 3dist(\psi \upharpoonright H, \mathcal{B}_{1b}(H)) = 0.$$

Como $\mathcal{S}eq(C(H)^{**})$ es un subespacio cerrado de $C(H)^{**}$, concluimos que $T^{**}\psi \in \mathcal{S}eq(C(H)^{**})$. Como también $T^{**}\psi \in \overline{T(C)}^{w^*}$, la implicación sale de [87, Sublemma, p. 379]. ■

Corolario 4.14. *Sean X un espacio de Banach, H un subconjunto convexo w^*-compacto de X^* y $\psi \in X^{**}$. Entonces:*

(a) Si $\psi \in \mathcal{S}eq(X^{**}; H)$, existe una secuencia $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ con $\|x_n\| \leq \|\psi\|$ tal que $x_n \to \psi$ sobre H.

(b) $\psi \in \mathcal{B}_{1b}(H)$ sii $\psi \in \mathcal{S}eq(X^{**}; H)$.

Demostración. (a) Por hipótesis $\psi \upharpoonright H \in \mathcal{B}_{1b}(H)$ y también $\psi \in \overline{\|\psi\|B(X)}^{w^*}$. Ahora basta aplicar el Corolario 4.13.

(b) sale del Corolario 4.13 y de que $\psi \in \overline{\|\psi\|B(X)}^{w^*}$. ■

Corolario 4.15. *Sean X un espacio de Banach, H un subconjunto convexo w^*-compacto de $B(X^*)$ y $\psi \in X^{**}$. Entonces*

$$dist(\psi, Seq(X^{**})) \geq dist(\psi, Seq(X^{**}, H)) \geq \tfrac{1}{2}Bindex(\psi, H) \geq \tfrac{1}{2}Pindex(\psi, H)$$

y por tanto

$$dist(\psi, Seq(X^{**})) \geq \tfrac{1}{2}Bindex(\psi, B(X^*)) \geq \tfrac{1}{2}Pindex(\psi, B(X^*)).$$

Demostración. Es consecuencia de la Proposición 4.10 y las definiciones de $Bindex(\psi, B(X^*))$ y $Pindex(\psi, B(X^*))$. ■

Corolario 4.16. *Sea X un espacio de Banach y $H \subset X^*$ un subconjunto convexo w^*-compacto tal que $\mathcal{S}eq(X^{**}, H) = X^{**}$. Entonces para todo subconjunto w^*-compacto $W \subset H$ y todo contorno B de W se verifica $\overline{\text{co}}(B) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$.*

Demostración. La prueba sale inmediatamente de la Proposición 4.10.

■

4.3. Distancia a $\mathcal{B}_{1b}(K)$ con $K \in (P)$

Hasta ahora hemos trabajado con un subconjunto convexo w^*-compacto H de un espacio de Banach dual X^* y hemos relacionado, dados un contorno B de H y un vector $\psi \in X^{**}$ tales que $\sup\langle\psi, H\rangle > \sup\langle\psi, \overline{\mathrm{co}}(B)\rangle + d,\ d > 0$, el número d con la distancia $dist(\psi \restriction H, \mathcal{B}_{1b}(H))$, etc. Cuando H no es convexo se pueden obtener también estimaciones parecidas, bajo la hipótesis $H \in (P)$, como vemos a continuación.

Lema 4.17. *Sean X un espacio de Banach y $K \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto tal que $K \in (P)$. Sea $T : X \to C(K)$ el operador continuo definido por $Tx := x \restriction K$ para todo $x \in X$. Entonces para todo $\psi \in X^{**}$ se verifica que*

$$dist(T^{**}\psi, \mathcal{S}eq(C(K)^{**})) = dist(\psi \restriction K, \mathcal{B}_{1b}(K)),$$

donde

(i) $dist(T^{**}\psi, \mathcal{S}eq(C(K)^{**}))$ es la distancia con la norma de $C(K)^{**}$.

(ii) $dist(\psi \restriction K, \mathcal{B}_{1b}(K))$ es la distancia en $\ell_\infty(K)$.

Demostración. En primer término, es inmediato que

$$dist(T^{**}\psi, \mathcal{S}eq(C(K)^{**})) \geq dist(\psi \restriction K, \mathcal{B}_{1b}(K)),$$

porque $\mathcal{S}eq(C(K)^{**}) \restriction K = \mathcal{B}_{1b}(K)$ y $,\forall\varphi \in \mathcal{B}_{1b}(K),\ \|T^{**}\psi - \tilde{\varphi}\| \geq \|S^*(T^{**}\psi - \tilde{\varphi})\| = \|\psi \restriction K - \varphi\|$ (ver Proposición 4.1). Veamos que

$$dist(T^{**}\psi, \mathcal{S}eq(C(K)^{**})) \leq dist(\psi \restriction K, \mathcal{B}_{1b}(K)). \tag{4.6}$$

Sean $\varphi \in \mathcal{B}_{1b}(K)$ y $\eta > 0$ tales que $\|\psi \restriction K - \varphi\| \leq \eta$ en $\ell_\infty(K)$. Queremos ver que $\|T^{**}\psi - \tilde{\varphi}\| \leq \eta$ en $C(K)^{**}$. Sea $\mu \in \mathcal{P}_R(K)$. Puesto que ψ verifica el cálculo baricéntrico sobre K (porque $K \in (P)$, ver Proposición 1.17), se tiene que

$$\langle T^{**}\psi, \mu\rangle = \langle\psi, r(\mu)\rangle = \int_K \psi(k)d\mu.$$

De aquí que

$$|\langle T^{**}\psi - \tilde{\varphi}, \mu\rangle| \leq \int_K |\psi(k) - \tilde{\varphi}(k)|d\mu \leq \eta.$$

En consecuencia

$$\|T^{**}\psi - \tilde{\varphi}\| = \sup\{|\langle T^{**}\psi - \tilde{\varphi}, \mu\rangle| : \mu \in \mathcal{P}_R(K)\} \leq \eta.$$

Como $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}eq(C(K)^{**})$, deducimos que $dist(T^{**}\psi, \mathcal{S}eq(C(K)^{**})) \leq \eta$ y de aquí se obtiene (4.6). ∎

Lema 4.18. *Sean X un espacio de Banach, $K \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto con $K \in (P)$, B un contorno de K, $w_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$, $\psi \in X^{**}$ y $d > 0$ tales que*

$$\langle \psi, w_0 \rangle > \sup \langle \psi, \overline{\text{co}}(B) \rangle + d.$$

Entonces $dist(\psi \restriction K, \mathcal{B}_{1b}(K)) \geq \frac{1}{2}d$.

Demostración. Por el Lema 4.9 sabemos que $dist(T^{**}\psi, \mathcal{S}eq(C(K)^{**}) \geq \frac{1}{2}d$, siendo $T : X \to C(K)$ tal que $Tx := x \restriction K$. Ahora basta aplicar el Lema 4.17. ∎

Proposición 4.19. *Si X es un espacio de Banach y $K \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto de X^* con $K \in (P)$, entonces para todo $\psi \in X^{**}$ se verifica*

$$dist(\psi \restriction K, \mathcal{B}_{1b}(K)) \geq \tfrac{1}{2} Bindex(\psi, K).$$

Demostración. Bastará probar que si existen un subconjunto w^*-compacto $W \subset K$, $w_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(W)$, $d > 0$ y un contorno B de W tales que

$$\langle \psi, w_0 \rangle > \sup \langle \psi, \overline{\text{co}}(B) \rangle + d,$$

entonces $dist(\psi \restriction W, \mathcal{B}_{1b}(W)) \geq \frac{1}{2}d$, lo que sale de Lema 4.18. ∎

Capítulo 5

Contornos, w^*-$\mathbb{N}$-familias y copias de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$

5.1. Introducción

En este Capítulo nos proponemos dos objetivos, a saber:

(1) "Localizar" , en ciertos casos, una w^*-$\mathbb{N}$-familia y una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$ dentro de un subconjunto w^*-compacto K de un espacio de Banach dual X^*, cuando $\overline{\text{co}}(B) \neq \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$, siendo B un contorno de K. Como vamos a ver, serán fundamentales los resultados sobre la distancia $dist(\psi \restriction H, \mathcal{B}_{1b}(H))$ obtenidos en el Capítulo anterior.

(2) Caracterizar la propiedad (P) de un cierto subconjunto w^*-compacto $K \subset X^*$ (ó un subconjunto arbitrario $Y \subset X^*$) a través de los contornos que son w^*-contablemente determinados. Recordemos que la propiedad (P) de X^*, globalmente considerado (es decir, la propiedad (P) de $B(X^*)$), ha sido caracterizada: (i) por Haydon que probó que X^*, globalmente considerado, tiene la propiedad (P) sii X carece de copias de ℓ_1; (ii) en [14] a través de los contornos $w^*\mathcal{KA}$ de los subconjuntos w^*-compactos de X^*. Nosotros caracterizamos la propiedad (P) de cualquier subconjunto w^*-compacto $K \subset X^*$ (ó un subconjunto arbitrario $Y \subset X^*$) a través de los contornos w^*-contablemente determinados de los subconjunto w^*-compactos $W \subset K$.

5.2. Localización de w^*-$\mathbb{N}$-familias y copias de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$

Si K es un subconjunto w^*-compacto de un espacio de Banach dual X^* y $\overline{\text{co}}(K) \neq \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$, siempre existe dentro de K una w^*-$\mathbb{N}$-familia y una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$ (ver [61, Lemma 3.2],[62, Proposition 2.5]). Sin embargo, del hecho $\overline{\text{co}}(B) \neq \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$, siendo B un mero contorno de K, no puede deducirse, en general, la localización dentro de K ni de una w^*-$\mathbb{N}$-familia ni de una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$. Veamos algunos contraejemplos.

Contraejemplo 1. Sea I un conjunto incontable y $X := c_0(I)$. Sea $B := \{e_i : i \in I\}$ la base canónica de $X^* = \ell_1(I)$. Entonces B es un contorno del subconjunto w^*-compacto $K := \overline{\{e_i : i \in I\}}^{w^*} = \{e_i : i \in I\} \cup \{0\}$ de X^* y, sin embargo, $0 \notin \overline{\text{co}}(B)$. En este caso no hay en K ninguna w^*-$\mathbb{N}$-familia porque, si un espacio dual X^* posee una w^*-$\mathbb{N}$-familia, entonces X posee copia de ℓ_1 (ver Nota 1.5). Sin embargo, sí existe en K una copia de la base de $\ell_1(\aleph_1)$. Es el propio contorno B. ■

Contraejemplo 2. Sean $X = C([1, \omega_1])$, $K = [1, \omega_1]$ visto como un subconjunto w^*-compacto de $C([1, \omega_1])^* = \ell_1([1, \omega_1])$ y $B = [1, \omega_1)$. B es contorno de K porque, para toda función continua $f : [1, \omega_1] \to \mathbb{R}$, existe un punto $1 \leq \alpha < \omega_1$ (dependiente de f, naturalmente) tal que f es constante en $[\alpha, \omega_1]$. Observemos que K no es metrizable. Claramente $\overline{\text{co}}(B) \neq \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ porque $\overline{\text{co}}(B) \subset \ell_1([1, \omega_1))$ y, por tanto, $\omega_1 \notin \overline{\text{co}}(B)$, aunque $\omega_1 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ (de hecho $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(B)) = 1$). K carece de una w^*-$\mathbb{N}$-familia porque $C([1, \omega_1])$ es Asplund y no puede contener copias ℓ_1. Sin embargo, el propio K es una copia de la base de $\ell_1(\aleph_1)$ en $C([1, \omega_1])^*$. ■

Contraejemplo 3. En el siguiente contraejemplo mostramos un espacio de Banach X tal que X^* no posee ni una w^*-$\mathbb{N}$-familia ni una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$ y, sin embargo, hay en X^* un subconjunto w^*-compacto y un contorno B de K tales que $\overline{\text{co}}(B) \neq \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$. La idea es coger un espacio de Banach Y con $Y_{\aleph_0} \neq Y^{**}$ tal que Y^{**} carezca de una copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$. Luego se considera el subconjunto w^*-compacto $K := B(Y^{**})$ y el contorno $B_0 = Y_{\aleph_0} \cap B(Y^{**})$. Bajo estas premisas, claramente, $\overline{\text{co}}(B_0) \neq B(Y^{**})$ porque $\overline{\text{co}}(B_0) \subset Y_{\aleph_0} \neq Y^{**}$. Un espacio de Banach Y, con $Y_{\aleph_0} \neq Y^{**}$ y sin una copia isomórfica de $\ell_1(\mathfrak{c})$ en Y^{**}, es, por ejemplo, el predual isométrico Y del espacio largo de James (the long James space) $J(\omega_1)$ (ver [12, 7.7.4 Proposition, p. 348],[33]). En efecto

(i) Y y todos sus sucesivos duales son Asplund. Por tanto, $Y^{**} = J(\omega_1)^*$ carece de copia isomórfica de $\ell_1(\mathfrak{c})$.

(ii) Con la notación de [12, p. 346], se tiene que $e_{\omega_1} \in Y^{**} = J(\omega_1)^*$ pero $e_{\omega_1} \notin Y_{\aleph_0}$ y por tanto $Y_{\aleph_0} \neq Y^{**}$. De hecho, si $A \subset Y$ es una familia contable, existe $\alpha_0 < \omega_1$ tal que $A \subset \overline{[\{e_\alpha : \alpha \leq \alpha_0, \alpha \text{ ordinal no límite }\}]}$. De aquí que, si $\alpha_0 < \beta < \omega_1$, el vector básico $h_\beta := \mathbb{1}_{(\beta, \omega_1]}$ de $Y^* = J(\omega_1)$ satisface $\langle a, h_\beta \rangle = 0$, $\forall a \in A$, pero $\langle e_{\omega_1}, h_\beta \rangle = 1$. Esto quiere decir que $dist(e_{\omega_1}, Y_{\aleph_0}) = 1$ y, por tanto, para cada $\epsilon > 0$ existe $\psi_\epsilon \in S(Y^{***})$ tal que $\psi_\epsilon \restriction Y_{\aleph_0} = 0$ y $\langle \psi_\epsilon, e_{\omega_1} \rangle > 1 - \epsilon$. Por la Proposición 4.11 $dist(\psi_\epsilon \restriction B(Y^{**}), \mathcal{B}_{1b}(B(Y^{**})) \geq \frac{1-\epsilon}{6}$. Naturalmente, $\psi_\epsilon \in \mathcal{B}^0_{1b}(B(Y^{**}))$ y verifica el cálculo baricéntrico sobre $B(Y^*)$ (por la Prop. 3.24 y la Prop. 1.17) pues Y carece de copia de ℓ_1 ya que es Asplund. ■

A pesar de los anteriores contraejemplos, en muchos casos (que vamos a caracterizar en lo que sigue) el hecho $\overline{\text{co}}(B) \neq \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ implica que K -y algunas veces el propio contorno B- posee una w^*-$\mathbb{N}$-familia y una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$. Nuestro abordaje a este problema consta de dos etapas:

Etapa 1. En esta etapa consideramos el caso en que K es w^*-metrizable. En este caso K siempre contiene una w^*-$\mathbb{N}$-familia y una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$.

Etapa 2. Se considera el caso general, que de hecho se reduce al caso metrizable.

5.3. El caso metrizable

Vamos a probar que cuando K es un subconjunto w^*-metrizable w^*-compacto de un espacio de Banach dual X^* y B es un contorno de K, el hecho $\overline{\text{co}}(B) \neq \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ siempre implica que K posee una w^*-$\mathbb{N}$-familia y una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$. Primeramente, observemos que bajo la hipótesis de K w^*-metrizable, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que X es separable por Lema 2.22 y Lema 2.23.

En [48, Theorem I.2] se prueba que, si X es un espacio de Banach separable, $K \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto y B un contorno de a K, el hecho $\overline{\text{co}}(B) \neq \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ implica que X posee una copia de ℓ_1 y, por tanto, X^* posee copias de $\ell_1(\mathfrak{c})$. Sin embargo, de [48, Theorem I.2] no puede deducirse que K contenga la base de una de estas copias, cosa que aquí probamos. En esta prueba se hace uso de los resultados del Capítulo anterior relativos a la distancia al espacio $\mathcal{B}_{1b}(K)$ de las funciones 1-Baire sobre K.

Proposición 5.1. *Sean X un espacio de Banach, $H \subset X^*$ un subconjunto convexo w^*-compacto y $B \subset H$ un contorno tal que $DIST(H, \overline{\text{co}}(B)) > d > 0$. Si H es w^*-metrizable, H tiene una w^*-$\mathbb{N}$-familia $\mathcal{A}$ de anchura($\mathcal{A}$) $\geq \frac{d}{3}$ y una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$. En consecuencia $Width(H) \geq \frac{1}{3}DIST(H, \overline{\text{co}}(B))$ y $Width(H) \geq \frac{1}{3}Bindex(H)$.*

Demostración. Puesto que $DIST(H, \overline{\text{co}}(B)) > d$, podemos coger un vector $w_0 \in H$ tal que $dist(w_0, \overline{\text{co}}(B)) > d > 0$. Por el Teorema de separación de Hahn existe $\psi \in S(X^{**})$ tal que $\inf\langle \psi, w_0 - \overline{\text{co}}(B)\rangle > d$ (ver [61, Lemma 2.1]), esto es

$$\langle \psi, w_0 \rangle > \sup\langle \psi, \overline{\text{co}}(B)\rangle + d$$

Por tanto $dist(\psi \restriction H, \mathcal{B}_{1b}(H)) > \frac{1}{6}d$ por la Prop. 4.11. Ya que H es w^*-metrizable, se verifica que $\mathcal{B}^0_{1b}(H) = \mathcal{B}_{1b}(H)$ y por la Prop. 3.8 (ver [60, Proposition 6.4]) tenemos que $dist(\psi \restriction H, \mathcal{B}_{1b}(H)) = \frac{1}{2}Frag(\psi \restriction H, H)$, donde $Frag(\psi \restriction H, H)$ es el índice de fragmentación de $\psi \restriction H$ en H (ver la Def. 3.7). Por tanto $Frag(\psi \restriction H, H) > \frac{1}{3}d > 0$ y este hecho, por la Prop. 3.11, implica que H contiene una w^*-$\mathbb{N}$-familia $\mathcal{A}$ tal que anchura($\mathcal{A}$) $\geq \frac{1}{3}d$.

Finalmente, la desigualdades $Width(H) \geq \frac{1}{3}DIST(H, \overline{\text{co}}(B))$ y $Width(H) \geq \frac{1}{3}Bindex(H)$ salen de lo anterior y la definición de $Bindex(H)$ (ver Definición 1.13). ■

Veamos la relación cuantitativa entre $Width(H)$ y $Bindex(H)$.

Corolario 5.2. *Sean X un espacio de Banach y H un subconjunto w^*-compacto de X^*. Entonces*

(1) $Width(H) \leq Bindex(H)$.

(2) Si H es w^*-metrizable, se tiene que $Width(H) = 0$ si y sólo si $Bindex(H) = 0$.

(3) Si H es convexo y w^*-metrizable, entonces $Width(H) \leq Bindex(H) \leq 3Width(H)$

Demostración. (1) Sabemos que $Width(H) = Pindex(H)$ por la Prop. 1.10 y, además, claramente $Pindex(H) \leq Bindex(H)$.

(2) Primeramente, $Width(H) = 0$ siempre que $Bindex(H) = 0$ por (1). Supongamos que $Bindex(H) > 0$ y probemos que $Width(H) > 0$. El hecho $Bindex(H) > 0$ significa que existen un subconjunto w^*-compacto $W \subset H$ y un contorno B de W tales que $dist(\overline{\text{co}}^{w^*}(W), \overline{\text{co}}(B)) > 0$. Por tanto $Width(\overline{\text{co}}^{w^*}(W)) > 0$ por la Proposición 5.1. De [62, Proposition 2.5, Proposition 3.8] sale que $Width(W) > 0$ y que $Width(H) > 0$, y esto completa la prueba de (2).

(3) sale de (1) y de la Proposición 5.1. ■

5.4. El caso general

Este caso se reduce al caso metrizable como vamos a ver. Comencemos con la siguiente definición.

Definición 5.3. *Si X es un espacio de Banach y $K \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto de X^*, definimos el c-B-índice de K (abrev., $Bindex_c(K)$) como el supremo de los $Bindex(i^*(K))$, siendo i^* el operador adjunto de la inclusión canónica $i : Y \to X$ y Y un subespacio separable de X.*

Notas. Sea K un subconjunto w^*-compacto del espacio de Banach dual X^*.

(1) Si X es separable (o si K es w^*-metrizable), claramente $Bindex(K) \leq Bindex_c(K)$. Pero si X es no-separable, puede ser que $Bindex(K) > 0$ y $Bindex_c(K) = 0$. Esto es lo que ocurre en los anteriores Contraejemplos.

(2) Si $B \subset K$ es un contorno tal que $DIST_{\aleph_0}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(B)) > d > 0$, entonces $Bindex_c(K) > d$. En efecto, sean $w_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ y $\psi \in S(X_{\aleph_0})$ tales que $\langle \psi, w_0 \rangle > \sup\langle \psi, \overline{\text{co}}(B) \rangle + d$. Sea $Y \subset X$ un subespacio separable tal que $\psi \in \overline{Y}^{w^*}$ y $i : Y \to X$ la inclusión canónica. Viendo ψ como un elemento de $S(Y^{**})$ y observando que $i^*(w_0) \in i^*(\overline{\text{co}}^{w^*}(K)) = \overline{\text{co}}^{w^*}(i^*(K))$, se verifica

$$\langle \psi, i^*(w_0) \rangle = \langle \psi, w_0 \rangle > \sup\langle \psi, \overline{\text{co}}(B) \rangle + d = \sup\langle \psi, i^*(\overline{\text{co}}(B)) \rangle + d.$$

Finalmente, puesto que $i^*(B)$ es un contorno de $i^*(K)$, resulta $Bindex(i^*(K)) > d$ y de aquí que $Bindex_c(K) > d$.

Proposición 5.4. *Sean X un espacio de Banach y H un subconjunto w^*-compacto de X^*. Entonces*

(A) $Width(H) \leq Bindex_c(H)$.

(B) Si H es convexo entonces $Width(H) \leq Bindex_c(H) \leq 3Width(H)$.

Demostración. (A) Sea $\mathcal{F} \subset H$ una w^*-$\mathbb{N}$-familia con $width(\mathcal{F}) > d > 0$ asociada a las secuencias $\{r_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{x_m : m \geq 1\} \subset B(X)$. Sean $Y := \overline{[\{x_m : m \geq 1\}]}$ y

$i : Y \to X$ la inclusión canónica. Obviamente, $i^*(\mathcal{F})$ es una w^*-$\mathbb{N}$-familia de $i^*(H)$ con $width(i^*(\mathcal{F})) > d > 0$ asociada a las secuencias $\{r_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{x_m : m \geq 1\} \subset B(Y)$. Por el Corolario 5.2

$$d \leq Width(i^*(H)) \leq Bindex(i^*(H)) \leq Bindex_c(H).$$

Por tanto, $Width(H) \leq Bindex_c(H)$.

(B) Supongamos que H es convexo. En primer término, $Width(H) \leq Bindex_c(H)$ por (A). A continuación suponemos que $Bindex_c(H) > d > 0$ y probamos que $d/3 < Width(H)$. El hecho $Bindex_c(H) > d > 0$ implica que existe un subespacio cerrado separable $Y \subset X$ tal que $Bindex(i^*(H)) > d$, siendo $i : Y \to X$ la inclusión canónica. Por el Corolario 5.2 $Width(i^*(H)) > d/3$ y por tanto existe en $i^*(H)$ una w^*-$\mathbb{N}$-familia $\mathcal{A}'$ con $width(\mathcal{A}') > d/3$ asociada a ciertas secuencias $\{y_n : n \geq 1\} \subset B(Y)$ y $\{r_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$. Por cada $a \in \mathcal{A}'$ elegimos $k_a \in H$ tal que $i^*(k_a) = a$. Entonces $\mathcal{A} := \{k_a : a \in \mathcal{A}'\}$ es una w^*-$\mathbb{N}$-familia con $width(\mathcal{A}) > d/3$ asociada a las secuencias $\{i(y_n) : n \geq 1\} \subset B(X)$ y $\{r_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$. Por tanto $Width(H) > d/3$ y $3Width(H) \geq Bindex_c(H)$. ■

Corolario 5.5. *Sean X un espacio de Banach y K un subconjunto w^*-compacto de X^*. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $Width(\overline{\text{co}}^{w^*}(K)) = 0$; (1') $Bindex_c(\overline{\text{co}}^{w^*}(K)) = 0$.

(2) $Width(K) = 0$; (2') $Bindex_c(K) = 0$.

Demostración. (1) $\Leftrightarrow$ (1′) y (2′) $\Rightarrow$ (2) salen de la Proposición 5.4. (1) $\Leftrightarrow$ (2) está probado en [62, Prop. 2.5, Prop. 3.8]. Finalmente, (1′) $\Rightarrow$ (2′) es obvio. ■

Proposición 5.6. *Sea K un subconjunto w^*-compacto del espacio de Banach dual X^*. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $Bindex_c(K) = 0$.

(2) $\overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(B) = \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$ para todo subconjunto w^*-compacto H de K y todo contorno B de H.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que $\overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(B) \neq \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$ para cierto subconjunto w^*-compacto H de K y cierto contorno B de H. Esto significa que existe un punto $w_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$ que se puede separar estrictamente de $\text{co}(B)$ usando elementos de $X_{\aleph_0}$. Precisamente, que existen un subespacio cerrado separable $Y \subset X$, un vector $\psi \in S(Y^{**}) = S(\overline{Y}^{w^*})$ y un número positivo $d > 0$ tales que

$$\langle \psi, w_0 \rangle > \sup \langle \psi, \text{co}(B) \rangle + d.$$

Por tanto, si $i : Y \to X$ es la inclusión canónica, se tiene

$$\langle \psi, i^*(w_0) \rangle > \sup \langle \psi, \text{co}(i^*(B)) \rangle + d. \tag{5.1}$$

Como $i^*(w_0) \in \overline{\text{co}}^{w^*}(i^*(H))$, de (5.1) obtenemos $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(i^*(H)), \overline{\text{co}}(i^*(B)) > d > 0$. De aquí que $Bindex(i^*(H)) > d$ pues $i^*(B)$ es un contorno de $i^*(H)$. Así que $Bindex_c(K) > d$, una contradicción que prueba la implicación (1) $\Rightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que $Bindex_c(K) > 0$. Entonces, por la definición de $Bindex_c(K)$, existe un subespacio cerrado separable $Y \subset X$ tal que $Bindex(i^*(K)) > 0$, donde $i : Y \to X$ es la inclusión canónica. Del Corolario 5.2 obtenemos que $Width(i^*(K)) > 0$. De aquí que, por [62, Lemma 2.4], existe un subconjunto w^*-compacto $L \subset i^*(K)$ tal que $\overline{\text{co}}(L) \neq \overline{\text{co}}^{w^*}(L)$. Por tanto existen $\psi \in B(Y^{**}) = B(\overline{Y}^{w^*})$, $d > 0$ y $v_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(L)$ tales que

$$\langle \psi, v_0 \rangle > \sup \langle \psi, \text{co}(L) \rangle + d. \tag{5.2}$$

Sea $W := i^{*-1}(L) \cap K$.

Aserto. $\overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(W) \neq \overline{\text{co}}^{w^*}(W)$.

En efecto, sea $w_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(W)$ tal que $i^*(w_0) = v_0$. Entonces, teniendo en cuenta que $\text{co}(L) = i^*(\text{co}(W))$, $\psi = i^{**}\psi$ y (5.2), obtenemos

$$\begin{aligned}\langle \psi, w_0 \rangle = \langle i^{**}\psi, w_0 \rangle = \langle \psi, i^*(w_0) \rangle = \langle \psi, v_0 \rangle > \sup \langle \psi, i^*(\text{co}(W)) \rangle + d = \\ = \sup \langle \psi, \text{co}(W) \rangle + d.\end{aligned}$$

Como $\psi \in X_{\aleph_0}$, concluimos que $w_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(W) \setminus \overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(W)$, lo que contradice la hipótesis y completa la prueba. ■

5.5. Contornos w^*-contablemente determinados

En [14] se prueba que un espacio de Banach X carece de copias de ℓ_1 (esto es, $X^* \in (P)$) si y sólo si $\overline{\text{co}}(B) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ para todo subconjunto w^*-compacto de X^* y todo contorno w^*-$\mathcal{K}$ analítico B de K. En esta Sección perfeccionamos este resultado de la siguiente manera:

(i) Vemos que, en lugar de contornos w^*-$\mathcal{K}$ analíticos, se pueden poner contornos w^*-contablemente determinados. Esto significa que en el caso metrizable se pueden poner todos los contornos.

(ii) Localizamos el resultado, en el siguiente sentido: la propiedad (P) de un cierto subconjunto Y de X^* puede caracterizarse a través del comportamiento de los contornos w^*-contablemente determinados. Precisamente, un subconjunto Y de X^* posee la propiedad (P) si y sólo si $\overline{\text{co}}(B) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ para todo subconjunto w^*-compacto K de Y y todo contorno w^*-contablemente determinado B de K.

Utilizaremos los resultados de los anteriores Capítulos en la obtención de esta caracterización.

Lema 5.7. *Sean X, Y espacios topológicos Hausdorff con Y Lindelof. Sean $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una familia de abiertos de X y $\phi : Y \to 2^X$ una aplicación usco tal que, $\forall y \in Y$, $\exists \alpha \in \mathcal{A}$, $\phi(y) \subset U_\alpha$. Entonces existe un subconjunto contable $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ tal que, $\forall y \in Y$, $\exists \beta \in \mathcal{A}_0$, $\phi(y) \subset U_\beta$.*

Demostración. Por las condiciones impuestas en el enunciado, por cada $y \in Y$ se pueden elegir un entorno abierto V^y de y en Y y $\alpha_y \in \mathcal{A}$ tales que $\phi(V^y) \subset U_{\alpha_y}$. Como Y es Lindelof se tiene que $Y = \bigcup_{i \geq 1} V^{y_i}$ para una familia contable $\{y_i : i \geq 1\}$ de puntos de Y. Haciendo $\mathcal{A}_0 := \{\alpha_{y_i} : i \geq 1\}$ se verifica la tesis del enunciado. ■

Lema 5.8. *Sean X un espacio de Banach, $\emptyset \neq \Sigma' \subset \Sigma := \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $\Phi : \Sigma' \to 2^{X^*}$ aplicación usco. Entonces, si*

$$C := \bigcup \{\overline{\text{co}}^{w^*}(\Phi(F)) : F \text{ subconjunto finito de } \Sigma'\}.$$

se tiene que C es convexo y $\overline{C} = \overline{C}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}$.

Demostración. Es claro que

(a) Por la definición de C, C es un subconjunto convexo de X^*.

(b) $\overline{C} \subset \overline{C}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}$ porque $\mathcal{T}_{\aleph_0} \leq w$.

Probemos que $\overline{C}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}} \subset \overline{C}$. Sea $z_0 \in X^*$ tal que $dist(z_0, C) > d > 0$. Queremos ver que $z_0 \notin \overline{C}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}$. Haciendo una traslación, si es preciso, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $z_0 = 0$. Como $dist(0, C) > d > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo subconjunto finito $F \subset \Sigma'$, se verifica $dist(0, \overline{\text{co}}^{w^*}(\Phi(F))) > d + \epsilon > d > 0$. Así que, para todo subconjunto finito $F \subset \Sigma'$, existe $x_F \in S(X)$ de modo que

$$\text{mín}\langle \overline{\text{co}}^{w^*}(\Phi(F)), x_F \rangle > d + \epsilon > d > 0.$$

Para todo subconjunto finito $F \subset \Sigma'$ sea

$$U_F := \{x^* \in X^* : \langle x^*, x_F \rangle > d + \epsilon\}.$$

que es un semiespacio w^*-abierto, que verifica

$$\Phi(F) := \cup_{\sigma \in f} \Phi(\sigma) \subset \overline{\text{co}}^{w^*}(\Phi(F)) \subset U_F.$$

Aserto 1. Existe un conjunto contable $\mathcal{F}$ de partes finitas de Σ' tal que, para toda parte finita P de Σ', existe $F_P \in \mathcal{F}$ tal que $\Phi(P) \subset U_{F_P}$.

En efecto, si $n \in \mathbb{N}$, se tiene trivialmente que:

(a) $(\Sigma')^n$ es un conjunto métrico separable y, por tanto, Lindelof.

(b) Es usco la aplicación $\Phi^n : (\Sigma')^n \to 2^{X^*}$ tal que

$$\forall \sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_n) \in (\Sigma')^n, \ \Phi^n(\sigma) = \bigcup_{i=1}^{n} \Phi(\sigma_i).$$

(c) Para todo $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_n) \in (\Sigma')^n$ existe un subconjunto finito $F \subset \Sigma'$ con $|F| \leq n$ tal que $\Phi^n(\sigma) \subset U_F$.

(d) De (c) y de Lema 5.7 deducimos que existe una familia contable $\mathcal{F}_n$ de subconjuntos finitos de Σ' tal que, dado un cierto $\sigma \in (\Sigma')^n$, existe $F \in \mathcal{F}_n$ de modo que $\Phi^n(\sigma) \subset U_F$.

Por tanto, si hacemos $\mathcal{F} := \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n$, es claro que $\mathcal{F}$ verifica los requerimientos del Aserto 1.

Sean $E := \overline{[\{x_F : F \in \mathcal{F}\}]}$, $i : E \to X$ la inclusión canónica e $i^* : X^* \to E^*$ el cociente canónico adjunto de i.

Aserto 2. $dB(E^*) \cap i^*(C) = \emptyset$.

En efecto, si $e^* \in i^*(C)$, existe una parte finita P de Σ' tal que $e^* \in i^*(\overline{\text{co}}^{w^*}(\Phi(P))) = \overline{\text{co}}^{w^*}(i^* \circ \Phi(P))$. Por Aserto 1 existe $F_P \in \mathcal{F}$ tal que $\Phi(P) \subset U_{F_P}$, de donde

$$\text{mín}\langle i^*(\overline{\text{co}}^{w^*}(\Phi(P))), x_{F_P}\rangle = \text{mín}\langle \overline{\text{co}}^{w^*}(\Phi(P)), i(x_{F_P})\rangle \geq d + \epsilon$$

Puesto que $e^* \in i^*(\overline{\text{co}}^{w^*}(\Phi(P)))$, concluimos que $\langle e^*, x_{F_P}\rangle \geq d + \epsilon$ y, por tanto, $e^* \notin dB(E^*)$, lo que completa la prueba del Aserto 2.

Por el Teorema de separación de Hahn existe un vector $u \in B(E^{**}) = \overline{B(E)}^{w^*} \subset B(X^{**})$ tal que

$$\text{ínf}\langle u, i^*(C)\rangle = \text{ínf}\langle u, C\rangle > d > 0,$$

lo que prueba que $0 \notin \overline{C}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}$, porque $u \in X_{\aleph_0}$ ya que E es separable. ∎

Proposición 5.9. *Sean X un espacio de Banach, $H \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto de X^* y B un contorno de H que es $w^*\mathcal{CD}$ verificando $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(H), \overline{\text{co}}(B)) > d > 0$ pero $\overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(B) = \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$. Entonces hay en B una w^*-$\mathbb{N}$-familia $\mathcal{A}$ y una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$, de modo que anchura$(\mathcal{A}) > d > 0$. En consecuencia, $Width(B) \geq DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(H), \overline{\text{co}}(B))$.*

Demostración. Como $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(H), \overline{\text{co}}(B)) > d > 0$, existe $w_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$ tal que $dist(w_0, \overline{\text{co}}(B)) > d > 0$. Por hipótesis, ya que B es $w^*\mathcal{CD}$, existen un subconjunto $\Sigma' \subset \Sigma := \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y una aplicación usco $\Phi : \Sigma' \to 2^{X^*}$ tal que $\Phi(\sigma)$ es un subconjunto compacto no vacío de X^*, para todo $\sigma \in \Sigma'$, y $B = \bigcup_{\sigma\in\Sigma'} \Phi(\sigma)$. Por Lema 5.8, si

$$C := \bigcup\{\overline{\text{co}}^{w^*}(\Phi(F)) : F \text{ subconjunto finito de } \Sigma'\},$$

se tiene que C es convexo y $\overline{C} = \overline{C}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}$. De aquí que $\overline{C} = \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$, porque $\overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(B) = \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$ y $B \subset C$. En consecuencia, existe una parte finita $F \subset \Sigma'$ tal que $dist(w_0, \overline{\text{co}}^{w^*}(\Phi(F))) < \epsilon$, para cualquier $0 < \epsilon < dist(w_0, \overline{\text{co}}(B)) - d$ previamente dado. Sea $v_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(\Phi(F))$ tal que $\|w_0 - v_0\| < \epsilon$. Entonces, si K es el subconjunto w^*-compacto $K := \Phi(F)$, se tiene obviamente que

$$dist(v_0, \overline{\text{co}}(K)) \geq dist(w_0, \overline{\text{co}}(K)) - \|w_0 - v_0\| \geq dist(w_0, \overline{\text{co}}(B)) - \|w_0 - v_0\| > d > 0,$$

aunque $v_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$. Por [61, Lemma 3.2] existe en K, y por tanto en B, una w^*-$\mathbb{N}$-familia $\mathcal{A}$ de anchura $\geq d$ y una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$. Observemos que la anchura de la w^*-$\mathbb{N}$-familia $\mathcal{A}$ puede aproximarse a $DIST(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(H), \overline{\mathrm{co}}(B))$ tanto como queramos. ■

Proposición 5.10. *Sea X un espacio de Banach y sea Y un subconjunto de X^*. Los siguientes asertos son equivalentes:*

(A) $Y \in (P)$.

(B) Para todo subconjunto w^*-compacto K de Y y todo contorno B de K se verifica $\overline{\mathrm{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(B) = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$.

(C) Para todo subconjunto w^*-compacto K de Y y todo contorno B de K que sea $w^*\mathcal{CD}$ se verifica $\overline{\mathrm{co}}(B) = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$.

(D) Para todo subconjunto w^*-compacto K de Y y todo contorno B de K que sea $w^*\mathcal{KA}$ se verifica $\overline{\mathrm{co}}(B) = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$.

Demostración. (A)$\Leftrightarrow$(B) por Corolario 5.5 y Proposición 5.6.

(A)+(B) $\Rightarrow$ (C) por Proposición 5.9.

(C) $\Rightarrow$ (D) es obvio porque todo subconjunto $w^*\mathcal{KA}$ es $w^*\mathcal{CD}$.

(D) $\Rightarrow$ (A). Basta observar que todo subconjunto w^*-compacto de X^* es $w^*\mathcal{KA}$ y, al mismo tiempo, contorno de sí mismo. ■

Corolario 5.11. *Sean X un espacio de Banach, K un subconjunto w^*-compacto de X^* tal que K carece de una w^*-$\mathbb{N}$-familia (en particular, si K carece de una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$) y $B \subset K$ un contorno. Entonces $\overline{\mathrm{co}}(B) = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$ si y sólo si $\overline{\mathrm{co}}(B) = \overline{\mathrm{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(B)$.*

Demostración. Si $\overline{\mathrm{co}}(B) = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$, como $\overline{\mathrm{co}}(B) \subset \overline{\mathrm{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(B) \subset \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$, llegamos a que $\overline{\mathrm{co}}(B) = \overline{\mathrm{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(B)$. Por otra parte, si $\overline{\mathrm{co}}(B) = \overline{\mathrm{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(B)$, como $\overline{\mathrm{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(B) = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$ (por la Proposición 5.10 y porque $K \in (P)$), obtenemos inmediatamente que $\overline{\mathrm{co}}(B) = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$. ■

Corolario 5.12. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(A) X carece de una copia de ℓ_1.

(B) Para todo subconjunto w^*-compacto K de X^* y todo contorno B de K se verifica $\overline{\mathrm{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(B) = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$.

(C) Para todo subconjunto w^*-compacto K de X^* y todo contorno B de K que sea $w^*\mathcal{CD}$ se verifica $\overline{\mathrm{co}}(B) = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$.

(D) Para todo subconjunto w^*-compacto K de X^* y todo contorno B de K que sea $w^*\mathcal{KA}$ se verifica $\overline{\mathrm{co}}(B) = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$.

Demostración. El enunciado sale de la Proposición 5.10, teniendo en cuenta que $X^* \in (P)$ sii X carece de una copia de ℓ_1 (ver [65]). ■

NOTA. La equivalencia de los apartados $(A), (B)$ y (D) del Corolario 5.12 ha sido obtenida también en [14].

Corolario 5.13. *Sea X un espacio de Banach y sea Y un subconjunto $w^*\mathcal{KA}$ de X^*. Son equivalentes:*

(A) $Y \in (P)$.

(B) Para todo subconjunto w^*-compacto K de $\overline{[Y]}$ y todo contorno B de K se verifica $\overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(B) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$.

(C) Para todo subconjunto w^*-compacto K de $\overline{[Y]}$ y todo contorno B de K que sea $w^*\mathcal{CD}$ se verifica $\overline{\text{co}}(B) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$.

(D) Para todo subconjunto w^*-compacto K de $\overline{[Y]}$ y todo contorno B de K que sea $w^*\mathcal{KA}$ se verifica $\overline{\text{co}}(B) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$.

Demostración. Basta aplicar la Proposición 5.10 y que todo subconjunto Y de X^*, que sea $w^*\mathcal{KA}$, verifica $Y \in (P)$ sii $\overline{[Y]} \in (P)$ por [62, Proposition 3.8]. ■

Capítulo 6

Contornos $w^*\mathcal{KA}$ y $B = Ext(K)$

6.1. Introducción

En este Capítulo obtenemos, entre otros, los siguientes resultados. Sea K un subconjunto w^*-compacto de un espacio de Banach dual X^* y sea $B = Ext(K)$ ó $B \subset K$ un contorno $w^*\mathcal{KA}$. Entonces:

(i) K contiene una w^*-$\mathbb{N}$-familia sii la contiene B.

(ii) K contiene una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$ sii la contiene B.

6.2. Resultados básicos

Los siguientes resultados son básicos para lo que sigue.

Lema 6.1. *Sea X un espacio de Banach separable y E un subespacio cerrado $w^*\mathcal{KA}$ de X^* tal que $E \in (P)$. Entonces $(B(E^*), w_1^*)$ es angélico, siendo $w_1^* := \sigma(E^*, E)$.*

Demostración. En primer término, $(B(E), w^*)$ es $w^*\mathcal{KA}$ porque es un subconjunto w^*-cerrado de $(E, w^*))$ que es $w^*\mathcal{KA}$. Puesto que $E \in (P)$, se tiene que E y también la bola unidad $B(E)$ carecen de una w^*-$\mathbb{N}$-familia por [62, Prop. 3.8]. Sea $A := B(X)$ y consideremos a A como subconjunto del espacio $C(B(E), w^*)$ de las funciones reales y continuas sobre $B(E)$, dotado de la w^*-topología $w^* := \sigma(X^*, X)$. A su vez consideraremos $C(B(E), w^*)$ sumergido en $(\mathbb{R}^{B(E)}, \tau_p)$, siendo τ_p la topología de la convergencia puntual sobre $B(E)$. Claramente A es un subconjunto puntualmente acotado de $C(B(E), w^*)$, por lo que $\overline{A}^{\tau_p}$ es un compacto convexo simétrico de $(\mathbb{R}^{B(E)}, \tau_p)$. Puesto que $B(E)$ carece de una w^*-$\mathbb{N}$-familia, si $\alpha < \beta$ y $(x_n)_{n \geq 1}$ es una secuencia en A, existe un subconjunto $I \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\{t \in B(E) : \langle x_n, t\rangle \leq \alpha, \forall n \in I, \langle x_m, t\rangle \geq \beta, \forall m \in \mathbb{N} \setminus I\} = \emptyset.$$

De [11, 4D. Theorem] obtenemos que $\overline{A}^{\tau_p}$ es un subconjunto compacto angélico de $(\mathbb{R}^{B(E)}, \tau_p)$. Sea $w_1^* := \sigma(E^*, E)$. Entonces $(B(E^*), w_1^*)$ es homeomorfo a $\overline{A}^{\tau_p}$. Por tanto $(B(E^*), w_1^*)$ es angélico. ■

En [48, Theorem 1.2] se prueba que, si un subespacio cerrado Y de un espacio de Banach dual X^* tiene bola unidad cerrada dual $B(Y^*)$ w^*-angélica y B es un contorno de un subconjunto w^*-compacto K de X^* con $B \subset Y$, entonces $\overline{\text{co}}(B) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$. En la siguiente proposición damos un resultado "cuantitativo", que generaliza el resultado anteriormente citado y que relaciona las distancias $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C)$ y $DIST(B, C)$, cuando K es un subconjunto w^*-compacto de un espacio de Banach dual X^*, B es un contorno de K y C es un subconjunto convexo de un subespacio cerrado $Y \subset X^*$ con bola unidad dual $B(Y^*)$ w^*-angélica.

Proposición 6.2. *Sean X un espacio de Banach y Y un subespacio cerrado de X^* con bola unidad dual $(B(Y^*), w^*)$ w^*-angélica. Si C es un subconjunto convexo de Y, entonces $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) = DIST(B, C)$ para todo subconjunto w^*-compacto K de X^* y todo contorno B de K. Además $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) = \overline{\text{co}}(B)$ para todo subconjunto w^*-compacto K de X^* y todo contorno B de K siempre que Y contenga un contorno de K.*

Demostración. Sean C un subconjunto convexo de Y y supongamos que existen un subconjunto w^*-compacto K de X^*, un contorno B de K y dos números reales $0 < a, b$ tales que

$$DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) > b > a > DIST(B, C) = DIST(\overline{\text{co}}(B), C).$$

Sean $w_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ y $\epsilon > 0$ verificando $dist(w_0, C) > b + \epsilon$. En estas condiciones existe $\varphi_0 \in S(X^{**})$ tal que $\inf\langle \varphi_0, w_0 - C\rangle > b + \epsilon$, esto es, $\varphi_0(w_0) > \sup \varphi_0(C) + b + \epsilon$. Denotemos

$$\begin{aligned} U &:= \{\varphi \in B(X^{**}) : \langle \varphi, w_0\rangle \geq \langle \varphi_0, w_0\rangle - \epsilon\} \text{ y} \\ V &:= \{x \in B(X) : \langle w_0, x\rangle \geq \langle \varphi_0, w_0\rangle - \epsilon\}. \end{aligned}$$

Observemos que $\varphi_0 \in U$ y también $U = \overline{V}^{w^*}$. Si $i : Y \to X^*$ es la inclusión canónica, entonces $i^* : X^{**} \to Y^*$ satisface $i^*(\varphi_0) \in i^*(U) = \overline{i^*(V)}^{w^*} \subset B(Y^*)$. Puesto que $(B(Y^*), w^*)$ es angélica, existe una secuencia $\{x_n : n \geq 1\} \subset V$ tal que $i^*(x_n) \overset{w^*}{\to} i^*(\varphi_0)$ en la w^*-topología $\sigma(Y^*, Y)$. Así que para todo $y \in Y$ se tiene $y(x_n) = i^*(x_n)(y) \to i^*(\varphi_0)(y) = \varphi_0(y)$.

Aserto. Para todo $\beta \in B$,

$$\limsup_{n\to\infty} x_n(\beta) \leq \sup \varphi_0(C) + a < \varphi_0(w_0) - \epsilon + (a - b).$$

En efecto, fijemos $\beta \in B$. Como $dist(\beta, C) \leq DIST(B, C) < a$, existe $y \in C \subset Y$ tal que $\|\beta - y\| < a$. Por tanto

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} x_n(\beta) &= \limsup_{n\to\infty}[x_n(y) + x_n(\beta - y)] = \\ &= \varphi_0(y) + \limsup_{n\to\infty} x_n(\beta - y) \leq \sup \varphi_0(C) + a. \end{aligned}$$

Finalmente, como $\varphi_0(w_0) > \sup \varphi_0(C) + b + \epsilon$, obtenemos $\sup \varphi_0(C) + a < \varphi_0(w_0) - \epsilon + (a - b)$.

Por la igualdad de Simons ([103, SUP-LIMSUP THEOREM, p. 69]) se tiene que

$$\sup_{\beta \in B} [\limsup_{n\to\infty} \langle \beta, x_n \rangle] = \sup_{k \in \overline{\mathrm{co}}^{w*}(K)} [\limsup_{n\to\infty} \langle k, x_n \rangle].$$

Por otra parte, como $x_n \in V$ obtenemos

$$\sup_{k \in \overline{\mathrm{co}}^{w*}(K)} [\limsup_{n\to\infty} \langle k, x_n \rangle] \geq \limsup_{n\to\infty} \langle w_0, x_n \rangle \geq \langle \varphi_0, w_0 \rangle - \epsilon.$$

de donde sale que $\langle \varphi_0, w_0 \rangle - \epsilon < \langle \varphi_0, w_0 \rangle - \epsilon + (a - b)$, una contradicción pues $0 < b - a$. ■

Lema 6.3. *Sean X un espacio de Banach separable, K un subconjunto w^*-compacto de X^* y B un contorno $w^*\mathcal{KA}$ de K. Son equivalentes:*

(1) K carece de una w^*-$\mathbb{N}$-familia, es decir, $K \in (P)$.

(2) B carece de una w^*-$\mathbb{N}$-familia.

(3) $B \in (P)$.

Demostración. Las implicaciones (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) son obvias.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sea $E := \overline{[B]}$. Claramente E es un subespacio $w^*\mathcal{KA}$ de X^* tal que $E \in (P)$ y por tanto E carece también de una w^*-$\mathbb{N}$-familia (ver [62, Lemma 3.7, Proposition 3.8]). Entonces la bola dual $(B(E^*), w^*)$ es angélica por Lema 6.1 (aquí $w^* = \sigma(E^*, E)$). Por tanto $\overline{\mathrm{co}}(B) = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$ por la Proposición 6.2 y en consecuencia K carece de una w^*-$\mathbb{N}$-familia. ■

Proposición 6.4. *Sea K un subconjunto w^*-compacto del espacio de Banach dual X^* y B un contorno $w^*\mathcal{KA}$ de K. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) K carece de una w^*-$\mathbb{N}$-familia, es decir, $K \in (P)$.

(2) B carece de una w^*-$\mathbb{N}$-familia.

(3) $B \in (P)$.

Demostración. Las implicaciones (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) son obvias.

(3) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que K contiene una w^*-$\mathbb{N}$-familia $\mathcal{F}$ de $anchura(\mathcal{F}) \geq d > 0$ asociada a las secuencias $\{r_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{x_n : n \geq 1\} \subset B(X)$. Sea $T : \ell_1 \to X$ el operador continuo tal que $T(e_n) = x_n$, $\forall n \geq 1$, donde $\{e_n : n \geq 1\}$ es la base canónica de ℓ_1. Claramente T es un isomorfismo entre ℓ_1 y $T(\ell_1)$ tal que $T^*(\mathcal{F})$ es una w^*-$\mathbb{N}$-familia dentro del subconjunto w^*-compacto $T^*(K)$ con $anchura(T^*(\mathcal{F})) \geq d > 0$ asociada a las secuencias $\{r_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{e_n : n \geq 1\} \subset B(\ell_1)$. Sea $B_0 := T^*(B)$,

que es un contorno $w^*\mathcal{KA}$ de $T^*(K)$. Por Lema 6.3 el contorno B_0 contiene una w^*-$\mathbb{N}$-familia $\mathcal{A}$ con $anchura(\mathcal{A}) \geq \delta > 0$ asociada a ciertas secuencias $\{s_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{u_n : n \geq 1\} \subset B(\ell_1)$. Por cada $a \in \mathcal{A}$ podemos hallar $v_a \in B$ tal que $T^*(v_a) = a$. Claramente el conjunto $\mathcal{H} := \{v_a : a \in \mathcal{A}\}$ es una w^*-$\mathbb{N}$-familia dentro de B con $anchura(\mathcal{H}) \geq \delta > 0$, asociada a las secuencias $\{s_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{T(u_n) : n \geq 1\} \subset B(X)$. Como todo subconjunto $w^*\mathcal{KA}$ con la propiedad (P) carece de una w^*-$\mathbb{N}$-familia (por [62, Proposition 3.8]), hemos llegado a una contradicción que prueba la implicación $(3) \Rightarrow (1)$. ■

Proposición 6.5. *Sean X un espacio de Banach, K un subconjunto w^*-compacto de X^* y B un contorno $w^*\mathcal{KA}$ de K. Los siguientes asertos son equivalentes:*
(1) K posee una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$; (2) B posee una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$.

Demostración. Como $(2) \Rightarrow (1)$ es obvio, probamos $(1) \Rightarrow (2)$. Hay dos casos a considerar:
Caso 1. $\overline{\text{co}}(B) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$. En este caso existe una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$ dentro de B por la Proposición 1.1.
Caso 2. $\overline{\text{co}}(B) \neq \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$. Por la Proposición 5.10 y por [62, Proposition 2.5] existe una w^*-$\mathbb{N}$-familia dentro de K y, por tanto, en B por la Proposición 6.4. Así que B contiene una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$ porque toda w^*-$\mathbb{N}$-familia la contiene. ■

Un subconjunto $A \subset X^*$ de un espacio de Banach dual es pre-$w^*\mathcal{KA}$ si para todo subespacio separable $Y \subset X$ se verifica que $i^*(A)$ es $w^*\mathcal{KA}$ (ó w^*-analítico) en Y^*, siendo $i : Y \to X$ la inclusión canónica. Por ejemplo, son pre-$w^*\mathcal{KA}$ los subconjuntos $A \subset X^*$, que son w^*-casi-Suslin. Recordemos ([112, pag.52]) que un espacio topológico (E, τ) es casi-Suslin si es Hausdorff y existen un espacio polaco X y una aplicación $T : X \to 2^E$ tales que:

(a) $\cup_{x \in X} Tx = E$.

(b) Si (x_n) es una secuencia en X que converge a cierto $x \in X$ y $z_n \in Tx_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, la secuencia (z_n) tiene un punto de acumulación en Tx.

Todo espacio $\mathcal{K}$-analítico es casi-Suslin y, caso de ser E metrizable, las nociones de $\mathcal{K}$-analítico y casi-Suslin coinciden. Esto justifica que todo subconjunto w^*-casi-Suslin $A \subset X^*$ es pre-$w^*\mathcal{KA}$.

Proposición 6.6. *Sea K un subconjunto w^*-compacto del espacio de Banach dual X^* y B un contorno pre-$w^*\mathcal{KA}$ de K. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) K carece de una w^*-$\mathbb{N}$-familia, es decir, $K \in (P)$.

(2) B carece de una w^*-$\mathbb{N}$-familia.

Demostración. La implicación $(1) \Rightarrow (2)$ es obvia.

$(2) \Rightarrow (1)$. Supongamos que K contiene una w^*-$\mathbb{N}$-familia $\mathcal{F}$ de $anchura(\mathcal{F}) \geq d > 0$ asociada a las secuencias $\{r_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{x_n : n \geq 1\} \subset B(X)$. Sea $T : \ell_1 \to X$ el operador continuo tal que $T(e_n) = x_n$, $\forall n \geq 1$, donde $\{e_n : n \geq 1\}$ es la base canónica de

ℓ_1. Claramente T es un isomorfismo entre ℓ_1 y $T(\ell_1)$ tal que $T^*(\mathcal{F})$ es una w^*-$\mathbb{N}$-familia dentro del subconjunto w^*-compacto $T^*(K)$ con $anchura(T^*(\mathcal{F})) \geq d > 0$ asociada a las secuencias $\{r_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{e_n : n \geq 1\} \subset B(\ell_1)$. Sea $B_0 := T^*(B)$, que es un contorno $w^*\mathcal{KA}$ de $T^*(K)$. Por Lema 6.3 el contorno B_0 contiene una w^*-$\mathbb{N}$-familia $\mathcal{A}$ con $anchura(\mathcal{A}) \geq \delta > 0$ asociada a ciertas secuencias $\{s_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{u_n : n \geq 1\} \subset B(\ell_1)$. Por cada $a \in \mathcal{A}$ podemos hallar $v_a \in B$ tal que $T^*(v_a) = a$. Claramente el conjunto $\mathcal{H} := \{v_a : a \in \mathcal{A}\}$ es una w^*-$\mathbb{N}$-familia dentro de B con $anchura(\mathcal{H}) \geq \delta > 0$, asociada a las secuencias $\{s_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{T(u_n) : n \geq 1\} \subset B(X)$. Hemos llegado a una contradicción que prueba la implicación (2) $\Rightarrow$ (1). ∎

Proposición 6.7. *Sean X un espacio de Banach tal que $X_{\aleph_0} = X^{**}$, K un subconjunto w^*-compacto del espacio de Banach dual X^* y B un contorno pre-$w^*\mathcal{KA}$ de K. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) K posee una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$.

(2) B posee una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$.

Demostración. La implicación (2) $\Rightarrow$ (1) es obvia.

(1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que K contiene una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$. distinguimos dos casos.

Caso 1. $\overline{\text{co}}(B) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$. Por la Proposición 1.1 sale que B posee una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$.

Caso 2. Supongamos que $\overline{\text{co}}(B) \neq \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$. Como $\overline{\text{co}}(B) = \overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(B)$ (porque $X_{\aleph_0} = X^{**}$), de la Proposición 5.10 se deduce que existe dentro de K una w^*-$\mathbb{N}$-familia. Por la Proposición 6.6 el contorno B contiene una w^*-$\mathbb{N}$-familia. Por tanto también existe en este Caso 2 una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$ en B. ∎

6.3. El contorno $B = Ext(K)$

A continuación se deducen de lo que acabamos de probar algunos resultados sobre el conjunto de los puntos extremos $Ext(K)$.

Proposición 6.8. *Sea K un subconjunto w^*-compacto del espacio de Banach dual X^*. Los siguientes enunciados son equivalentes:*
(1) K carece de una w^*-$\mathbb{N}$-familia, es decir, $K \in (P)$.
(2) $\overline{\text{co}}(Ext(W)) = \overline{\text{co}}^{w^*}(W)$ para todo subconjunto w^*-compacto W de K.
(3) $Ext(K)$ carece de una w^*-$\mathbb{N}$-familia.

Demostración. (1) $\Leftrightarrow$ (2). Ver Proposición 1.12.

(1) $\Rightarrow$ (3) es obvio.

(3) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que K posee una w^*-$\mathbb{N}$-familia $\mathcal{F}$ con $anchura(\mathcal{F}) \geq d > 0$ asociada a las secuencias $\{r_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{x_n : n \geq 1\} \subset B(X)$. Sea $T : \ell_1 \to X$ el

operador continuo tal que $T(e_n) = x_n$, $\forall n \geq 1$, donde $\{e_n : n \geq 1\}$ es la base canónica de ℓ_1. Claramente T es un isomorfismo entre ℓ_1 y $T(\ell_1)$ tal que $T^*(\mathcal{F})$ es una w^*-$\mathbb{N}$-familia dentro del subconjunto w^*-compacto $T^*(K)$ con $width(T^*(\mathcal{F})) \geq d > 0$ asociada a las secuencias $\{r_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{e_n : n \geq 1\}$. Es bien conocido que $Ext(T^*(K)) \subset T^*(Ext(K))$. Como $(T^*(K), w^*)$ es un espacio compacto metrizable (porque $(B(\ell_\infty), w^*)$ lo es), $Ext(T^*(K))$ es un subconjunto $\mathcal{G}_\delta$ de $T^*(K)$ ([24, 27.3 Corollary]) y por tanto un subconjunto w^*-analítico. Por el Lema 6.3 el contorno $Ext(T^*(K))$ contiene una w^*-$\mathbb{N}$-familia $\mathcal{A}$ con $anchura(\mathcal{A}) \geq \delta > 0$ asociada a las secuencias $\{s_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{u_n : n \geq 1\} \subset B(\ell_1)$. Por cada $a \in \mathcal{A}$ podemos hallar $v_a \in Ext(K)$ tal que $T^*(v_a) = a$. Claramente $\mathcal{H} := \{v_a : a \in \mathcal{A}\}$ es una w^*-$\mathbb{N}$-familia dentro de $Ext(K)$ con $anchura(\mathcal{H}) \geq \delta > 0$ asociada a las secuencias $\{s_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{T(u_n) : n \geq 1\} \subset B(X)$. Hemos llegado a una contradicción que prueba la implicación (3) $\Rightarrow$ (1). ■

Proposición 6.9. *Sea K un subconjunto w^*-compacto de un espacio de Banach dual X^*. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $Ext(K)$ posee una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$. (2) K posee una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) es obvio. Probemos (2) $\Rightarrow$ (1). Hay dos casos a considerar:

Case 1. Supongamos que $\overline{\text{co}}(Ext(K)) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$. Del Lema 1.1 se obtiene que $Ext(K)$ posee una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$.

Case 2. Supongamos que $\overline{\text{co}}(Ext(K)) \neq \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$. De la Proposición 6.8 sale que $Ext(K)$ posee una w^*-$\mathbb{N}$-familia y por tanto una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$. ■

Cuando K es un subconjunto w^*-compacto de un espacio de Banach dual X^*, para ciertos contornos especiales B de K, se puede relacionar la anchura $Width(B)$ con la distancia $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(B))$, como vemos a continuación.

Proposición 6.10. *Sean X un espacio de Banach, K un subconjunto w^*-compacto de X^* y B un subconjunto de K tal que $B \in \mathcal{B}a(K)$ (= σ-álgebra de Baire de K), $Ext(K) \subset B$ y $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(B)) > d > 0$. Entonces existen un subconjunto w^*-compacto $H \subset B$ y una w^*-$\mathbb{N}$-familia $\mathcal{A} \subset H$ con $anchura(\mathcal{A}) > d > 0$. En consecuencia, $Width(B) \geq DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(B))$.*

Demostración. Sea $w_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ tal que $dist(w_0, \overline{\text{co}}(B)) > d$. Como $Ext(K) \subset B \in \mathcal{B}a(K)$, es bien conocido que, por cada punto de $\overline{\text{co}}^{w^*}(K)$, existe una probabilidad Borel Radon sobre B cuya resultante es dicho punto. Por tanto existe una probabilidad Borel Radon μ sobre B tal que $r(\mu) = z_0$. En consecuencia, existe una secuencia de subconjuntos w^*-compactos $\{K_n : n \geq 1\}$ de B tales que $K_n \subset K_{n+1} \subset \ sop(\mu)$ y $\mu(K_n) \uparrow 1$. Consideremos las probabilidades $\nu_n := (\mu \restriction K_n)/\mu(K_n)$ y observemos que :(i) $\text{sop}(\nu_n) \subset K_n \subset B$; (ii) la resultante $r(\nu_n)$ verifica $r(\nu_n) \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K_n)$ y $r(\nu_n) \to r(\mu) = w_0$ en la norma de X^*. Esto quiere decir que existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que $dist(r(\nu_p), \overline{\text{co}}(K_p)) > d > 0$, $\forall p \geq p_0$, es decir, $Pindex(K_p) > d$. Como $Pindex(K_p) =$

$Width(K_p)$ (ver la Prop. 1.10), concluimos que en K_p, y por tanto en B, hay una w^*-$\mathbb{N}$-familia de anchura $> d$. ■

Corolario 6.11. *Sean X un espacio de Banach y K un subconjunto w^*-compacto metrizable de X^* tal que $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(Ext(K))) > d > 0$. Entonces existen un subconjunto w^*-compacto $H \subset Ext(K)$, una w^*-$\mathbb{N}$-familia $\mathcal{A} \subset H$ de anchura$(\mathcal{A}) > d > 0$ y una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$ dentro de H. Por tanto $Width(Ext(K)) \geq DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(Ext(K))$.*

Demostración. Recordemos que, si el subconjunto w^*-compacto K del espacio de Banach dual X^* es w^*-metrizable, entonces $Ext(K)$ es un subconjunto $\mathcal{G}_\delta$ de K y, por tanto, $Ext(K) \in \mathcal{B}a(K)$ (ver [24, 27.3 Corollary]). En consecuencia, por cada $z \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ existe una probabilidad Borel Radon μ sobre $Ext(K)$ tal que $r(\mu) = z$ (ver [24, 27.6 Theorem]) y se puede aplicar la Proposición 6.10. ■

NOTA. Si el w^*-compacto $K \subset X^*$ no es metrizable y $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(Ext(K)) > d > 0$, sabemos por la Prop. 6.8 que $Ext(K)$ posee una w^*-$\mathbb{N}$-familia, pero no sabemos relacionar $Width(Ext(K))$ con d. A continuación vemos cómo se relacionan $Width(Ext(K))$ y $DIST_{\aleph_0}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(Ext(K)))$. Además, ya que todo subconjunto métrico separable es $\mathcal{CD}$, extendemos el Corolario 6.11.

Proposición 6.12. *Sean X un espacio de Banach y K un subconjunto w^*-compacto de X^*. Entonces:*

(1) Si $DIST_{\aleph_0}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(Ext(K))) > d > 0$, existe en $Ext(K)$ una w^*-$\mathbb{N}$-familia $\mathcal{A}$, tal que anchura$(\mathcal{A}) > d > 0$, y una copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$. Por tanto siempre $Width(Ext(K)) \geq DIST_{\aleph_0}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(Ext(K)))$.

(2) Sea $Ext(K)$ un subconjunto $w^*\mathcal{CD}$ tal que $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(Ext(K))) > d > 0$ y $\overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(Ext(K)) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$. Entonces existe en $Ext(K)$ una w^*-$\mathbb{N}$-familia $\mathcal{A}$ con anchura$(\mathcal{A}) > d > 0$ y, por tanto, $Width(Ext(K)) \geq DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(Ext(K)))$.

Demostración. (1) Puesto que

$$DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(Ext(K))) \geq DIST_{\aleph_0}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(Ext(K))) > d > 0,$$

de la Proposición 1.12 sale que $K \notin (P)$. Por la Proposición 6.8 sabemos que $Ext(K)$ posee una w^*-$\mathbb{N}$-familia $\mathcal{A}$. Vamos a ver que se puede conseguir que anchura$(\mathcal{A}) > d > 0$. Puesto que $DIST_{\aleph_0}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(Ext(K)) > d > 0$, existen $w_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ y $\psi \in S(X_{\aleph_0})$ tales que

$$\text{ínf}\langle \psi, w_0 - \text{ co}(Ext(K))\rangle > d > 0.$$

Puesto que $\psi \in X_{\aleph_0}$ existe un subespacio cerrado separable $Y \subset X$ tal que $\psi \in \overline{B(Y)}^{w^*} = B(Y^{**})$ (aquí consideramos a Y^{**} canónicamente sumergido en X^{**}). Sean $i : Y \to X$ la inclusión canónica, $L := i^*(K)$, $v_0 := i^*(w_0)$ y $\psi_0 \in B(Y^{**})$ tal que $i^{**}(\psi_0) = \psi$. Observemos que $Ext(L) \subset i^*(Ext(K))$. Obviamente L es un subconjunto

w^*-compacto w^*-metrizable de Y^*, $\overline{\text{co}}^{w^*}(L) = i^*(\overline{\text{co}}^{w^*}(K))$, $\text{co}(Ext(L)) \subset i^*(\text{ co}(Ext(K)))$, $v_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(L)$ y se verifica

$$\begin{gathered}\text{ínf}\langle \psi_0, v_0 - \text{ co}(Ext(L))\rangle \geq \text{ínf}\langle \psi_0, i^*(w_0 - \text{ co}(Ext(K)))\rangle = \\ \text{ínf}\langle i^{**}(\psi_0), w_0 - \text{ co}(Ext(K))\rangle = \text{ínf}\langle \psi, w_0 - \text{ co}(Ext(K))\rangle > d > 0.\end{gathered}$$

Así que $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(L), \overline{\text{co}}(Ext(L))) > d > 0$ y por Proposición 6.10 existe en $Ext(L)$ una w^*-$\mathbb{N}$-familia $\mathcal{A}'$ con anchura$(\mathcal{A}') > d$ asociada a ciertas secuencias $\{y_n : n \geq 1\} \subset B(Y)$ y $\{r_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$. Por tanto, si para cada $a \in \mathcal{A}'$ elegimos $k_a \in Ext(K)$ tal que $i^*(k_a) = a$, entonces $\mathcal{A} := \{k_a : a \in \mathcal{A}'\}$ es una w^*-$\mathbb{N}$-familia en $Ext(K)$ con anchura$(\mathcal{A}) > d$ asociada a las secuencias $\{i(y_n) : n \geq 1\} \subset B(X)$ y $\{r_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$.

(2) sale de la Proposición 5.9. ■

6.4. Contornos $\mathcal{K}_\sigma$

Vamos a ver que los contornos $\mathcal{K}_\sigma$ tienen un comportamiento mejor que el de $Ext(K)$. En primer término, un contorno $\mathcal{K}_\sigma$ es $w^*\mathcal{KA}$ y, por tanto, se le aplica todo cuanto se ha dicho para estos contornos.

Proposición 6.13. *Sean $K \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto de un espacio de Banach dual X^*, $(K_n)_{n\geq 1}$ una secuencia de subconjuntos w^*-compactos de K con $K_n \subset K_{n+1}$ de modo que $B := \bigcup_{n\geq 1} K_n$ es un contorno de K. Entonces*

$$\overline{\bigcup_{n\geq 1} \overline{\text{co}}^{w^*}(K_n)} = \overline{\text{co}}^{w^*}(K).$$

Por tanto $\overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(B) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$.

Demostración. En caso contrario existen $w_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ y $\epsilon_0 > 0$ tales que $B(w_0;\epsilon_0) \cap \overline{\text{co}}^{w^*}(K_n) = \emptyset$, $\forall n \geq 1$. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que $w_0 = 0$. Por lo tanto $\overline{\text{co}}^{w^*}(K_n) \cap B(0;\epsilon_0) = \emptyset$ y de aquí que existe $x_n \in S(X)$ tal que $\sup(\langle \overline{\text{co}}^{w^*}(K_n), x_n\rangle) \leq -\epsilon_0 < 0$. En consecuencia se tiene que

$$\sup\{\limsup_{n\to\infty} \langle b, x_n\rangle : b \in B\} \leq -\epsilon_0 < 0.$$

Pero por la igualdad de Simons se tiene que

$$\sup\{\limsup_{n\to\infty} \langle b, x_n\rangle : b \in B\} = \sup\{\limsup_{n\to\infty} \langle k, x_n\rangle : k \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)\} \geq \limsup_{n\to\infty} \langle 0, x_n\rangle = 0.$$

Hemos llegado a una contradicción que prueba el enunciado. ■

Sea K un subconjunto w^*-compacto de un espacio de Banach dual X^* y B un contorno de K que es $\mathcal{K}_\sigma$. Hallemos la relación entre $Width(B)$ y $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(B))$.

Proposición 6.14. *Sea K un subconjunto w^*-compacto de un espacio de Banach dual X^* y B un contorno de K que es $\mathcal{K}_\sigma$. Entonces $Width(B) \geq DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K)), \overline{\text{co}}(B))$.*

Demostración. Todo subconjunto $\mathcal{K}_\sigma$ es $w^*\mathcal{KA}$ y por tanto $w^*\mathcal{CD}$. Ahora basta aplicar la Proposición 6.13 y la Proposición 5.9. ∎

6.5. Miscelánea

Estamos interesados en conocer la relación entre $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C)$ y $DIST(B, C)$ cuando C es un subconjunto convexo de un espacio de Banach dual X^*, K es un subconjunto w^*-compacto de X^* y B es un contorno de K.

Proposición 6.15. *Sean X un espacio de Banach, $K \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto y C un subconjunto convexo de X^* tal que C carece de una w^*-$\mathbb{N}$-familia (en particular, si C carece de una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$). Entonces:*

(A) Si $B \subset K$ es un contorno tal que $Width(B) \geq DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(B))$, se verifica

$$DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) \leq 3dist(B, C).$$

(B) Si $B \subset K$ es un contorno tal que $Width(B) \geq DIST_{\aleph_0}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(B))$, se verifica

$$DIST_{\aleph_0}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) \leq 3dist(B, C).$$

Demostración. (A) Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que existen dos números $a, b > 0$ tales que

$$DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) > b > 3a > 3DIST(B, C).$$

En estas condiciones, como $DIST(\overline{\text{co}}(B), C) = DIST(B, C) < a$, tenemos que

$$DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(B)) \geq DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) - DIST(\overline{\text{co}}(B), C) > b - a > 2a > 0.$$

Como $Width(B) \geq DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(B))$, existen secuencias $\{r_m \in \mathbb{R} : m \geq 1\}$, $\{x_n : n \geq 1\} \subset B(X)$ y, para todo par de subconjuntos disjuntos M, N de $\mathbb{N}$, un vector $\eta_{M,N} \in B$ tales que

$$\eta_{M,N}(x_m) \geq r_m + b - a, \ \forall m \in M, \quad \text{y} \quad \eta_{M,N}(x_n) \leq r_n, \ \forall n \in N.$$

Como $DIST(B, C) < a$, para todo par de subconjuntos disjuntos M, N de $\mathbb{N}$ existe $z_{M,N} \in C$ de modo que $\|z_{M,N} - \eta_{M,N}\| < a$. La familia $\{z_{M,N} : M, N$ subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}\}$ está acotada y satisface

$$z_{M,N}(x_m) \geq r_m + b - 2a, \ \forall m \in M, \quad \text{y} \quad z_{M,N}(x_n) \leq r_n + a, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puesto que $r_n + b - 2a = r_n + a + (b - 3a) > r_n + a$, el conjunto $\{z_{M,N} : M, N$ subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}\}$ es una w^*-$\mathbb{N}$-familia en C, una contradicción.

(B) Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que existen dos números $a, b > 0$ tales que

$$DIST_{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) > b > 3a > 3dist(B, C).$$

En estas condiciones, como $DIST(\overline{\text{co}}(B), C) = DIST(B, C) < a$, tenemos que

$$DIST_{\aleph_0}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(B)) \geq DIST_{\aleph_0}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) - DIST(\overline{\text{co}}(B), C) > b - a > 2a > 0.$$

Como $Width(B) \geq DIST_{\aleph_0}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(B))$, existen secuencias $\{r_m \in \mathbb{R} : m \geq 1\}$, $\{x_n : n \geq 1\} \subset B(X)$ y, para todo par de subconjuntos disjuntos M, N de $\mathbb{N}$, un vector $\eta_{M,N} \in B$ tales que

$$\eta_{M,N}(x_m) \geq r_m + b - a,\ \forall m \in M, \quad \text{y} \quad \eta_{M,N}(x_n) \leq r_n,\ \forall n \in N.$$

Como $DIST(B, C) < a$, para todo par de subconjuntos disjuntos M, N de $\mathbb{N}$ existe $z_{M,N} \in C$ de modo que $\|z_{M,N} - \eta_{M,N}\| < a$. La familia $\{z_{M,N} : M, N$ subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}\}$ está acotada y satisface

$$z_{M,N}(x_m) \geq r_m + b - 2a,\ \forall m \in M, \quad \text{y} \quad z_{M,N}(x_n) \leq r_n + a,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puesto que $r_n + b - 2a = r_n + a + (b - 3a) > r_n + a$, el conjunto $\{z_{M,N} : M, N$ subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}\}$ es una w^*-$\mathbb{N}$-familia en C, una contradicción. ■

Corolario 6.16. *Sean X un espacio de Banach, $K \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto y C un subconjunto convexo de X^* tal que C carece de una w^*-$\mathbb{N}$-familia (en particular, si C carece de una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$). Entonces:*

(A) Siempre se verifica $DIST_{\aleph_0}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) \leq 3DIST(Ext(K), C)$.

(B) Si K es w^*-metrizable se verifica $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) \leq 3DIST(Ext(K), C)$.

(C) Si B es un contorno $\mathcal{K}_\sigma$ de K entonces $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) \leq 3DIST(B, C)$.

Demostración. (A) sale de la Proposición 6.15 y de la Proposición 6.12. (B) sale de la Proposición 6.15 y el Corolario 6.11. (C) es consecuencia de la Proposición 6.15 y de la Proposición 6.14. ■

A continuación introducimos la noción de pre-w^*-$\mathbb{N}$-familia.

Definición 6.17. *Sea X un espacio de Banach. Un subconjunto $\mathcal{F}$ de X^* es una pre-w^*-$\mathbb{N}$-familia de anchura $d > 0$ si $\mathcal{F}$ es un conjunto acotado y tiene la forma*

$$\mathcal{F} = \{\eta_{M,N} : M, N \text{ subconjuntos disjuntos finitos de } \mathbb{N}\},$$

y existen dos secuencias $\{r_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{x_m : m \geq 1\} \subset B(X)$ tales que para todo par de subconjuntos disjuntos finitos M, N de $\mathbb{N}$ se tiene

$$\eta_{M,N}(x_m) \geq r_m + d,\ \forall m \in M, \quad y \quad \eta_{M,N}(x_n) \leq r_n,\ \forall n \in N.$$

Además, si $r_m = r_0$, $\forall m \geq 1$, decimos que $\mathcal{F}$ es una pre-w^*-$\mathbb{N}$-familia uniforme en X^*.

Nota 6.18. Sea $\mathcal{F} = \{\eta_{M,N} : M, N$ subconjuntos finitos disjuntos de $\mathbb{N}\}$ una pre-w^*-$\mathbb{N}$-familia de anchura $d > 0$ con respecto a las secuencias $\{r_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{x_m : m \geq 1\} \subset B(X)$. Si $H := \overline{\mathcal{F}}^{w^*}$, entonces H contiene una w^*-$\mathbb{N}$-familia de anchura $d > 0$ con respecto a las secuencias $\{r_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{x_m : m \geq 1\} \subset B(X)$. En efecto, si ponemos

$$A_m = \{\xi \in H : \xi(x_m) \geq r_m + d\} \text{ y } B_n = \{\eta \in H : \eta(x_n) \leq r_n\}, \ \forall n \geq 1,$$

entonces $(\bigcap_{m\in M} A_m) \cap (\bigcap_{n\in N} B_n) \neq \emptyset$ para todo par de subconjuntos disjuntos M, N de $\mathbb{N}$, por la compacidad de H. Elegimos $\gamma_{M,N} \in (\bigcap_{m\in M} A_m) \cap (\bigcap_{n\in N} B_n)$ para todo par de subconjuntos disjuntos M, N de $\mathbb{N}$. Claramente, $\{\gamma_{M,N} : M, N$ subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}\}$ es una w^*-$\mathbb{N}$-familia de anchura $d > 0$ con respecto a las secuencias $\{r_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{x_m : m \geq 1\} \subset B(X)$. Finalmente observemos que la secuencia $\{x_n : n \geq 1\} \subset B(X)$ asociada a $\mathcal{F}$ es equivalente a la base de ℓ_1 (ver [65, p. 270]).

Proposición 6.19. *Sean X un espacio de Banach, K un subconjunto w^*-compacto de X^* y C un subconjunto convexo de X^* tal que C carece de una pre-w^*-$\mathbb{N}$-familia (en particular, si $\overline{C}^{w^*}$ carece de una w^*-$\mathbb{N}$-familia ó si $\overline{C}^{w^*}$ carece de una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$). Entonces si $B \subset K$ es un contorno, se verifica*

$$DIST_{\aleph_0}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) \leq 7DIST(B, C).$$

En particular, si K es metrizable, se verifica

$$DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) \leq 7DIST(B, C).$$

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que existen dos números reales $a, b > 0$ tales que

$$DIST_{\aleph_0}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) > b > 7a > 7DIST(B, C).$$

Entonces, como $DIST(\overline{\text{co}}(B), C) = DIST(B, C) < a$, tenemos que

$$DIST_{\aleph_0}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(B)) > b - a > 6a > 0,$$

de donde $Bindex_c(\overline{\text{co}}^{w^*}(K)) > b - a > 6a$. Por la Proposición 5.4 hay en $\overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ una w^*-$\mathbb{N}$-familia $\mathcal{F} := \{\eta_{M,N} : M, N$ subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}\}$ de anchura$(\mathcal{F}) > \frac{b-a}{3} := d > 2a > 0$ asociada a ciertas secuencias $\{x_n : n \geq 1\} \subset B(X)$ y $\{r_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$. Definimos

$$A_m = \{\xi \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K) : \xi(x_m) > r_m + d\} \text{ y}$$
$$B_n = \{\eta \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K) : \eta(x_n) < r_n\}, \ \forall n \geq 1.$$

Puesto que $\overline{\text{co}}^{w^*}(B) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$, entonces $(\bigcap_{m\in M} A_m) \cap (\bigcap_{n\in N} B_n) \cap \text{co}(B) \neq \emptyset$ para todo par de subconjuntos finitos disjuntos M, N de $\mathbb{N}$. En consecuencia, si para todo par de subconjuntos finitos disjuntos M, N de $\mathbb{N}$ elegimos $\gamma_{M,N} \in (\bigcap_{m\in M} A_m) \cap (\bigcap_{n\in N} B_n) \cap$

$\text{co}(B)$, entonces $\mathcal{A} := \{\gamma_{M,N} : M, N$ subconjuntos finitos disjuntos de $\mathbb{N}\}$ es una pre-w^*-$\mathbb{N}$-familia de anchura$(\mathcal{A}) \geq d$ asociada a las secuencias $\{x_n : n \geq 1\} \subset B(X)$ y $\{r_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$. Puesto que $DIST(\text{co}(B), C) < a$, podemos elegir $z_{M,N} \in C$, para cada par de subconjuntos finitos disjuntos M, N de $\mathbb{N}$, de modo que $\|z_{M,N} - \eta_{M,N}\| < a$. La familia $\mathcal{Z} := \{z_{M,N} : M, N$ subconjuntos finitos disjuntos de $\mathbb{N}\}$ es acotada y satisface

$$z_{M,N}(x_m) > r_m + d - a, \ \forall m \in M, \quad \text{y} \quad z_{M,N}(x_n) < r_n + a, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puesto que $r_m + d - a > r_m + a$, entonces $\mathcal{Z}$ es una pre-w^*-$\mathbb{N}$-familia en C, una contradicción.

Si K es metrizable bastaría utilizar la Proposición 5.1, en lugar de la Proposición 5.4, y $DIST$ en lugar de $DIST_{\aleph_0}$. ■

6.6. $\ell_1(\mathfrak{c})$ y los contornos de $B(X^*)$

En secciones anteriores hemos probado que, si X es un espacio de Banach, K un subconjunto w^*-compacto de X^* y $B \subset K$ un contorno $w^*\mathcal{KA}$ de K ó $B = Ext(K)$, entonces, caso de poseer K (ó $\overline{\text{co}}^{w^*}(K)$) una w^*-$\mathbb{N}$-familia o una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$, estas estructuras también aparecen dentro de B. Los contornos de la bola unidad dual $B(X^*)$ son especialmente importantes y es natural plantear la siguiente cuestión.

Cuestión 2. *(a) Si X contiene una copia de ℓ_1 y B es un contorno de $B(X^*)$, ¿hay en B una w^*-$\mathbb{N}$-familia?. (b) Si X^* contiene una copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$ y B es un contorno de $B(X^*)$, ¿hay en B una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$?*

En esta sección vamos a hacer sólo dos breves observaciones sobre esta cuestión. La primera se refiere a la importancia del comportamiento de los espacios X isomorfos a ℓ_1. La segunda trata del "buen comportamiento" de los espacios $\mathfrak{L}_\infty$.

Decimos que un espacio de Banach X tiene *la propiedad* $\mathcal{B}$ si todo contorno B de $B(X^*)$ posee una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$. Obviamente la propiedad $\mathcal{B}$ es una propiedad isométrica. Por ello introducimos la siguiente propiedad isomórfica. Un espacio de Banach X es *isomórficamente* $\mathcal{B}$ si posee la propiedad $\mathcal{B}$ para toda norma equivalente a la dada.

Proposición 6.20. *Los siguientes asertos son equivalentes:*

(a) Todo espacio de Banach X con $X^{**} = X_{\aleph_0}$ tal que X^* contiene una copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$ es isomórficamente $\mathcal{B}$.

(b) Todo espacio de Banach separable X tal que X^* contiene una copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$ es isomórficamente $\mathcal{B}$.

(c) ℓ_1 es isomórficamente $\mathcal{B}$.

Demostración. Las implicaciones $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ son obvias. Veamos $(c) \Rightarrow (a)$. Supongamos que $X^{**} = X_{\aleph_0}$ y que X^* posee una copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$. Sea $B \subset B(X^*)$ un cierto contorno. Distinguimos dos casos, a saber:

Caso 1. Sea $\mathcal{S}eq(X^{**}) = X_{\aleph_0}$. Entonces $\mathcal{S}eq(X^{**}) = X^{**}$. Veamos que $\overline{\text{co}}(B) = B(X^*)$. En efecto, si existiese algún vector $w_0 \in B(X^*) \setminus \overline{\text{co}}(B)$, existiría un cierto $\psi \in S(X^{**})$ y un $d > 0$ tales que

$$\langle \psi, w_0 \rangle > \sup \langle \psi, \overline{\text{co}}(B) \rangle + d.$$

Por la Prop. 4.9 obtendríamos que $dist(\psi, \mathcal{S}eq(X^{**})) \geq d/2 > 0$ lo que no puede ser ya que $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$.

Caso 2. Sea $\mathcal{S}eq(X^{**}) \neq X_{\aleph_0}$. Entonces hay en X un subespacio isomorfo a ℓ_1, por la Prop. 2.2, y claramente $i^*(B)$ es un contorno de $B(Y^*)$, siendo $i : Y \to X$ la inclusión canónica. Por (c) $i^*(B)$ posee una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$, digamos, $\{e_\alpha : 1 \leq \alpha < \mathfrak{c}\}$. En consecuencia, si $u_\alpha \in B$ verifica $i^*(u_\alpha) = e_\alpha,\ 1 \leq \alpha < \mathfrak{c}$, entonces $\{u_\alpha : 1 \leq \alpha < \mathfrak{c}\}$ es una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$ dentro de B. ■

Cuestión 3. *¿Son equivalentes los enunciados anteriores a que todo espacio de Banach X tal que X^* contiene una copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$ es isomórficamente $\mathcal{B}$?*

Proposición 6.21. *Son equivalentes:*

(a) Si X es un espacio de Banach tal que X^* contiene una w^*-$\mathbb{N}$-familia (es decir, $\ell_1 \subset X$), todo contorno de $B(X^*)$ contiene una w^*-$\mathbb{N}$-familia.

(b) Si X es un espacio de Banach isomorfo a ℓ_1, todo contorno de $B(X^*)$ contiene una w^*-$\mathbb{N}$-familia.

Demostración. Como claramente $(a) \Rightarrow (b)$, pasemos a probar que $(b) \Rightarrow (a)$. Sea B un contorno de $B(X^*)$. Ya que por hipótesis X contiene una copia Y de ℓ_1 y $i^*(B)$ es un contorno de $B(Y^*)$ ($i : Y \to X$ es la inclusión canónica), de (b) sale que $i^*(B)$ contiene una w^*-$\mathbb{N}$-familia $\mathcal{A}$. Por cada $a \in \mathcal{A}$ se $b_a \in B$ tal que $i^*(b_a) = a$. Es inmediato que $\{b_a : a \in \mathcal{A}\}$ es una w^*-$\mathbb{N}$-familia dentro de B. ■

Proposición 6.22. *Sea X un espacio de Banach que contiene un subespacio $Y \subset X$ tal que Y es isomórficamente $\mathcal{B}$. Entonces X es isomórficamente $\mathcal{B}$.*

Demostración. Si $i : Y \to X$ es la inclusión canónica y $B \subset B(X^*)$ es un contorno de $B(X^*)$, entonces $i^*(B)$ es un contorno de $B(Y^*)$ y, por hipótesis, contiene una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$. En consecuencia B también contiene una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$. ■

Un espacio de Banach X pertenece a la clase $\mathfrak{L}_{\infty,\lambda}$ con $\lambda \geq 1$ si para todo subespacio finito dimensional F de X existe otro subespacio finito dimensional $F \subset G \subset X$ tal que $d(G, \ell_\infty(Dim(G))) \leq \lambda$, siendo $d(\cdot,\cdot)$ la distancia de Mazur definida por $\inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\| : T : G \to \ell_\infty(Dim(G))$ isomorfismo$\}$. La clase $\mathfrak{L}_\infty$ se define como $\mathfrak{L}_\infty := \bigcup_{\lambda \geq 1} \mathfrak{L}_{\infty,\lambda}$.

Proposición 6.23. *Todo espacio $X \in \mathfrak{L}_\infty$ no-Asplund es isomórficamente $\mathcal{B}$ bajo (CH).*

Demostración. Supongamos que $X \in \mathfrak{L}_{\infty,\lambda}$ con $\lambda \geq 1$. Sea $Y \subset X$ subespacio cerrado separable tal que Y^* no es separable y $\{y_n : n \geq 1\} \subset S(Y)$ familia densa en $S(Y)$. Puesto que $X \in \mathfrak{L}_{\infty,\lambda}$, existe una secuencia de subespacios finitos $Z_n \subset X$ tales que:

(i) $y_n \in Z_n \subset Z_{n+1}, \ \forall n \geq 1$.

(ii) $d(Z_n, \ell_\infty(Dim(Z_n))) \leq \lambda$, siendo $d(\cdot,\cdot)$ la distancia de Mazur.

Sea $Y_0 := \overline{\bigcup_{n\geq 1} Z_n}$. Se tiene que Y_0 es un subespacio separable de X tal que Y_0^* no es separable, $Y_0 \in \mathfrak{L}_{\infty,\lambda'}, \ \forall \lambda' > \lambda$, y $Y \subset Y_0$. Sabemos que Y_0^* es isomorfo a $M_R([0,1])$ (ver [75], [10, Th. 3.1]) y que todo subespacio no-separable de $M_R([0,1])$ contiene una copia de $\ell_1(\aleph_1)$. Sea $i : Y_0 \to X$ la inclusión canónica y sea B un contorno de $B(X^*)$. Entonces $i^*(B)$ es un contorno de $B(Y_0^*)$ tal que $\overline{[i^*(B)]}$ no es separable y, por tanto, contiene una copia de $\ell_1(\aleph_1)$. Por el T. de Talagrand $i^*(B)$ contiene una copia de la base de $\ell_1(\aleph_1)$. En consecuencia B contiene una copia de la base de $\ell_1(\aleph_1)$. ∎

Proposición 6.24. *Todo espacio X tal que X^* es isomorfo a $\ell_1(I)$ con I incontable es isomórficamente $\mathcal{B}$ bajo (CH). En particular $c_0(I)$ con I incontable es isomorficamente $\mathcal{B}$ bajo (CH).*

Demostración. Recordemos que, si $A \subset \ell_1(I)$, entonces

$$sop(A) := \{i \in I : \exists a \in A \text{ tal que } a_i \neq 0\}.$$

Aserto. Sea $A \subset \ell_1(I)$ tal que $|sop(A)| \geq \mathfrak{c}$. Entonces A contiene una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$.

En efecto, en primer término es inmediato que si $Y \subset \ell_1(I)$ es un subespacio tal que $|sop(Y)| \geq \mathfrak{c}$ entonces Y contiene una copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$. Por tanto el subespacio $\overline{[A]}$ contiene una copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$. Ahora basta aplicar el T. de Talagrand (ver Prop. 1.1).

Sea X un espacio de Banach tal que X^* es isomorfo a $\ell_1(I)$ con I incontable y sea $B \subset B(X^*)$ un contorno. Es inmediato que $sop(B)$ es incontable ya que B no es $\|\cdot\|$-separable. Por tanto aplicando el Aserto concluimos que B contiene una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$. ∎

Corolario 6.25. *Sea X un espacio de Banach isomorfo a un $C(K)$ tal que X^* no es separable. Entonces X es isomórficamente $\mathcal{B}$ bajo (CH).*

Demostración. Recordemos que todo espacio isomorfo a un $C(K)$ es un espacio $\mathfrak{L}_\infty$. Si X no es Asplund, basta aplicar la Prop. 6.23. Si X es Asplund y X es isomorfo a un cierto $C(K)$, K es disperso por lo que X^* es isomorfo $\ell_1(K)$ con K incontable. Ahora basta aplicar la Prop. 6.24. ∎

Capítulo 7

Contornos y la propiedad (C)

7.1. Introducción

El presente Capítulo se dedica a los siguientes cometidos:

(1) Consideramos la propiedad (C) de Corson y obtenemos ciertos resultados necesarios para los problemas que estudiamos a continuación.

(2) Desvelamos la íntima relación entre la propiedad (C) de Corson y la topología $\mathcal{T}_{\aleph_0}$ en un espacio dual X^*.

(3) Damos resultados que relacionan la propiedad (C) de Corson con los contornos.

(4) Obtenemos resultados relacionados con los espacios representables y universalmente representables.

7.2. La propiedad (C) de Corson

Vamos a ver en esta sección algunas consideraciones relacionadas con la propiedad (C) de Corson, que utilizaremos más tarde. Recordemos que un subconjunto convexo D de un espacio normado X tiene la propiedad (C) de Corson si toda colección de convexos cerrados (relativos) de D que tenga intersección vacía tiene alguna sub-colección contable de intersección vacía. El siguiente Lema es una "localización" del Lema de pag. 144 de [93].

Lema 7.1. *Sea X un espacio de Banach y D un subconjunto cerrado convexo de X. Son equivalentes:*

(1) D no tiene la propiedad C.

(2) Existe una colección $\mathfrak{C}$ de subconjuntos convexos cerrados no-vacíos de D, cerrada para intersecciones contables, y existe $\epsilon > 0$ tales para todo subconjunto convexo M de X con la propiedad (C) se verifica que existe $C_M \in \mathfrak{C}$ tal que $dist(M, C_M) \geq \epsilon$.

Demostración. (2) $\Rightarrow$ (1). Esta implicación es obvia, pues debe ser $\bigcap_{C\in\mathfrak{C}} C = \emptyset$, ya que si existiese $x \in \bigcap_{C\in\mathfrak{C}} C$, tomando $M := \{x\}$ llegaríamos a una contradicción.

$(1) \Rightarrow (2)$. En primer término tenemos el siguiente aserto.

Aserto 1. Si para cualquier familia $\mathcal{H}$ de subconjuntos cerrados convexos no-vacíos de D, cerrada por intersecciones contables, y para cada $\sigma > 0$ existe $a \in X$ tal que $dist(a, C) \leq \sigma$, $\forall C \in \mathcal{H}$, entonces D tiene la propiedad (C).

Este aserto es el enunciado $(*)$ que aparece probado en [93, p. 145].

Por tanto, como por hipótesis D no posee la propiedad (C), existe una familia $\mathfrak{C}$ de subconjuntos cerrados convexos no-vacíos de D, cerrada por intersecciones contables, y existe $\epsilon_0 > 0$ tales que para todo $x \in X$ existe $C_x \in \mathfrak{C}$ verificando que $dist(x, C_x) > \epsilon_0$. Fijamos la familia $\mathfrak{C}$ y $\epsilon_0 > 0$. Para terminar la prueba de la implicación $(1) \Rightarrow (2)$ bastará probar el siguiente aserto.

Aserto 2. Sea M subconjunto convexo de X con la propiedad (C). Entonces existe $C_M \in \mathfrak{C}$ tal que $dist(M, C_M) \geq \epsilon_0$.

En efecto, supongamos que $dist(M, C) < \epsilon_0$, $\forall C \in \mathfrak{C}$. Sea $\tilde{C} := (\overline{C + \epsilon_0 \cdot B(X)}) \cap M$, $\forall C \in \mathfrak{C}$. Entonces $\tilde{\mathfrak{C}} := \{\tilde{C} : C \in \mathfrak{C}\}$ es una familia de convexos cerrados (relativos) no-vacíos de M, que tiene la propiedad de la intersección contable. En efecto, si $\mathcal{A} \subset \mathfrak{C}$ es una familia contable, entonces $\emptyset \neq \cap_{C \in \mathcal{A}} C =: \cap \mathcal{A} \in \mathfrak{C}$, de donde

$$\emptyset \neq (\cap \mathcal{A})\tilde{} \subset \cap \tilde{\mathcal{A}}.$$

Puesto que M tiene la propiedad (C) concluimos que existe $x_0 \in \cap \tilde{\mathfrak{C}}$, por lo que $dist(x_0, C) \leq \epsilon_0$, $\forall C \in \mathfrak{C}$. Hemos llegado a una contradicción que prueba el Aserto 2. ■

En la siguiente Proposición vemos que la propiedad (C) está $\aleph_1$-determinada.

Proposición 7.2. *La propiedad (C) está $\aleph_1$-determinada para subconjuntos convexos cerrados de espacios de Banach, es decir, si X es un espacio de Banach y $D \subset X$ es un subconjunto convexo cerrado, entonces $D \in (C)$ si y sólo si todo subconjunto convexo cerrado $E \subset D$ con $dens(E) = \aleph_1$ verifica $E \in (C)$.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach y $D \subset X$ un subconjunto convexo cerrado. Si $D \in (C)$ entonces es inmediato que todo subconjunto convexo cerrado $E \subset D$ verifica $E \in (C)$, porque la propiedad (C) es hereditaria para subconjuntos convexos cerrados.

Supongamos ahora que todo subconjunto convexo cerrado $E \subset D$ con $Dens(E) = \aleph_1$ verifica $E \in (C)$ y probemos que $D \in (C)$. Supongamos que $D \notin (C)$. Naturalmente debe ser $Dens(D) \geq \aleph_1$ porque todo subconjunto convexo separable tiene la propiedad (C). Por el Lema 7.1 existe una colección $\mathfrak{C}$ de subconjuntos convexos cerrados no-vacíos de D, cerrada por intersecciones contables, y existe $\epsilon > 0$ tales para todo subconjunto convexo M de X con la propiedad (C) se verifica que existe $C_M \in \mathfrak{C}$ tal que $dist(M, C_M) \geq \epsilon$. Vamos a construir en D dos secuencias de subconjuntos no-vacíos cerrados convexos $\{M_\alpha : 1 \leq \alpha < \omega_1\}$ y $\{C_\alpha : 1 \leq \alpha < \omega_1\}$ y una secuencia de puntos $\{x_\alpha : 1 \leq \alpha < \omega_1\}$ de D tales que:

(1) M_α es separable y $M_\alpha \subset M_\beta$ para todo $1 \leq \alpha < \beta < \omega_1$.

(2) $C_\alpha \in \mathfrak{C}$, $dist(M_\alpha, C_\alpha) \geq \epsilon$ y $x_\alpha \in \cap_{1\leq\beta\leq\alpha} C_\beta$ para todo $1 \leq \alpha < \omega_1$.

Procedemos por inducción transfinita.

Etapa 1. Sea $p \in D$ arbitrario. Hacemos $M_1 := \{p\}$. Como $M_1 \in (C)$ (todo subconjunto cerrado convexo separable tiene la propiedad (C)), por el Lema 7.1 existe $C_1 \in \mathfrak{C}$ tal que $dist(M_1, C_1) \geq \epsilon$. Sea $x_1 \in C_1$ arbitrario.

Etapa 2. Sea $M_2 := \overline{\text{co}}(\{p, x_1\})$. Como $M_2 \in (C)$, por el Lema 7.1 existe $C_2 \in \mathfrak{C}$ tal que $dist(M_2, C_2) \geq \epsilon$. Sea $x_2 \in C_1 \cap C_2$ arbitrario. Recordemos que $C_1 \cap C_2 \in \mathfrak{C}$ ya que $\mathfrak{C}$ es familia cerrada por intersecciones contables.

Etapa $\alpha < \omega_1$. Supongamos construidos los subconjuntos convexos cerrados M_β, C_β y elegidos los puntos x_β para $\beta < \alpha$, verificando (1) y (2). Sea $M_\alpha := \overline{\text{co}}(\{p\} \cup \{x_\beta : \beta < \alpha\})$, que es un subconjunto convexo cerrado separable de D. Como $M_\alpha \in (C)$, por el Lema 7.1 existe $C_\alpha \in \mathfrak{C}$ tal que $dist(M_\alpha, C_\alpha) \geq \epsilon$. Sea $x_\alpha \in \cap_{\beta\leq\alpha} C_\beta$ arbitrario.

El proceso se continúa para todo $\alpha < \omega_1$. Para cada $1 \leq \alpha < \omega_1$ sea $D_\alpha := \overline{\text{co}}(\{x_\beta : \alpha \leq \beta < \omega_1\})$. Es claro que $\{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una familia de subconjuntos cerrados convexos no-vacíos de D, que es cerrada por intersecciones contables. De hecho $D_\beta \subset D_\gamma \subset C_\gamma$ para $1 \leq \gamma < \beta < \omega_1$. Como $dens(D_\alpha) = \aleph_1$ (porque $\|x_\beta - x_\gamma\| \geq \epsilon$ para $\alpha \leq \beta < \gamma < \omega_1$), se verifica por hipótesis que $D_\alpha \in (C)$, $\forall \alpha < \omega_1$.

Aserto. $\cap_{1\leq\alpha<\omega_1} D_\alpha = \emptyset$.

En efecto, supongamos que existe $z \in \cap_{1\leq\alpha<\omega_1} D_\alpha$. Como $z \in D_1$, existe $\gamma < \omega_1$ tal que $z \in \overline{\text{co}}(\{x_\beta : 1 \leq \beta < \gamma\}) \subset M_\gamma$. Por otra parte $z \in D_\gamma \subset C_\gamma$. Como $dist(M_\gamma, C_\gamma) \geq \epsilon > 0$, llegamos a una contradicción, que prueba el Aserto.

Por el Aserto concluimos que $D_1 \notin (C)$, lo cual es falso por hipótesis. Y esto termina la demostración. ■

Corolario 7.3. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes: (a) $X \in (C)$; (b) todo subespacio cerrado $Y \subset X$ con $Dens(Y) = \aleph_1$ verifica $Y \in (C)$.*

Demostración. La demostración sale inmediatamente de la Proposición 7.2. ■

Lema 7.4. *Sea D_i un subconjunto convexo cerrado no-vacío del espacio de Banach X_i tal que $D_i \in (C)$, $i = 1, 2$. Entonces $D_1 \oplus D_2$ es un subconjunto convexo cerrado de la suma directa $X_1 \oplus X_2$, que tiene la propiedad (C).*

Demostración. Trabajaremos con la suma directa $X_1 \oplus_\infty X_2$. Es claro que $D := D_1 \oplus_\infty D_2$ es un subconjunto convexo y cerrado de $X_1 \oplus_\infty X_2$. Supongamos que D carece de la propiedad (C). Por el Lema 7.1 existe una familia $\mathfrak{C}$ de subconjuntos convexos cerrados no-vacíos en D, cerrada por intersecciones contables, y existe $\epsilon > 0$ tal que para todo subconjunto convexo M de X con la propiedad (C) existe un elemento $C_M \in \mathfrak{C}$ verificando que $dist(M, C_M) \geq \epsilon$. En consecuencia, como cada subconjunto $D_1 \oplus_\infty$

y, $y \in X_2$, posee la propiedad (C), existe $C_y \in \mathfrak{C}$ tal que $dist(D_1 \oplus_\infty y, C_y) \geq \epsilon$. Sea $P_2 : X_1 \oplus_\infty X_2 \to X_2$ la proyección canónica sobre la segunda coordenada.

Aserto 1. $\mathcal{H} := \{\overline{P_2(C)} : C \in \mathfrak{C}\}$ es una familia de subconjuntos convexos cerrados no-vacíos de D_2, que tiene la propiedad de la intersección contable.

En efecto, es obvio que dicha familia está formada por subconjuntos convexos cerrados no-vacíos de D_2. Además es cerrada por intersecciones contables pues si $\mathcal{A} \subset \mathfrak{C}$ es una familia contable, entonces $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$ por lo que

$$\emptyset \neq \overline{P_2(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A)} \subset \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \overline{P_2(A)}.$$

Aserto 2. Para todo $y \in X_2$ se verifica que $dist(y, P_2(C_y)) \geq \epsilon$ y, por tanto, $dist(y, \overline{P_2(C_y)}) \geq \epsilon$.

En efecto, sea $z \in P_2(C_y)$. Cojamos $x \in D_1$ tal que $x \oplus_\infty z \in C_y$. Como $x \oplus_\infty y \in D_1 \oplus_\infty y$ y $dist(D_1 \oplus_\infty y, C_y) \geq \epsilon$, debe ser $\|y - z\| \geq \epsilon$ y esto prueba el Aserto 2.

Del Aserto 2 extraemos que $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H = \emptyset$, lo que entra en contradicción con el hecho de que D_2 tiene la propiedad (C). Y esto termina la prueba del Lema. ∎

Lema 7.5. *Sean X, Y espacios de Banach, D un subconjunto convexo cerrado no-vacío de X con la propiedad (C) y $T : X \to Y$ un operador lineal y continuo. Entonces $T(D)$ tiene la propiedad (C) en Y.*

Demostración. Sea $\mathfrak{C}$ una familia de subconjuntos convexos cerrados (relativos) de $T(D)$ con la propiedad de la intersección contable. Entonces $\mathcal{H} := \{T^{-1}(C) \cap D : C \in \mathfrak{C}\}$ es una familia de subconjuntos convexos cerrados de D con la propiedad de la intersección contable. Por tanto $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H \neq \emptyset$ puesto que D tiene la propiedad (C). Como

$$T(\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H) \subset \bigcap_{C \in \mathfrak{C}} C,$$

también $\bigcap_{C \in \mathfrak{C}} C \neq \emptyset$, lo que prueba que $T(D)$ tiene la propiedad (C). ∎

Corolario 7.6. *Sean X un espacio de Banach, D_i, $i = 1, 2, ..., n$, subconjuntos convexos cerrados no-vacíos de X dotados de la propiedad (C) y $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$. Entonces $\sum_{i=1}^n \lambda_i D_i$ es un subconjunto convexo X, que tiene la propiedad (C).*

Demostración. Es inmediato que la aplicación $T : X^n \to X$ tal que

$$T(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

es lineal y continua. Como $T(D_1 \oplus D_2 \oplus ... \oplus D_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i D_i$, del Lema 7.4 y Lema 7.5 sale que $\sum_{i=1}^n \lambda_i D_i$ tiene la propiedad (C). ∎

Proposición 7.7. *Sean X un espacio de Banach y D un subconjunto convexo cerrado no-vacío de X con la propiedad (C). Entonces $\overline{[D]}$ tiene la propiedad (C).*

Demostración. Sea $\Lambda := \bigcup_{n\geq 1}\{\mathbb{Q}^n \cap B(\ell_1(n))\}$, es decir, Λ es el colectivo de todas la n-uplas $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{Q}^n$ tales que $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1,\ n \geq 1$. Es claro que $|\Lambda| = \aleph_0$. Por cada $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \Lambda$ definimos M_λ como

$$M_\lambda := \{\sum_{i=1}^n \lambda_i d_i : d_i \in D, i = 1, ..., n\}.$$

Para cada $\lambda \in \Lambda$, M_λ es un subconjunto convexo no-vacío de X con la propiedad (C) por el Corolario 7.6. A continuación observemos que el colectivo $\{mM_\lambda : m \in \mathbb{N}, \lambda \in \Lambda\}$ es contable, todos sus elementos son conjuntos convexos con la propiedad (C) y la unión de todos ellos es densa en $\overline{[D]}$. Por [93, Proposition 2] se concluye que $\overline{[D]}$ tiene la propiedad (C). ■

Cuestión 4. *Sea X un espacio de Banach y $K := (B(X^*), w^*)$. ¿Son equivalentes:*

(a) $X \in (C)$; (b) $C(K) \in (C)$?

Una secuencia básica $\mathcal{B} := \{u_\alpha : \alpha < \theta\}$ de un cierto espacio de Banach X se dice que es de tipo ℓ_1^+ sii $dist(0, \overline{\text{co}}(\mathcal{B})) > 0$, lo que es equivalente a decir que existen $z \in X^*$ y $d > 0$ tales que $\langle z, u_\alpha\rangle \geq d,\ \forall \alpha < \theta$.

Proposición 7.8. *Si X es un espacio de Banach tal que $X \in (C)$, entonces X carece de secuencias básicas incontables de tipo ℓ_1^+. En particular X carece de copias de $\ell_1(\aleph_1)$.*

Demostración. En efecto, supongamos que existiera en X una secuencia básica $\mathcal{B} := \{u_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de tipo ℓ_1^+. Sean $C_\beta := \overline{\text{co}}(\{u_\alpha : \beta \leq \alpha < \omega_1\}),\ \forall \beta < \omega_1$. Es claro que la familia de convexos cerrados $\{C_\beta : \beta < \omega_1\}$ tiene intersecciones contables no vacías y, sin embargo, $\bigcap_{\beta<\omega_1} C_\beta = \emptyset$ por ser $\mathcal{B}$ una secuencia básica. Hemos llegado a una contradicción, que prueba la proposición. ■

7.3. La propiedad (C) y la topología $\mathcal{T}_{\aleph_0}$

Veamos la estrecha relación que guardan los conjuntos con la propiedad (C) y la topología $\mathcal{T}_{\aleph_0}$.

Proposición 7.9. *Sean X un espacio de Banach, Y un subespacio cerrado de X^* con la propiedad (C) de Corson y $i : Y \to X^*$ la inclusión canónica. Entonces*

(1) Y es cerrado en $(X^*, \mathcal{T}_{\aleph_0})$.

(2) $Y^* = i^*(X_{\aleph_0})$, $\mathcal{T}_{\aleph_0} \upharpoonright Y = w \upharpoonright Y$ y $\overline{\text{co}}(B) = \overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(B)$ para todo subconjunto $B \subset Y$.

Demostración. (1) Sea $w_0 \in X^* \setminus Y$. Entonces existen $\varphi_0 \in S(X^{**}) \cap Y^\perp$ y un número real b tales que $\langle \varphi_0, w_0 \rangle > b > 0$. Sea

$$U := \{\varphi \in B(X^{**}) : \langle \varphi, w_0 \rangle \geq b\} \text{ y } V := \{x \in B(X) : \langle w_0, x \rangle \geq b\}.$$

Claramente $\varphi_0 \in U = \overline{V}^{w^*}$ y $0 = i^*(\varphi_0) \in i^*(U) = \overline{i^*(V)}^{w^*} \subset B(Y^*)$. Como $Y \in (C)$, existe una familia contable $\{x_n : n \geq 1\} \subset V$ tal que $0 \in \overline{\{i^*(x_n) : n \geq 1\}}^{w^*}$ (ver [93, p. 147]). Sea $T : \ell_1 \to X$ el operador continuo tal que $T(e_n) = x_n$, donde $\{e_n : n \geq 1\}$ es la base canónica de ℓ_1. Puesto que $\overline{\{i^*(x_n) : n \geq 1\}}^{w^*} = i^* \circ T^{**}\big(\overline{\{e_n : n \geq 1\}}^{w^*}\big)$, existe $\eta_0 \in \overline{\{e_n : n \geq 1\}}^{w^*} \subset B(\ell_\infty^*)$ tal que $i^* \circ T^{**}(\eta_0) = 0$.

Aserto. $T^{**}\eta_0 \in X_{\aleph_0} \cap Y^\perp$ y $\langle T^{**}\eta_0, w_0 \rangle \geq b > 0$.

En efecto, puesto que $i^* \circ T^{**}(\eta_0) = 0$, entonces $T^{**}\eta_0 \in Y^\perp$. Además $T^{**}\eta_0 \in X_{\aleph_0}$ porque

$$T^{**}\eta_0 \in T^{**}\big(\overline{\{e_n : n \geq 1\}}^{w^*}\big) = \overline{\{Te_n : n \geq 1\}}^{w^*} = \overline{\{x_n : n \geq 1\}}^{w^*}.$$

Finalmente, como $\langle w_0, x_n \rangle \geq b > 0$, $\forall n \geq 1$, y $T^{**}\eta_0 \in \overline{\{x_n : n \geq 1\}}^{w^*}$, obtenemos que $\langle T^{**}\eta_0, w_0 \rangle \geq b > 0$.

Por tanto $w_0 \notin \overline{Y}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}$ y esto prueba que Y es $\mathcal{T}_{\aleph_0}$-cerrado.

(2) Fijemos $z \in B(Y^*)$. Puesto que

$$B(Y^*) = i^*(B(X^{**})) = i^*(\overline{B(X)}^{w^*}) = \overline{i^*(B(X))}^{w^*}$$

y $Y \in (C)$, existe una familia contable $A_z \subset B(X)$ tal que $z \in \overline{i^*(A_z)}^{w^*}$. Puesto que $\overline{i^*(A_z)}^{w^*} = i^*(\overline{A_z}^{w^*})$ y $\overline{A_z}^{w^*} \subset X_{\aleph_0}$, obtenemos que $z \in i^*(X_{\aleph_0})$ y, finalmente, $Y^* = i^*(X_{\aleph_0})$. De este hecho sale que $\mathcal{T}_{\aleph_0} \restriction Y = w \restriction Y$. Además, $\overline{\text{co}}(B) = \overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(B)$ para todo subconjunto $B \subset Y$, porque Y es $\mathcal{T}_{\aleph_0}$-cerrado. ■

Proposición 7.10. *Sean X un espacio de Banach y D un subconjunto convexo cerrado de X^* con la propiedad (C) de Corson. Entonces*

(1) D es cerrado en $(X^*, \mathcal{T}_{\aleph_0})$.

(2) $\mathcal{T}_{\aleph_0} \restriction D = w \restriction D$ y $\overline{\text{co}}(B) = \overline{\text{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(B)$ para todo subconjunto $B \subset D$.

Demostración. Por la Proposición 7.7 el subespacio cerrado $\overline{[D]}$ posee la propiedad (C). Aplicando la Proposición 7.9 obtenemos (1) y (2). ■

7.4. La propiedad (C) y los contornos

En esta Sección damos resultados de tipo cuantitativo y aplicaciones a los subespacios cerrados de X^* con la propiedad (C) de Corson.

Proposición 7.11. *Sean X un espacio de Banach y K un subconjunto w^*-compacto de X^*.*

(1) Si B_0 es un contorno de K tal que $Y := \overline{[B_0]} \in (C)$ y K carece de una w^*-$\mathbb{N}$-familia (en particular, si K carece de una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$), entonces $\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K) = \overline{\mathrm{co}}(B_0) \subset Y$ y además $\overline{\mathrm{co}}(B) = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(H)$ para todo subconjunto w^*-compacto H de Y y todo contorno B de H.

(2) Si B_0 es un contorno de K tal que $Y := \overline{[B_0]} \in (C)$ y ó bien B_0 es un $w^*\mathcal{KA}$-contorno de K ó bien $B_0 = Ext(K)$, entonces $\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K) = \overline{\mathrm{co}}(B_0) \subset Y$ y además $\overline{\mathrm{co}}(B) = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(H)$ para todo subconjunto w^*-compacto H de Y y todo contorno B de H.

Demostración. (1) Por la Proposición 7.9 se tiene que $\overline{\mathrm{co}}(B_0) = \overline{\mathrm{co}}^{\mathcal{T}_{\aleph_0}}(B_0)$. Por tanto, $\overline{\mathrm{co}}(B_0) = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$ por el Corolario 5.11, de donde $\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K) \subset Y = \overline{[B_0]} \in (C)$. De aquí que $Y = \overline{[K]}$ y por tanto Y es un subespacio $w^*\mathcal{KA}$ de X^*. Puesto que $K \in (P)$ (es decir, K carece de una w^*-$\mathbb{N}$-familia) también $Y \in (P)$ (ver [62, Prop. 3.8]). Por tanto podemos aplicar el mismo argumento anterior a todo subconjunto w^*-compacto H de Y y todo contorno B de H.

(2) En primer término, todo subconjunto convexo con la propiedad (C) carece de una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$ (un fácil ejercicio). Por tanto, B_0 carece de una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$, lo que por Proposición 6.5 y Proposición 6.9 implica que K carece de una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$. Ahora basta aplicar (1). ∎

Proposición 7.12. *Sean X un espacio de Banach, Y un subespacio cerrado de X^* con la propiedad (C) de Corson, F un subconjunto convexo de Y, K un subconjunto w^*-compacto de X^* y B un contorno de K. Entonces*

(1) Si $B = Ext(K)$ ó B es $\mathcal{K}_\sigma$, se verifica $DIST(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), F) \leq 3DIST(B, F)$.

(2) Si F carece de una pre-w^*-$\mathbb{N}$-familia, entonces $DIST(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), F) \leq 7DIST(B, F)$.

Demostración. (1) Supongamos que existen dos números reales $0 < a, b$ tales que

$$DIST(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), F) > b > 3a > 3DIST(B, F).$$

Sea $w_0 \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$ tal que $dist(w_0, F) > b$. Por el Teorema de separación de Hahn-Banach existe $\varphi_0 \in S(X^{**})$ de modo que $\inf\langle \varphi_0, w_0 - F\rangle > b$. Sea $0 < \epsilon$ tal que $b + \epsilon < \inf\langle \varphi_0, w_0 - F\rangle$ y definamos

$$U := \{\varphi \in B(X^{**}) : \langle \varphi, w_0\rangle \geq \langle \varphi_0, w_0\rangle - \epsilon\} \text{ y}$$
$$V := \{x \in B(X) : \langle w_0, x\rangle \geq \langle \varphi_0, w_0\rangle - \epsilon\}.$$

Observemos que $\varphi_0 \in U = \overline{V}^{w^*}$. Si $i : Y \to X^*$ es la inclusión canónica, entonces $i^* : X^{**} \to Y^*$ satisface $i^*(\varphi_0) \in i^*(U) = \overline{i^*(V)}^{w^*} \subset B(Y^*)$. Puesto que Y tiene la propiedad (C), existe una secuencia $\{x_n : n \geq 1\} \subset V$ tal que $i^*(\varphi_0) \in \overline{\{i^*(x_n) : n \geq 1\}}^{w^*}$ en la w^*-topología $\sigma(Y^*, Y)$. Sea $T : \ell_1(\mathbb{N}) \to X$ el operador continuo tal que $T(e_n) = x_n$, donde $\{e_n : n \geq 1\}$ es la base canónica de $\ell_1(\mathbb{N})$. Observemos que $\|T\| \leq 1$ y que su adjunto $T^* : X^* \to \ell_\infty(\mathbb{N})$ satisface $T^*(u) = (u(x_n))_{n\geq 1}$, $\forall u \in X^*$. Como Y carece de una copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$ (porque Y tiene la propiedad (C) y $\ell_1(\mathfrak{c})$ no la tiene), $T^*(Y)$ carece también de una copia (y de una base) de $\ell_1(\mathfrak{c})$. Sean $\tilde{F} := T^*(F)$, $T^*(K) =: H \subset B(\ell_\infty)$ $B_0 := T^*(B)$ y $v_0 := T^*(w_0)$. Claramente $v_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$, B_0 es un contorno de H y H es un subconjunto w^*-compacto de $B(\ell_\infty)$ tal que ó bien $Ext(H) \subset B_0$, si $B = Ext(K)$, ó bien B_0 es un $\mathcal{K}_\sigma$, si B lo es. En particular, $DIST(B_0, \tilde{F}) \leq DIST(B, F) < a$ porque $\|T^*\| \leq 1$. Puesto que $i^*(\varphi_0) \in \overline{\{i^*(x_n) : n \geq 1\}}^{w^*} = i^* \circ T^{**}(\overline{\{e_n : n \geq 1\}}^{w^*})$, existe $\eta_0 \in \overline{\{e_n : n \geq 1\}}^{w^*} \subset B(\ell_\infty^*)$ tal que $i^* \circ T^{**}(\eta_0) = i^*(\varphi_0)$.

<u>**Aserto.**</u> $\text{ínf}\langle \eta_0, v_0 - \tilde{F}\rangle \geq b$ y $dist(v_0, \tilde{F}) \geq b$.

En efecto, es claro que $T^{**}(\eta_0) \in \overline{\{x_n : n \geq 1\}}^{w^*}$ en $B(X^{**})$. Por tanto

(i) $\langle T^{**}(\eta_0), w_0\rangle \geq \langle \varphi_0, w_0\rangle - \epsilon$ porque $\langle w_0, x_n\rangle \geq \langle \varphi_0, w_0\rangle - \epsilon$, $\forall n \geq 1$.

(ii) Si $c \in F$, se tiene que

$$\langle T^{**}(\eta_0), c\rangle = \langle T^{**}(\eta_0), i(c)\rangle = \langle i^* \circ T^{**}(\eta_0), c\rangle = \langle i^*(\varphi_0), c\rangle = \langle \varphi_0, c\rangle.$$

Por consiguiente, para todo $c \in F$ se verifica

$$\begin{aligned}\langle \eta_0, v_0 - T^*c\rangle = \langle \eta_0, T^*w_0 - T^*c\rangle = \langle T^{**}(\eta_0), w_0 - c\rangle \geq \langle \varphi_0, w_0\rangle - \epsilon - \langle \varphi_0, c\rangle = \\ = \langle \varphi_0, w_0 - c\rangle - \epsilon > b + \epsilon - \epsilon = b,\end{aligned}$$

y esto prueba el Aserto.

Por otra parte, como $\tilde{F} \subset T^*(Y)$, $\tilde{F}$ carece de una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$. Así que del Corolario 6.16 deducimos que $dist(v_0, \tilde{F}) < 3a < b$. Obtenemos pues una contradicción que prueba que $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), F) \leq 3DIST(B, F)$.

(2) La prueba de esta parte es análoga a la de la parte (1), teniendo en cuenta que ahora se usa la Proposición 6.19 en lugar del Corolario 6.16. Pasemos a dicha prueba. Suponemos que existen dos números reales $0 < a, b$ tales que

$$DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), F) > b > 7a > 7DIST(B, F).$$

A continuación hacemos la misma construcción que en la parte (1) y definimos $\tilde{F} := T^*(F)$, $T^*(K) =: H \subset B(\ell_\infty)$, $B_0 := T^*(B)$ y $v_0 := T^*(w_0)$. Observemos que $\tilde{F}$ carece de una pre-w^*-$\mathbb{N}$-familia porque F también carece de ella. Claramente $v_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$ y H es un subconjunto w^*-compacto de $B(\ell_\infty)$ tal que B_0 es un contorno de H y $DIST(B_0, \tilde{F}) \leq DIST(B, F) < a$ porque $\|T^*\| \leq 1$. Puesto que $i^*(\varphi_0) \in \overline{\{i^*(x_n) : n \geq 1\}}^{w^*} = i^* \circ T^{**}(\overline{\{e_n : n \geq 1\}}^{w^*})$, existe $\eta_0 \in \overline{\{e_n : n \geq 1\}}^{w^*} \subset B(\ell_\infty^*)$ tal que $i^* \circ T^{**}(\eta_0) = i^*(\varphi_0)$.

Aserto. $\inf\langle \eta_0, v_0 - \tilde{F}\rangle \geq b$ y $dist(v_0, \tilde{F}) \geq b$..

La prueba de este Aserto es la misma que la del Aserto de la parte (1).

Por otro lado, de la Proposición 6.19 se deduce que $dist(v_0, \tilde{F}) < 7a < b$. Obtenemos una contradicción que prueba que $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), F) \leq 7DIST(B, F)$. ■

En la Proposición 6.2 hemos dado un resultado "cuantitativo", que relaciona las distancias $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C)$ y $DIST(B, C)$, cuando K es un subconjunto w^*-compacto de un espacio de Banach dual X^*, B es un contorno de K y C es un subconjunto convexo de un subespacio cerrado $Y \subset X^*$ con bola unidad dual $B(Y^*)$ w^*-angélica. A continuación damos algunas consecuencias de la Proposición 6.2. Recordemos que un espacio de Banach Y posee la propiedad (C) siempre que la bola dual $B(Y^*)$ sea w^*-angélica (ver [93, p. 147]).

Corolario 7.13. *(Ver [18, Theorem 5.1]) Sean X un espacio de Banach, $T \subset X^*$ un subconjunto w-$\mathcal{CD}$ (resp., w-$\mathcal{KA}$) y B_0 un contorno de $B(X^*)$ tal que $B_0 \subset T + \epsilon B(X^*)$ con $0 \leq \epsilon < 1$. Entonces $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) = \overline{\text{co}}(B)$ para todo subconjunto w^*-compacto K de X^* y todo contorno B de K. Además X^* es w-$\mathcal{CD}$ (resp., w-$\mathcal{KA}$).*

Demostración. Sea $Y = \overline{[T]}^{\|\cdot\|}$. Es bien conocido que Y es un subespacio w-$\mathcal{CD}$ (resp., w-$\mathcal{KA}$) de X^*. Obviamente $DIST(B_0, Y) \leq \epsilon < 1$. Afirmamos que $Y = X^*$. En efecto, supongamos que $Y \neq X^*$. Entonces se tiene que $DIST(B(X^*), Y) = 1$. Por otra parte, $DIST(B(X^*), Y) = DIST(B_0, Y) < 1$ por la Proposición 6.2 y porque la bola dual $B(Y^*)$ de un espacio w-$\mathcal{CD}$ (resp., w-$\mathcal{KA}$) es w^*-angélica. Hemos llegado a una contradicción que prueba que $Y = X^*$. Finalmente $B(X^*) = \overline{\text{co}}(B)$ para todo contorno B de $B(X^*)$ también por la Proposición 6.2. ■

Corolario 7.14. *Sean X un espacio de Banach, K un subconjunto w^*-compacto de X^*, B_0 un contorno de K y T un subconjunto w-CD de X^* tales que $B_0 \subset T$. Entonces $\overline{\text{co}}(B_0) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ y además para todo subconjunto w^*-compacto H de $\overline{[T]}^{\|\cdot\|}$ y todo contorno B_0 de H se verifica que $\overline{\text{co}}(B_0) = \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$.*

Demostración. Sea $Y := \overline{[T]}^{\|\cdot\|}$. Es bien conocido que Y es un subespacio w-$\mathcal{CD}$ ó espacio de Vasak y que la bola dual $(B(Y^*), w^*)$ es angélica. La demostración se termina aplicando la Proposición 6.2. ■

A continuación damos otro resultado en la misma línea que la Proposición 6.2. Sea H un espacio topológico Hausdorff completamente regular y sea $C_b(H)$ el espacio de Banach de las funciones reales acotadas continuas sobre H con la norma del supremo. Consideraremos a $C_b(H)$ como un subespacio cerrado de $(\ell_\infty(H), \|\cdot\|_\infty)$. Si $k \in H$ sea $\mathcal{V}^k$ la familia de los entornos abiertos de k en H. Definimos la oscilación de $Osc(f, k)$ de $f : H \to \mathbb{R}$ en $k \in H$ como:

$$Osc(f, k) = \lim_{V \in \mathcal{V}^k} \big(\sup\{f(i) - f(j) : i, j \in V\}\big).$$

La oscilación de f en H es:

$$Osc(f) = \sup\{Osc(f,k) : k \in H\}.$$

Si H es un espacio topológico normal y $f \in \ell_\infty(H)$, se verifica que $dist(f, C_b(H)) = \frac{1}{2}Osc(f)$ (ver [9, Proposition 1.18, p. 23]). Decimos que un espacio topológico H pertenece a la clase $\mathfrak{F}$ (abreviadamente, $H \in \mathfrak{F}$) si para todo $A \subset H \times H$ y todo $h \in H$, con $(h,h) \in \overline{A}$, existen $d \in H$ y una secuencia $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ en A tales que $\alpha_n \to (d,d)$ cuando $n \to \infty$. Por ejemplo, H está en la clase $\mathfrak{F}$ en los siguientes casos: (1) H es metrizable; (2) H satisface el 1º Axioma; (3) $H \times H$ es Fréchet-Urysohn.

Proposición 7.15. *Sean H un espacio topológico normal con $H \in \mathfrak{F}$, $W \subset \ell_\infty(H)$ un subconjunto w^*-compacto y B un contorno de W. Entonces*

$$DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(W), C_b(H)) = DIST(B, C_b(H)).$$

Demostración. Supongamos que existen un subconjunto w^*-compacto $W \subset B(\ell_\infty(H))$, un contorno B de W y dos números reales $a, b > 0$ tales que

$$DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(W), C_b(H)) > b > a > DIST(B, C_b(H)).$$

Elegimos $f_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(W)$ con $dist(f_0, C_b(H)) > b$. Entonces existe un punto $k_0 \in H$ tal que $\frac{1}{2}Osc(f_0, k_0) > b$. Así que existen $\epsilon > 0$ y, para todo $V \in \mathcal{V}^{k_0}$, dos puntos $i_V, j_V \in V$ tales que

$$f_0(i_V) - f_0(j_V) > 2b + \epsilon.$$

En particular, $(k_0, k_0) \in \overline{\{(i_V, j_V) : V \in \mathcal{V}^{k_0}\}}$. Puesto que $H \in \mathfrak{F}$, existen una secuencia $\{(i_n, j_n) : n \geq 1\} \subset \{(i_V, j_V) : V \in \mathcal{V}^{k_0}\}$ y un punto $h_0 \in H$ tales que $(i_n, j_n) \to (h_0, h_0)$. Para todo $n \geq 1$, sea $T_n : \ell_\infty(H) \to \mathbb{R}$ tal que $T_n(f) = f(i_n) - f(j_n)$, para todo $f \in \ell_\infty(I)$. Claramente T_n es una aplicación lineal, que además es $\|\cdot\|$-continua y w^*-continua con $\|T_n\| \leq 2$. Aún más, se tiene que $T_n(f_0) > 2b + \epsilon$, $\forall n \geq 1$, y $\lim_{n\to\infty} T_n(f) = 0$ para todo $f \in C_b(H)$.

Aserto. Para todo $\beta \in B$ se tiene que $\limsup_{n\to\infty} T_n(\beta) < 2a$.

En efecto, fijemos $\beta \in B$ y, como $DIST(B, C_b(H)) < a$, elijamos $f \in C_b(H)$ tal que $\|\beta - f\| < a$. Se verifica que

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} T_n(\beta) &= \limsup_{n\to\infty}(T_n(f) + T_n(\beta - f)) = \\ &= \lim_{n\to\infty} T_n(f) + \limsup_{n\to\infty} T_n(\beta - f) < 2a,\end{aligned}$$

en donde hemos aplicado que $\lim_{n\to\infty} T_n(f) = 0$, $\|T_n\| \leq 2$ y $\|\beta - f\| < a$.

Por la desigualdad de Simons [102, 2.Lemma] se tiene que

$$\sup_{\beta\in B}[\limsup_{n\to\infty} T_n(\beta)] \geq \inf[\sup_{k\in\overline{\text{co}}^{w^*}(W)} g(k) : g \in co((T_n)_{n\geq 1})].$$

En consecuencia existe cierto $g \in co((T_n)_{n\geq 1})$, digamos $g = \sum_{n=1}^{p} \lambda_n T_n$ con $\lambda_n \geq 0$ y $\sum_{n=1}^{p} \lambda_n = 1$, tal que $\sup_{k\in\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(W)} g(k) < 2a + \epsilon$. Por otra parte, como $f_0 \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(W)$ y $T_n(f_0) = f_0(i_n) - f_0(j_n) > 2b + \epsilon$ se tiene que

$$\sup_{k\in\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(W)} g(k) \geq \sum_{n=1}^{p} \lambda_n T_n(f_0) > 2b + \epsilon,$$

de donde obtenemos que $2a + \epsilon > 2b + \epsilon$, una contradicción que completa la prueba. ■

Veamos las nociones de *espacio representable y universalmente representable*, que fueron introducidas y estudiadas en [49] por Godefroy y Talagrand. Un espacio de Banach X es *representable* si es isomorfo a un subespacio $w^*\mathcal{KA}$ de ℓ_∞. Un espacio de Banach X es *universalmente representable* si es representable y todo subespacio Y de ℓ_∞ isomorfo a X es $w^*\mathcal{KA}$ en ℓ_∞. El Lema 6.1 permite extender el Théoréme 6 de [49] de la siguiente manera.

Proposición 7.16. *Sean Y un espacio de Banach separable y X un subespacio cerrado $w^*\mathcal{KA}$ del dual Y^*. Los siguientes asertos son equivalentes:*

(a) X es universalmente representable.

(b) X carece de una copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$.

(c) $(B(X^*), w^*)$ es un espacio angélico.

(d) X es universalmente (P), es decir si Z es un subespacio de un espacio de Banach dual V^* y Z es isomorfo a X, entonces Z tiene la propiedad (P) en V^*.

(e) $X \in (P)$ en Y^*.

(f) $X \in (C)$.

Demostración. La equivalencia $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c)$ es el Théoréme 6 de [49]. $(c) \Rightarrow (f)$ por [93, p. 147] y $(f) \Rightarrow (b)$ porque todo espacio X con la propiedad (C) carece copias de $\ell_1(\mathfrak{c})$.

$(b) \Rightarrow (d)$. Supongamos que X carece de una copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$. Entonces, si Z es isomorfo a X y subespacio de cierto espacio dual V^*, $Z \in (P)$ en V^* porque Z no posee una w^*-$\mathbb{N}$-familia en V^*.

$(d) \Rightarrow (e)$ es obvio y $(e) \Rightarrow (c)$ sale de Lema 6.1. ■

Si X es un espacio de Banach. denotaremos por $NA(X)$ al conjunto de los elementos de X^* que alcanzan su norma sobre $B(X)$. En [8] se prueban los dos siguientes resultados.

Lema 7.17. *Sean X un espacio de Banach que carece de una copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$, $J : X \to X^{**}$ la inclusión canónica y M un subespacio cerrado y separable de $NA(X)$ tal que $i^* \circ J(B(X))$ contiene un contorno w^*-analítico de $B(M^*)$, siendo $i : M \to X^*$ la inclusión canónica. Entonces $i^* \circ J : X \to M^*$ es un 1-cociente canónico.*

Demostración. Ver [8, Lemma 2.10]. ∎

Proposición 7.18. *Sean X un espacio de Banach, $J : X \to X^{**}$ la inclusión canónica y M un subespacio separable cerrado infinito dimensional de $NA(X)$ tal que $i^* \circ J(B(X))$ contiene un contorno w^*-analítico de $B(M^*)$, siendo $i : M \to X^*$ la inclusión canónica. Entonces X posee un 1-cociente infinito dimensional, que es isomorfo a un espacio dual.*

Demostración. Ver [8, Proposition 2.14]. ∎

Los anteriores resultados se pueden generalizar como sigue.

Proposición 7.19. *Sean X un espacio de Banach sin copia isomorfa de $\ell_1(\mathfrak{c})$, $J : X \to X^{**}$ la inclusión canónica y M un subespacio cerrado de X^* tal que, si $i : M \to X^*$ es la inclusión canónica, $i^* \circ J(B(X))$ contiene*

(i) o bien un contorno B de $B(M^*)$, que es $w^*\mathcal{KA}$;

(ii) o bien $Ext(B(M^*))$.

Entonces $i^* \circ J : X \to M^*$ es un 1-cociente canónico.

Demostración. En ambos casos es claro que $M \subset NA(X)$. Sea $B \subset i^* \circ J(B(X))$ un contorno $w^*\mathcal{KA}$ de $B(M^*)$ ó $B = Ext(B(M^*))$. Claramente, B no posee una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$, porque X no tiene copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$.

Aserto. $\overline{\text{co}}(B) = B(M^*)$.

En efecto, supongamos que $\overline{\text{co}}(B) \neq B(M^*)$. Entonces:

(a) Sea B un contorno $w^*\mathcal{KA}$ de $B(M^*)$. Por la Proposición 5.10 existe una w^*-$\mathbb{N}$-familia dentro de $B(M^*)$. Por la Proposición 6.5 también existe una w^*-$\mathbb{N}$-familia dentro de B. En consecuencia, B posee una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$.

(b) Sea $B = Ext(B(M^*))$. Por la Proposición 6.8 el conjunto B posee una w^*-$\mathbb{N}$-familia y, por tanto, una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$.

Hemos llegado a una contradicción que prueba el Aserto.

Finalmente, observemos que el hecho $\overline{\text{co}}(B) = B(M^*)$ implica que $i^* \circ J : X \to M^*$ es un 1-cociente. ∎

Proposición 7.20. *Sean X un espacio de Banach, $J : X \to X^{**}$ la inclusión canónica y M un subespacio cerrado infinito dimensional de X^* tal que, si $i : M \to X^*$ es la inclusión canónica, $i^* \circ J(B(X))$ contiene*

(i) o bien un contorno B de $B(M^*)$, que es $w^*\mathcal{KA}$;

(ii) o bien $Ext(B(M^*))$.

Entonces X posee un 1-cociente infinito dimensional, que es isomorfo a un espacio dual.

Demostración. Si X no posee una copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$, aplicamos la Proposición 7.19. Si X contiene una copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$, entonces ℓ_∞ es cociente de X. ∎

Si $M \subset X^*$, decimos que X posee una M-w^*-$\mathbb{N}$-familia si X, como parte de X^{**}, posee una w^*-$\mathbb{N}$-familia asociada a una secuencia $\{z_n : n \geq 1\} \subset M \cap B(X^*)$. El siguiente resultado es más general que los dos anteriores.

Proposición 7.21. *Sean X un espacio de Banach, $J : X \to X^{**}$ la inclusión canónica y M un subespacio cerrado de X^* tal que, si $i : M \to X^*$ es la inclusión canónica, $i^* \circ J(B(X))$ contiene*

(i) o un contorno B de $B(M^*)$, que es $w^*\mathcal{KA}$;

(ii) o bien $Ext(B(M^*))$.

Entonces, si X no posee una M-w^*-$\mathbb{N}$-familia, $i^* \circ J : X \to M^*$ es un 1-cociente canónico.

Demostración. Sea $B \subset i^* \circ J(B(X))$ un contorno $w^*\mathcal{KA}$ de $B(M^*)$ ó $B = Ext(B(M^*))$. Claramente, B no posee una w^*-$\mathbb{N}$-familia, porque X no tiene una M-w^*-$\mathbb{N}$-familia.

Aserto. $\overline{\text{co}}(B) = B(M^*)$.

En efecto, supongamos que $\overline{\text{co}}(B) \neq B(M^*)$. Entonces:

(a) Sea B un contorno $w^*\mathcal{KA}$ de $B(M^*)$. Por la Proposición 5.10 existe una w^*-$\mathbb{N}$-familia dentro de $B(M^*)$. Por la Proposición 6.5 también existe una w^*-$\mathbb{N}$-familia dentro de B, que se puede "alzar " hasta X, porque $B \subset i^* \circ J(B(X))$. En consecuencia, X posee una M-w^*-$\mathbb{N}$-familia, lo que no puede ser.

(b) Sea $B = Ext(B(M^*))$. Por la Proposición 6.8 el conjunto B posee una w^*-$\mathbb{N}$-familia y, por tanto, X posee una M-w^*-$\mathbb{N}$-familia, lo que no puede ser.

Hemos llegado a una contradicción que prueba el Aserto.

Finalmente, observemos que el hecho $\overline{\text{co}}(B) = B(M^*)$ implica que $i^* \circ J : X \to M^*$ es un 1-cociente. ∎

Proposición 7.22. *Sean X un espacio de Banach, $J : X \to X^{**}$ la inclusión canónica y M un subespacio cerrado de X^* tal que*

(a) M no posee una copia de ℓ_1.

(b) Si $i : M \to X^*$ es la inclusión canónica, $i^* \circ J(B(X))$ contiene

(b1) ó bien un contorno B de $B(M^*)$, que es $w^*\mathcal{CD}$;

(b2) ó bien $Ext(B(M^*))$.

Entonces $i^* \circ J : X \to M^*$ es un 1-cociente canónico.

Demostración. Sea $B \subset i^* \circ J(B(X))$ un contorno $w^*\mathcal{CD}$ de $B(M^*)$ ó $B = Ext(B(M^*))$. Necesariamente $\overline{\text{co}}(B) = B(M^*)$ pues, de no ser así, del Corolario 5.12 ó de la Proposición

6.8 deduciríamos que M contiene una copia de ℓ_1, que no es el caso. Finalmente observemos que el hecho $\overline{\text{co}}(B) = B(M^*)$ implica que $i^* \circ J : X \to M^*$ es un 1-cociente. ■

Corolario 7.23. *Sean X un espacio de Banach, $J : X \to X^{**}$ la inclusión canónica, M un subespacio separable cerrado de X^* tal que M no posee una copia de ℓ_1 y $i : M \to X^*$ la inclusión canónica.*

(A) Si $i^* \circ J(B(X))$ contiene un contorno B de $B(M^*)$, $i^* \circ J : X \to M^*$ es un 1*-cociente.*

(B) Si $M \subset NA(X)$, $i^* \circ J : X \to M^*$ es un 1*-cociente.*

Demostración. (A) Todo subconjunto de $B(M^*)$ es $w^*\mathcal{CD}$ porque $(B(M^*), w^*)$ es métrico compacto. Ahora basta aplicar la Proposición 7.22.

(B) Como $M \subset NA(X)$, $B := i^* \circ J(B(X))$ es un contorno de $B(M^*)$. Ahora basta aplicar (A). ■

Capítulo 8

El problema de la distancia $DIST(B,X)$ cuando B es un contorno de $B(X^{**})$

8.1. Introducción

En este capítulo vamos a considerar y resolver el siguiente problema. Sea X un espacio de Banach, K un subconjunto w^*-compacto del bidual X^{**} y B un contorno de K. Sabemos que, en general, $\overline{\text{co}}(B) \neq \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$. Por tanto, dado un subconjunto convexo C de X^{**}, puede ocurrir que $DIST(B,C) < DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K),C)$ y en particular $DIST(B,X) < DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K),X)$. Sabemos (ver [51]) que $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K),X) \leq 5DIST(\overline{\text{co}}(K),X)$, para todo subconjunto w^*-compacto $K \subset X^{**}$, y que existen (ver [55, Proposition 10],[53, Proposition 3.1]) espacios de Banach X y subconjuntos w^*-compactos $K \subset X^{**}$ tales que $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K),X) = 3DIST(\overline{\text{co}}(K),X) > 0$.

Cascales, Kalenda y Spurny probaron [15] que $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K),X) \leq 2\cdot DIST(B,X)$ para todo subconjunto w^*-compacto $K \subset X^{**}$ con $K \cap X$ w^*-denso en K y todo contorno $B \subset K$. Así que $DIST(B,X) \geq \frac{1}{2}DIST(B(X^{**}),X)$ para todo contorno B de $B(X^{**})$ y pudiera ocurrir que $DIST(B,X) < DIST(B(X^{**}),X)$ para algún espacio de Banach X y algún contorno B de $B(X^{**})$. Observemos que, claramente, $DIST(B(X^{**}),X) = 1$, si X no es reflexivo, que $DIST(B(X^{**}),X) = 0$, si X es reflexivo, y que siempre $0 \leq DIST(B,X) \leq DIST(B(X^{**}),X)$. ¿Existe, pues, algún espacio de Banach X tal que $0 \leq DIST(B,X) < DIST(B(X^{**}),X)$ para algún contorno B de $B(X^{**})$? Vamos a ver que la respuesta a esta pregunta es negativa. De hecho, probamos a continuación que, si X es un espacio de Banach y B un contorno de $B(X^{**})$, se verifica que $DIST(B,X) = DIST(B(X^{**}),X)$. Este "buen" comportamiento de los contornos B de $B(X^{**})$ no debe sorprendernos pues, en muchos aspectos, el comportamiento de dichos contornos B es similar al de la bola $B(X^{**})$ completa. Por ejemplo, en [90] se prueba que, si D es un subconjunto acotado de X, D es w-compacto -es decir, D es $\sigma(X,B(X^*))$ compacto- si y sólo si D es $\sigma(X,B)$-compacto para algún contorno B de $B(X^*)$.

8.2. $DIST(B,X) = DIST(B(X^{**}),X)$ para todo contorno B de $B(X^{**})$

Un espacio de Banach X tiene la propiedad de Grothendieck (abrev., X es Grothendieck) si toda secuencia w^*-nula de X^* es w-nula. Los siguientes hechos son elementales:

(1) Todo espacio reflexivo es Grothendieck.

(2) Si X es Grothendieck y X^* carece de una copia de ℓ_1, entonces X es reflexivo.

(3) Todo cociente de un espacio Grothendieck es Grothendieck, pero no lo son los subespacios, en general.

(4) Un espacio X es Grothendieck y tiene bola dual $(B(X^*), w^*)$ angélica sii X es reflexivo.

(5) Un espacio de Grothendieck X no puede tener como cociente un espacio no reflexivo Y tal que $(B(Y^*), w^*)$ sea angélica.

Un espacio de Banach X *contiene una copia asintóticamente isométrica de* $\ell_1(\mathbb{N})$ si existen una secuencia $\{a_n : n \geq 1\} \subset B(X)$ y una secuencia $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,1]$ convergiendo a 1 tales que, para toda secuencia finita $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\mathbb{R}$, se satisface la siguiente desigualdad:

$$\sum_{1\leq i\leq n} \delta_i|\lambda_i| \leq \Big\| \sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i a_i \Big\|.$$

Lema 8.1. *Para todo espacio de Banach X ocurre una de las siguientes alternativas:*

(I) X es reflexivo.

(II) X no es Grothendieck.

(III) X contiene una copia asintóticamente isométrica de $\ell_1(\mathbb{N})$.

Demostración. Supongamos que ni (I) ni (II) ocurren (es decir, X es Grothendieck no reflexivo) y probemos que X satisface (III). Razonamos por reducción al absurdo y suponemos que X no verifica (III). Por el Theorem 2 de [79] la bola dual $B(X^*)$ es w^***-bloque compacta**, es decir:

$(*)$ "Para toda secuencia $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $B(X^*)$ existen una secuencia $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ disjuntos dos a dos y una secuencia $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de números reales, con $\sum_{i\in F_n} |\lambda_i| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tal que, si $b_n := \sum_{i\in F_n} \lambda_i z_i$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w^*-converge a algún elemento b_0 de (necesariamente) $B(X^*)$".

Aserto. $B(X^*)$ carece de una copia de la base de ℓ_1.

En efecto, supongamos que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia en $B(X^*)$ equivalente a la base de ℓ_1. Es fácil ver que toda secuencia bloque normalizada de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base de ℓ_1. Por $(*)$ existe una secuencia bloque normalizada $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ extraída de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que w^*-converge a algún $b_0 \in B(X^*)$. Como X es Grothendieck, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w-converge a b_0, una contradicción pues $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base de ℓ_1. Esto prueba el Aserto.

Así que X es un espacio de Grothendieck tal que X^* carece de una copia de ℓ_1, de donde sale que X es reflexivo, una contradicción. ■

Corolario 8.2. *Si X es un espacio de Banach Grothendieck no reflexivo, para toda norma equivalente a la dada hay en X una copia asintóticamente isométrica de ℓ_1.*

Demostración. Es consecuencia inmediata del Lema 8.1. ■

Proposición 8.3. *Sea X un espacio de Banach que contiene una copia asintóticamente isométrica de $\ell_1(\mathbb{N})$ y sea B un contorno de $B(X^{**})$. Entonces existe $b \in B$ tal que $dist(b,X) = 1 = DIST(B(X^{**}),X)$.*

Demostración. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia en $B(X)$ asintóticamente isométrica a la base canónica de $\ell_1(\mathbb{N})$, asociada a la secuencia de coeficientes $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset (0,1]$, que converge a 1. Sea $g_n : X \to \mathbb{R}$ el funcional, que es la extensión de Hahn-Banach a todo X del funcional $\tilde{g}_n : \overline{[(a_i)]} \to \mathbb{R}$ tal que $\langle \tilde{g}_n, a_i\rangle = -\delta_i$, si $i < n$, y $\langle \tilde{g}_n, a_i)\rangle = \delta_i$, si $n \leq i$. Observemos que $\|g_n\| = 1$ porque trivialmente $g_n \in B(X^*)$ y además

$$\|g_n\| \geq \sup_{i\in\mathbb{N}}\langle g_n, a_i\rangle = \sup_{i\in\mathbb{N}} \delta_i = 1.$$

Sea $g \in B(X^*)$ un punto de w^*-acumulación de $\{g_n : n \geq 1\}$. Sea $h := \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} g_k - g$, que satisface trivialmente $\|h\| \leq 2$.

Aserto. $\|h\| = 2$.

En efecto, se tiene que

$$\|h\| \geq \sup_{i\in\mathbb{N}}\langle h, a_i\rangle = \sup_{i\in\mathbb{N}} \delta_i(\sum_{k<i} 2^{-k} - \sum_{k\geq i} 2^{-k} + 1) = 2.$$

Por tanto existe un punto $b \in B$ tal que $\langle b, h\rangle = 2$ y también $\langle b, g_n\rangle = 1$, $\forall n \geq 1$, y $\langle b, \tilde{g}\rangle = -1$. Sea $x \in X$. Si $\langle g, x\rangle \geq 0$ ó $\langle g, x\rangle \leq -2$, entonces $\|b - x\| \geq |\langle b - x, g\rangle| \geq 1$. En caso contrario $-2 < \langle x, g\rangle < 0$ y. por razones de w^*-densidad, existe cierto $m \in \mathbb{N}$ (dependiendo de x) tal que $-2 < \langle x, \tilde{g}_m\rangle < 0$. De aquí que $-3 < \langle x - b, \tilde{g}_m\rangle < -1$ y de nuevo $\|b - x\| \geq |\langle b - x, \tilde{g}_m\rangle| \geq 1$. Esto implica que la distancia $dist(b,X) = 1$ y termina la prueba. ■

En [32] se prueba que una copia isomorfa de ℓ_1 no necesariamente contiene una copia asintóticamente isométrica de ℓ_1. Sin embargo las copias isomorfas de $\ell_1(\mathfrak{c})$ sí la contiene como se ve a continuación.

Lema 8.4. *Sea X un espacio de Banach isomorfo a $\ell_1(\mathfrak{c})$. Entonces X contiene una copia asintóticamente isométrica de ℓ_1.*

Demostración. Sea $Y = (\ell_1, \|\cdot\|_1)$. Veamos que la bola $B(Y^{**})$ no es w^*-bloque compacta. En efecto, si lo fuese, como Y^* es Grothendieck, del Aserto de Lema 8.1 obtendríamos que Y^{**} carece de una copia de ℓ_1, lo que es falso. Puesto que X es isomorfo a $\ell_1(\mathfrak{c})$, existe un cociente $q : X \to Y^* = \ell_\infty$. Por tanto $q^* : Y^{**} = \ell_\infty^*(\mathfrak{c}) \to X^*$ es un isomorfismo entre Y^{**} y su imagen $q^*(Y^{**})$, para la norma y para las topologías w^*. En particular, $(B(X^*), w^*)$ no es w^*-bloque compacta porque no lo es $(B(Y^{**}), w^*)$. Por el Theorem 2 de [79] concluimos que X contiene una copia asintóticamente isométrica de ℓ_1. ■

Corolario 8.5. *Si X es un espacio de Banach que contiene una copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$ y $B \subset B(X^{**})$ es un contorno de $B(X^{**})$, se tiene que X contiene una copia asintóticamente isométrica de ℓ_1 y, por tanto, existe $b \in B$ tal que $dist(b, X) = 1$.*

Demostración. Sale del Lema 8.4 y la Proposición 8.3. ■

Lema 8.6. *Sean X un espacio de Banach, $\epsilon_0 > 0$, $\{x_n^* : n \geq 1\} \subset S(X^*)$ una secuencia con $x_n^* \overset{w^*}{\to} 0$ y $z \in S(X^{**})$ tales que $\langle z, x_n^*\rangle \geq \epsilon_0 > 0$, $\forall n \geq 1$. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existen $z_\epsilon \in S(X^{**})$ y una secuencia $\{u_n : n \geq 1\}$ dentro de la lasca cerrada*

$$S(z_\epsilon, \epsilon, B(X^*)) := \{x^* \in B(X^*) : \langle z_\epsilon, x^*\rangle \geq 1 - \epsilon\}$$

(dependiendo de ϵ) tal que $u_n \overset{w^*}{\to} 0$.

Demostración. Para cada $n \geq 1$ definimos $a(n)$ como sigue:

$$a(n) := \operatorname{ínf}\{\|x^*\| : x^* \in \operatorname{co}(\{x_k^* : k \geq n\})\}.$$

Obviamente $\epsilon_0 \leq a(n) \leq a(n+1) \leq 1$. Sea

$$a := \lim_{n\geq 1} a(n) = \sup_{n\geq 1} a(n).$$

Elegimos $\eta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{a-\eta}{a+\eta} > 1 - \epsilon$ y $a - \eta < a(n_0)$. Por cada $k \in \mathbb{N}$ cogemos $v_k \in \operatorname{co}(\{x_n^* : n \geq n_0 + k\})$ de modo que $a(n_0 + k) \leq \|v_k\| \leq a(n_0 + k) + \eta$. Por tanto para cada $k \geq 1$ se verifica:

$$a - \eta < a(n_0) \leq a(n_0 + k) \leq \|v_k\| \leq a(n_0 + k) + \eta \leq a + \eta.$$

Sean $M = (a + \eta) \wedge 1$ y $u_k := v_k/M$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Entonces:

(1) Por la definición de $a(n_0)$ todo $u \in \operatorname{co}(\{u_k : k \geq 1\})$ verifica:

$$1 \geq \|u\| \geq \frac{a(n_0)}{M} > \frac{a-\eta}{M} \geq \frac{a-\eta}{a+\eta} \geq 1 - \epsilon.$$

Por tanto $\overline{\operatorname{co}}(\{u_k : k \geq 1\}) \cap B_{X^*}(0, (a-\eta)/M) = \emptyset$. Por el Teorema de separación de Hahn-Banach existe $z_\epsilon \in S(X^{**})$ tal que $\langle z_\epsilon, u\rangle > (a - \eta)/M \geq 1 - \epsilon$ para todo $u \in \overline{\operatorname{co}}(\{u_k : k \geq 1\})$.

(2) Puesto que u_k es una combinación convexa finita de elementos de $\{x_n^*/M : n \geq n_0 + k\}$ y $x_n^* \overset{w^*}{\to} 0$ en la w^*-topología de X^*, necesariamente $u_k \overset{w^*}{\to} 0$ en la w^*-topología de X^*. ■

Lema 8.7. *Sea X un espacio de Banach que no es Grothendieck. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $z_\epsilon \in S(X^{**})$ y una secuencia $\{v_n : n \geq 1\} \subset S(z_\epsilon, \epsilon, B(X^*)) \cap S(X^*)$ (dependiendo de ϵ) tal que $v_n \overset{w^*}{\to} 0$.*

Demostración. Puesto que X no es Grothendieck, existen una secuencia $\{x_n^* : n \geq 1\} \subset S(X^*)$ con $x_n^* \overset{w^*}{\to} 0$, un vector $z \in S(X^{**})$ y un número real $\epsilon_0 > 0$ tales que $\langle z, x_n^* \rangle \geq \epsilon_0 > 0$, $\forall n \geq 1$. Por el Lema 8.6 para todo $\epsilon > 0$ existen $z_\epsilon \in S(X^{**})$ y una secuencia $\{u_n : n \geq 1\} \subset S(z_\epsilon, \epsilon, B(X^*))$ (dependiendo de ϵ) de modo que $u_n \overset{w^*}{\to} 0$. Ahora basta tomar $v_n := u_n / \|u_n\|$, $\forall n \geq 1$. ■

Proposición 8.8. *Sean X un espacio de Banach no-Grothendieck y B un contorno de $B(X^{**})$. Entonces $DIST(B,X) = DIST(B(X^{**}),X) = 1$.*

Demostración. Supongamos que existen $\epsilon > 0$ y un contorno B de $B(X^{**})$ tales que $DIST(B,X) < 1 - \epsilon < 1$. Por el Lema 8.7 existen $z_\epsilon \in S(X^*)$ y una secuencia $\{u_n : n \geq 1\} \subset S(X^*)$ tales que $u_n \overset{w^*}{\to} 0$ y $\langle z_\epsilon, u_n \rangle \geq 1 - \frac{\epsilon}{4}$, $\forall n \geq 1$. Es inmediato que todo punto $w \in B(X^{***})$ de w^*-acumulación de $\{u_n : n \geq 1\}$ satisface:

(1) $w \in X^\perp$.

(2) $\|w\| > 1 - \frac{\epsilon}{3}$ porque $\langle z_\epsilon, u_n \rangle \geq 1 - \frac{\epsilon}{4}$, $\forall n \geq 1$. Por tanto existe $v \in S(X^{**})$ tal que $\langle w, v \rangle > 1 - \frac{\epsilon}{3}$.

(3) Como $DIST(B,X) < 1 - \epsilon$ y $w \in X^\perp \cap B(X^{***})$, para todo $b \in B$ se tiene:

$$\langle w, b \rangle < (1 - \epsilon)\|w\| \leq 1 - \epsilon.$$

<u>Aserto 1.</u> Para todo $b \in B$ se verifica $\limsup_{n\to\infty} \langle b, u_n \rangle \leq 1 - \epsilon$ y de aquí que

$$\sup\{\limsup_{n\to\infty} \langle b, u_n \rangle : b \in B\} \leq 1 - \epsilon.$$

En efecto, supongamos que el Aserto 1 es falso. Entonces existen $b_0 \in B$ y una subsecuencia $\{u_{n_k} : k \geq 1\}$ de $\{u_n : n \geq 1\}$ tales que $\langle b_0, u_{n_k} \rangle > 1 - \epsilon$, $\forall k \geq 1$. Sea w un punto de w^*-acumulación de $\{u_{n_k} : k \geq 1\}$ en $B(X^{***})$. Se tiene que:

(a) Por un lado, obviamente, $\langle w, b_0 \rangle \geq 1 - \epsilon$ porque $\langle b_0, u_{n_k} \rangle > 1 - \epsilon$, $\forall k \geq 1$.

(b) Pero por otro lado, como w es también un punto de w^*-acumulación de $\{u_n : n \geq 1\}$ en $B(X^{***})$, por (3) se verifica que $\langle w, b_0 \rangle < 1 - \epsilon$.

Llegamos a una contradicción que prueba el Aserto 1.

<u>Aserto 2.</u> $\sup\{\limsup_{n\to\infty} \langle v, u_n \rangle : v \in B(X^{**})\} \geq 1 - \frac{\epsilon}{3}$.

En efecto, fijemos un punto de w^*-acumulación w_0 de $\{u_n : n \geq 1\}$ en $B(X^{***})$. Por (2) existe un vector $v_0 \in S(X^{**})$ tal que $\langle w_0, v_0\rangle > 1 - \frac{\epsilon}{3}$. Como w_0 es un punto de w^*-acumulación de $\{u_n : n \geq 1\}$ y $v_0 \in S(X^{**})$ satisface $\langle w_0, v_0\rangle > 1 - \frac{\epsilon}{3}$, existe una subsecuencia $\{u_{n_k} : k \geq 1\}$ de $\{u_n : n \geq 1\}$ tal que $\langle v_0, u_{n_k}\rangle > 1 - \frac{\epsilon}{3}$, $\forall k \geq 1$. Por tanto

$$\limsup_{n\to\infty}\langle v_0, u_n\rangle \geq \limsup_{k\to\infty}\langle v_0, u_{n_k}\rangle \geq 1 - \tfrac{\epsilon}{3}$$

y esto prueba el Aserto 2.

Por la igualdad de Simons se tiene

$$\sup\{\limsup_{n\to\infty}\langle b, u_n\rangle : b \in B\} = \sup\{\limsup_{n\to\infty}\langle v, u_n\rangle : v \in B(X^*)\}.$$

Llegamos a una contradicción que prueba la Proposición. ■

Teorema 8.9. *Si X es un espacio de Banach y B un contorno de $B(X^{**})$, se verifica que $DIST(B,X) = DIST(B(X^{**}),X)$.*

Demostración. Basta aplicar el Lema 8.1, la Proposición 8.3 y la Proposición 8.8. ■

8.3. El índice de Grothendieck-nidad

Vamos a introducir un índice para "medir" cómo de lejos está un espacio de Banach X de ser Grothendieck. Si X, Y son espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador continuo, indicaremos por:

$$Y^\perp := \{z \in Y^{***} : \langle z, y\rangle = 0,\ \forall y \in Y\}$$

y por

$$g(T) := \sup\{\|u\| : u \in T^{***}(B(Y^\perp))\}.$$

El c_0-índice de Grothendieck-nidad $g_0(X)$ de un espacio de Banach X se define como

$$g_0(X) := \sup\{g(T) | T : X \to c_0 \text{ operador continuo con } \|T\| \leq 1\}.$$

Elegimos este índice para "medir" cómo de lejos está un espacio de Banach X de ser Grothendieck porque, si X es Grothendieck y $T : X \to c_0$ es operador continuo, entonces $T^{***}(c_0^\perp) = \{0\}$.

Proposición 8.10. *Sea X un espacio de Banach.*

(A) $0 \leq g_0(X) \leq 1$.

(B) Son equivalentes: (i) X es Grothendieck; (ii) $g_0(X) = 0$.

Demostración. (A) Es claro que $0 \leq g_0(X) \leq 1$ porque $0 \leq g(T) \leq 1$ para todo operador continuo $T : X \to c_0$ con $\|T\| \leq 1$.

(B) $(i) \Rightarrow (ii)$. Sea $T : X \to c_0$ un operador continuo con $\|T\| \leq 1$. Bastará probar que $T^{***}(c_0^{\perp}) = 0$. Si $\{e_n : n \geq 1\}$ es la base canónica de $\ell_1 = c_0^*$, se verifica que $T^* e_n \overset{w}{\to} 0$ porque $e_n \overset{w^*}{\to} 0$ en ℓ_1 y X es Grothendieck. Observemos que el subespacio $c_0^{\perp}$ de c_0^{***} es $c_0^{\perp} = M_R(\mathbb{N}^*)$. Consideremos la probabilidad de Dirac $\mathbf{1}_p$ con $p \in \mathbb{N}^*$. Sabemos que $\mathbf{1}_p$ es punto w^*-límite de $\{e_n : n \geq 1\}$ en (c_0^{***}, w^*) por lo que $T^{***}(\mathbf{1}_p)$ es punto w^*-límite de $\{T^{***} e_n : n \geq 1\}$ en (X^{***}, w^*). Como $T^* e_n \overset{w^*}{\to} 0$ en (X^{***}, w^*), concluimos que $T^{***}(\mathbf{1}_p) = 0$. Finalmente, observemos que el subespacio $[\{\mathbf{1}_p : p \in \mathbb{N}^*\}]$ generado por las probabilidades de Dirac $\{\mathbf{1}_p : p \in \mathbb{N}^*\}$ es w^*-denso en $c_0^{\perp}$. Por lo tanto $T^{***}(c_0^{\perp}) = 0$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Sea $\{x_n^* : n \geq 1\} \subset B(X^*)$ una sucesión tal que $x_n^* \overset{w^*}{\to} 0$ en (X^*, w^*). Queremos probar que $x_n^* \overset{w}{\to} 0$. Supongamos que no es así y obtengamos una contradicción. Sin pérdida de generalidad, pasando a una subsucesión si es preciso, podemos suponer que existen $z \in S(X^{**})$ y $\epsilon > 0$ tales que $\langle z, x_n^* \rangle \geq \epsilon$, $\forall n \geq 1$. Sea $T : X \to c_0$ el operador tal que $T(x) := (\langle x_n^*, x \rangle)_{n \geq 1}$, $\forall x \in X$, que es continuo y verifica $\|T\| \leq 1$ y $T^* e_n = x_n^*$, $\forall n \geq 1$, siendo $\{e_n : n \geq 1\}$ la base canónica de ℓ_1. Fijemos $p \in \mathbb{N}^*$. Sabemos que $\mathbf{1}_p$ está en $B(c_0^{\perp})$ y es punto w^*-límite de $\{e_n : n \geq 1\}$ en c_0^{***}. Se tiene que:

(a) Por una parte es claro que $T^{***}(\mathbf{1}_p) = 0$ pues por hipótesis $g(T) = 0$, es decir, $T^{***}(B((c_0)^{\perp})) = 0$.

(b) Pero por otra parte $T^{***}(\mathbf{1}_p)$ es punto w^*-límite de $\{T^{***}(e_n) : n \geq 1\} = \{x_n^* : n \geq 1\}$ en X^{***}. Como $\langle z, x_n^* \rangle \geq \epsilon > 0$, $\forall n \geq 1$, concluimos que también $\langle T^{***}(\mathbf{1}_p), z \rangle \geq \epsilon > 0$, es decir, $T^{***}(\mathbf{1}_p) \neq 0$.

Hemos llegado a la contradicción que buscábamos. ■

Proposición 8.11. *El índice de Grothendieck-nidad es* 0 *ó* 1*.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach. Si X es Grothendieck, entonces $g_0(X) = 0$ por la Proposición 8.10. Supongamos que X no es Grothendieck y sea $0 < \epsilon < 1$. Por el Lema 8.7 existe $z_\epsilon \in S(X^{**})$ y una secuencia $\{x_n^* : n \geq 1\} \subset S(z_\epsilon, \epsilon, B(X^*)) \cap S(X^*)$ (dependiendo de ϵ) tal que $x_n^* \overset{w^*}{\to} 0$. Sea $T : X \to c_0$ tal que $T(x) := (\langle x_n^*, x \rangle)_{n \geq 1}$. Es claro que $\|T\| \leq 1$ y que $T^* e_n = T^{***} e_n = x_n^*$, $\forall n \geq 1$, siendo $\{e_n : n \geq 1\}$ la base canónica de ℓ_1. Fijemos $p \in \mathbb{N}^*$. Sabemos que $\mathbf{1}_p$ está en $B(c_0^{\perp})$ y es punto de w^*-acumulación de $\{e_n : n \geq 1\}$ en $B(c_0^{***})$. Se tiene que $T^{***}(\mathbf{1}_p)$ es punto de w^*-acumulación de $\{T^{***}(e_n) : n \geq 1\} = \{x_n^* : n \geq 1\}$ en X^{***}. Como $\langle z_\epsilon, x_n^* \rangle \geq 1 - \epsilon$, $\forall n \geq 1$, concluimos que también $\langle T^{***}(\mathbf{1}_p), z_\epsilon \rangle \geq 1 - \epsilon$, es decir, $g_0(X) \geq g(T) \geq 1 - \epsilon$. Como $0 < \epsilon < 1$ es arbitrario, concluimos que $g_0(X) = 1$. ■

NOTA. De todo los anterior se deduce que la propiedad de ser Grothendieck, medida mediante el índice $g_0(X)$, sigue la regla del "todo ó nada" .

Capítulo 9

La distancia $DIST(B, X)$ vs $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X)$ cuando B es un contorno de un w^*-compacto K de X^{**}

9.1. Introducción y preliminares

Sabemos (ver [61]) que todo espacio de Banach X tiene M-control en su bidual X^{**}, para cierta constante M tal que $3 \leq M \leq 5$, es decir, que $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X) \leq M \cdot DIST(K, X)$ para todo subconjunto w^*-compacto K de X^{**}. Incluso se verifica que $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) \leq M \cdot DIST(K, C)$, para todo subconjunto convexo C de X y todo subconjunto w^*-compacto K de X^{**}. En consecuencia es natural plantearse la siguiente cuestión.

Cuestión 5. *¿Será verdad que existe una constante universal M_0 tal que $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X) \leq M_0 \cdot DIST(B, X)$, para todo subconjunto w^*-compacto K de X^{**} y todo contorno B de K?*

Desconocemos la respuesta general a esta cuestión. Sin embargo observemos lo siguiente:

(1) Hay clases sencillas de espacio de Banach para las que existe dicha constante. Por ejemplo, la clase de los espacios de Banach X tales que $(B(X^*), w^*)$ es angélica goza de esta propiedad para la constante $M_0 = 1$ (ver la Prop. propconange2).

(2) Si $K \subset X^{**}$ es un subconjunto w^*-compacto tal que $K \cap X$ es w^*-denso en K, entonces $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X) \leq 2 \cdot DIST(B, X)$ (ver [15]).

En este Capítulo nos dedicamos a probar la existencia de dicha constante M_0 (con $1 \leq M_0 \leq 3$) para las siguientes clases de espacios de Banach: ciertas sumas 1-incondicionales, retículos o-continuos, espacios con generador proyectivo, etc.

9.2. Sumas directas 1-incondicionales

Comenzaremos estudiando el comportamiento de los espacios de Banach X, que son suma directa 1-incondicional de espacios con buenas propiedades (vg., espacios WCG). Vamos a probar que estos espacios de Banach X verifican $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K),X) \leq 2DIST(B,X)$, para todo subconjunto w^*-compacto $K \subset X^{**}$ y todo contorno $B \subset K$, aunque hay numerosos casos (v.g., si X no tiene copias de $\ell_1(\aleph_1)$, si X tiene base 1-simétrica) en que vale la constante 1. Entre estos espacios, que son suma directa 1-incondicional de "buenos" espacios, destacan los retículos de Banach orden-continuos (abrev. o-continuos). En todo lo relativo a las nociones de retículo de Banach y sus propiedades nos remitimos a [77] y [82].

Vamos a estudiar la estructura de X, X^* y X^{**} cuando X es una suma directa 1-incondicional de una familia de subespacios de Banach $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ de X.

Definición 9.1. *Un espacio de Banach X es suma directa 1-incondicional de una familia de subespacios de Banach $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ de X, abrev. $X = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \oplus X_\alpha$ 1-incondicional, cuando $X = \overline{[\cup_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha]}$ y, si $x_\alpha \in X_\alpha, \epsilon_\alpha = \pm 1$, $\alpha \in \mathcal{A}$, y A es un subconjunto finito de $\mathcal{A}$, entonces $\| \sum_{\alpha\in A} \epsilon_\alpha x_\alpha\| \leq \| \sum_{\alpha\in A} x_\alpha\|$.*

Si $X = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \oplus X_\alpha$ 1-incondicional, entonces

(i) Por cada subconjunto $A \subset \mathcal{A}$ existe una proyección $P_A : X \to X$ tal que $\|P_A\| = 1 = \|I - P_A\|$ y $P_A(X) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \oplus X_\alpha$.

(ii) Cada $x \in X$ admite una única representación de la forma $x = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x_\alpha$ con $x_\alpha \in X_\alpha$ y sólo un número contable de coordenadas x_α no nulas, de modo que la serie anterior converge incondicionalmente y $\| \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \epsilon_\alpha x_\alpha\| = \|x\|$ siendo $\epsilon_\alpha = \pm 1$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$.

(iii) Si $u \in X^*$, a la restricción $u_\alpha := u \restriction X_\alpha \in X_\alpha^*$ la denominaremos la coordenada α-ésima de u. Identificaremos u con el conjunto $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de sus coordenadas.

Cada dual X_α^* se considera sumergido canónica e isométricamente en X^* de la siguiente forma. Si $P_\alpha : X \to X_\alpha$ es la proyección canónica con norma $\|P_\alpha\| = 1$, entonces $P_\alpha^*(X_\alpha^*)$ es un subespacio de X^* isométrico a X_α^*. Pues bien, consideraremos a X_α^* sumergido en X^* ocupando la posición de $P_\alpha^*(X_\alpha^*)$. Dentro de X^* disponemos del subespacio cerrado $Y_0 := \overline{[\cup_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha^*]}$, que, en realidad, es la suma directa 1-incondicional de los subespacios cerrados $\{X_\alpha^* : \alpha \in \mathcal{A}\}$, es decir, $Y_0 = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \oplus X_\alpha^*$ 1-incondicional. Sea Y_0^* el dual de Y_0.

Aserto 1. Y_0^* se sumerge canónica e isométricamente en X^{**}.

En efecto, si $z \in Y_0^*$, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ definimos $z_\alpha := z \restriction X_\alpha^*$, que verifica $z_\alpha \in X_\alpha^{**}$, e identificamos z con el conjunto de sus coordenadas $(z_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Para sumergir Y_0^* en X^{**}, definimos la aplicación $h : Y_0^* \to X^{**}$ del siguiente modo

$$\forall z \in Y_0^*,\ \forall u \in X^*,\ h(z)(u) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z_\alpha(u_\alpha).$$

La definición de h precisa de varias aclaraciones y comprobaciones, a saber:

(A) En primer término hay que cerciorarse de que el anterior sumatorio es convergente. Si $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ es un subconjunto finito, entonces $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_0} u_\alpha \in Y_0$ y además si $\epsilon_\alpha = \pm 1,\ \forall \alpha \in \mathcal{A}$, se tiene que

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_0} z_\alpha(\epsilon_\alpha u_\alpha) = z(\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_0} \epsilon_\alpha u_\alpha) \leq \|z\| \cdot \| \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_0} \epsilon_\alpha u_\alpha\| \leq \|z\| \cdot \|u\|.$$

De aquí deducimos que: (i) $|\{\alpha \in \mathcal{A} : z_\alpha(u_\alpha) \neq 0\}| \leq \aleph_0$; (ii) la serie $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} z_\alpha(u_\alpha)$ converge absolutamente y, además, $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} z_\alpha(u_\alpha) \leq \|z\| \cdot \|u\|$. En consecuencia, $h(z) \in X^{**}$ con $\|h(z)\| \leq \|z\|$, $\forall z \in Y_0^*$, y h es una aplicación lineal y continua que verifica $\|h\| \leq 1$.

(B) Veamos que h es una isometría. En efecto, como $h(z) \restriction Y_0 = z$, $\forall z \in Y_0^*$, se tiene que

$$\|h(z)\| = \sup\{\langle h(z), u\rangle : u \in B(X^*)\} \geq \sup\{\langle z, u\rangle : u \in B(Y_0)\} = \|z\|.$$

Por otra parte $\|h(z)\| \leq \|z\|$. En consecuencia, h es una isometría.

Sabemos que el subespacio $Y_0^\perp := \{z \in X^{**} : \langle z, y\rangle = 0,\ \forall y \in Y_0\}$ de X^{**} es isométricamente isomorfo al dual $(\frac{X^*}{Y_0})^*$.

Aserto 2. $X^{**} = h(Y_0^*) \overset{m}{\oplus} Y_0^\perp$, en donde " $\overset{m}{\oplus}$ " indica suma directa monótona, es decir, X^{**} es la suma directa monótona de $h(Y_0^*)$ y de $Y_0^\perp$, lo que quiere decir que todo $z \in X^{**}$ admite una única descomposición $z = z_1 + z_2$ con $z_1 \in h(Y_0^*)$ y $z_2 \in Y_0^\perp$ de modo que $\|z\| \geq \|z_1\| \bigvee \|z_2\|$.

En efecto, es inmediato que $h(Y_0^*) \cap Y_0^\perp = \{0\}$. Sea $z \in X^{**}$ y denotemos $w_1 := z \restriction Y_0$. Veamos que $z - h(w_1) \in Y_0^\perp$. Para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ y todo $v \in X_\alpha^*$ se tiene

$$\begin{gathered}\langle z - h(w_1), v\rangle = \langle z, v\rangle - \langle h(w_1), v\rangle = \\ = \langle z \restriction X_\alpha^*, v\rangle - \langle w_{1\alpha}, v\rangle = \langle z \restriction X_\alpha^*, v\rangle - \langle z \restriction X_\alpha^*, v\rangle = 0.\end{gathered}$$

En consecuencia, $X^{**} = h(Y_0^*) \oplus Y_0^\perp$. Además la anterior suma directa es monótona, pues si $z = z_1 + z_2 \in X^{**}$ con $z_1 \in h(Y_0^*)$ y $z_2 \in Y_0^\perp$, se tiene, por una parte, que

$$\|z\| \geq \sup\{\langle z_1 + z_2, u\rangle : u \in B(Y_0)\} = \sup\{\langle z_1, u\rangle : u \in B(Y_0)\} = \|z_1\|.$$

Por otra parte, dado $\epsilon > 0$, elijamos $v \in B(X^*)$ tal que $\|z_2\| - \frac{\epsilon}{2} \leq \langle z_2, v\rangle$. Sabemos que $\langle z_1, v\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} z_{1\alpha}(v_\alpha)$ (donde $z_{1\alpha} := z \restriction X_\alpha^*$) de modo que existe un subconjunto finito

$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ tal que $|\sum_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{A}_0} z_{1\alpha}(v_\alpha)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Por tanto, si $u = v - \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_0} v_\alpha$, se tiene que $u \in B(X^*)$, $\langle z_2, u\rangle = \langle z_2, v\rangle$ y

$$|\langle z_1, u\rangle| = |\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} z_{1\alpha}(u_\alpha)| = |\sum_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{A}_0} z_{1\alpha}(v_\alpha)| \leq \tfrac{\epsilon}{2},$$

de donde

$$\|z_2\| - \tfrac{\epsilon}{2} \leq \langle z_2, v\rangle = \langle z_2, u\rangle \leq \langle z_1 + z_2, u\rangle + \tfrac{\epsilon}{2} = \langle z, u\rangle + \tfrac{\epsilon}{2} \leq \|z\| + \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, obtenemos que $\|z_2\| \leq \|z\|$. Así que la suma directa $X^{**} = h(Y_0^*) \overset{m}{\oplus} Y_0^{\perp}$ es monótona.

Por último, observemos que la copia canónica $J(X)$ de X en X^{**} está dentro de $h(Y_0^*)$ aunque, en general, $J(X) \neq h(Y_0^*)$.

Lema 9.2. *Sea X un espacio de Banach y $K \subset X^*$ un subconjunto w-compacto. Dados $z \in B(X^{**})$ y $\eta > 0$, existe $y \in B(X)$ tal que*

$$\forall k \in K,\ z(k) - \eta \leq y(k) \leq z(k) + \eta.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que K es convexo y simétrico respecto del origen (tomando $\overline{\text{co}}(K \cup -K)$ en lugar de K). Sean $M := \sup\{\|k\| : k \in K\}$ y $\epsilon > 0$ tal que $(M+1)\epsilon < \eta$. Consideremos el espacio de Banach $Z = X \oplus_1 \mathbb{R}$. Entonces $Z^* = X^* \oplus_\infty \mathbb{R}$ y $Z^{**} = X^{**} \oplus_1 \mathbb{R}$. Sean $H_1 := \{(k, z(k) - \frac{\epsilon}{2}) : k \in K\}$ y $H_2 := \{(k, z(k) + \frac{\epsilon}{2}) : k \in K\}$ dos subconjuntos disjuntos convexos w-compactos de Z^* tales que, si $H = H_2 - H_1$, entonces $H \subset Z^*$ es un subconjunto convexo w-compacto, y por tanto w*-compacto, de Z^* verificando que $H \cap \overset{\circ}{B}(0; \frac{\epsilon}{2}) = \emptyset$. Por tanto, si cogemos $\frac{2}{2+\epsilon} \leq \rho < 1$, entonces $H \cap B(0; \frac{\rho\epsilon}{2}) = \emptyset$ y por el teorema de Hahn-Banach existe un vector $\varphi \in B(Z)$ tal que $\langle h, \varphi\rangle \geq \frac{\rho\epsilon}{2}$, $\forall h \in H$. Si $\varphi = x_0 + t_0$, con $x_0 \in X$, $t_0 \in \mathbb{R}$ y $\|\varphi\| = \|x_0\| + |t_0| \leq 1$, resulta que para todo $(k_1, z(k_1) - \frac{\epsilon}{2}) \in H_1$ y todo $(k_2, z(k_2) + \frac{\epsilon}{2}) \in H_2$ se tiene que

$$\varphi((k_2, z(k_2) + \tfrac{\epsilon}{2})) - \varphi((k_1, z(k_1) - \tfrac{\epsilon}{2})) \geq \tfrac{\rho\epsilon}{2},$$

es decir

$$x_0(k_2) + t_0 z(k_2) + t_0\tfrac{\epsilon}{2} \geq x_0(k_1) + t_0 z(k_1) - t_0\tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\rho\epsilon}{2}, \tag{9.1}$$

de donde, tomando $k_1 = k_2$ en (9.1), obtenemos $t_0\epsilon \geq \frac{\rho\epsilon}{2}$, es decir, $\frac{\rho}{2} \leq t_0 \leq 1$, por lo que $\|x_0\| \leq 1 - \frac{\rho}{2}$. Haciendo $k_1 = 0$ en (9.1) obtenemos

$$\forall k \in K,\ x_0(k) + t_0 z(k) + t_0\tfrac{\epsilon}{2} \geq -t_0\tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\rho\epsilon}{2},$$

es decir

$$\forall k \in K,\ -\tfrac{1}{t_0}x_0(k) \leq z(k) + \tfrac{\epsilon}{2}\tfrac{2t_0 - \rho}{t_0} \leq z(k) + \epsilon.$$

Por otra parte, haciendo $k_2 = 0$ en (9.1) obtenemos

$$\forall k \in K,\ \tfrac{t_0}{2}\epsilon \geq x_0(k) + t_0 z(k) - t_0\tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\rho\epsilon}{2},$$

es decir

$$\forall k \in K,\ z(k) - \epsilon \leq z(k) - \tfrac{\epsilon}{2}\tfrac{2t_0-\rho}{t_0} \leq -\tfrac{1}{t_0}x_0(k).$$

Por tanto, tomando $x = -\frac{1}{t_0}x_0$, que verifica $\|x\| \leq 1+\epsilon$, se satisface el enunciado del Lema, aunque, en general, $x \notin B(X)$. A continuación distinguimos dos casos:

Caso 1. Si $\|x\| \leq 1$ cogemos $y = x$.

Caso 2. Supongamos que $\|x\| > 1$, aunque $\|x\| \leq 1 + \epsilon$. Sea $y := x/\|x\|$. Se tiene para todo $k \in K$ que

$$\langle y - x, k\rangle \leq M\|x\|\frac{\|x\|-1}{\|x\|} = M(\|x\|-1) \leq M\epsilon,$$

de donde

$$|\langle z - y, k\rangle| = |\langle z - x + x - y, k\rangle| \geq |\langle z - x, k\rangle| + |\langle x - y, k\rangle| \leq (M+1)\epsilon < \eta.$$

Esto completa la prueba. ■

Proposición 9.3. *Sea X un espacio de Banach, que es suma directa 1-incondicional de una familia $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ de espacios de Banach WCG, digamos, $X = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \oplus X_\alpha$. Entonces $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X) \leq 2DIST(B, X)$, para todo subconjunto w^*-compacto $K \subset X^{**}$ y todo contorno $B \subset K$.*

Demostración. Adoptamos la notación de los párrafos precedentes. Así que sea $W_\alpha \subset B(X_\alpha)$ un disco w-compacto de X_α tal que $0 \in W_\alpha$ y $X_\alpha = \overline{[W_\alpha]}$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Supongamos que existe un subconjunto w^*-compacto $K \subset X^{**}$ tal que para ciertos $a, b > 0$ se verifica

$$DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X) > b > 2a > 2DIST(B, X) > 0.$$

En particular estamos suponiendo que

$$DIST(B, X) = DIST(co(B), X) = DIST(\overline{\text{co}}(B), X) < a$$

y que existen $u_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ y $\psi \in S(X^{***}) \cap X^\perp$ tales que $\langle \psi, u_0\rangle > b$.

Etapa 1. Puesto que $\langle \psi, u_0\rangle > b$ y $B(X^*)$ es w^*-denso en $B(X^{***})$, podemos hallar un vector $x_1^* \in B(X^*)$ tal que $\langle u_0, x_1^*\rangle > b$, así como otro vector $\eta_1 \in co(B)$ de modo que $\langle \eta_1, x_1^*\rangle > b$. Sea $\eta_1 = \eta_1^1 + \eta_1^2$ con $\eta_1^1 \in X$ y $\|\eta_1^2\| < a$. Como $\eta_1^1 \in X$, podemos hallar un subconjunto contable $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ tal que $\eta_1^1 \in \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_1} \oplus X_\alpha$. Denotemos $\mathcal{A}_1 := \{\alpha_{1n} : n \geq 1\}$ y sea $H_1 := \{u_0\} \cup (\sum_{i,j\leq 1} \oplus W_{\alpha_{ij}})$, que es un subconjunto w-compacto de X^{**}.

Etapa 2. Puesto que $\langle \psi, u_0\rangle > b$ y $\psi \in X^\perp$, por el Lema 9.2 existe un vector $x_2^* \in B(X^*)$ tal que $\langle u_0, x_2^*\rangle > b$ y

$$\forall k \in H_1,\ \langle \psi, k\rangle - 2^{-1} < \langle k, x_2^*\rangle < \langle \psi, k\rangle + 2^{-1}.$$

En particular, $|\langle k,x_2^*\rangle| \leq 2^{-1}$, $\forall k \in \sum_{i,j\leq 1}\oplus W_{\alpha_{ij}}$ porque $\psi \in X^\perp$. Como $\langle u_0,x_i^*\rangle > b$, $i=1,2$, existe $\eta_2 \in co(B)$ tal que $\langle \eta_2,x_i^*\rangle > b$, $i=1,2$. Sea $\eta_2 = \eta_2^1+\eta_2^2$ con $\eta_2^1 \in X$ y $\|\eta_2^2\| < a$. Como $\eta_2^1 \in X$, podemos hallar un subconjunto contable $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ tal que $\eta_2^1 \in \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_2}\oplus X_\alpha$. Denotemos $\mathcal{A}_2 := \{\alpha_{2n} : n\geq 1\}$ y sea $H_2 := \{u_0\}\cup(\sum_{i,j\leq 2}\oplus W_{\alpha_{ij}})$, que es un subconjunto w-compacto de X^{**}.

Etapa 3. Puesto que $\langle \psi,u_0\rangle > b$ y $\psi \in X^\perp$, por el Lema 9.2 existe un vector $x_3^* \in B(X^*)$ tal que $\langle u_0,x_3^*\rangle > b$ y

$$\forall k \in H_2,\ \langle \psi,k\rangle - 2^{-2} < \langle k,x_3^*\rangle < \langle \psi,k\rangle + 2^{-2}.$$

En particular, $|\langle k,x_3^*\rangle| \leq 2^{-2}$, $\forall k \in \sum_{i,j\leq 2}\oplus W_{\alpha_{ij}}$ porque $\psi \in X^\perp$. Como $\langle u_0,x_i^*\rangle > b$, $i=1,2,3$ existe $\eta_3 \in co(B)$ tal que $\langle \eta_3,x_i^*\rangle > b$, $i=1,2,3,$. Sea $\eta_3=\eta_3^1+\eta_3^2$ con $\eta_3^1 \in X$ y $\|\eta_3^2\| < a$. Como $\eta_3^1 \in X$, podemos hallar un subconjunto contable $\mathcal{A}_3 \subset \mathcal{A}$ tal que $\eta_3^1 \in \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_3}\oplus X_\alpha$. Denotemos $\mathcal{A}_3 := \{\alpha_{3n} : n\geq 1\}$ y sea $H_3 := \{u_0\}\cup(\sum_{i,j\leq 3}\oplus W_{\alpha_{ij}})$, que es un subconjunto w-compacto de X^{**}.

A continuación reiteramos hasta el infinito. Obtenemos de este modo las secuencias $\{x_k^* : k\geq 1\} \subset B(X^*)$, $\{\eta_k : k\geq 1\} \subset co(B)$ y $\{\mathcal{A}_k : k\geq 1\}$, $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}$. Sean $\mathcal{A}_0 := \cup_{n\geq 1}\mathcal{A}_n$, $X_0 := \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_0}\oplus X_\alpha$ y $P_0 : X \to X_0$ la proyección canónica sobre X_0, cuya norma es $\|P_0\|=1$. Sea φ_0 un punto de w^*-acumulación de $(x_n^*)_n$ en $B(X^{***})$.

Aserto 1. X_0 es un espacio WCG y $\varphi_0 \perp X_0$.

En efecto, si $W_0 := \sum_{i,j\geq 1}\oplus 2^{-(i+j)}W_{\alpha_{ij}}$, entonces W_0 es un subconjunto w-compacto de X tal que $X_0 = \overline{[W_0]}$. Finalmente, ya que $|\langle k,x_n^*\rangle| \leq 2^{-n+1}$ para todo $k \in \sum_{i,j\leq n}\oplus W_{\alpha_{ij}}$, concluimos que $\varphi_0 \perp X_0$.

El espacio X admite la descomposición monótona

$$X = X_0 \overset{m}{\oplus} X_1 \text{ siendo } X_1 := \sum_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{A}_0} X_\alpha.$$

De aquí se obtienen las descomposiciones monótonas

$$X^* = X_0^* \overset{m}{\oplus} X_1^*,\ X^{**} = X_0^{**} \overset{m}{\oplus} X_1^{**},\ X^{***} = X_0^{***} \overset{m}{\oplus} X_1^{***},\ \text{etc},$$

con proyecciones $P_0 : X \to X_0$, $P_0^* : X^* \to X_0^*$, $P_0^{**} : X^{**} \to X_0^{**}$, $P_0^{***} : X^{***} \to X_0^{***}$, etc. Para cada $k\geq 1$ se tiene

$$\begin{aligned}\eta_k = P_0^{**}(\eta_k) + (I-P_0^{**})(\eta_k) &= P_0^{**}(\eta_k^1+\eta_k^2) + (I-P_0^{**})(\eta_k^1+\eta_k^2) = \\ &= \eta_k^1 + P_0^{**}(\eta_k^2) + (I-P_0^{**})(\eta_k^2),\end{aligned}$$

siendo, pues, $P_0^{**}(\eta_k) = \eta_k^1 + P_0^{**}(\eta_k^2)$ y $(I-P_0^{**})(\eta_k) = (I-P_0^{**})(\eta_k^2)$. Sean η_0, η_0^1 y η_0^2 puntos de w^*-acumulación de las secuencias $\{\eta_k : k\geq 1\}$, $\{P_0^{**}(\eta_k) : k\geq 1\}$ y $\{(I-P_0^{**})(\eta_k) : k\geq 1\}$, respectivamente, en X^{**} de modo que $\eta_0 = \eta_0^1+\eta_0^2$. Claramente $\eta_0^1 \in \overline{X_0}^{w^*} = X_0^{**}$, $\|\eta_0^2\| \leq a$, $P_0^{**}(\eta_0) = \eta_0^1$ y $(I-P_0^{**})(\eta_0) = \eta_0^2$. Sean $H := P_0^{**}(K)$, $w_0 :=$

$P_0^{**}(\eta_0) = \eta_0^1$ y $B_0 := P_0^{**}(B)$. Claramente, B_0 es un contorno del subconjunto w^*-compacto H de X_0^{**} y $\eta_0^1 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(B_0) = \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$.

Aserto 2. $DIST(B_0, X_0) < a$.

En efecto, como $\|P_0^{**}\| = 1$, resulta que

$$DIST(B_0, X_0) = DIST(P_0^{**}(B), P_0^{**}(X)) \leq DIST(B, X) < a.$$

Aserto 3. $dist(P_0^{**}\eta_0, X_0) \geq b - a$.

Se tiene que $\langle \eta_k, x_n^* \rangle > b$ para $k \geq n$, de donde obtenemos que $\langle \eta_0, x_n^* \rangle \geq b$, $\forall n \geq 1$. Por tanto $\langle \varphi_0, \eta_0 \rangle \geq b$. De aquí que $\langle \varphi_0, P_0^{**}(\eta_0) \rangle \geq b - a$ porque $\|(I - P_0^{**})\eta_0\| \leq a$. Como $\varphi_0 \perp X_0$, sale que $dist(P_0^{**}\eta_0, X_0) \geq b - a$.

Como X_0 es un espacio WCG y $b - a > a$, llegamos a una contradicción aplicando la Proposición 6.2 y esto termina la prueba del enunciado. ■

Proposición 9.4. *Sea X un espacio de Banach, que es suma directa $X = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \oplus X_\alpha$ 1-incondicional de una familia $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ de espacios de Banach WCG. Si $K \subset X^{**}$ es un subconjunto w^*-compacto de X^{**} y B es un contorno de K tal que $co(B) \cap X$ es w^*-denso en $co(B)$, se tiene que $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X) = DIST(B, X)$.*

Demostración. La prueba es análoga a la de la Proposición 9.3 con ligeros cambios, a saber: como $co(B) \cap X$ es w^*-denso en $co(B)$, elegimos $\eta_k \in co(B) \cap X$ para cada $k \geq 1$. De modo que ahora $\eta_k^1 = \eta_k$ y $\eta_k^2 = 0$ para $k \geq 0$. ■

Corolario 9.5. *Sea X un espacio de Banach, que es suma directa $X = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \oplus X_\alpha$ 1-incondicional de una familia $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ de espacios de Banach WCG. Si $K \subset X^{**}$ es un subconjunto w^*-compacto de X^* y B es un contorno de K tal que $K \cap X$ es w^*-denso en K, se tiene que $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X) = DIST(B, X)$.*

Demostración. Consideremos $B_0 := B \cup (K \cap X)$ que es un contorno de K tal que
(i) $DIST(B_0, X) = DIST(B, X)$; (ii) $co(B_0) \cap X$ es w^*-denso en $co(B_0)$.
Ahora basta aplicar la Proposición 9.4. ■

Un espacio de Banach X es, para cierto ordinal θ, suma directa transfinita $X = \sum_{i<\theta} \oplus X_i$ de subespacios cerrados $\{X_i : i < \theta\}$ si existe una constante $1 \leq M < \infty$ tal que para todo par $m, n \in \mathbb{N}$, toda secuencia finita $i_1 < i_2 < \ldots < i_{m+n} < \theta$, todo $x_k \in X_{i_k}$ y $\lambda_k \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq m + n$, se verifica

$$\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{i_k}\| \leq M \|\sum_{k=1}^{n+m} \lambda_k x_k\|.$$

Si $z \in X^*$, denotaremos por z_i a la restricción de z a X_i y llamaremos soporte de z (abrev., $supp(z)$) al conjunto $supp(z) := \{i < \theta : z_i \neq 0\}$. Si $|supp(z)| \leq \aleph_0$ diremos que z es un elemento de soporte contable.

Proposición 9.6. *Sea X un espacio de Banach que, para cierto ordinal θ, es suma directa transfinita $X = \sum_{i<\theta} \oplus X_i$ de subespacios cerrados $\{X_i : i < \theta\}$ que son WLD (= weakly Lindelof determined) de modo que todo $z \in X^*$ tiene soporte contable. Entonces X es WLD, X tiene la propiedad (C) de Corson, la bola $(B(X^*), w^*)$ es angélica y para todo subconjunto convexo $C \subset X$, todo subconjunto w^*-compacto $K \subset X^{**}$ y todo contorno B de K se verifica $DIST(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), C) = DIST(B, C)$.*

Demostración. Es bien conocido que la bola unidad dual $(B(Z^*), w^*)$ de un espacio de Banach Z es w^*-angélica y que $Z \in (C)$ si Z es WLD (ver [4]). Por tanto por la Proposición 6.2 basta probar que X es WLD, esto es, que existen un conjunto J y un operador lineal inyectivo $\|\cdot\|$-continuo $T : X^* \to \ell_\infty^c(J) := \{f \in \ell_\infty(J) :$ supp (f) es contable$\}$ que es w^*-puntualmente continuo (ver [4, Definition 1.1]). Puesto que cada X_i, $i < \theta$, es WLD, existe un conjunto J_i y un operador lineal inyectivo $\|\cdot\|$-continuo $T_i : X_i^* \to \ell_\infty^c(J_i)$ que es w^*-puntualmente continuo y satisface $\|T_i\| \leq 1$. Supongamos que los conjuntos $\{J_i : i < \theta\}$ son disjuntos dos a dos y pongamos $J := \bigcup_{i<\theta} J_i$. Definimos $T : X^* \to \ell_\infty(J)$ de modo que, si $x^* \in X^*$ y $x_i^* \in X_i^*$ es la restricción $x_i^* := x^* \restriction X_i$, entonces $Tx^* = (T_i(x_i^*))_{i<\theta}$. Claramente T es un operador lineal inyectivo $\|\cdot\|$-continuo y w^*-puntualmente continuo. Además, como la descomposición de X es de tipo contable, se tiene que $supp(Tx^*)$ es contable para todo $x^* \in X^*$ y esto completa la prueba. ■

Sea X un espacio de Banach que admite una descomposición $X = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \oplus X_\alpha$ como suma directa 1-incondicional de subespacios cerrados X_α. Decimos que la descomposición $X = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \oplus X_\alpha$ es de *tipo contable* si para todo $u \in X^*$ el conjunto soporte $\mathrm{supp}(u) := \{\alpha \in \mathcal{A} : u_\alpha \neq 0\}$ es contable, siendo $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ el conjunto de las coordenadas de u, es decir, $u_\alpha := u\restriction X_\alpha = u \circ P_\alpha$, donde $P_\alpha : X \to X_\alpha$ es la proyección canónica. Por ejemplo, si I es un conjunto infinito, $M : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ una función de Orlicz tal que su complementaria M^* (ver [76, Chapter 4]) verifica $M^*(t) > 0$ para $t > 0$, entonces el espacio de Orlicz $h_M(I) := \{f \in \mathbb{R}^I : \sum_{i\in I} M(f_i/\lambda) < \infty, \forall\lambda > 0\}$ tiene descomposición contable respecto de su base canónica, porque todo elemento de su dual (que es $h_M(I)^* := \ell_{M^*}(I)$) tiene soporte contable.

Lema 9.7. *Sea X un espacio de Banach que admite una descomposición $X = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \oplus X_\alpha$ como suma directa 1-incondicional de subespacios cerrados X_α. Son equivalentes*

(1) La descomposición $X = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \oplus X_\alpha$ no es de tipo contable.

(2) Existe en X una copia de $\ell_1(\aleph_1)$ dispuesta disjuntamente respecto de la descomposición $X = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \oplus X_\alpha$, es decir, existe un subconjunto $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ con cardinal $|\mathcal{A}_1| = \aleph_1$ y por cada $\alpha \in \mathcal{A}_1$ un elemento $v_\alpha \in X_\alpha$ de modo que la familia $\{v_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_1\}$ es equivalente a la base canónica de $\ell_1(\aleph_1)$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Si la descomposición no es de tipo contable, existe un cierto $u \in X^*$ tal que el conjunto $\mathcal{A}_0 := \{\alpha \in \mathcal{A} : u_\alpha \neq 0\}$ verifica $|\mathcal{A}_0| \geq \aleph_1$, siendo $u_\alpha := u\restriction X_\alpha = u \circ P_\alpha$, donde $P_\alpha : X \to X_\alpha$ es la proyección canónica. Pasando a un subconjunto si es preciso, se puede encontrar un número real $\epsilon > 0$, un subconjunto

$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_0$ con $|\mathcal{A}_1| = \aleph_1$ y una familia $\{v_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_1\}$ con $v_\alpha \in B(X_\alpha)$ de modo que $\langle u, v_\alpha \rangle = \langle u_\alpha, v_\alpha \rangle > \epsilon$. En estas condiciones, es inmediato probar que la familia $\{v_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_1\}$ es equivalente a la base canónica de $\ell_1(\aleph_1)$ y genera una copia de $\ell_1(\aleph_1)$ que está disjuntamente dispuesta respecto de la descomposición $X = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \oplus X_\alpha$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Sea $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ un subconjunto con cardinal $|\mathcal{A}_1| = \aleph_1$ y por cada $\alpha \in \mathcal{A}_1$ sea v_α un elemento de X_α de modo que la familia $\{v_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_1\}$ sea equivalente a la base canónica $\{e_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_1\}$ de $\ell_1(\mathcal{A}_1)$. Sea $T : \ell_1(\mathcal{A}_1) \to X$ el isomorfismo entre $\ell_1(\mathcal{A}_1)$ y el espacio cerrado generado por $\{v_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_1\}$ de modo que $T(e_\alpha) = v_\alpha$. Puesto que $T^* : X^* \to \ell_\infty(\mathcal{A}_1)$ es un cociente y, por tanto, $T^*(X^*) = \ell_\infty(\mathcal{A}_1)$, si $w_0 \in \ell_\infty(\mathcal{A}_1)$ es tal que $w_0(\alpha) = 1$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}_1$, existe un vector $u \in X^*$ tal que $T^*(u) = w_0$. Entonces para todo $\alpha \in \mathcal{A}_1$ se tiene

$$\langle u, v_\alpha \rangle = \langle u, Te_\alpha \rangle = \langle T^* u, e_\alpha \rangle = \langle w_0, e_\alpha \rangle = 1,$$

lo que prueba que u es un elemento de X^* que no tiene soporte contable respecto de la descomposición $X = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \oplus X_\alpha$. ∎

Lema 9.8. *Sea X un retículo de Banach o-continuo con unidad débil $e > 0$. Entonces X es WCG.*

Demostración. Sabemos (ver [76, p. 28]) que el intervalo $[0, e] := \{x \in X : 0 \leq x \leq e\}$ es un subconjunto w-compacto de X. Queremos probar que $X = \overline{[[0, e]]}$, es decir, que X es el cierre del subespacio generado por $[0, e]$. Cojamos un elemento positivo $x \in X^+$. Entonces $ne \wedge x \uparrow x$ para $n \to \infty$, por lo que, al ser X o-continuo, se tiene que $\|x - ne \wedge x\| \downarrow 0$. Así que $\bigcup_{n \geq 1} [0, ne] = \bigcup_{n \geq 1} n[0, e]$ es denso en el cono positivo X^+. Como $X = X^+ - X^+$, concluimos que X es el cierre del subespacio generado por $[0, e]$. ∎

Lema 9.9. *Si X es un retículo de Banach o-continuo entonces X es la suma directa 1-incondicional $X = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \oplus X_\alpha$ de una familia de ideales $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ mutuamente disjuntos, de modo que cada uno de ellos tiene unidad débil y es WCG.*

Demostración. Por [77, 1.a.9] X admite la expresión $X = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \oplus X_\alpha$ como suma directa de los ideales cerrados mutuamente disjuntos $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ (por tanto como suma directa 1-incondicional), de modo que cada ideal X_α tiene unidad débil. Aplicando el Lema 9.8 se concluye el resultado. ∎

Corolario 9.10. *Sean X un retículo de Banach o-continuo, $K \subset X^{**}$ un subconjunto w^*-compacto de X^{**} y B un contorno de K. Entonces $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X) \leq 2DIST(B, X)$ y, si $K \cap X$ es w^*-denso en K, entonces $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X) = DIST(B, X)$.*

Demostración. El resultado es consecuencia del Lema 9.9, la Proposición 9.3, la Proposición 9.4 y el Corolario 9.5. ∎

NOTA. (1) Observemos que si X es un retículo de Banach que no es o-continuo, el control de X en su bidual X^{**} puede ser peor que el 2-control del Corolario 9.10. El ejemplo nos lo ofrece [62], en donde se construyen contraejemplos, que son retículos de Banach no o-continuos, que tienen 3-control como mucho.

(2) Es claro que si X es un retículo de Banach o-continuo que no contiene copias de $\ell_1(\aleph_1)$, entonces X admite una descomposición de tipo contable $X = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \oplus X_\alpha$ como suma directa disjunta 1-incondicional de ideales cerrados X_α que poseen unidad débil cada uno.

Proposición 9.11. *Sea X un retículo de Banach o-continuo que carece de copia de $\ell_1(\aleph_1)$. Entonces X es WLD y, por tanto, para todo subconjunto convexo $C \subset X$, todo subconjunto w^*-compacto K de X^{**} y todo contorno B de K se verifica $DIST(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K),C) = DIST(B,C)$.*

Demostración. Claramente, por el Lema 9.9 y el Lema 9.7, X admite una descomposición de tipo contable $X = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \oplus X_\alpha$ como suma directa 1-incondicional de WCG ideales cerrados X_α. Ahora basta aplicar la Proposición 9.6 ■

9.3. Espacios con la propiedad $\mathcal{Q}$

Sea X un espacio de Banach y consideremos el juego con dos jugadores **A** y **B**, cuyas jugadas consisten en elegir subespacios cerrados separables de X de la siguiente manera: (1) primero juega **A** y elige un subespacio cerrado separable F_1 de X; (2) luego juega **B** y elige un nuevo subespacio cerrado separable E_1 tal que $F_1 \subset E_1 \subset X$; (3) vuelve a jugar **A** y elige un subespacio cerrado separable F_2 tal que $F_1 \subset E_1 \subset F_2 \subset X$; etc. Decimos que **B** gana la partida si existe una proyección $P : X \to Y := \overline{\bigcup_{n\geq 1} E_n}$ con $\|P\| = 1$. Decimos que el espacio de Banach X pertenece a la clase $\mathcal{Q}$ (abrev., $X \in \mathcal{Q}$) si el jugador **B** tiene una estrategia ganadora.

Proposición 9.12. *Sea X un espacio de Banach con $X \in \mathcal{Q}$. Entonces para todo subconjunto w^*-compacto $K \subset X^{**}$ y todo contorno B de K se tiene que: $DIST(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K),X) \leq 3DIST(B,X)$.*

Demostración. En caso contrario, existirán un subconjunto w^*-compacto $K \subset B(X^{**})$, un contorno B de K y dos números reales $a, b > 0$ tales que

$$DIST(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K),X) > b > 3a > 3DIST(B,X).$$

Elegimos $\psi \in S(X^{***}) \cap X^\perp$ y $w_0 \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$ tales que $\langle \psi, w_0\rangle > b$. Sea $f = (f_1, f_2, \dots)$ una estrategia ganadora para el jugador **B**. A continuación procedemos por etapas.

Etapa 1. Puesto que $\langle \psi, w_0\rangle > b$, existe $x_1^* \in S(X^*)$ tal que $\langle w_0, x_1^*\rangle > b$. De aquí que existe un cierto $\eta_1 \in co(B)$ tal que $\langle x_1^*, \eta_1\rangle > b$. Claramente η_1 tiene la forma $\eta_1 := \sum_{i=1}^{r_1} \lambda_{1i}\eta_{1i}$ con $\lambda_{1i} \in [0,1]$, $\eta_{1i} \in B$, $i = 1, 2, ..., r_1$, y $\sum_{i=1}^{r_1} \lambda_{1i} = 1$. Como $\eta_{1i} \in B$ y $DIST(B,X) < a$, podemos hacer la descomposición $\eta_{1i} = \eta_{1i}^1 + \eta_{1i}^2$, siendo

$\eta^1_{1i} \in X$ y $\eta^2_{1i} \in aB(X^{**})$. El jugador **A** comienza la partida eligiendo el subespacio cerrado separable $F_1 \subset X$ y le responde el jugador **B** utilizando la estrategia ganadora f y eligiendo otro espacio cerrado separable $E_1 := f_1(F_1)$ tal que $F_1 \subset E_1$. Sea $\{e_{1n} : n \geq 1\} \subset E_1$ una familia contable densa en E_1.

Etapa 2. Sea $Y_1 := [\{\eta^1_{1i} : i = 1, 2, ..., r_1\} \cup \{e_{ij} : i, j \leq 1\}]$, que es finito-dimensional. Se tiene que:

(i) Como $\langle \psi, w_0 \rangle > b$ y $\psi \restriction Y_1 = 0$, existe $x^*_2 \in S(X^*)$ tal que $x^*_2 \restriction Y_1 = 0$ y $\langle w_0, x^*_2 \rangle > b$.

(ii) Como $\langle w_0, x^*_i \rangle > b,\ i = 1, 2$, existe un cierto $\eta_2 \in co(B)$ tal que $\langle x^*_i, \eta_2 \rangle > b,\ i = 1, 2$. Claramente η_2 tiene la forma $\eta_2 := \sum_{i=1}^{r_2} \lambda_{2i}\eta_{2i}$ con $\lambda_{2i} \in [0, 1],\ \eta_{2i} \in B,\ i = 1, 2, ..., r_2$, y $\sum_{i=1}^{r_2} \lambda_{2i} = 1$.

Como $\eta_{2i} \in B$ y $DIST(B, X) < a$, podemos hacer la descomposición $\eta_{2i} = \eta^1_{2i} + \eta^2_{2i}$, siendo $\eta^1_{2i} \in X$ y $\eta^2_{2i} \in aB(X^{**}),\ i = 1, 2, ..., r_2$. A continuación el jugador **A** elige como subespacio cerrado separable F_2 al subespacio cerrado generado por $E_1 \cup \{\eta^1_{2i} : i = 1, 2, ..., r_2\}$. El jugador **B**, utilizando la estrategia ganadora f, elige el subespacio cerrado separable $E_2 := f_2(F_1, E_1, F_2)$ tal que $F_2 \subset E_2$. Sea $\{e_{2n} : n \geq 1\} \subset E_2$ una familia contable densa en E_2.

Etapa 3. Sea $Y_2 := [\{\eta^1_{ij} : i = 1, 2; 1 \leq j \leq r_i\} \cup \{e_{ij} : i, j \leq 2\}]$, que es finito-dimensional y verifica $Y_1 \subset Y_2 \subset X$. Se tiene que:

(i) Como $\langle \psi, w_0 \rangle > b$ y $\psi \restriction Y_2 = 0$, existe $x^*_3 \in S(X^*)$ tal que $x^*_3 \restriction Y_2 = 0$ y $\langle w_0, x^*_3 \rangle > b$.

(ii) Como $\langle w_0, x^*_i \rangle > b,\ i = 1, 2, 3$, existe un cierto $\eta_3 \in co(B)$ tal que $\langle x^*_i, \eta_3 \rangle > b,\ i = 1, 2, 3$. Claramente η_3 tiene la forma $\eta_3 := \sum_{i=1}^{r_3} \lambda_{3i}\eta_{3i}$ con $\lambda_{3i} \in [0, 1],\ \eta_{3i} \in B,\ i = 1, 2, ..., r_3$, y $\sum_{i=1}^{r_3} \lambda_{3i} = 1$.

Como $\eta_{3i} \in B$ y $DIST(B, X) < a$, podemos hacer la descomposición $\eta_{3i} = \eta^1_{3i} + \eta^2_{3i}$, siendo $\eta^1_{3i} \in X$ y $\eta^2_{3i} \in aB(X^{**}),\ i = 1, 2, ..., r_3$. A continuación el jugador **A** elige como subespacio cerrado separable F_3 al subespacio cerrado generado por $E_2 \cup \{\eta^1_{3i} : i = 1, 2, ..., r_3\}$. El jugador **B**, utilizando la estrategia ganadora f, elige el subespacio cerrado separable $E_3 := f_3(F_1, E_1, F_2, E_2, F_3)$ tal que $F_3 \subset E_3$. Sea $\{e_{3n} : n \geq 1\} \subset E_3$ una familia contable densa en E_3.

A continuación reiteramos hasta el infinito. Sea $Y := \overline{\cup_{k\geq 1} Y_k} = \overline{\cup_{k\geq 1} E_k} = \overline{\cup_{k\geq 1} F_k} \subset X$, que es un subespacio cerrado separable de X tal que existe una proyección $P : X \to Y$ con $\|P\| = 1$. Sea η_0 un punto de w^*-acumulación de $\{\eta_k : k \geq 1\}$ en X^{**}. Obviamente $\eta_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$. Sean $H := P^{**}(K)$ y $B_0 := P^{**}(B)$. Observemos que H es un subconjunto w^*-compacto de X^{**} (en realidad, dentro de $\overline{Y}^{w^*}$), con $\overline{\text{co}}^{w^*}(H) = P^{**}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K))$, y B_0 es un contorno de H.

Aserto 1. η_0 se descompone como $\eta_0 = \eta^1_0 + \eta^2_0$ con $\eta^1_0 \in \overline{Y}^{w^*}$ y $\eta^2_0 \in aB(X^{**})$.

En efecto, esto es obvio porque cada η_k se descompone como $\eta_k = \eta^1_k + \eta^2_k$ con $\eta^1_k \in Y$

y $\eta_k^2 \in aB(X^{**})$ y $aB(X^{**})$ es w^*-compacto.

Aserto 2. $dist(\eta_0, Y) \geq b$ y $dist(\eta_0^1, Y) \geq b - a$.

En efecto, sea $\varphi \in B(X^{***})$ un punto de w^*-acumulación de $\{x_n^* : n \geq 1\}$. Puesto que $\langle \eta_k, x_n^* \rangle > b$, $\forall k \geq n$, concluimos que $\langle \eta_0, x_n^* \rangle \geq b$, de donde obtenemos que $\langle \varphi, \eta_0 \rangle \geq b$. Por otra parte $\varphi \in Y^\perp$, pues $x_k^* \restriction Y_{k-1} = 0$. De aquí que $dist(\eta_0, Y) \geq \langle \varphi, \eta_0 \rangle \geq b$. Finalmente, como $\eta_0^2 \in aB(X^{**})$, también obtenemos que $dist(\eta_0^1, Y) \geq b - a$.

Aserto 3. $dist(P^{**}\eta_0, Y) \geq b - 2a$.

En efecto, observemos que $P^{**}\eta_0^1 = \eta_0^1$, pues P^{**} es la identidad sobre $\overline{Y}^{w^*}$. Así que $P^{**}\eta_0 = \eta_0^1 + P^{**}\eta_0^2$, con $\|P^{**}\eta_0^2\| \leq a$. Por tanto

$$dist(P^{**}\eta_0, Y) \geq dist(\eta_0^1, Y) - a \geq b - 2a > a.$$

En definitiva hemos llegado a la siguiente situación:

(1) $DIST(B_0, Y) \leq DIST(B, X) < a$, siendo B_0 un contorno de subconjunto w^*-compacto H.

(2) $dist(P^{**}\eta_0, Y) \geq b - 2a > a$, con $P^{**}\eta_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$.

(3) Y es un espacio de Banach separable.

Por la Proposición 6.2 estamos ante una contradicción que prueba el enunciado. ■

Proposición 9.13. *Sea X un espacio de Banach con $X \in \mathcal{Q}$. Entonces para todo subconjunto w^*-compacto $K \subset X^{**}$ y todo contorno B de K tal que $X \cap B$ es w^*-denso en B, se verifica que $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X) = DIST(B, X)$.*

Demostración. Basta seguir los pasos de la demostración de la Proposición 9.12 pero cogiendo η_k en $X \cap B$, lo que implica que $\eta_0 \in \overline{Y}^{w^*}$. ■

Proposición 9.14. *Sea X un espacio de Banach con $X \in \mathcal{Q}$. Entonces para todo subconjunto w^*-compacto $K \subset X^{**}$ con $X \cap \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ w^*-denso en $\overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ y todo contorno B de K, se verifica que $DIST(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X) = DIST(B, X)$.*

Demostración. Consideremos $H := \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ y $B_0 := B \cup (X \cap \overline{\text{co}}^{w^*}(K))$. Observemos que

(i) B_0 es un contorno de H y $DIST(B_0, X) = DIST(B, X)$; (ii) $co(B_0) \cap X$ es w^*-denso en H y, por tanto, en $co(B_0)$.

Por la Proposición 9.13 obtenemos que $DIST(H, X) = DIST(B_0, X) = DIST(B, X)$. ■

¿Qué espacios de Banach pertenecen a la clase $\mathcal{Q}$? Vamos a ver en la siguiente proposición que pertenecen a esta clase todos los espacios con un generador proyectivo.

Se dice (ver [68, pg. 42],[37, pg. 106]) que un espacio de Banach V admite un *generador proyectivo* (W, Φ) si W es un subconjunto $W \subset V^*$, que es $\mathbb{Q}$-lineal (es decir, W es un espacio vectorial respecto de $\mathbb{Q}$) y 1-normante sobre V, y Φ es una aplicación $\Phi : W \to 2^V$ tal que $|\Phi(w)| \leq \aleph_0$, $\forall w \in W$, y para todo subconjunto $\mathbb{Q}$-lineal $B \subset W$ se verifica que $\Phi(B)^{\perp} \cap \overline{B}^{w^*} = \{0\}$.

Proposición 9.15. *Si un espacio de Banach V admite un generador proyectivo, entonces $V \in \mathcal{Q}$.*

Demostración. Supongamos pues que (W, Φ) es un generador proyectivo para V. Definimos $\Psi : V \to 2^V$ de modo que $\Psi(v) \subset W \cap B(X^*)$ sea un subconjunto contable verificando $\|v\| = \sup\langle \Psi(v), v\rangle$. Precisamos el siguiente resultado de [37, pg. 104].

Aserto. Sean V un espacio de Banach, W un subconjunto $\mathbb{Q}$-lineal de V^*, $\Phi : W \to 2^V$ y $\Psi : V \to 2^W$ dos aplicaciones tales que $\Phi(w)$ y $\Psi(v)$ son contables para todo $w \in W$ y $v \in V$, y $A \subset V$, $B \subset W$ dos subconjuntos contables. Entonces existen dos subconjuntos contables $\mathbb{Q}$-lineales $\mathfrak{G}(A) \subset V$ y $\mathfrak{G}(B) \subset W$ tales que $A \subset \mathfrak{G}(A)$, $B \subset \mathfrak{G}(B)$, $\Phi(\mathfrak{G}(B)) \subset \mathfrak{G}(A)$ y $\Psi(\mathfrak{G}(A)) \subset \mathfrak{G}(B)$.

Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ nuestros jugadores. Comencemos el juego.

Primera jugada. En primer lugar el jugador $\mathbf{A}$ elige un subespacio cerrado separable $F_1 \subset V$. Sean $A_1 \subset F_1$ un subconjunto contable denso de F_1 y $B_1 = \Psi(A_1) \subset W$. Por el Aserto existen sendos subconjuntos contables $\mathbb{Q}$-lineales $\mathfrak{G}(A_1)$, $\mathfrak{G}(B_1)$ tales que $A_1 \subset \mathfrak{G}(A_1) \subset V$, $B_1 \subset \mathfrak{G}(B_1) \subset W$, $\Phi(\mathfrak{G}(B_1)) \subset \mathfrak{G}(A_1)$ y $\Psi(\mathfrak{G}(A_1) \subset \mathfrak{G}(B_1)$. A continuación $\mathbf{B}$ elige un subespacio cerrado separable E_1 cogiendo $E_1 = \overline{\mathfrak{G}(A_1)}$.

Segunda jugada. El jugador $\mathbf{A}$ elige un nuevo subespacio cerrado separable F_2 tal que $E_1 \subset F_2 \subset V$. Sean A_2 un subconjunto contable denso de F_2 de modo que $\mathfrak{G}(A_1) \subset A_2$ y $B_2 = \Psi(A_2) \cup \mathfrak{G}(B_1)$, que es un subconjunto contable de W. Por el Aserto existen sendos subconjuntos contables $\mathbb{Q}$-lineales $A_2 \subset \mathfrak{G}(A_2) \subset V$ y $B_2 \subset \mathfrak{G}(B_2) \subset W$ tales que $\Phi(\mathfrak{G}(B_2)) \subset \mathfrak{G}(A_2)$ y $\Psi(\mathfrak{G}(A_2)) \subset \mathfrak{G}(B_2)$. A continuación elige $\mathbf{B}$ un subespacio cerrado separable E_2 cogiendo $E_2 = \overline{\mathfrak{G}(A_2)}$.

La partida prosigue hasta el infinito.

Sean $Y = \overline{\bigcup_{n \geq 1} F_n}$, $A_0 = \bigcup_{n \geq 1} A_n \subset V$ y $B_0 = \bigcup_{n \geq 1} B_n \subset W$, que verifican

(a) A_0 y B_0 son subconjuntos contables $\mathbb{Q}$-lineales.

(b) $Y = \overline{A_0}$.

(c) $\Psi(A_0) \subset B_0$ y $\Phi(B_0) \subset A_0$. Además, puesto que (W, Φ) es un generador proyectivo y $B_0 \subset W$ es un subconjunto $\mathbb{Q}$-lineal, se tiene $A_0^{\perp} \cap \overline{B_0}^{w^*} \subset \Phi(B_0)^{\perp} \cap \overline{B_0}^{w^*} = \{0\}$.

(d) $\forall a \in A_0$, $\|a\| = \sup\langle B_0 \cap B(V^*), a\rangle$.

Por tanto, de [37, Lemma 6.1.1] se sigue que existe una proyección $P : V \to V$ de norma 1 tal que $P(V) = Y$. ∎

Si I es un conjunto, se denota por $\Sigma(I)$ al subconjunto de $\mathbb{R}^I$ consistente en los elementos con soporte contable. Al espacio $\mathbb{R}^I$ se le dota de la topología producto, que es la topología de la convergencia sobre I. Si (K, T_K) es un compacto Hausdorff, decimos que un subconjunto A de K es un Σ-subconjunto (ver [68]) de K si existe una inyección continua $h : K \to \mathbb{R}^I$, para algún conjunto I, tal que $h(A) = h(K) \cap \Sigma(I)$. Se dice que un compacto Hausdorff K es un *compacto de Valdivia* si K tiene algún Σ-subconjunto denso.

Consideremos las siguientes clases de espacios de Banach:

(A) **La clase $\mathcal{A}$.** Un espacio de Banach X pertenece a la clase $\mathcal{A}$ sii existe un compacto de Valdivia K tal que X es (isométricamente isomorfo a) un subespacio de $C(K)$ y además X es τ_A-cerrado en $C(K)$ para algún Σ-subconjunto denso A de K, siendo τ_A la topología de la convergencia sobre A.

(B) **La clase $\mathcal{V}$.** Un espacio de Banach X pertenece a la clase $\mathcal{V}$ sii existen un subespacio 1-normante $F \subset X^*$, un conjunto I y una aplicación continua inyectiva $j : (B_{X^*}, w^*) \to \mathbb{R}^I$ tal que $F \cap B_{X^*} \subset j^{-1}(\Sigma(I))$ (en particular (B_{X^*}, w^*) es compacto de Valdivia).

(C) **Espacios 1-Plichko.** Un espacio de Banach X se dice que es 1-Plichko si X posee un subconjunto $M \subset$ tal que $X = \overline{[M]}$ y el subespacio de X^*

$$\{x^* \in X^* : \{x \in M : \langle x^*, x\rangle \neq 0\} \text{ es contable}\}$$

es 1-normante sobre X.

Ocurre que estas tres clases de espacios de Banach coinciden entre sí (ver [111],[88],[68]).

Corolario 9.16. *Se tiene que $\mathcal{V} \subset \mathcal{Q}$, es decir, todo espacio de Banach de la clase $\mathcal{V}$ pertenece a la clase $\mathcal{Q}$.*

Demostración. Basta aplicar que todo espacio de Banach de la clase $\mathcal{V}$ tiene un generador proyectivo (ver [88]) y la Proposición 9.15. ∎

NOTAS. Como consecuencia del Corolario 9.16 los siguientes espacios de Banach están en la clase $\mathcal{Q}$:

(a) Los espacios de Banach que son WLD. Para estos espacios, que tienen bola dual unidad cerrada w^*-angélica, hemos dado resultados más fuertes en capítulos anteriores (ver la Proposición 6.2).

(b) Los espacios $C(K)$ con K compacto de Valdivia. En particular todos los espacios $C([0,1]^I)$ y $C(\{0,1\}^I)$.

(c) Los espacios de Banach V que admiten una PRI y verifican $Dens(V) \leq \aleph_1$. Estos espacios son 1-Plichko (ver [68, pg. 48]) y es muy fácil construirles directamente un generador proyectivo.

(d) Los espacios de Banach V que admiten base 1-incondicional $(e_i)_{i\in I}$. Estos espacios son 1-Plichko, pues el propio sistema biortogonal $(e_i, f_i)_{i\in I}$, donde f_i es el funcional asociado a e_i, es un sistema de Markuševič contablemente 1-normante. Para estos espacios se han obtenido mejores resultados en la sección anterior.

Capítulo 10

Sobre la igualdad $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$

10.1. Introducción y preliminares

Decimos que un **espacio de Banach dual** X^* **es super-**(P) si para todo subconjunto w^*-compacto $K \subset X^*$ y todo contorno B de K se verifica que $\overline{\text{co}}(B) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$. En los Capítulos previos hemos probado (ver Proposición 4.10) que, si X^* no es super-(P), entonces $X^{**} \neq Seq(X^{**})$, es decir, que $X^{**} = Seq(X^{**})$ implica que X^* es super-(P). Sabemos que ambas propiedades son equivalentes cuando X es separable, gracias a una combinación de resultados de Haydon, Odell-Rosenthal y Simons.

Proposición 10.1. *Sea X un espacio de Banach separable. Entonces son equivalentes:*

(a) X carece de una copia isomórfica de ℓ_1.
(b) $X^{**} = Seq(X^{**})$.
(c) X^* es super-(P).

Demostración. La equivalencia $(a) \Leftrightarrow (b)$ es el T. de Odell-Rosenthal [87] y $(b) \Rightarrow (c)$ sale de la igualdad de Simons [102]. Finalmente $(c) \Rightarrow (a)$ sale de [65]. ■

A la vista de estos resultados parece natural preguntarse si estas propiedades son equivalentes en general. Vamos a dedicarnos a continuación a estudiar este problema.

10.2. Consecuencias de la desigualdad $X_{\aleph_0} \neq X^{**}$

Recordemos que, si (Y, τ) un espacio topológico, $A \subset Y$ un subconjunto y $x \in \overline{A}$, la "tightness" de x respecto de A es el cardinal $t(x, A)$ (ó $t_\tau(x, A)$) definido por

$$t(x, A) = \text{mín}\{|D| : D \subset A, x \in \overline{D}\}.$$

Por tanto, si X es un espacio de Banach, el hecho $X_{\aleph_0} \neq X^{**}$ equivale a decir que existe $u \in X^{**}$ tal que $t_{w^*}(u, X) \geq \aleph_1$. Si κ es un cardinal incontable, denotaremos por

$X_{<\kappa}$ al subespacio de X^{**}

$$X_{<\kappa} := \cup\{\overline{[A]}^{w^*} : A \subset X, \quad |A| < \kappa\}.$$

Proposición 10.2. *Sea X un espacio de Banach y κ un cardinal incontable. Entonces:*

(1) Si $cf(\kappa) > \aleph_0$, $X_{<\kappa}$ es un subespacio $\|\cdot\|$-cerrado de X^{**}.

(2) $X_{\aleph_0} = X_{<\aleph_1} \subset X_{<\kappa}$, y $S(X_{<\kappa})$ es un contorno de $B(X^{**})$, $\forall \kappa \geq \aleph_1$.

Demostración. Son propiedades de demostración inmediata. ■

La Proposición 10.3, que sigue a continuación, muestra cómo construir una secuencia básica monótona $\{x^*_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset S(X^*)$ con funcionales asociados $\{u_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset X_{<\kappa}$, que constituyen también una secuencia básica monótona, cuando $t_{w^*}(u, X) \geq \kappa \geq \aleph_1$ y $cf(\kappa) \geq \aleph_1$, para algún $u \in X^{**}$.

Proposición 10.3. *Sea X un espacio de Banach y κ un cardinal tal que $\kappa \geq \aleph_1$ y $cf(\kappa) \geq \aleph_1$. Supongamos que existe $u \in S(X^{**})$ verificando $t_{w^*}(u, X) \geq \kappa$ y sea $dist(u, X_{<\kappa}) > \epsilon_0 > 0$. Entonces existen:*

(A) Dos secuencias de subespacios $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y $\{B_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de X y X^*, respectivamente, tales que: (i) A_α y B_α se 1-norman mutuamente; (ii) $Dens(A_\alpha) \leq |\omega_0 + \alpha| \geq Dens(B_\alpha)$; (iii) $A_\alpha \subset A_\beta$ y $B_\alpha \subset B_\beta$ para $1 \leq \alpha < \beta < \kappa$.

(B) Una secuencia básica monótona $\{x^*_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset S(X^*)$ tal que $\langle u, x^*_\alpha\rangle > \epsilon_0 > 0$ (por tanto es de tipo ℓ_1^+), $x^*_\alpha \perp A_\alpha$ y $x^*_\alpha \in B_{\alpha+1}$ para todo $1 \leq \alpha < \kappa$.

(C) Una secuencia $\{w_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset B(X^{**})$ tal que, si $z_\alpha := w_{\alpha+1} - w_\alpha$, para todo $1 \leq \alpha < \kappa$ se verifica:

(C1) $w_1 = 0$, $w_\alpha \in B(\overline{A_\alpha}^{w^*})$ y $\langle w_\alpha, x^*_\beta\rangle = \langle u, x^*_\beta\rangle > \epsilon_0$, para $\beta < \alpha$.

(C2) $z_\alpha \perp B_\alpha$, $z_\alpha \in \overline{A_{\alpha+1}}^{w^*}$, $\langle z_\alpha, x^*_\alpha\rangle > \epsilon_0$, $\langle z_\alpha, x^*_\beta\rangle = 0$, para $\alpha \neq \beta$, y $\epsilon_0 < \|z_\alpha\| \leq 2$.

(C3) $\{z_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una secuencia básica monótona de $X_{<\kappa}$ tal que, para unos coeficientes $\frac{1}{2} \leq \mu_\alpha \leq 1/\epsilon_0$ adecuados, se verifica que $\{\mu_\alpha z_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es el sistema de funcionales asociados a $\{x^*_\alpha : \alpha < \kappa\}$.

Además, si $Dens(X) = \kappa$, la anterior construcción puede hacerse de modo que

$$X = \bigcup_{\alpha<\kappa} \overline{A_\alpha}, \quad X_{<\kappa} = \bigcup_{\alpha<\kappa} \overline{A_\alpha}^{w^*}, x^*_\alpha \xrightarrow{w^*} 0 \text{ para } \alpha \to \kappa, \text{ y } \overline{\{w_\alpha : \alpha < \kappa\}}^{w^*} \cap (X^{**} \setminus X_{<\kappa}) \neq \emptyset.$$

Demostración. En primer término $dist(u, X_{<\kappa}) > 0$ (porque $X_{<\kappa}$ es $\|\cdot\|$-cerrado y $u \notin X_{<\kappa}$), por lo que existe $1 > \epsilon_0 > 0$ verificando $dist(u, X_{<\kappa}) > \epsilon_0 > 0$. A continuación procedemos por inducción transfinita.

Etapa 1. Hacemos $A_1 = \{0\} = B_1$ y $w_1 = 0$. Elegimos $x^*_1 \in S(X^*)$ tal que $\langle u, x^*_1\rangle > \epsilon_0$, así como subespacios separables $A_2 \subset X$ y $B_2 \subset X^*$ tales que se 1-norman mutuamente y $x^*_1 \in B_2$. Esto se hace de la siguiente forma. Se considera $B_{21} = [x^*_1]$ y se elige un subespacio separable $A_{21} \subset X$ que 1-norme a B_{21}. A continuación sea $B_{22} \subset X^*$

un subespacio separable que 1-norme a A_{21} y tal que $B_{21} \subset B_{22}$. En la siguiente etapa elegimos un subespacio separable $A_{22} \subset X$ que 1-norme a B_{22} y tal que $A_{21} \subset A_{22}$. Y así sucesivamente. Hacemos $A_2 := \overline{\cup_{n\geq 1} A_{2n}}$ y $B_2 := \overline{\cup_{n\geq 1} B_{2n}}$.

Obviamente $x_1^* \perp A_1$. Consideremos los operadores

$$A_2 \overset{i}{\hookrightarrow} X$$
$$A_2^* \overset{i^*}{\twoheadleftarrow} X^* \overset{j}{\hookleftarrow} B_2$$
$$A_2^{**} = \overline{A_2}^{w^*} \overset{i^{**}}{\hookrightarrow} X^{**} \overset{j^*}{\twoheadrightarrow} B_2^*,$$

en donde "$\hookrightarrow$" indica inclusión isométrica y "$\twoheadleftarrow$" 1-cociente canónico. El operador $i^* \circ j =: \psi : B_2 \hookrightarrow A_2^*$ es una inclusión isométrica, por lo que $j^* \circ i^{**} = \psi^* : \overline{A_2}^{w^*} \twoheadrightarrow B_2^*$ es un 1-cociente canónico w^*-w^*-continuo. Por tanto

$$\psi^*(B(\overline{A_2}^{w^*})) = B(B_2^*).$$

Como $j^*(u) \in B(B_2^*)$, existe $w_2 \in B(\overline{A_2}^{w^*})$ tal que $\psi^*(w_2) = j^*(u)$ y, por tanto

$$\langle w_2, x_1^* \rangle = \langle u, x_1^* \rangle > \epsilon_0.$$

Además, si hacemos $z_1 := w_2 - w_1 = w_2$, entonces $z_1 \perp B_1$, $z_1 \in \overline{A_2}^{w^*}$, $\langle z_1, x_1^* \rangle > \epsilon_0$ y $\epsilon_0 < \|z_1\| \leq 1 < 2$. Aquí termina la Etapa 1. Observemos que hemos construido A_i, B_i, w_i, para $i \leq 2$, y x_j^*, z_j para $j \leq 1$.

Etapa 2. Como $dist(u, \overline{A_2}^{w^*}) > \epsilon_0$ (porque $\overline{A_2}^{w^*} \subset X_{<\kappa}$), existe $x_2^* \in S(X^*) \cap A_2^{\perp}$ tal que $\langle u, x_2^* \rangle > \epsilon_0$. Observemos que se verifica:

(1) $\|\lambda_1 x_1^*\| \leq \|\lambda_1 x_1^* + \lambda_2 x_2^*\|, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, porque A_2 1-norma al subespacio $[x_1^*]$ y $x_2^* \perp A_2$.

(2) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$, entonces $\|\lambda_1 x_1^* + \lambda_2 x_2^*\| \geq \epsilon_0(\lambda_1 + \lambda_2)$ porque $\langle u, x_i^* \rangle > \epsilon_0$, $i = 1, 2,$.

Sean $A_2 \subset A_3 \subset X$ y $B_2 \subset B_3 \subset X^*$ subespacios separables tales que se 1-norman mutuamente y $x_2^* \in B_3$. Consideremos los operadores

$$A_3 \overset{i}{\hookrightarrow} X$$
$$A_3^* \overset{i^*}{\twoheadleftarrow} X^* \overset{j}{\hookleftarrow} B_3$$
$$A_3^{**} = \overline{A_3}^{w^*} \overset{i^{**}}{\hookrightarrow} X^{**} \overset{j^*}{\twoheadrightarrow} B_3^*.$$

El operador $i^* \circ j =: \psi : B_3 \hookrightarrow A_3^*$ es una inclusión isométrica, por lo que $j^* \circ i^{**} = \psi^* : \overline{A_3}^{w^*} \twoheadrightarrow B_3^*$ es un 1-cociente canónico w^*-w^*-continuo. Por tanto

$$\psi^*(B(\overline{A_3}^{w^*})) = B(B_3^*).$$

Como $j^*(u) \in B(B_3^*)$, existe $w_3 \in B(\overline{A_3}^{w^*})$ tal que $\psi^*(w_3) = j^*(u)$, de donde

$$\langle w_3, x_i^* \rangle = \langle u, x_i^* \rangle > \epsilon_0,\ i = 1, 2.$$

Hacemos $z_2 := w_3 - w_2$. Entonces $z_2 \perp B_2$, $z_2 \in \overline{A_3}^{w^*}$,$\langle z_2, x_1^* \rangle = \langle z_1, x_2^* \rangle = 0$, $\langle z_2, x_2^* \rangle > \epsilon_0$ y $\epsilon_0 < \|z_2\| \leq 2$. Además $\{z_1, z_2\}$ es secuencia básica monótona pues

$$\|\lambda_1 z_1\| \leq \|\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2\|, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

porque B_2 1-norma al subespacio $[z_1]$ y $z_2 \perp B_2$. Aquí termina la Etapa 2. Observemos que hemos construido A_i, B_i, w_i, para $i \leq 3$, y x_j^*, z_j para $j \leq 2$.

Etapa $\alpha < \kappa$. Supongamos construidas las etapas para todo $\beta < \alpha$. Disponemos de los subespacios $A_{\beta+1}$ y $B_{\beta+1}$ de X y X^*, respectivamente, y de los vectores $w_{\beta+1} \in B(\overline{A_{\beta+1}}^{w^*})$ y $x_\beta^* \in S(B_{\beta+1})$, $\beta < \alpha$, verificando los requisitos recogidos en $(A), (B)$ y (C). Hacemos

$$A_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} A_{\beta+1} \quad \text{y} \quad B_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} B_{\beta+1},$$

que son subespacios de X y X^*, que se 1-norman mutuamente. Además

$$Dens(A_\alpha) \leq |\alpha| \times \sup_{\beta<\alpha}\{Dens(A_{\beta+1})\} \leq |\alpha| \times |\omega_0 + \alpha| = |\omega_0 + \alpha| < \kappa.$$

Análogamente $Dens(B_\alpha) \leq |\omega_0 + \alpha| < \kappa$. Como $\overline{A_\alpha}^{w^*} \subset X_{<\kappa}$, se tiene $dist(u, \overline{A_\alpha}^{w^*}) > \epsilon_0$ y, por tanto, existe $x_\alpha^* \in S(X^*) \cap A_\alpha^\perp$ tal que $\langle u, x_\alpha^* \rangle > \epsilon_0$. Observemos que, para $x^* \in \overline{[\{x_\beta^*; \beta < \alpha\}]}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se verifica:

(1) $\|x^*\| \leq \|x^* + \lambda x_\alpha^*\|$, porque A_α 1-norma al subespacio $\overline{[\{x_\beta^*; \beta < \alpha\}]} \subset \overline{B_\alpha}$ y $x_\alpha^* \perp A_\alpha$.

(2) Si $x^* \in co\{x_\gamma^* : \gamma \leq \alpha\}$, entonces $\|x^*\| \geq \epsilon_0$ porque $\langle u, x_\beta^* \rangle > \epsilon_0,\ \beta \leq \alpha$.

Sean $A_\alpha \subset A_{\alpha+1} \subset X$ y $B_\alpha \subset B_{\alpha+1} \subset X^*$ subespacios tales que se 1-norman mutuamente, $x_\alpha^* \in B_{\alpha+1}$ y $Dens(A_{\alpha+1}) \leq |\omega_0 + \alpha + 1| \geq Dens(B_{\alpha+1})$. A continuación distinguimos dos casos, a saber:

Caso 1. $\alpha \in LO(< \kappa)$. Hay que elegir w_α y $w_{\alpha+1}$. Elegimos w_α arbitrariamente entre los puntos de $\bigcap_{\beta<\alpha} \overline{\{w_\gamma : \beta \leq \gamma < \alpha\}}^{w^*}$. Con esta elección se tiene que $w_\alpha \in B(\overline{A_\alpha}^{w^*})$ y $\langle w_\alpha, x_\beta^* \rangle = \langle u, x_\beta^* \rangle > \epsilon_0,\ \forall \beta < \alpha$. La elección de $w_{\alpha+1}$ se hace como en el Caso 2 que sigue.

Caso 2. $\alpha = \beta + 1$. Hay que elegir $w_{\alpha+1}$. Consideremos los operadores

$$A_{\alpha+1} \overset{i}{\hookrightarrow} X$$

$$A_{\alpha+1}^* \overset{i^*}{\leftarrow} X^* \overset{j}{\hookleftarrow} B_{\alpha+1}$$

$$A_{\alpha+1}^{**} = \overline{A_{\alpha+1}}^{w^*} \overset{i^{**}}{\hookrightarrow} X^{**} \overset{j^*}{\rightarrowtail} B_{\alpha+1}^*.$$

El operador $i^* \circ j =: \psi : B_{\alpha+1} \hookrightarrow A^*_{\alpha+1}$ es una inclusión isométrica, por lo que $j^* \circ i^{**} = \psi^* : \overline{A_{\alpha+1}}^{w^*} \rightarrowtail B^*_{\alpha+1}$ es un 1-cociente canónico w^*-w^*-continuo. Por tanto

$$\psi^*(B(\overline{A_{\alpha+1}}^{w^*})) = B(B^*_{\alpha+1}).$$

Como $j^*(u) \in B(B^*_{\alpha+1})$, existe $w_{\alpha+1} \in B(\overline{A_{\alpha+1}}^{w^*})$ tal que $\psi^*(w_{\alpha+1}) = j^*(u)$, de donde

$$\langle w_{\alpha+1}, x_i^* \rangle = \langle u, x_i^* \rangle > \epsilon_0,\ i \leq \alpha.$$

Hacemos $z_\alpha := w_{\alpha+1} - w_\alpha$. Entonces $z_\alpha \perp B_\alpha$, $z_\alpha \in \overline{A_{\alpha+1}}^{w^*}$,$\langle z_\alpha, x_i^* \rangle = 0$ para $i < \alpha$, $\langle z_\alpha, x_\alpha^* \rangle > \epsilon_0$ y $\epsilon_0 < \|z_\alpha\| \leq 2$. Aquí termina la Etapa α. Observemos que hemos construido A_i, B_i, w_i, para $i \leq \alpha + 1$, y x_j^*, z_j para $j \leq \alpha$.

La inducción transfinita nos asegura que pueden construirse todas las etapas para $\alpha < \kappa$. Escogemos los números μ_α verificando $\frac{1}{2} \leq \mu_\alpha \leq 1/\epsilon_0$ de modo que $\langle \mu_\alpha z_\alpha, x_\alpha^* \rangle = 1,\ \forall \alpha < \kappa$.

Finalmente supongamos que $Dens(X) = \kappa$ y sea $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia $\|\cdot\|$-densa en $B(X)$. Construimos los subespacios A_α de modo que $x_\alpha \in A_{\alpha+1}$. Con este requisito adicional es claro que $X = \bigcup_{\alpha<\kappa} \overline{A_\alpha}$, $X_{<\kappa} = \bigcup_{\alpha<\kappa} \overline{A_\alpha}^{w^*}$ y $x_\alpha^* \overset{w^*}{\to} 0$ para $\alpha \to \kappa$. Sea $v_0 \in \bigcap_{\beta<\kappa} \overline{\{w_\gamma : \beta \leq \gamma < \kappa\}}^{w^*}$. Entonces es inmediato que

$$\langle v_0, x_\alpha^* \rangle > \epsilon_0, \quad \forall \alpha < \kappa.$$

Como $x_\alpha^* \perp \overline{A_\alpha}^{w^*}$ y $X_{<\kappa} = \bigcup_{\alpha<\kappa} \overline{A_\alpha}^{w^*}$, necesariamente $v_0 \in \overline{\{w_\alpha : \alpha < \kappa\}}^{w^*} \cap (X^{**} \setminus X_{<\kappa})$. ■

Proposición 10.4. *Sea X espacio de Banach. Entonces:*

(A) La propiedad $X^{**} = X_{\aleph_0}$ está $\aleph_1$-determinada en el sentido de que $X^{**} = X_{\aleph_0}$ sii todos los subespacios $Y \subset X$ con $Dens(Y) = \aleph_1$ verifican $Y^{**} = Y_{\aleph_0}$.

(B) Son equivalentes: (B1) $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$; (B2) todo espacio de Banach Y que sea subespacio ó cociente de X verifica $Y^{**} = \mathcal{S}eq(Y^{**})$; (B3) todos los subespacios $Y \subset X$ con $Dens(Y) = \aleph_1$ verifican $Y^{**} = \mathcal{S}eq(Y^{**})$.

Demostración. (A) Por el Cor. 2.5, si $X^{**} = X_{\aleph_0}$, todos los subespacios $Y \subset X$ verifican $Y^{**} = Y_{\aleph_0}$. Supongamos que $X^{**} \neq X_{\aleph_0}$. Entonces la construcción efectuada en la Proposición 10.3 se puede hacer hasta una etapa $\kappa \geq \omega_1$. Adoptando la notación de la Proposición 10.3, sea $Y := \overline{A_{\omega_1}}$, que es un subespacio de X tal que $Dens(Y) = \aleph_1$, $Y = \cup_{\alpha<\omega_1} \overline{A_\alpha}$ y $Y_{\aleph_0} = \cup_{\alpha<\omega_1} \overline{A_\alpha}^{w^*}$. El vector w_{ω_1} verifica:

(a) $w_{\omega_1} \in \overline{B(Y)}^{w^*} = B(Y^{**})$.

(b) $w_{\omega_1} \notin Y_{\aleph_0}$, porque $w_{\omega_1} \notin \overline{A_\alpha}^{w^*}$, $\forall \alpha < \omega_1$, ya que $\langle w_{\omega_1}, x_\alpha^* \rangle > \epsilon_0$ pero $x_\alpha^* \perp A_\alpha$, $\forall \alpha < \omega_1$.

En consecuencia $Y^{**} \neq Y_{\aleph_0}$.

(B) $(B1) \Rightarrow (B2)$ es inmediato (ver Cor. 1.20). $(B2) \Rightarrow (B3)$ es obvio. Veamos $(B3) \Rightarrow (B1)$. En primer término, $(B3)$ implica que X carece de copia de ℓ_1, de donde todo subespacio $Y \subset X$ verifica $Y_{\aleph_0} = \mathcal{S}eq(Y^{**})$ por la Prop. 2.2. Por tanto, todo subespacio $Y \subset X$ con $Dens(Y) = \aleph_1$ verifica $Y^{**} = Y_{\aleph_0}$. Por (A) concluimos que $X^{**} = X_{\aleph_0}$, es decir $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$, porque $X_{\aleph_0} = \mathcal{S}eq(X^{**})$ ya que X carece de copia de ℓ_1. ■

Lema 10.5. *Sean X un espacio de Banach, D un conjunto incontable y $\{x_d^* : d \in D\}$ una familia de vectores de $B(X^*)$ tales que*

(i) Para todo $x \in X$ y todo $\epsilon > 0$ se verifica $|\{d \in D : |\langle x_d^*, x\rangle| \geq \epsilon\}| < \aleph_0$, es decir, el operador lineal continuo $T : X \to \ell_\infty(D)$ tal que $T(x) = (\langle x_d^*, x\rangle)_{d\in D}$ verifica que $T(X) \subset c_0(D)$.

(ii) Existen $u \in X^{**}$ y $\epsilon_0 > 0$ tales $\langle u, x_d^*\rangle \geq \epsilon_0$, $\forall d \in D$, es decir, $\forall x^* \in co(\{x_d^* : d \in D\})$ se verifica $\|x^*\| \geq \epsilon_0$.

Entonces X^* no es super-(P).

Demostración. Bajo las condiciones del enunciado el operador continuo $T : X \to \ell_\infty(D)$ tal que $T(x) = (\langle x_d^*, x\rangle)_{d\in D}$ verifica que $T(X) \subset c_0(D)$. Sea $B := \{e_d : d \in D\}$ la base canónica de $\ell_1(D) = c_0^*(D)$. Entonces en $(\ell_1(D), w^*)$ se tiene que $K := \overline{B}^{w^*} = \{e_d : d \in D\} \cup \{0\}$ y B es un contorno de K tal que $0 \notin \overline{\text{co}}(B)$. Sean $H := T^*(K)$ y $B_0 := T^*(B)$. Es claro que B_0 es un contorno del subconjunto w^*-compacto H y que $B_0 = \{x_d^* : d \in D\}$. Como $\langle u, x_d^*\rangle \geq \epsilon_0$, $\forall d \in D$, resulta que $\langle u, x^*\rangle \geq \epsilon_0$, $\forall x^* \in \overline{\text{co}}(B_0)$. Por tanto $0 \notin \overline{\text{co}}(B_0)$ aunque $0 \in H$, lo que implica que X^* no es super-(P). ■

Sea X un espacio de Banach. Veamos algunas definiciones que se utilizarán a continuación.

(1) Si τ es un cardinal infinito, decimos que X^* es τ-super-(P) si todo subespacio $Y \subset X$ con $Dens(Y) = \tau$ verifica que Y^* es super-(P). Es claro que X^* es $\aleph_0$-super-(P) sii X carece de copias de ℓ_1 (esto es fácil).

(2) X^* es ultra-(P) si para todo subespacio cerrado $Y \subset X$ se verifica Y^* es super-(P).

(3) X^* es c_0-super-(P) si, para todo operador lineal continuo $T : X \to c_0(I)$ con $|I| \geq \aleph_1$, se verifica que $\{T^*(e_i) : i \in I\}$ no es una ℓ_1^+-secuencia en X^*, es decir, que no existen $u \in X^{**}$ y $\epsilon_0 > 0$ tales que $\langle u, T^*(e_i)\rangle \geq \epsilon_0$, $\forall i \in I$. Observemos que si X^* no es c_0-super-(P), entonces X^* no es super-(P), por el Lema 10.5. Además, también es obvio que si X^* no es c_0-super-(P), entonces X^* no es $\aleph_1$-super-(P). En lo que sigue probaremos en numerosas ocasiones que un cierto dual X^* no es super-(P) y lo haremos demostrando que X^* no es c_0-super-(P).

Las razones que nos mueven a introducir estas propiedades (en especial la propiedad ultra-(P)) se recogen a continuación:

(a) La propiedad "X^* super-(P)" pasa a Y^* para todos los espacios cocientes Y de X (es trivial), pero no parece que pase a Y^* para todos los subespacios cerrados $Y \subset X$, aunque carecemos de contraejemplos.

(b) Sin embargo las propiedades "X^* ultra-(P)" y "$X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$ " pasan a Y^* tanto si Y es cocientes como si es subespacio de X (esto es fácil). Por tanto se trata de propiedades muy fuertes. A primera vista parecen propiedades mucho más fuertes que la simple super-(P). En consecuencia, es más plausible que "$X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$ " sea equivalente a la propiedad "X^* ultra-(P)" a que lo sea a la simple "X^* super-(P)."

(c) Si se verifica "$X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$" y $Z := \sum_{i=1}^{n} \oplus X_i,\ X_i = X,\ i = 1, 2, ..., n,$ entonces "$Z^{**} = \mathcal{S}eq(Z^{**})$" (esto es trivial). También es verdad para sumas directas infinitas contables shrinking, pero no lo es para sumas directas infinitas contables arbitrarias. Por ejemplo, no es verdad para ℓ_1-sumas infinitas.

(d) Si τ es un cardinal infinito, la propiedad "X^* es τ-super-(P)" pasa trivialmente a Y^*, para todo subespacio Y de X. También pasa a Y^* para todo cociente Y de X, como se prueba a continuación.

Lema 10.6. *Sean X un espacio de Banach, F un subespacio cerrado de X, $W \subset \frac{X}{F}$ un subespacio cerrado infinito dimensional y $Q : X \to \frac{X}{F}$ el cociente canónico. Entonces existe un subespacio cerrado $L \subset X$ tal que*

$$Dens(L) = Dens(W) \ \ y \ \ int(B(W)) \subset Q(B(L)) \subset B(W),$$

y por tanto $Q(L) = W$.

Demostración. Sea $\mathcal{W} := \{w_i : i < Dens(W)\}$ familia densa en $int(B(W))$ y sea $\{v_i : i < Dens(W)\} \subset B(X)$ familia tal que $Q(v_i) = w_i,\ i < Dens(W)$. Entonces $L := \overline{[\{v_i : i < Dens(W)\}]}$ verifica el Lema. En efecto:

(1) Es claro que $Q(B(L)) \subset B(W)$.

(2) Veamos que $int(B(W)) \subset Q(B(L))$. Para ello bastará probar que $B(W) \subset (1+\epsilon)Q(B(L)),\ \forall \epsilon > 0$. Fijemos pues $\epsilon > 0$. Sea $w \in B(W)$ y hallemos $v \in (1+\epsilon)B(L)$ tal que $Qv = w$. Elegimos $w_{i_1} \in \mathcal{W}$ tal que $\|w - w_{i_1}\| < 2^{-1}\epsilon$. A continuación se puede elegir $w_{i_2} \in \mathcal{W}$ tal que $\|w - w_{i_1} - 2^{-1}\epsilon w_{i_2}\| < 2^{-2}\epsilon$. Reiterando, hallamos vectores $w_{i_k} \in \mathcal{W}$ tales que

$$\|w - w_{i_1} - 2^{-1}\epsilon w_{i_2} - ... - 2^{-n+1}\epsilon w_{i_n}\| < 2^{-n}\epsilon,\ \forall n \geq 2.$$

Sea $v := v_{i_1} + \sum_{k\geq 2} 2^{-k+1}\epsilon v_{i_k}$, que es un vector de $(1+\epsilon)B(L)$. Obviamente $Qv = w$. ■

Proposición 10.7. *Sean τ es un cardinal infinito, X un espacio de Banach y F un subespacio cerrado de X tales que X^* es τ-super-(P). Entonces $(X/F)^*$ es también τ-super-(P).*

Demostración. Sea $W \subset \frac{X}{F}$ un subespacio cerrado con $Dens(W) = \tau$. Por el Lema 10.6 existe un subespacio cerrado $L \subset X$ tal que $Dens(L) = \tau$ y $Q(L) = W$. Ahora basta aplicar que la propiedad super-(P) pasa a los cocientes. ■

Lema 10.8. *Sean X un espacio de Banach, $Z \subset X^*$ un subespacio, $i : Z \hookrightarrow X^*$ la inclusión canónica y $v_0 \in \overline{B(Z)}^{w^*}$. Entonces existe $w_0 \in B(Z^{**})$ tal que $i^{**}(w_0) \upharpoonright X = v_0$.*

Demostración. Sea $(w_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset B(Z)$ una red tal que $z_\alpha \overset{w^*}{\to} v_0$ para $\alpha \in \mathcal{A}$. Pasando a una subred si es preciso, podemos suponer que existe $w_0 \in B(Z^{**})$ tal que $z_\alpha \overset{w^*}{\to} w_0$ para $\alpha \in \mathcal{A}$ en $(B(Z^{**}), w^*)$. Por tanto, si $x \in X$, se tiene que

$$\langle i^{**}(w_0), x\rangle = \lim_{\alpha\in\mathcal{A}} \langle i(z_\alpha), x\rangle = \langle v_0, x\rangle.$$

En consecuencia $i^{**}(w_0) \upharpoonright X = v_0$. ■

Lema 10.9. *Sean θ un ordinal incontable, X un espacio de Banach con base $\{x_\alpha : \alpha < \theta\} \subset S(X)$ y $\{x^*_\alpha : \alpha < \theta\} \subset X^*$ los funcionales asociados a la base $\{x_\alpha : \alpha < \theta\}$. Supongamos que existen $w \in X^{**}$ y $\epsilon > 0$ tales que $\langle w, x^*_\alpha\rangle > \epsilon$, $\forall \alpha < \theta$. Entonces X^* no es c_0-super-(P).*

Demostración. Sabemos que $(\langle x^*_\alpha, x\rangle)_{\alpha<\theta} \in c_0(\theta)$, $\forall x \in X$. En consecuencia, $T : X \to c_0(\theta)$ tal que $T(x) := (\langle x^*_\alpha, x\rangle)_{\alpha<\theta}$, $\forall x \in X$, es un operador lineal y continuo. Además $\langle w, T^*(e_\alpha)\rangle = \langle w, x^*_\alpha\rangle > \epsilon_0$, $\forall \alpha < \theta$. Por Lema 10.5 X^* no es c_0-super-(P). ■

Proposición 10.10. *Sean $\kappa \geq \aleph_1$ un cardinal con $cf(\kappa) \geq \aleph_1$ y X un espacio de Banach tal que existe $u \in S(X^{**})$ verificando $\tau(u, X) \geq \kappa$ (en particular esto ocurre si $X^{**} \neq X_{\aleph_0}$). Entonces existe un subespacio $Z \subset X_{<\kappa}$ dotado de κ-base $\{z_\alpha : \alpha < \kappa\}$ con funcionales asociados $\{s_\alpha : \alpha < \kappa\}$, un número $\epsilon > 0$ y un vector $w_0 \in Z^{**}$ tales que $\langle w_0, s_\alpha\rangle > \epsilon$, $\forall \alpha < \kappa$. En consecuencia, Z^* no es c_0-super-(P) y $X^*_{<\kappa}$ (así como $X^*_{\aleph_0}$) no es $\aleph_1$-super-(P).*

Demostración. Sea $dist(u, X_{<\kappa}) > \epsilon_0$. Hacemos la construcción de la Proposición 10.3 y adoptamos su notación. Sean $Z := \overline{[\{z_\alpha : \alpha < \kappa\}]}$ y $i : Z \hookrightarrow X^{**}$ la inclusión canónica. Sea $v_0 \in \overline{\{w_\alpha : \alpha < \kappa\}}^{w^*} \cap (X^{**} \setminus X_{<\kappa})$ verificando (ver proposición 10.3)

$$\langle v_0, x^*_\alpha\rangle > \epsilon_0, \quad \forall \alpha < \kappa.$$

Como $w_\alpha \in \overline{B(Z)}^{w^*}$, $\alpha < \kappa$, es claro que $v_0 \in \overline{B(Z)}^{w^*}$. Por Lema 10.8 existe $w_0 \in B(Z^{**})$ tal que $i^{**}(w_0) \upharpoonright X^* = v_0$. En particular, $\langle i^{**}(w_0), x^*_\alpha\rangle = \langle v_0, x^*_\alpha\rangle$. Sea $W := \overline{[\{x^*_\alpha : \alpha < \kappa\}]}$ y $j : W \hookrightarrow X^*$ la inclusión canónica. Por la construcción de la Proposición 10.3 existen números $\lambda_\alpha > 0$ tales que, si $s_\alpha := i^* \circ j^{**}(\lambda_\alpha x^*_\alpha)$, entonces :(i) $\{s_\alpha : \alpha < \kappa\}$

son los funcionales asociados a la base $\{z_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de Z; (ii) existe $\epsilon > 0$ tal que $\langle v_0, \lambda_\alpha x_\alpha^* \rangle > \epsilon$, $\forall \alpha < \kappa$. Por tanto

$$\langle w_0, s_\alpha \rangle = \langle w_0, i^* \circ j^{**}(\lambda_\alpha x_\alpha^*) \rangle = \langle i^{**}(w_0), j^{**}(\lambda_\alpha x_\alpha^*) \rangle = \langle v_0, \lambda_\alpha x_\alpha^* \rangle > \epsilon.$$

Ahora basta aplicar el Lema 10.9. ■

Corolario 10.11. *Sea X un espacio de Banach. Entonces "$X^*_{\aleph_0}$ es $\aleph_1$-super-(P)" $\Rightarrow$ "$X^{**} = Seq(X^{**})$"$\Rightarrow$ "X^* es ultra-(P)".*

Demostración. Veamos que "$X^*_{\aleph_0}$ es $\aleph_1$-super-(P)" $\Rightarrow$ "$X^{**} = Seq(X^{**})$. En primer término, X^* es $\aleph_1$-super-(P) porque $X \subset X_{\aleph_0}$. Por tanto X carece de una copia de ℓ_1 y $X_{\aleph_0} = Seq(X^{**})$. Ahora basta aplicar la Proposición 10.10.

Finalmente observemos que el hecho $X^{**} = Seq(X^{**})$ implica inmediatamente que X^* es ultra-(P) por la Proposición 10.16. ■

10.3. Algunos resultados positivos

El siguiente resultado siempre es cierto.

Proposición 10.12. *Sea X un espacio de Banach y consideremos los siguientes asertos:*

(0) $(B(X^{**}), w^*)$ es angélico.
(1) X^* posee la propiedad (C) de Corson.
(2) X^* carece de una secuencia básica incontable de tipo ℓ_1^+.
(3) $X^{**} = Seq(X^{**})$.
(4) X^* es super-(P).

(5) X es (C) y carece de una copia de ℓ_1.

Se verifica siempre que $(0) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5)$.

Demostración. $(0) \Rightarrow (1)$ sale de la caracterización de Pol de la propiedad (C) (ver [93, 3.4 Theorem]) y $(1) \Rightarrow (2)$ está probado en la Proposición 7.8.

$(2) \Rightarrow (3)$. Sea $z \in X^{**}$. Por la Proposición 10.3 existe un subespacio cerrado separable $Y \subset X$ tal que $z \in \overline{Y}^{w^*}$. Por otra parte, X no posee copia de ℓ_1 porque, de poseerla, resultaría que X^* tendría una copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$, que contradice (2). En consecuencia Y carece de copias de ℓ_1. Si identificamos Y^{**} con $\overline{Y}^{w^*}$, del teorema de Odell-Rosenthal [87] obtenemos que existe una secuencia $\{y_n : n \geq 1\} \subset Y$ tal que $y_n \to z$ en (X^{**}, w^*). Por tanto $z \in Seq(X^{**})$.

$(3) \Rightarrow (4)$. Esta implicación es consecuencia del Corolario 4.16.

$(4) \Rightarrow (5)$. En primer término, "X^* es super-(P)" implica que "X^* es (P)" y este hecho implica, por un resultado de Haydon [65], que X carece de copias de ℓ_1. Veamos que X es (C). Supongamos que (X) no es (C). Por la caracterización de R. Pol (ver

[93]) de la propiedad (C) existe un subconjunto convexo $A \subset B(X^*)$ tal que $0 \in \overline{A}^{w^*}$, pero $0 \notin \overline{\text{co}}^{w^*}(D)$ para todo subconjunto contable $D \subset A$. Sea B_0

$$B_0 := \bigcup \{\overline{\text{co}}^{w^*}(D) : D \subset A \text{ contable}\}.$$

Obviamente $0 \notin B_0$. Por otra parte es trivial ver que B_0 es convexo $\|\cdot\|$-cerrado y además es un contorno de $\overline{A}^{w^*}$. En consecuencia, X^* no es super-(P), una contradicción que prueba que X es (C). ■

Corolario 10.13. *Sea X un espacio de Banach y consideremos los siguientes asertos:*

(1) X^{**} es super-(P).
(2) X^* es (C).
(3) $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$.
(4) X^* es super-(P).
(5) X es (C).

Se verifica siempre que $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5)$.

Demostración. Todas las implicaciones salen de la Proposición 10.12. ■

Corolario 10.14. *Sea X un espacio de Banach. Entonces:*

(1) $X^{***} = \mathcal{S}eq(X^{***}) \Rightarrow X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$.
(2) X^* es $(C) \Rightarrow X$ es (C).
(3) X^{**} es super-$(P) \Rightarrow X^*$ es $(C) \Rightarrow X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**}) \Rightarrow X^*$ es super-(P).

Demostración. Todas las implicaciones salen del Corolario 10.13. ■

Nota. Sabemos que "X^* es super-(P)" implica que "X es (C) y X carece de una copia de ℓ_1" . Al revés es falso. Basta considerar $X := c_0(I)$ con $|I| \geq \aleph_1$, que verifica:

(i) X es (C) y carece de copias de ℓ_1.

(ii) $X^* = \ell_1(I)$ no es (C) y existe un subconjunto w^*-compacto $K \subset X^*$ y un contorno $B \subset K$ tales que $K \subset \overline{\text{co}}(B) \neq \emptyset$ (ver Contraejemplos de Capítulo 5).

El siguiente resultado es elemental.

Proposición 10.15. *Para todo espacio de Banach separable X son equivalentes los siguientes asertos:*

(0) $(B(X^{**}), w^*)$ es angélico.
(1) X^* posee la propiedad (C) de Corson.
(2) X^* no posee secuencias básicas incontables de tipo ℓ_1^+.
(3) $X^{**} = Seq(X^{**})$.
(4) X^* es super-(P).

(5) X carece de una copia de ℓ_1.

(6) X^* carece de sistemas de Markusevic incontables.

(7) X^* carece de copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$.

Demostración. Las implicaciones (0) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) están probadas en la Proposición 10.12.

(5) $\Rightarrow$ (0). Como X es separable, $(B(X^*), w^*)$ es un espacio topológico compacto metrizable, es decir, un espacio polaco. Puesto que $X^{**} = Seq(X^{**})$ (por el Teorema de Odell-Rosenthal), todos los elementos de X^{**} son 1-Baire sobre $(B(X^{**}), w^*)$ (ver [87]). Aplicando un resultado de Bourgain, Fremlin y Talagrand [11] llegamos a que $(B(X^{**}), w^*)$ es un espacio angélico.

(1) $\Rightarrow$ (6). Se tiene que $X^* \in (C)$ y que $w^* - Dens(X^{**}) \leq \aleph_0$ (porque X es w^*-denso en X^{**}). Por [50, 3.Prop.] obtenemos que X^* carece de sistemas de Markusevic incontables.

(6) $\Rightarrow$ (7) es obvio y (7) $\Rightarrow$ (5) es inmediato. ∎

Proposición 10.16. *Sea X un espacio de Banach y τ un cardinal infinito. Consideremos los asertos:*

(a) X^* es (C).

(b1) $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$; (b2) $X^{**} = X_{\aleph_0}$.

(c1) X^* es ultra-(P);(c2) X^* es τ-super-(P); (c3) X^* es $\aleph_1$-super-(P)

(d) X^* es super-(P).

(e1) X es (C) y carece de copias de ℓ_1;(e2) X carece de copias de ℓ_1; (e3) X^* es $\aleph_0$-super-(P).

Entonces
(i) $(a) \Rightarrow (b1) \Rightarrow (b2)$ y $(b1) \Rightarrow (c1) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e1) \Rightarrow (e2) \Leftrightarrow (e3)$.
(ii) $(c1) \Rightarrow (c3) \Rightarrow (e1)$.
(iii) $(c1) \Rightarrow (c2) \Rightarrow (e2)$.

Demostración. (i) Ya sabemos que $(a) \Rightarrow (b1) \Rightarrow (b2)$. Como la propiedad "$X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$" pasa a los subespacios, es claro por Proposición 10.12 que $(b1) \Rightarrow (c1)$. $(c1) \Rightarrow (d)$ es obvio, $(d) \Rightarrow (e1)$ sale de Proposición 10.12 y $(e1) \Rightarrow (e2) \Leftrightarrow (e3)$ son inmediatas.

(ii) $(c1) \Rightarrow (c3)$ es inmediato. $(c3) \Rightarrow (e1)$ sale de que la propiedad (C) está $\aleph_1$-determinada (ver Proposición 7.2) y de la Proposición 10.12.

(iii) $(c1) \Rightarrow (c2) \Rightarrow (e2)$ son triviales. ∎

10.4. Las propiedades "$X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$" y "$(B(X^*), w^*)$ es (CT) "

Un espacio topológico (X, τ) es (CT)(=countable tightness) si $t_\tau(u, A) \leq \aleph_0$ para todo subconjunto $A \subset X$ y todo $u \in \overline{A}$. Si (X, τ) es un espacio vectorial topológico y $C \subset X$ un subconjunto convexo, decimos que C es (CCT)(=convex countable tightness) si para todo subconjunto $A \subset C$ y todo $u \in \overline{A}$, existe un subconjunto contable $D \subset A$ tal que $u \in \overline{\text{co}}^\tau(D)$.

Nuestro objetivo en esta Sección es probar que, si X es un espacio de Banach, el hecho "$X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$ " implica que "$(B(X^*), w^*)$ es (CT)" . Observemos que ya sabemos que "$X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$" implica que "$(B(X^*), w^*)$ es (CCT)" , gracias a un resultado de Pol [93] y a que, como hemos visto, "X^* es super-(P)" implica que "X es (C)" . Comencemos viendo el siguiente Lema.

Lema 10.17. *Sean X un espacio de Banach y $A \subset B(X^*)$ tal que $0 \in \overline{A}^{w^*}$ pero $0 \notin \overline{D}^{w^*}$ para todo subconjunto contable $D \subset A$, es decir, $t_{w^*}(0, A) \geq \aleph_1$. Entonces*

(a) $0 \notin \overline{A}^w$, siendo w la topología débil de X^*.

(b) Si $F(A) = \bigcup\{\overline{D}^{w^*} : D \subset A, |D| \leq \aleph_0\}$, $F(A)$ es w-cerrado y $0 \notin F(A)$.

(c) Existen $\eta > 0$ y $v \in X^{**}$ tales que $|\{a \in A : \langle v, a\rangle > \eta\}| \geq \aleph_1$.

Demostración. (a) En primer término, $0 \notin \overline{A}^w$ porque, al tener todo espacio de Banach contable tightness para la topología débil (ver [114, p. 229] por ejemplo), el hecho $0 \in \overline{A}^w$ conllevaría la existencia de un subconjunto contable $D \subset A$ tal que $0 \in \overline{D}^w$. Como $\overline{D}^w \subset \overline{D}^{w^*}$, obtendríamos que $0 \in \overline{D}^{w^*}$, lo que es falso.

(b) Sea $u \in \overline{F(A)}^w$. Al tener todo espacio de Banach contable tightness para la topología débil, existirá $D \subset A$ con $|D| \leq \aleph_0$ tal que $u \in \overline{D}^w \subset \overline{D}^{w^*}$, es decir, $u \in F(A)$. Obviamente $0 \notin F(A)$ por hipótesis.

(c) Como $0 \notin \overline{A}^w$, existen $\eta > 0$ y vectores $v_1, ..., v_n$ en X^{**} tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^n\{x \in X : \langle v_i, x\rangle > \eta\}$. Puesto que las hipótesis implican que A es incontable, necesariamente, para cierto $j \in \{1, ..., n\}$, se verifica que $|\{a \in A : \langle v_j, a\rangle > \eta\}| \geq \aleph_1$. Basta coger ahora $v := v_j$. ■

Lema 10.18. *Sean X un espacio de Banach, $Y \subset X$ un subespacio separable, $A \subset B(X^*)$ con $0 \in \overline{A}^{w^*}$ y $t_{w^*}(0, A) \geq \aleph_1$ y $A_0 \subset A$ tal que $|A_0| \leq \aleph_0$. Entonces existen $D \subset A \setminus A_0$ con $|D| \leq \aleph_0$ y $w_Y \in \overline{D}^{w^*}$ tales que $w_Y \perp Y$.*

Demostración. Sea $\{y_n : n \geq 1\}$ familia densa en $B(Y)$ y denotemos

$$F(A \setminus A_0) := \bigcup\{\overline{D}^{w^*} : D \subset A \setminus A_0, |D| \leq \aleph_0\}$$

y consideremos los entornos w^*-abiertos de 0

$$V_n := \{x^* \in X^* : |\langle x^*, y_i\rangle| < \tfrac{1}{n}, i = 1, .., n\}, \quad \forall n \geq 1.$$

Como $0 \in \overline{F(A \setminus A_0)}^{w^*}$, ocurre que $V_n \cap F(A \setminus A_0)$, $\forall n \geq 1$. Elegimos $w_n \in V_n \cap F(A \setminus A_0)$, $\forall n \geq 1$. Es claro que $\langle w_n, y_i\rangle \underset{n\to\infty}{\to} 0$ para $i \geq 1$, de donde obtenemos que $\langle w_n, y\rangle \underset{n\to\infty}{\to} 0$ para todo $y \in Y$. Sea D_n un subconjunto contable (puede haber muchos) de $A \setminus A_0$ tal que $w_n \in \overline{D_n}^{w^*}$, $\forall n \geq 1$, y sea $D := \bigcup_{n\geq 1} D_n$. Es inmediato que $|D| \leq \aleph_0$ y que $w_n \in \overline{D}^{w^*}$, $\forall n \geq 1$. Sea w_Y un punto de w^*-acumulación de $\{w_n : n \geq 1\}$. Es claro que $w_Y \in \overline{D}^{w^*}$ y que $w_Y \perp Y$. ■

Lema 10.19. *Sea X un espacio de Banach con $Dens(X) = \aleph_1$. Son equivalentes:*

(a) $(B(X^*), w^*) \notin (CT)$.

(b) Existe en $B(X^*)$ una secuencia $\{y^*_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tal que:

(b1) $y^*_\alpha \to 0$ en la w^*-topología de X^* para $\alpha \to \omega_1$.

(b2) $0 \notin \overline{\{y^*_\alpha : \alpha < \beta\}}^{w^*}$ para todo $\beta < \omega_1$.

(b3) Existen $\eta > 0$ y $v \in X^{**}$ tales que $|\{\alpha < \omega_1 : \langle v, y^*_\alpha\rangle > \eta\}| = \aleph_1$.

Demostración. $(b) \Rightarrow (a)$ es inmediato a partir de (b1) y (b2).

$(a) \Rightarrow (b)$. Como $(B(X^*), w^*)$ no es (CT), existe $A \subset B(X^*)$ tal que $0 \in \overline{A}^{w^*}$ pero $0 \notin F(A) := \bigcup\{\overline{D}^{w^*} : D \subset A, |D| \leq \aleph_0\}$. Sea $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset B(X)$ familia $\|\cdot\|$-densa en $B(X)$. Construimos a continuación secuencias $\{Y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, $\{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ y $\{y^*_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset B(X^*)$ tales que

(1) Y_α es un subespacio cerrado separable de X y $x_\alpha \in Y_\alpha \subset Y_\beta$ para $\alpha \leq \beta < \omega_1$.

(2) $\{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una familia de subconjuntos contables de A disjuntos dos a dos.

(3) $y^*_\alpha \in \overline{D_\alpha}^{w^*}$ y $y^*_\alpha \perp Y_\alpha$ para $\alpha < \omega_1$.

Procedemos por inducción transfinita.

Etapa 1. Sea $Y_1 = [x_1]$. Por el Lema 10.18 existen $D_1 \subset A$ con $|D_1| \leq \aleph_0$ y $y^*_1 \in \overline{D_1}^{w^*}$ tal que $y^*_1 \perp Y_1$.

Etapa 2. Sea $Y_2 = \overline{[Y_1 \cup \{x_2\}]}$, que es separable. Por el Lema 10.18 existen $D_2 \subset A \setminus D_1$ con $|D_2| \leq \aleph_0$ y $y^*_2 \in \overline{D_2}^{w^*}$ tal que $y^*_2 \perp Y_2$.

Etapa $\alpha < \omega_1$. Supongamos construidos los elementos Y_β, D_β y y^*_β para $\beta < \alpha$ verificando $(1), (2)$ y (3). Sea $Y_\alpha = \overline{[\{x_\alpha\} \cup (\bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta)]}$, que es un subespacio separable de X. Por el Lema 10.18 existen $D_\alpha \subset A \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta$ con $|D_\alpha| \leq \aleph_0$ y $y^*_\alpha \in \overline{D_\alpha}^{w^*}$ tal que $y^*_\alpha \perp Y_\alpha$.

La construcción puede hacerse para todo $\alpha < \omega_1$.

Por construcción, es claro que $X = \bigcup_{\alpha<\omega_1} Y_\alpha$, $y^*_\alpha \to 0$ en la w^*-topología de X^* para $\alpha \to \omega_1$ y que para todo $\beta < \omega_1$

$$0 \notin \bigcup_{\beta<\omega_1} \overline{\{y^*_\alpha : \alpha < \beta\}}^{w^*}.$$

Finalmente, por el Lema 10.17, existen $\eta > 0$ y $v \in B(X^{**})$ tales que $|\{\alpha < \omega_1 : \langle v, y^*_\alpha\rangle > \eta\}| = \aleph_1$. ■

Decimos que un espacio de Banach X es $\aleph_1$-(CT) si todo subespacio $Y \subset X$ con $Dens(Y) \leq \aleph_1$ verifica que $(B(Y^*), w^*) \in (CT)$.

Proposición 10.20. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes*

(a) $(B(X^*), w^*) \in (CT)$; (b) X es $\aleph_1$-(CT).

Por tanto la propiedad $(B(X^*), w^*) \in (CT)$ está $\aleph_1$-determinada.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ es obvio porque la propiedad (CT) se conserva por cocientes entre compactos.

$(b) \Rightarrow (a)$. Supongamos que $(B(X^*), w^*)$ no es (CT). Esto quiere decir que existe $A \subset B(X^*)$ tal que $0 \in \overline{A}^{w^*}$ y $t_{w^*}(0, A) \geq \aleph_1$. De este hecho vamos a deducir una contradicción. Sea $F(A) := \bigcup\{\overline{D}^{w^*} : D \subset A, |D| \leq \aleph_0\}$, que es un subconjunto w-cerrado de X^* tal que $0 \notin F(A)$ (ver Lema 10.17). Por tanto $dist(0, F(A)) > \epsilon$ para cierto $\epsilon > 0$. Sea $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset B(X)$ tal que $Dens(\overline{[\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}]}) = \aleph_1$. Construimos a continuación secuencias $\{Y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, $\{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ y $\{x^*_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset B(X^*)$ tales que

(1) Y_α es un subespacio cerrado separable de X y $x_\alpha \in Y_\alpha \subset Y_\beta$ para $\alpha \leq \beta < \omega_1$.

(2) $\{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una familia de subconjuntos contables de A disjuntos dos a dos.

(3) $x^*_\alpha \in \overline{D_\alpha}^{w^*}$ y $x^*_\alpha \perp Y_\alpha$ para $\alpha < \omega_1$.

(4) Si $i_\alpha : Y_\alpha \to X$ es la inclusión canónica, se tiene que

$$0 \notin \overline{i^*_\alpha(\cup_{\beta<\alpha} D_\beta)}^{w^*} = i^*_\alpha(\overline{\cup_{\beta<\alpha} D_\beta}^{w^*}),\ \forall \alpha < \omega_1.$$

Procedemos por inducción transfinita.

Etapa 1. Sea $Y_1 = [x_1]$. Por el Lema 10.18 existen $D_1 \subset A$ con $|D_1| \leq \aleph_0$ y $x^*_1 \in \overline{D_1}^{w^*}$ tal que $x^*_1 \perp Y_1$.

Etapa 2. Como $dist(0, \overline{D_1}^{w^*}) > \epsilon$, existe una familia finita $F_2 \subset B(X)$ tal que

$$\overline{D_1}^{w^*} \subset \{x^* \in X^* : \sup\langle x^*, F_2\rangle > \epsilon\}.$$

Sea $Y_2 = \overline{[Y_1 \cup \{x_2\} \cup F_2]}$, que es separable. Observemos que $0 \notin i_2^*(\overline{D_1}^{w^*})$. Por el Lema 10.18 existen $D_2 \subset A \setminus D_1$ con $|D_2| \leq \aleph_0$ y $x_2^* \in \overline{D_2}^{w^*}$ tal que $x_2^* \perp Y_2$.

Etapa $\alpha < \omega_1$**.** Supongamos construidos los elementos $Y_\beta,\ D_\beta$ y x_β^* para $\beta < \alpha$ verificando $(1), (2), (3)$ y (4). Como $dist(0, \overline{\cup_{\beta<\alpha} D_\beta}^{w^*}) > \epsilon$, existe una familia finita $F_\alpha \subset B(X)$ tal que

$$\overline{\cup_{\beta<\alpha} D_\beta}^{w^*} \subset \{x^* \in X^* : \sup\langle x^*, F_\alpha\rangle > \epsilon\}.$$

Sea $Y_\alpha = \overline{[\{x_\alpha\} \cup (\bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta) \cup F_\alpha]}$, que es un subespacio separable. Observemos que $0 \notin \overline{i_\alpha^*(\cup_{\beta<\alpha} D_\beta)}^{w^*}$. Por el Lema 10.18 existen $D_\alpha \subset A \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta$ con $|D_\alpha| \leq \aleph_0$ y $x_\alpha^* \in \overline{D_\alpha}^{w^*}$ tal que $x_\alpha^* \perp Y_\alpha$.

La construcción puede hacerse para todo $\alpha < \omega_1$.

Sean $Y := \cup_{\alpha<\omega_1} Y_\alpha$, que es un subespacio cerrado de X con $Dens(Y) = \aleph_1$, $i : Y \to X$ la inclusión canónica y $y_\alpha^* = i^*(x_\alpha^*),\ \alpha < \omega_1$. Se verifica que

(b1) $y_\alpha^* \overset{w^*}{\to} 0$ para $\alpha \to \omega_1$ en $B(Y^*)$.

(b2) $0 \notin \overline{\{y_\alpha^* : \alpha < \beta\}}^{w^*}$ para todo $\beta < \omega_1$.

(b3) Por Lema 10.17, (b1) y (b2) existen $\eta > 0$ y $v \in X^{**}$ tales que $|\{\alpha < \omega_1 : \langle v, y_\alpha^*\rangle > \eta\}| = \aleph_1$.

Por Lema 10.19 concluimos que $(B(Y^*), w^*) \notin (CT)$, que es la contradicción que buscábamos. ■

Proposición 10.21. *Sea X un espacio de Banach tal que $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$. Entonces $(B(X^*), w^*)$ es (CT).*

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo. Suponemos que $(B(X^*), w^*)$ no es (CT) y deducimos una contradicción. Por la Proposición 10.20 podemos suponer que $Dens(X) = \aleph_1$. De Lema 10.19 sale, pasando a una subsucesión si es preciso, que existen una secuencia $\{x_\alpha^* : \alpha < \omega_1\}$ en $B(X^*)$, $u \in B(X^{**})$ y $\epsilon_0 > 0$ tales que:

(a1) $x_\alpha^* \to 0$ en la w^*-topología de X^* para $\alpha \to \omega_1$.

(a2) $\langle u, x_\alpha^*\rangle > \epsilon_0,\ \forall \alpha < \omega_1$.

Sea $\{x_n : n \geq 1\} \subset B(X)$ una secuencia tal que $x_n \underset{n\to\infty}{\to} u$ en la w^*-topología. Entonces

$$[1, \omega_1) = \bigcup_{n\geq 1} \{\alpha < \omega_1 : \langle x_\alpha^*, x_n\rangle > \epsilon_0\}.$$

En consecuencia, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\{\alpha < \omega_1 : \langle x_\alpha^*, x_m\rangle > \epsilon_0\}| = \aleph_1$, lo que no puede ser por (a1). Por tanto $(B(X^*), w^*)$ es (CT). ■

Si X es el espacio de Johnson-Lindenstrauss JL_2 (ver [30, pg. 189]), es trivial probar que $JL_2 \in (C)$, $JL_2^* \in (C)$, $(B(X^*), w^*)$ no es angélica, etc. Pero, ¿$(B(X^*), w^*) \in (CT)$? Como aplicación de los resultados anteriores vemos a continuación que la respuesta es afirmativa.

Corolario 10.22. *(A) Sea X un espacio de Banach tal que $X^* \in (C)$. Entonces $(B(X^*), w^*) \in (CT)$.*

(B) Si $X := JL_2$, se verifica que $(B(X^*), w^*) \in (CT)$ aunque $(B(X^*), w^*)$ no es un espacio angélico.

Demostración. (A) Si $X^* \in (C)$ entonces $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$ por Corolario 10.13. Ahora basta aplicar la Proposición 10.21.

(B) Este enunciado sale de (A) porque $JL_2^* = \ell_1 \oplus \ell_2(\mathfrak{c}) \in (C)$. Que $(B(X^*), w^*)$ no es un espacio angélico puede verse en [35, pg. 577]. ∎

Proposición 10.23. *Sea X un espacio de Banach tal que $X^{**} = X_{\aleph_0}$. Son equivalentes:*

(1) $X^{**} = Seq(X^{**})$.

(2) X^* es super-(P).

(3) $X \in (C)$ y X carece de una copia de ℓ_1.

(4) X carece de una copia de ℓ_1.

(5) X^* carece de secuencias básicas $\{z_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de modo que w^*-$Dens(B(Z^*)) \leq \aleph_0$, siendo $Z := \overline{[\{z_\alpha : \alpha < \omega_1\}]}$.

(6) X^* carece de copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$.

Demostración. Ya sabemos (ver la Prop. 10.12) que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4).

(4) $\Rightarrow$ (5). Supongamos que X^* posee una secuencia básica $\{z_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de modo que w^*-$Dens(B(Z^*)) \leq \aleph_0$, siendo $Z := \overline{[\{z_\alpha : \alpha < \omega_1\}]}$. Por ser $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$ y w^*-$Dens(B(Z^*)) \leq \aleph_0$ existe un subespacio cerrado separable $Y \subset X$ que es 1-normante sobre Z. En particular Z "vive" en Y^*, es decir, si $i : Y \to X$ es la inclusión canónica, Z y $i^*(Z) \subset Y^*$ son isomorficamente isométricos. Puesto que $Y^{**} = \mathcal{S}eq(Y^{**})$, llegamos a una contradicción por la Prop. 10.15. En consecuencia (5) es cierto.

(5) $\Rightarrow$ (6) es obvio porque w^*-$Dens(B(\ell_\infty(\mathfrak{c}))) = \aleph_0$.

(6) $\Rightarrow$ (1). Puesto que X^* carece de copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$, X carece de copia de ℓ_1, de donde obtenemos que $X_{\aleph_0} = \mathcal{S}eq(X^{**})$. Por tanto $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$ por la hipótesis de trabajo.
∎

Capítulo 11

La igualdad $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$ y el Axioma de Martin

11.1. Introducción

En este Capítulo vemos que para un espacio de Banach X, bajo ciertas formas del Axioma de Martin, la propiedad $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$ y la propiedad 'X^* es super-(P)" (ó propiedades análogas) son equivalentes.

11.2. La igualdad $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$ y el Axioma de Martin

Las siguientes líneas tienen por objeto introducir las modalidades del Axioma de Martin, que vamos a utilizar. Una excelente referencia para este material es [46]. Sea $(\mathcal{P}, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado (un "poset"). Se dice que dos elementos $p, q \in \mathcal{P}$ son *compatibles* si existe $r \in \mathcal{P}$ tal que $p \leq r$ y $q \leq r$. En caso contrario, se dice que p, q son *incompatibles.* Se dice que $\mathcal{P}$ verifica la propiedad CCC (countable chain condition) si para toda familia incontable $\mathcal{P}_1$ de $\mathcal{P}$ existen al menos dos elementos $p, q \in \mathcal{P}_1$ compatibles. Un subconjunto $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ es *cofinal* en $\mathcal{P}$ si para todo $p \in \mathcal{P}$ existe $q \in \mathcal{Q}$ tal que $p \leq q$. Un subconjunto $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$ es $\uparrow$*-dirigido* si para todo par de elementos $p, q \in \mathcal{R}$ existe $r \in \mathcal{R}$ tal que $p \leq r$ y $q \leq r$.

Por cada cardinal κ sea $MA(\kappa)$ el siguiente aserto:

"Si $(\mathcal{P}, \leq)$ es un poset CCC y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos cofinales en $\mathcal{P}$ con $|\mathcal{F}| \leq \kappa$, existe un subconjunto $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$ $\uparrow$-dirigido tal que corta a cada subconjunto de $\mathcal{F}$."

Se puede probar que $MA(\omega_0)$ es cierto pero que $MA(\mathfrak{c})$ es falso (ver [46]).

Definición 11.1. $\mathfrak{m}$ *es el mínimo cardinal tal que* $MA(\mathfrak{m})$ *es falso.*

Naturalmente $\omega_1 \leq \mathfrak{m} \leq \mathfrak{c}$.

Definición 11.2. *El axioma de Martin MA es la afirmación $\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$. En otras palabras, si $(\mathcal{P}, \leq)$ es un poset CCC y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos cofinales en $\mathcal{P}$ con $|\mathcal{F}| < \mathfrak{c}$, existe un subconjunto $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$ $\uparrow$-dirigido tal que corta a cada subconjunto de $\mathcal{F}$.*

Claramente, $(CH) \Rightarrow MA$ ((CH) = hipótesis del continuo, es decir, $\omega_1 = \mathfrak{c}$) y $MA + \neg(CH) \Leftrightarrow \omega_1 < \mathfrak{m} = \mathfrak{c}$.

Definición 11.3. *El axioma de Martin MA_{ω_1} es la afirmación $\omega_1 < \mathfrak{m}$. Por tanto MA_{ω_1} es el siguiente aserto: si $(\mathcal{P}, \leq)$ es un poset verificando CCC y $\{\mathcal{D}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una familia de subconjuntos cofinales en $\mathcal{P}$, existe un subconjunto $\uparrow$-dirigido $\mathcal{J}$ en $\mathcal{P}$ tal que $\mathcal{J} \cap \mathcal{D}_\alpha \neq \emptyset$, $\forall \alpha < \omega_1$.*

Veamos la interpretación de MA_{ω_1} en un contexto topológico. Recordemos que, si (X, T) es un espacio topológico, X es CCC (countable chain condition) si toda familia de subconjuntos abiertos de X, disjuntos dos a dos, es contable.

Definición 11.4. *El axioma de Martin MA_{ω_1} es el siguiente aserto: Si K es un espacio topológico compacto Haussdorf CCC y $\{\mathcal{D}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una familia de subconjuntos abiertos y densos en K, entonces $\cap\{\mathcal{D}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es denso en K.*

El Axioma MM (Martin's Maximum Axioma) fue introducido en [45]. Se trata de la versión más fuerte del Axioma de Martin consistente con ZFC. En particular $MM \Rightarrow MA_{\omega_1}$. Vamos a dar una definición de MM en términos topológicos. Indicaremos por $\mathcal{DO}(X)$ a la familia de subconjuntos abiertos y densos en un espacio topológico (X, T), y por

$$\mathfrak{m}(X) := \text{mín}\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \subset \mathcal{DO}(X), \cap\mathcal{U} = \emptyset\}.$$

Sea $\mathcal{M}$ la familia de los espacios Čech-completos K que satisfacen la propiedad CCC y verifican que, dada una secuencia de abiertos regulares $\{O_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de K, existe un subconjunto "club" Γ de ω_1 tal que $O_{[\alpha,\beta)}$ es constante para todo par $\alpha, \beta \in \Gamma, \alpha < \beta$, siendo

$$O_{[\alpha,\beta)} := int(\overline{\cup_{\alpha \leq \xi < \beta} O_\xi}).$$

Definición 11.5 (Definición del cardinal $\mathfrak{mm}$)**.** *El cardinal $\mathfrak{mm}$ se define como*

$$\mathfrak{mm} := \mathfrak{m}(\mathcal{M}) := \text{mín}\{\mathfrak{m}(K) : K \in \mathcal{M}\}.$$

El cardinal $\mathfrak{mm}$ verifica $\omega_1 \leq \mathfrak{mm} \leq \omega_2$.

Definición 11.6. *El Axioma MM es el aserto $\omega_1 < \mathfrak{mm}$.*

El siguiente Lema es conocido como el Lema de los Δ-sistemas.

Lema 11.7. *Sea S un conjunto y $\{S_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una familia de subconjuntos finitos de S. Entonces existen un número entero $n \geq 1$, un subconjunto $S_0 \subset S$ (puede ser vacío) y una familia no acotada $A \subset \omega_1$ tal que $S_\alpha \cap S_\beta = S_0$ y $|S_\alpha| = n$, $\forall \alpha, \beta \in A$.*

Demostración. Ver [66]. ■

Proposición 11.8 (MA_{ω_1})**.** *Sea X un espacio de Banach tal que $Dens(X) = \aleph_1$. Son equivalentes:*

(1) $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$; (2) X^* es super-(P) y $(B(X^*), w^*) \in (CT)$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) siempre ocurre en (ZFC) por Corolario 4.16 y la Proposición 10.21.

(2) $\Rightarrow$ (1). Hacemos un razonamiento por reducción al absurdo. Así que asumimos la siguiente hipótesis de trabajo

($\clubsuit$) X^* es super-(P) y $(B(X^*), w^*) \in (CT)$ pero $X^{**} \neq \mathcal{S}eq(X^{**})$,

y deducimos de aquí una contradicción. En primer término, X no tiene copias de ℓ_1, por ser X^* super-(P), y en consecuencia $\mathcal{S}eq(X^{**}) = X_{\aleph_0}$ (por la Prop. 2.2), de donde $X_{\aleph_0} \neq X^{**}$ por ($\clubsuit$). Por tanto, se puede hacer la construcción de Proposición 10.3 para $\kappa = \omega_1$. Así que existen $\epsilon_0 > 0$, $u \in S(X^{**})$, una secuencia básica monótona $\{x_\alpha^* : \alpha < \omega_1\} \subset B(X^*)$ y subespacios cerrados separables $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de X tales que:

(i) $A_\alpha \subset A_\beta$, si $\alpha < \beta < \omega_1$, y $X = \bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$.

(ii) $x_\alpha^* \perp A_\alpha$, $\forall \alpha < \omega_1$, por lo que $x_\alpha^* \overset{w^*}{\to} 0$ para $\alpha \to \omega_1$.

(iii) $\langle u, x_\alpha^* \rangle \geq \epsilon_0$, $\forall \alpha < \omega_1$.

Sea $T : X \to \ell_\infty(\omega_1)$ el operador continuo definido por $T(x) := (\langle x_\alpha^*, x\rangle)_{\alpha<\omega_1}$. Por (ii) es claro que $T(X) \subset \ell_\infty^c(\omega_1)$(=elementos de $\ell_\infty(\omega_1)$ con soporte contable). Además $sop(T(X)) = \omega_1$ porque como $\|x_\alpha^*\| = 1$, $\forall \alpha < \omega_1$, existe $x \in X$ tal que $\langle x_\alpha^*, x\rangle \neq 0$. A continuación utilizamos un razonamiento inspirado en ideas de Todorcevic (ver [64, The. 4.46]). Fijemos un subconjunto S denso en $B(X)$ para la norma con $|S| = \aleph_1$. Sea $(\mathcal{P}, \leq)$ el conjunto parcialmente ordenado definido de la siguiente forma:

(1) $\mathcal{P}$ es la familia de todos las 3-uplas $p := (D_p, \Gamma_p, \epsilon_p)$ tales que D_p es un subconjunto finito de S, Γ_p es un subconjunto finito de ω_1 y $\epsilon_p \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$.

(2) El orden parcial $\leq$ se define de la siguiente forma. Para una familia finita $G \subset [1, \omega_1)$ denotemos $Sup(G) : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$\forall x \in X,\ Sup(G)(x) := \sup\{|\langle x_\alpha^*, x\rangle| : \alpha \in G\}.$$

Si $p_i := (D_{p_i}, \Gamma_{p_i}, \epsilon_{p_i}) \in \mathcal{P}$, $i = 1, 2$, decimos que $p_1 \leq p_2$ sii $D_{p_1} \subset D_{p_2}$, $\Gamma_{p_1} \subset \Gamma_{p_2}$, $\epsilon_{p_2} \leq \epsilon_{p_1}$ y

$$\sup\{Sup(\Gamma_{p_2} \setminus \Gamma_{p_1})(x) : x \in D_{p_1}\} < \epsilon_{p_1}.$$

Aserto A. $(\mathcal{P}, \leq)$ satisface la propiedad CCC.

En efecto, sea $\mathcal{C}_1$ una familia incontable de elementos de $\mathcal{P}$, cuyos integrantes son distintos dos a dos. Tenemos que hallar dos elementos $p_1, p_2 \in \mathcal{C}_1$ que sean compatibles, es decir, tales que existe $r \in \mathcal{P}$ verificando $p_1, p_2 \leq r$. Si $\Gamma_{p_1} = \Gamma_{p_2}$ para algún par distinto $p_1, p_2 \in \mathcal{C}_1$, cogiendo $r = (D_{p_1} \cup D_{p_2}, \Gamma_{p_1}, \epsilon_{p_1} \wedge \epsilon_{p_2})$, es claro que $p_1, p_2 \leq r$ y hemos terminado. Así que supondremos que $\Gamma_{p_1} \neq \Gamma_{p_2}$ para todo par distinto $p_1, p_2 \in \mathcal{C}_1$.

SubAserto A1. Existen $\epsilon \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$, dos números enteros $n, m \geq 0$, conjuntos finitos $E \subset S$ y $\Delta \subset \omega_1$ así como

(a) una secuencia $\{E_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de subconjuntos finitos de S, disjuntos respecto de E y dos a dos, de modo que $|E_\alpha| = cte = n$, $\forall \alpha \in \omega_1$;

(b) una secuencia $\{\Delta_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de subconjuntos finitos de ω_1 de modo que $|\Delta_\alpha| = cte = m$, $\forall \alpha \in \omega_1$, $\max \Delta < \min \Delta_\alpha \leq \max \Delta_\alpha < \min \Delta_\beta$, $\alpha < \beta < \omega_1$, y tal que $\{x^*_\alpha : \alpha \in \Delta_\kappa\} \perp E \cup E_\rho$ siempre que $\rho < \kappa < \omega_1$;

verificándose que $\mathcal{C}_2 := \{(E \cup E_\alpha, \Delta \cup \Delta_\alpha, \epsilon) : \alpha < \omega_1\}$ es una subfamilia incontable de $\mathcal{C}_1$.

En efecto, partiremos de la familia $\mathcal{C}_1$. Puesto que el conjunto $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ es contable, existen $\epsilon \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ y un subconjunto incontable $\mathcal{C}_{11} \subset \mathcal{C}_1$ tal que $\epsilon_p = \epsilon$ para todo $p \in \mathcal{C}_{11}$. A continuación le aplicamos el Lema 11.7 a las familias de subconjuntos finitos $\{D_p : p \in \mathcal{C}_{11}\}$ y $\{\Gamma_p : p \in \mathcal{C}_{11}\}$. Hallamos una subfamilia incontable $\mathcal{C}_{12} \subset \mathcal{C}_{11}$ de modo que existen subconjuntos finitos $E \subset S$ y $\Delta \subset \omega_1$ y dos números enteros $n \geq 0$ y $m \geq 1$ cumpliendo para todo $p, q \in \mathcal{C}_{12}$ que

$$D_p \cap D_q = E, \quad |D_p \setminus E| = |D_q \setminus E| = n, \quad \Gamma_p \cap \Gamma_q = \Delta \quad \text{y} \quad |\Gamma_p \setminus \Delta| = |\Gamma_q \setminus \Delta| = m.$$

Denotaremos $E_p = D_p \setminus E$ y $\Delta_p = \Gamma_p \setminus \Delta$, $\forall p \in \mathcal{C}_{12}$.

Aprovechando que $\{\alpha < \omega_1 : \langle x^*_\alpha, x\rangle \neq 0\}$ es contable para todo $x \in X$, pasamos a una subfamilia incontable $\mathcal{C}_{13} \subset \mathcal{C}_{12}$ de modo que, convenientemente ordenada de la forma $\mathcal{C}_{13} = \{p_\alpha := (E \cup E_\alpha, \Delta \cup \Delta_\alpha, \epsilon) : \ \alpha < \omega_1\}$, se verifiquen todas las demás condiciones adicionales de (b). Haciendo $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_{13}$ se cumplen todos los requisitos del SubAserto A1.

Para cada par $\alpha < \beta < \omega_1$, sea $p_{\alpha,\beta} = (E \cup E_\alpha \cup E_\beta, \Delta \cup \Delta_\alpha \cup \Delta_\beta, \epsilon)$. Es trivial ver que $p_\alpha \leq p_{\alpha,\beta}$. De modo que, para probar que el Aserto A es cierto, bastará probar que existe un par $\alpha < \beta < \omega_1$ tal que $p_\beta \leq p_{\alpha,\beta}$, es decir

$$\sup\{Sup(|x^*_\gamma| : \gamma \in \Delta_\alpha)(x) : x \in E \cup E_\beta\} < \epsilon.$$

Recordemos que $m \geq 1$ y razonemos por reducción al absurdo, es decir, asumimos que $p_\beta \not\leq p_{\alpha,\beta}$, $\forall \alpha < \beta < \omega_1$. Denotemos $Z := X \oplus_1 \overset{m}{\overbrace{\cdots}} \oplus_1 X$, que es un espacio de Banach tal que $Z^* = X^* \oplus_\infty \overset{m}{\overbrace{\cdots}} \oplus_\infty X^*$ y, además, el espacio topológico $(B(Z^*), w^*)$ es el producto topológico de m copias de $(B(X^*), w^*)$. Por cada $\alpha < \omega_1$ sea $\Delta_\alpha = \{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$ y pongamos

$$z^*_\alpha := (x^*_{\alpha_1}, ..., x^*_{\alpha_m}) \in B(Z^*).$$

SubAserto A2. Se verifica que $z^*_\alpha \in B(Z^*)$, $z^*_\alpha \to 0$ en $(B(Z^*), w^*)$ para $\alpha \to \omega_1$ y $0 \notin \overline{\{z^*_\alpha : \alpha < \beta\}}^{w^*}$, $\forall \beta < \omega_1$.

En efecto, es claro que $z^*_\alpha \in B(Z^*)$ porque $x^*_\beta \in B(X^*)$. Además, para $k \in \{1, 2, ..., m\}$ fijo, $\alpha_k \to \omega_1$ cuando $\alpha \to \omega_1$ (porque $\min \Delta_\alpha$ se va hacia ω_1). Por tanto $x^*_{\alpha_k} \to 0$ en la w^*-topología de X^* y de aquí que $z^*_\alpha \to 0$ en la w^*-topología de Z^*, para $\alpha \to \omega_1$. Observemos que, si $\alpha < \beta < \omega_1$, la incompatibilidad de p_β con $p_{\alpha,\beta}$ equivale a decir lo siguiente:

"Para todo par $\alpha < \beta < \omega_1$, existen $x \in E_\beta$ y $1 \leq j \leq m$ tales que $|\langle x^*_{\alpha_j}, x\rangle| \geq \epsilon$."

La anterior sentencia equivale a decir

"$z^*_\alpha = (x^*_{\alpha_1}, ..., x^*_{\alpha_m}) \in H_\beta$, para todo par $\alpha < \beta < \omega_1$, siendo H_β el subconjunto w^*-cerrado de $B(Z^*)$ definido por:

$$H_\beta := \{(z^*_1, ..., z^*_m) \in B(Z^*) : |\langle z^*_i, x\rangle| \geq \epsilon \text{ para algún } i \in \{1, ..., m\} \text{ y algún } x \in E_\beta\}."$$

Como $0 \notin H_\beta$ y $\overline{\{z^*_\alpha : \alpha < \beta\}}^{w^*} \subset H_\beta$ resulta que $0 \notin \overline{\{z^*_\alpha : \alpha < \beta\}}^{w^*}$, $\forall \beta < \omega_1$, y esto prueba el SubAserto A2.

Puesto que $z^*_\alpha \overset{w^*}{\to} 0$ para $\alpha \to \omega_1$, es claro que

$$0 \in \overline{\{z^*_\alpha : \beta \leq \alpha < \omega_1\}}^{w^*}, \ \forall \beta < \omega_1 \tag{11.1}$$

Por hipótesis $(B(X^*), w^*)$ tiene contable tightness. Por tanto $(B(Z^*), w^*)$ tiene contable tightness por ser producto finito de compactos con contable tightness (ver [67, p. 113]). Este hecho junto con (11.1) implican que existe $\gamma_0 < \omega_1$ tal que $0 \in \overline{\{z^*_\alpha : \alpha < \beta\}}^{w^*}$, $\forall \beta \in [\gamma_0, \omega_1)$, lo que contradice el SubAserto A2. Por lo tanto, existe un par $\alpha < \beta < \omega_1$ tal que $p_\beta \leq p_{\alpha,\beta}$ y esto concluye la prueba del Aserto A.

Por cada $\alpha \in \omega_1, x \in S$ y $\epsilon \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ sean

$$\mathcal{P}_\alpha := \{p \in \mathcal{P} : \max \Gamma_p > \alpha\}, \mathcal{P}_x := \{p \in \mathcal{P} : x \in D_p\}, \mathcal{P}_\epsilon := \{p \in \mathcal{P} : \epsilon_p \leq \epsilon\}.$$

Sean $\alpha \in \omega_1, x \in S$ y $\epsilon \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ fijos y probemos que $\mathcal{P}_\alpha \cap \mathcal{P}_x \cap \mathcal{P}_\epsilon$ es un subconjunto de $\mathcal{P}$ que es denso en $(\mathcal{P}, \leq)$. Sea $p = (D_p, \Gamma_p, \epsilon_p) \in \mathcal{P}$ arbitrario. A continuación elegimos $\beta > \alpha$ tal que $\langle x^*_\beta, D_p \cup \{x\}\rangle = \{0\}$. En estas condiciones es inmediato ver que $p \leq (D_p \cup \{x\}, \Gamma_p \cup \{\beta\}, \min\{\epsilon_p, \epsilon\}) \in \mathcal{P}_\alpha \cap \mathcal{P}_x \cap \mathcal{P}_\epsilon$. En consecuencia $\mathcal{E} := \{\mathcal{P}_\alpha \cap \mathcal{P}_x \cap \mathcal{P}_\epsilon : \alpha \in \omega_1, x \in S, \epsilon \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)\}$ es una familia de subconjuntos de $\mathcal{P}$, cada uno de ellos cofinal en $(\mathcal{P}, \leq)$, tal que $|\mathcal{E}| = \aleph_1$. Por MA_{ω_1} existe un filtro $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$ tal que $\mathcal{F} \cap \mathcal{P}_\alpha \cap \mathcal{P}_x \cap \mathcal{P}_\epsilon \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in \omega_1, x \in S$ y $\epsilon \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)\}$. Sea $\Gamma := \bigcup_{p \in \mathcal{F}} \Gamma_p$.

Aserto B. $|\Gamma| = \aleph_1$ y para todo $x \in X$ se verifica que $(\langle x^*_\gamma, x\rangle)_{\gamma \in \Gamma} \in c_0(\Gamma)$.

En efecto, veamos que $|\Gamma| = \aleph_1$. Sea $\alpha < \omega_1$. Por la densidad del filtro $\mathcal{F}$, existe $p = (D_p, \Gamma_p, \epsilon_p) \in \mathcal{F} \cap \mathcal{P}_\alpha$. Por tanto $\gamma = \max \Gamma_p$ verifica $\gamma \in \Gamma$ y además $\gamma > \alpha$. De aquí que Γ es un subconjunto no acotado de ω_1, por lo que $|\Gamma| = \aleph_1$.

Para probar que $(\langle x^*_\gamma, x\rangle)_{\gamma\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$, $\forall x \in X$, bastará comprobar este hecho para $x \in S$. Sean $\epsilon \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ y $p = (D_p, \Gamma_p, \epsilon_p) \in \mathcal{F} \cap \mathcal{P}_x \cap \mathcal{P}_\epsilon$. Sean $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_p$ y $q \in \mathcal{F}$ tales que $\gamma \in \Gamma_q$. Puesto que $\mathcal{F}$ es un filtro, podemos suponer que $p \leq q$. Por tanto $|\langle x^*_\gamma, x\rangle| < \epsilon$, es decir

$$\{\gamma \in \Gamma : |\langle x^*_\gamma, x\rangle| \geq \epsilon\} \subset \Gamma_p,$$

lo que prueba, al ser $\epsilon \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ arbitrario, que $(\langle x^*_\gamma, x\rangle)_{\gamma\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$. Y esto concluye el Aserto B.

Finalmente observemos que $\langle u, x^*_\gamma\rangle \geq \epsilon_0 > 0$, $\forall \gamma \in \Gamma$, lo que unido al Aserto B nos permite concluir que X^* no es super-(P) aplicando el Lema 10.5. Hemos llegado a una contradicción que prueba la implicación (2) $\Rightarrow$ (1). ■

Proposición 11.9 (MA_{ω_1})**.** *Para todo espacio de Banach X los siguientes asertos son equivalentes:*

(1) $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$; (2) X^* es ultra-(P) y $(B(X^*), w^*) \in (CT)$; (3) X^* es $\aleph_1$-super-(P) y $(B(X^*), w^*) \in (CT)$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) sale de la Proposición 10.16 y la Proposición 10.21. (2) $\Rightarrow$ (3) es obvio. Finalmente observemos que (3) $\Rightarrow$ (1) sale de la Proposición 11.8 y la Proposición 10.4. ■

Corolario 11.10 (MA_{ω_1})**.** *En la clase de los espacios de Banach X cada una de las siguientes propiedades:*

(A) $Dens(X) = \aleph_1$, X^* es super-(P) y $(B(X^*), w^*) \in (CT)$;

(B) X^* es ultra-(P) y $(B(X^*), w^*) \in (CT)$;

(C) X^* es $\aleph_1$-super-(P) y $(B(X^*), w^*) \in (CT)$;

es productiva, es decir, si $X_1, ..., X_n$ son espacios de Banach todos ellos verificando la propiedad (A) ó (B) ó (C), entonces el producto $X_1 \times ... \times X_n$ verifica la correspondiente propiedad.

Demostración. Es consecuencia de las Proposición 11.9, la Proposición 11.8 y de que la propiedad $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$ es productiva. ■

Sean (X, T_X) un espacio topológico, $A \subset X$ y κ un cardinal. Recordemos que A_κ denota el conjunto.

$$A_\kappa := \cup\{\overline{D} : D \subset A, |D| \leq \kappa\}.$$

Decimos que A es κ-cerrado sii $A = A_\kappa$. Decimos que A es contablemente cerrado sii A es $\aleph_0$-cerrado, es decir, sii $A = A_{\aleph_0}$.

Lema 11.11. *Sea X un espacio de Banach. Entonces:*

(1) $(B(X^*), w^*)$ no es (CT) sii existe $A \subset B(X^*)$ tal que A es contablemente w^*-cerrado (es decir, $A = A_{\aleph_0}$ en la w^*-topología) y $0 \in \overline{A}^{w^*}$ pero $0 \notin A$.

(2) Si $A \subset B(X^*)$ es contablemente w^*-cerrado, entonces A es w-cerrado.

Demostración. (1) es trivial.

(2) Sea $z \in \overline{A}^{w}$. Como (X^*, w) es (CT), existe una familia contable $D \subset A$ tal que $z \in \overline{D}^{w}$. Por tanto, $z \in \overline{D}^{w} \subset \overline{D}^{w^*} \subset A_{\aleph_0} = A$. En consecuencia, A es w-cerrado. ■

Proposición 11.12. *Sea X un espacio de Banach tal que $Dens(X) < \mathfrak{mm}$ y X^* es super-(P). Entonces $(B(X^*), w^*)$ es (CT).*

Demostración. Supondremos que $\aleph_1 \leq Dens(X)$, porque, si $Dens(X) < \aleph_1$, siempre ocurre que $(B(X^*), w^*)$ es métrico y por tanto (CT). Supongamos que $(B(X^*), w^*)$ no es (CT). Esto quiere decir que existe un subconjunto $K \subset B(X^*)$ contablemente w^*-cerrado tal que $0 \in \overline{K}^{w^*}$ pero que $0 \notin K$. Sin pérdida de generalidad, supondremos que K es simétrico respecto de 0 (si no lo es, trabajamos con $H = K \cup -K$, que ya lo es, además de ser contablemente w^*-cerrado y verificar $0 \in \overline{H}^{w^*}$ pero $0 \notin H$). Puesto que $2K$ es w-cerrado (ver Lema 11.11) y $0 \notin 2K$, existen $u_1, ..., u_p \in B(X^{**})$ y $\epsilon > 0$ tales que $V \cap 2K = \emptyset$, siendo

$$V := \{x^* \in X^* : \langle u_i, x^* \rangle < \epsilon, i = 1, ..., p\}.$$

Por la prueba de [109, Theorem 3] existe una familia incontable

$$F := \{f_\alpha - g_\alpha : f_\alpha, g_\alpha \in K, f_\alpha \neq g_\alpha, \alpha < \omega_1\} \subset 2K$$

tal que, si $T : X \to \ell_\infty(\omega_1)$ se define como

$$\forall x \in X, \quad T(x) = (\langle f_\alpha - g_\alpha, x \rangle)_{\alpha < \omega_1},$$

entonces T es un operador lineal continuo tal que $T(X) \subset c_0(\omega_1)$ y $T(X)$ es no-separable.

Puesto que $F \cap V = \emptyset$, se tiene que

$$F \subset \bigcup_{1 \leq i \leq p} \{x^* \in X^* : \langle u_i, x^* \rangle \geq \epsilon\}.$$

Como F es incontable, existe $j \in \{1, ..., p\}$ tal que $F_0 := \{f \in F : \langle u_j, f \rangle \geq \epsilon\}$ es incontable. Por el Lema 10.5 se concluye que X^* no es super-(P). Llegamos a una contradicción que prueba el enunciado. ■

Corolario 11.13 (MM)**.** *Sea X un espacio de Banach tal que $Dens(X) = \aleph_1$. Son equivalentes:*

(1) $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$; (2) X^* es super-(P) y $(B(X^*), w^*) \in (CT)$; (3) X^* es super-(P).

Demostración. Ya sabemos que (1) $\Leftrightarrow$ (2) por la Proposición 11.8 y porque $MM \Rightarrow MA_{\omega_1}$. (2) $\Rightarrow$ (3) es obvio y (3) $\Rightarrow$ (1) por la Proposición 11.12. ■

Corolario 11.14 (MM)**.** *Para todo espacio de Banach X los siguientes asertos son equivalentes:*

(1) $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$.

(2) X^* es ultra-(P) y $(B(X^*), w^*) \in (CT)$; (2') X^* es ultra-(P).

(3) X^* es $\aleph_1$-super-(P) y $(B(X^*), w^*) \in (CT)$.; (3') X^* es $\aleph_1$-super-(P).

Demostración. (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) sale de la Proposición 11.9 y de que $MM \Rightarrow MA_{\omega_1}$.

(2) $\Rightarrow$ (2$'$) $\Rightarrow$ (3$'$) es obvio.

(3$'$) $\Rightarrow$ (1) por el Corolario 11.13 y porque la propiedad "$X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$" es $\aleph_1$-determinada (ver la Proposición 10.4). ■

Corolario 11.15 (MM)**.** *En la clase de los espacios de Banach X cada una de las siguientes propiedades:*

(A) $Dens(X) = \aleph_1$ y X^* es super-(P).

(B) X^* es ultra-(P).

(C) X^* es $\aleph_1$-super-(P).

es productiva, es decir, si $X_1, ..., X_n$ son espacios de Banach todos ellos verificando la propiedad (A) ó (B) ó (C), entonces el producto $X_1 \times ... \times X_n$ verifica la correspondiente propiedad.

Demostración. Es consecuencia del Corolario 11.13, el Corolario 11.14 y de que la propiedad $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$ es productiva. ■

Capítulo 12

La igualdad $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$ para X con generador proyectivo

12.1. Introducción

En este Capítulo vamos a investigar qué efectos tiene, sobre la relación entre "$X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$ " y "X^* es super-(P)" , el hecho de que el espacio de Banach X posea un generador proyectivo (abrev., $X \in (PG)$). Recordemos que un par (W, Φ) es generador proyectivo (abrev., (PG)) del espacio de Banach X si:

(a) $W \subset X^*$ es un subconjunto $\mathbb{Q}$-lineal.

(b) Para todo $x \in X$ se verifica $\|x\| = \sup\langle W \cap B(X^*), x\rangle$.

(c) $\Phi : W \to 2^X$ es una multifunción tal que $|\Phi(w)| \leq \aleph_0$, $\forall w \in W$, y para todo subconjunto $B \subset W$ que sea $\mathbb{Q}$-lineal se verifica $\Phi(B)^\perp \cap \overline{B}^{w^*} = \{0\}$.

La clase de los espacios de Banach con (PG) es muy amplia e incluye a los WCG, WCD, WLD, espacios 1-Plichko, etc.

12.2. "$X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$ " y "X^* es super-(P)" para $X \in (PG)$

Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 12.1. *Sea V un espacio de Banach tal que V posee generador proyectivo. Entonces son equivalentes*

(1) V^* es super-(P) ; (2) $V^{**} = \mathcal{S}eq(V^{**})$.

(3) V^* es ultra-(P); (4) V^* es $\aleph_1$-super-(P).

Demostración. (2) $\Rightarrow$ (1) Esta implicación está probada en la Proposición 4.10.

(1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que existe $\varphi \in S(V^{**}) \setminus \mathcal{S}eq(V^{**})$. Por (1) y un resultado de Haydon [65] se tiene que V carece de una copia de ℓ_1. Por tanto $\varphi \notin V_{\aleph_0}$ por el

Lema 2.2, por lo que existe $1 \geq \epsilon_0 > 0$ tal que $dist(\varphi, V_{\aleph_0}) > \epsilon_0$. Vamos a construir un subconjunto w^*-compacto $H \subset V^*$ y un contorno B de H tales que $\overline{\mathrm{co}}(B) \neq \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(H)$. Más concretamente, tal que

$$\inf\langle \varphi, B\rangle > 0 = \inf\langle \varphi, H\rangle.$$

Sea (W, Φ) el generador proyectivo de V. Construimos las proyecciones P_α, $\omega \leq \alpha \leq \mu = Dens(V)$ siguiendo las pautas de [37, Lemma 6.1.1,6.1.3 y Proposition 6.1.4, 6.1.7], pero introduciendo algunas modificaciones en la construcción para $\omega < \alpha < \omega_1$. Para aplicar [37, Proposition 6.1.4] hacemos $Y = V$, $f(x) = x$, $\forall x \in V$, $\{y_\alpha : \omega \leq \alpha < \mu\}$ familia densa en V y $\Psi : V \to 2^W$ tal que $\Psi(x) \subset W \cap B(V^*)$, $|\Psi(x)| \leq \aleph_0$ y $\|x\| = \sup\langle \Psi(x), x\rangle$. Observemos el siguiente Hecho:

HECHO. Si $D := \bigcup\{\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(F \cup -F) : F \subset W \cap B(V^*),\ |F| \leq \aleph_0\}$, se verifica que $D = B(V^*)$.

En efecto, D es convexo, simétrico respecto del centro y $\|\cdot\|$-cerrado. Además D es un contorno de $B(V^*)$. Puesto que V^* es super-(P), resulta que $B(V^*) = \overline{\mathrm{co}}(D) = D$.

A continuación construimos las proyecciones $P_\alpha : V \to V$, $\omega \leq \alpha \leq \mu$, $P_\omega = 0$, $P_\mu = id_V$, subconjuntos $A_\alpha \subset V$, $B_\alpha \subset V^*$ para $\omega < \alpha \leq \mu$ de modo que $P_\alpha V = \overline{A_\alpha}$ y $P_\alpha^* V^* = \overline{B_\alpha}^*$ para $\omega < \alpha \leq \mu$ y vectores $x^*_{\alpha+1}$, $\omega \leq \alpha < \mu$ de modo que $x^*_{\alpha+1} = P^*_{\alpha+1}x^*_{\alpha+1} = (P^*_{\alpha+1} - P^*_\alpha)x^*_{\alpha+1}$ para $\omega \leq \alpha < \mu$.

Etapa ω. Hacemos $P_\omega = 0$.

Etapa $\omega + 1$. Elegimos $x^*_{\omega+1} \in S(V^*)$ tal que $\langle \varphi, x^*_{\omega+1}\rangle > \epsilon_0 > 0$. Por el HECHO existe una familia contable $W_{\omega+1} \subset W \cap B(V^*)$ tal que $x^*_{\omega+1} \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(W_{\omega+1} \cup -W_{\omega+1})$. Aplicamos la máquina del [37, Lemma 6.1.3] al par $A_0 = \{y_\omega\}$ y $B_0 = W_{\omega+1} \cup -W_{\omega+1}$. Obtenemos subconjuntos contables A, B tales que $A_0 \subset A \subset V$ y $B_0 \subset B \subset W$, siendo $\overline{A}$ y $\overline{B}$ subespacios vectoriales de V y V^* respectivamente, de modo que

(1) $\Psi(A) \subset B$, $\Phi(B) \subset A$ y $\|a\| = \sup\langle B \cap B(V^*), a\rangle, \forall a \in \overline{A}$.

(2) $A^\perp \cap \overline{B}^{w^*} = \{0\}$ y por [37, Lemma 6.1.1] existe una proyección $P : V \to V$ tal que $\|P\| = 1$, $P(V) = \overline{A}$ y $P^*(V^*) = \overline{B}^{w^*}$.

Hacemos $A_{\omega+1} = A$, $B_{\omega+1} = B$ y $P_{\omega+1} = P$. Observemos que $x^*_{\omega+1} \in P^*_{\omega+1}V^*$, es decir, $x^*_{\omega+1} = P^*_{\omega+1}x^*_{\omega+1} = (P^*_{\omega+1} - P^*_\omega)x^*_{\omega+1}$.

Etapa $\omega+2$. Como $dist(\varphi, \overline{A_{\omega+1}}^{w^*}) \geq dist(\varphi, V_{\aleph_0}) > \epsilon_0$, existe $x^*_{\omega+2} \in S(V^*)$ tal que $\langle \varphi, x^*_{\omega+2}\rangle > \epsilon_0 > 0$ y $\langle x^*_{\omega+2}, P_{\omega+1}V\rangle = \langle x^*_{\omega+2}, \overline{A_{\omega+1}}\rangle = \{0\}$. Por el HECHO existe una familia contable $W_{\omega+2} \subset W \cap B(V^*)$ tal que $x^*_{\omega+2} \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(W_{\omega+2} \cup -W_{\omega+2})$. Aplicamos la máquina del [37, Lemma 6.1.3] al par $A_0 = A_{\omega+1} \cup \{y_{\omega+1}\}$ y $B_0 = B_{\omega+1} \cup W_{\omega+2} \cup -W_{\omega+2}$. Obtenemos subconjuntos contables A, B tales que $A_0 \subset A \subset V$ y $B_0 \subset B \subset W$, siendo $\overline{A}$ y $\overline{B}$ subespacios vectoriales de V y V^* respectivamente, de modo que

(1) $\Psi(A) \subset B$ y $\|a\| = \sup\langle B \cap B(V^*), a\rangle, \forall a \in \overline{A}$.

(2) $A^{\perp} \cap \overline{B}^{w^*} = \{0\}$ y por [37, Lemma 6.1.1] existe una proyección $P : V \to V$ tal que $\|P\| = 1$, $P(V) = \overline{A}$ y $P^*(V^*) = \overline{B}^{w^*}$.

Hacemos $A_{\omega+2} = A$, $B_{\omega+2} = B$ y $P_{\omega+2} = P$. Observemos que $x^*_{\omega+2} \in P^*_{\omega+2}V^*$, es decir, $x^*_{\omega+2} = P^*_{\omega+2}(x^*_{\omega+2}) = (P^*_{\omega+2} - P^*_{\omega+1})(x^*_{\omega+2})$.

Etapa $\gamma < \omega_1$. Supongamos hecha la construcción para todo $\alpha < \gamma$. Hay dos casos, a saber:

Caso 1. γ es ordinal límite. En este caso cogemos $A_\gamma := \cup_{\alpha<\gamma} A_\alpha$ y $B_\gamma := \cup_{\alpha<\gamma} B_\alpha$, que verifican $A^{\perp} \cap \overline{B}^{w^*} = \{0\}$. Por [37, Lemma 6.1.1] existe $P_\gamma : V \to V$ proyección de norma $\|P_\gamma\| = 1$ tal que $P_\gamma(V) = \overline{A_\gamma}$ y $P^*_\gamma V^* = \overline{B_\gamma}^{w^*}$. No elegimos x^*_γ.

Caso 2. $\gamma := \beta + 1$. Como $dist(\varphi, \overline{A_\beta}^{w^*}) \geq dist(\varphi, V_{\aleph_0}) > \epsilon_0$, existe $x^*_{\beta+1} \in S(V^*)$ tal que $\langle \varphi, x^*_{\beta+1} \rangle > \epsilon_0$ y $\langle x^*_{\beta+1}, P_\beta V \rangle = \{0\}$. Por el HECHO existe una familia contable $W_{\beta+1} \subset W \cap B(V^*)$ tal que $x^*_{\beta+1} \in \overline{\text{co}}^{w^*}(W_{\beta+1} \cup -W_{\beta+1})$. Aplicamos la máquina del [37, Lemma 6.1.3] al par $A_0 = A_\beta \cup \{y_\beta\}$ y $B_0 = B_\beta \cup W_{\beta+1} \cup -W_{\beta+1}$. Obtenemos subconjuntos contables A, B tales que $A_0 \subset A \subset V$ y $B_0 \subset B \subset W$, siendo $\overline{A}$ y $\overline{B}$ subespacios vectoriales de V y V^* respectivamente, de modo que

(1) $\Psi(A) \subset B$ y $\|a\| = \sup\langle B \cap B(V^*), a\rangle, \forall a \in \overline{A}$.

(2) $A^{\perp} \cap \overline{B}^{w^*} = \{0\}$ y por [37, Lemma 6.1.1] existe una proyección $P : V \to V$ tal que $\|P\| = 1$, $P(V) = \overline{A}$ y $P^*(V^*) = \overline{B}^{w^*}$.

Hacemos $A_\gamma = A$, $B_\gamma = B$ y $P_\gamma = P$. Observemos que $x^*_{\beta+1} \in P^*_\gamma V^*$, es decir, $x^*_{\beta+1} = P^*_\gamma(x^*_{\beta+1}) = (P^*_{\beta+1} - P^*_\beta)(x^*_{\beta+1})$.

El proceso se continúa con las modificaciones descritas para todo $\gamma < \omega_1$. A continuación, para $\omega_1 \leq \gamma \leq \mu$ seguimos el proceso standard descrito en [37, Proposition 6.1.4,6.1.7, etc.].

Sea $I := [\omega, \omega_1)$ y $F : X \to c_0(I)$ tal que $F(x) = (\langle x^*_\alpha, x\rangle : \omega \leq \alpha < \omega_1)$. Observemos que $F(x)$ está efectivamente en $c_0(I)$ porque para todo $x \in V$ y todo $\epsilon > 0$ el conjunto $\{\alpha < \mu : \|(P_{\alpha+1} - P_\alpha)(x)\| \geq \epsilon\}$ es finito (ver [37, Prop. 6.2.1]). Además es claro que F es un operador lineal y continuo tal que $\|F\| \leq 1$ y $F^*(e_\alpha) = x^*_\alpha$, $\forall \alpha \in I$, siendo $\{e_\alpha : \alpha \in I\}$ la base canónica de $\ell_1(I)$. Sabemos que $K := \overline{\{e_\alpha : \alpha \in I\}}^{w^*} = \{e_\alpha : \alpha \in I\} \cup \{0\}$ y que $B := \{e_\alpha : \alpha \in I\}$ es un contorno de K, tal que $\overline{\text{co}}(B) \neq \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ (porque $0 \notin \overline{\text{co}}(B)$). Sea $H := F^*(K)$, que es un subconjunto w^*-compacto de V^*. Es claro que $H = \overline{\{x^*_\alpha : \alpha \in I\}}^{w^*} = \{x^*_\alpha : \alpha \in I\} \cup \{0\}$ y que $B_0 := F^*(B) = \{x^*_\alpha : \alpha \in I\}$ es un contorno de H.

Aserto. $\inf\langle \varphi, B_0\rangle \geq \epsilon_0 > 0 \geq \inf\langle \varphi, H\rangle$. Por tanto, $0 \notin \overline{\text{co}}(B_0)$ y $\overline{\text{co}}(B_0) \neq \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$.

En efecto, esto sale por construcción ya que $\langle \varphi, x^*_\alpha \rangle > \epsilon_0$ para todo $\alpha \in I$.

Hemos llegado a una contradicción que prueba que se verifica (2).

(2) $\Rightarrow$ (3). En primer término, todo subespacio $Z \subset V$ verifica $Z^{**} = \mathcal{S}eq(Z^{**})$ por el Corolario 1.20. Ahora basta aplicar la Proposición 4.10.

(3) $\Rightarrow$ (4) es obvio.

(4) $\Rightarrow$ (2). Por la Proposición 10.4 bastará probar que, si $Y \subset V$ es un subespacio con $Dens(Y) = \aleph_1$, se verifica que $Y^{**} = \mathcal{S}eq(Y^{**})$. Como V tiene generador proyectivo, se puede construir una PRI $\{P_\alpha : \alpha \leq \mu\}$, $\mu = Dens(V)$, tal que $Y \subset P_{\omega_1}(V) =: Z$. Observemos que el subespacio cerrado Z verifica: (i) $Dens(Z) = \aleph_1$; (ii) Z tiene una PRI; (iii) Z^* es super-(P). Por [64, p. 192] el subespacio Z tiene generador proyectivo. En consecuencia, teniendo en cuenta la equivalencia (1) $\Leftrightarrow$ (2) probada más arriba, concluimos que $Z^{**} = \mathcal{S}eq(Z^{**})$ y de aquí que $Y^{**} = \mathcal{S}eq(Y^{**})$ por el Corolario 1.20. ■

NOTAS. (A) Para espacios $X \in (PG)$, la propiedad $X \in (C)$ no implica que $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$. En efecto sea $X := c_0(\omega_1)$, que verifica $X \in (C)$ y $X \in (PG)$ (por [64, p. 192], ya que $Dens(X) = \aleph_1$ y X tiene PRI (tiene base monótona)), y sin embargo $X^{**} \neq \mathcal{S}eq(X^{**})$.

(B) Si $X \in (PG)$ y $X^{**} = X_{\aleph_0}$, no necesariamente debe ser $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$. Un contraejemplo sencillo es $X = \ell_1 \oplus_1 \ell_2(\omega_1)$. Observemos que

(i) $X^{**} = X_{\aleph_0}$ pero $X^{**} \neq \mathcal{S}eq(X^{**})$.

(ii) Por [64, p. 192] X tiene generador proyectivo, ya que $Dens(X) = \aleph_1$ y X tiene PRI (tiene base monótona).

Recordemos que en el Cap.1 hemos introducido las nociones de espacio Plichko y 1-Plichko. Son Plichko los siguientes espacios:

(1) Espacios con base de Markusevic. En particular los espacios con base de Schauder $\{x_\alpha : \alpha < \theta\}$ siendo θ un ordinal.

(2) Los espacios WCG, WCD, WKA, WLD, ver [64, p.184]).

(3) Los espacios de Banach X con una PRI tales que Dens$(X) = \aleph_1$.

Corolario 12.2. *Sea X un espacio de Banach que es Plichko. Entonces son equivalentes:*

(1) X^* es super-(P); (2) $X^{**} = Seq(X^{**})$.

(3) X^* es ultra-(P); (4) X^* es $\aleph_1$-super-(P).

Demostración. Basta aplicar la Proposición 12.1 y tener en cuenta que:

(1) Todo espacio de Banach Plichko X admite una norma equivalente $|\cdot|$ tal que $(X, |\cdot|)$ es 1-Plichko (ver [68, Theor. 4.16]).

(2) Todo espacio 1-Plichko posee un generador proyectivo (ver la demostración de [64, p. 192]). ■

12.3. Generador proyectivo, angelicidad, (CT) y (CCT)

Estamos interesados en ver, en la clase de los espacios con generador proyectivo, la relación de la propiedad $X^* \in (C)$ con las propiedades que estamos considerando (es decir, X^* es super-(P), $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$, etc.). De entrada digamos que siempre $X^* \in (C)$ implica $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$.

Proposición 12.3. *Sea X un espacio de Banach que posee un generador proyectivo (W, Φ). Son equivalentes:*

(1) $(B(X^*), w^*)$ es angélica.

(2) $(B(X^*), w^*)$ es (CT).

(3) $(B(X^*), w^*)$ es (CCT).

(4) X es (C).

(5) Para todo $x^* \in B(X^*)$ existe una secuencia $\{w_n : n \geq 1\} \subset B(X^*) \cap W$, dependiendo de x^*, tal que $w_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} x^*$ en la w^*-topología de X^*.

(6) $B(X^*) = \cup\{\overline{F}^{w^*} : F \subset B(X^*) \cap W, |F| \leq \aleph_0\}$.

Demostración. Las implicaciones (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) y (1) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6) son obvias. (3) $\Leftrightarrow$ (4) por [93, pg.147]

(3) $\Rightarrow$ (6). Sea $z \in B(X^*)$. Puesto que $z \in B(X^*) = \overline{B(X^*) \cap W}^{w^*}$, por (3) existe una familia contable $D \subset B(X^*) \cap W$ tal que $z \in \overline{\text{co}}^{w^*}(D)$. Como $\overline{\text{co}}^{w^*}(D) = \overline{\text{co}}_{\mathbb{Q}}^{w^*}(D)$, resulta que haciendo $W_z := co_{\mathbb{Q}}(D)$ se tiene que $|W_z| \leq \aleph_0$, $W_z \subset B(X^*) \cap W$ y $z \in \overline{W_z}^{w^*}$.

(6) $\Rightarrow$ (1). Suponemos que $Dens(X) \geq \aleph_1$, porque si X es separable es claro que se verifica (1). Fijemos $Z \subset B(X^*)$ y $z_0 \in \overline{Z}^{w^*}$. Queremos hallar una secuencia $\{z_n : n \geq 1\} \subset Z$ tal que $z_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} z_0$ en la w^*-topología. Aprovechando que X tiene un (PG), vamos a construir las ω primeras proyecciones $\{P_\alpha : \omega \leq \alpha \leq 2\omega\}$ de una PRI en X, siguiendo las pautas de [37, Lemma 6.1.1,6.1.3 y Proposition 6.1.4, 6.1.7], aunque con algunas modificaciones. Para aplicar el Lemma 6.1.3 y Proposition 6.1.4 de [37] cogemos una secuencia $\{y_\alpha : \omega \leq \alpha < \mu\}$, $\mu = Dens(X)$, densa en X, hacemos $Y := X$, $f(x) = x$, $\forall x \in X$, y $\Psi : X \to 2^{X^*}$ tal que $\Psi(x) \subset B(X^*) \cap W$, $|\Psi(x)| \leq \aleph_0$ y $\|x\| = \sup\langle\Psi(x), x\rangle$, $\forall x \in X$. Utilizamos un proceso inductivo para construir las proyecciones $\{P_\alpha : \omega \leq \alpha \leq 2\omega\}$.

Etapa 0. Hacemos $P_\omega = 0$.

Etapa 1. Vamos a construir la proyección $P_{\omega+1}$. Por (6) existe un subconjunto contable $F_1 \subset B(X^*) \cap W$ tal que $z_0 \in \overline{F_1}^{w^*}$. Aplicamos el Lemma 6.1.3 de [37] al par $A_0 = \{y_\omega\}$ y $B_0 = F_1$. Obtenemos subconjuntos contables $\mathbb{Q}$-lineales A, B con $A_0 \subset A \subset X$ y $B_0 \subset B \subset W$ tales que

(i) $\Psi(A) \subset B$ y $\|a\| = \sup\langle B \cap B(X^*), a\rangle, \ \forall a \in \overline{A}$.

(ii) $A^\perp \cap \overline{B}^{w^*} = \{0\}$ y por [37, Lemma 6.1.1] existe una proyección $P : X \to X$ tal que $\|P\| = 1$, $P(X) = \overline{A}$ y $P^*X^* = \overline{B}^{w^*}$.

Hacemos $A_{\omega+1} := A$, $B_{\omega+1} := B$ y $P_{\omega+1} := P$. Observemos que $z_0 \in P^*_{\omega+1}X^*$, es decir, $P^*_{\omega+1}z_0 = z_0$. Como $z_0 \in \overline{P^*_{\omega+1}Z}^{w^*} \subset B(P^*_{\omega+1}X^*)$ y como $(B(P^*_{\omega+1}X^*), w^*)$ es metrizable, existe una secuencia $\{a_{1n} : n \geq 1\} \subset Z$ tal que $P^*_{\omega+1}a_{1n} \underset{n\to\infty}{\to} z_0$ en la w^*-topología.

Etapa 2. Construimos $P_{\omega+2}$. Por (6) existe una familia contable $F_2 \subset B(X^*)\cap W$ tal que $\{a_{1n} : n \geq 1\} \subset \overline{F_2}^{w^*}$. Aplicamos el Lemma 6.1.3 de [37] al par $A_0 = A_{\omega+1} \cup \{y_{\omega+1}\}$ y $B_0 = B_{\omega+1} \cup F_2$. Obtenemos subconjuntos contables $\mathbb{Q}$-lineales A, B con $A_0 \subset A \subset X$ y $B_0 \subset B \subset W$ tales que

(i) $\Psi(A) \subset B$ y $\|a\| = \sup\langle B \cap B(X^*), a\rangle, \ \forall a \in \overline{A}$.

(ii) $A^\perp \cap \overline{B}^{w^*} = \{0\}$ y por [37, Lemma 6.1.1] existe una proyección $P : X \to X$ tal que $\|P\| = 1$, $P(X) = \overline{A}$ y $P^*X^* = \overline{B}^{w^*}$.

Hacemos $A_{\omega+2} := A$, $B_{\omega+2} := B$ y $P_{\omega+2} := P$. Observemos que $z_0, a_{1n} \in P^*_{\omega+2}X^*$, es decir, $P^*_{\omega+2}z_0 = z_0$ y $P^*_{\omega+2}a_{1n} = a_{1n}$, $\forall n \geq 1$. Como $z_0 \in \overline{P^*_{\omega+2}Z}^{w^*} \subset B(P^*_{\omega+2}X^*)$ y como $(B(P^*_{\omega+2}X^*), w^*)$ es metrizable, existe una secuencia $\{a_{2n} : n \geq 1\} \subset Z$ tal que $P^*_{\omega+2}a_{2n} \underset{n\to\infty}{\to} z_0$ en la w^*-topología.

Etapa $m + 1$. Supongamos hechas las construcciones hasta la etapa $m \in \mathbb{N}$. En particular, disponemos de la secuencia $\{a_{mn}; n \in \mathbb{N}\} \subset B(X^*)\cap W$ tal que $P^*_{\omega+m}a_{mn} \underset{n\to\infty}{\to} z_0$, en la w^*-topología, y de los conjuntos contables $\mathbb{Q}$-lineales $A_{\omega+m}$ y $B_{\omega+m}$. Por (6) existe un subconjunto contable $F_{m+1} \subset B(X^*) \cap W$ tal que $\{a_{mn} : n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{F_{m+1}}^{w^*}$. Aplicamos el Lemma 6.1.3 de [37] al par $A_0 = A_{\omega+m} \cup \{y_{\omega+m}\}$ y $B_0 = B_{\omega+m} \cup F_{m+1}$. Obtenemos subconjuntos contables $\mathbb{Q}$-lineales A, B con $A_0 \subset A \subset X$ y $B_0 \subset B \subset W$ tales que

(i) $\Psi(A) \subset B$ y $\|a\| = \sup\langle B \cap B(X^*), a\rangle, \ \forall a \in \overline{A}$.

(ii) $A^\perp \cap \overline{B}^{w^*} = \{0\}$ y por [37, Lemma 6.1.1] existe una proyección $P : X \to X$ tal que $\|P\| = 1$, $P(X) = \overline{A}$ y $P^*X^* = \overline{B}^{w^*}$.

Hacemos $A_{\omega+m+1} := A$, $B_{\omega+m+1} := B$ y $P_{\omega+m+1} := P$. Observemos que $z_0, a_{mn} \in P^*_{\omega+m+1}X^*$, es decir, $P^*_{\omega+m+1}z_0 = z_0$ y $P^*_{\omega+m+1}a_{mn} = a_{mn}$, $\forall n \geq 1$. Como $z_0 \in \overline{P^*_{\omega+m+1}Z}^{w^*} \subset B(P^*_{\omega+m+1}X^*)$ y como $(B(P^*_{\omega+m+1}X^*), w^*)$ es metrizable, existe una secuencia $\{a_{m+1,n} : n \geq 1\} \subset Z$ tal que $P^*_{\omega+m+1}a_{m+1,n} \underset{n\to\infty}{\to} z_0$ en la w^*-topología.

Utilizando inducción se puede hacer la construcción para todo $n \in \mathbb{N}$.

Etapa final ω. Vamos a construir $P_{2\omega}$. Hacemos $A_{2\omega} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\omega+n}$ y $B_{2\omega} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{\omega+n}$, que son subconjuntos contables $\mathbb{Q}$-lineales de X y W, respectivamente, que verifican

(i) $\Psi(A_{2\omega}) \subset B_{2\omega}$ y $\|a\| = \sup\langle B_{2\omega} \cap B(X^*), a\rangle, \ \forall a \in \overline{A_{2\omega}}$.

(ii) $A_{2\omega}^{\perp} \cap \overline{B_{2\omega}}^{w^*} = \{0\}$ y por [37, Lemma 6.1.1] existe una proyección $P : X \to X$ tal que $\|P\| = 1$, $P(X) = \overline{A_{2\omega}}$ y $P^*X^* = \overline{B_{2\omega}}^{w^*}$.

Hacemos $P_{2\omega} := P$. Observemos que $z_0, a_{mn} \in P_{2\omega}^* X^*, \ \forall n, m \geq 1$.

Aserto. $z_0 \in \overline{\{a_{mn} : m, n \geq 1\}}^{w^*}$.

En efecto, sin pérdida de generalidad supongamos que $z_0 = 0$. Sean $v_1, ..., v_p \in X$ y $\epsilon > 0$ y consideremos el entorno w^*-abierto V de $0 \in X^*$ definido del siguiente modo

$$V := \{z \in X^* : |\langle z, v_i\rangle| < \epsilon, i = 1, ..., p\}.$$

Queremos ver que existe $a_{rs} \in V$. Cada v_i lo descomponemos del siguiente modo

$$v_i = v_{i1} + v_{i2} \quad \text{siendo } v_{i1} := P_{2\omega} v_i.$$

Observemos que $P_\alpha v_i \overset{\|\cdot\|}{\to} P_{2\omega} v_i = v_{i1}, \ i = 1, ..., p$, para $\alpha \uparrow 2\omega$, y que $\langle a_{mn}, v_i\rangle = \langle a_{mn}, v_{i1}\rangle$ porque $P_{2\omega}^* a_{mn} = a_{mn}$. A continuación, como $P_\alpha v_i \to P_{2\omega} v_i, \ i = 1, ..., p$, en norma, para $\alpha \uparrow 2\omega$, podemos escoger $r < \omega$ de modo que $\|v_{i1} - P_{\omega+r} v_i\| < \epsilon/2, \ i = 1, ..., p$. Como $P_{\omega+r}^* a_{rn} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ en la w^*-topología, existe $s < \omega$ tal que

$$|\langle P_{\omega+r}^* a_{rs}, v_i\rangle| = |\langle a_{rs}, P_{\omega+r} v_i\rangle| < \epsilon/2, \ i = 1, ..., p.$$

Por tanto para $i = 1, ..., p$ se verifica

$$\begin{aligned} &|\langle a_{rs}, v_i\rangle| = |\langle a_{rs}, v_{i1}\rangle| = |\langle a_{rs}, v_{i1} - P_{\omega+r} v_i + P_{\omega+r} v_i\rangle| \leq \\ &\leq |\langle a_{rs}, v_{i1} - P_{\omega+r} v_i\rangle| + |\langle a_{rs}, P_{\omega+r} v_i\rangle| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba el Aserto.

Como $z_0 \in \overline{\{a_{mn} : m, n \in \mathbb{N}\}}^{w^*} \subset B(P_{2\omega}^* X^*)$ y $(B(P_{2\omega}^* X^*), w^*)$ es métrico compacto, existe $\{z_m : m \geq 1\} \subset \{a_{mn} : m, n \in \mathbb{N}\}$ tal que $z_m \underset{n\to\infty}{\to} z_0$ en la w^*-topología de X^*. Esto prueba que $(B(X^*), w^*)$ es angélico. ■

Corolario 12.4. *Sea X un espacio de Banach tal que X^* posee un generador proyectivo (W, Φ) verificando $\overline{W} = X$. Son equivalentes:*

(1) $(B(X^{**}), w^*)$ es angélica.

(2) $(B(X^{**}), w^*)$ es (CT).

(3) $(B(X^{**}), w^*)$ es (CCT).

(4) X^* es (C).

(5) $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$.

(6) $X_{\aleph_0} = X^{**}$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de la Proposición 12.3. ■

Corolario 12.5. *Sea X un espacio de Banach que es Asplund. Son equivalentes:*

(1) $(B(X^{**}), w^*)$ es angélica.

(2) $(B(X^{**}), w^*)$ es (CT).

(3) $(B(X^{**}), w^*)$ es (CCT).

(4) X^* es (C).

(5) $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$.

(6) $X_{\aleph_0} = X^{**}$.

(7) $(B(X^*), w)$ es Lindelöf.

(8) $(B(X^{**}), w^*)$ es un compacto de Corson.

Demostración. Si X es Asplund, X^* posee un generador proyectivo (W, Φ) tal que $W = X$ (ver [37, Proposition 8.2.1]). Por tanto los asertos (1),...,(6) son equivalentes por el Corolario 12.4. Finalmente, las implicaciones (1) $\Leftrightarrow$ (7) $\Leftrightarrow$ (8) son parte de [88, Corollary 8]. ■

Corolario 12.6. *Sean X un espacio de Banach tal que $Dens(X) = \aleph_1$ y $\{P_\alpha : \omega \leq \alpha \leq \omega_1\}$ una PRI en X. Son equivalentes:*

(0) $B(X^*) = \bigcup_{\omega \leq \alpha < \omega_1} B(P_\alpha^* X^*)$.

(1) $(B(X^*), w^*)$ es angélica.

(2) $(B(X^*), w^*)$ es (CT).

(3) $(B(X^*), w^*)$ es (CCT).

(4) X es (C)

Demostración. Puesto que todo espacio X con $Dens(X) = \aleph_1$ y una PRI es 1-Plichko y posee (PG) ([68, Theor. 4.15],[**?**, Theor. 5.63, pg. 192]), de la Proposición 12.3 sale que (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4).

(0) $\Rightarrow$ (1). Sean $A \subset B(X^*)$ y $z_0 \in \overline{A}^{w^*}$. Ponemos en marcha un proceso inductivo.

Etapa 1. Por (0) existe $\alpha_1 < \omega_1$ tal que $z_0 \in B(P_{\alpha_1}^* X^*)$. Es claro que $z_0 = P_{\alpha_1}^* z_0 \in \overline{P_{\alpha_1}^* A}^{w^*}$. Como $(B(P_{\alpha_1}^* X^*), w^*)$ es un espacio metrizable, existe una secuencia $\{a_{1n} : n \geq 1\} \subset A$ tal que $P_{\alpha_1}^* a_{1n} \underset{n\to\infty}{\to} z_0$ en la w^*-topología de X^*.

Etapa 2. Por (0) existe un ordinal α_2 con $\alpha_1 < \alpha_2 < \omega_1$ tal que

$$P_{\alpha_2}^* a_{1n} = a_{1n}, \quad \forall n \geq 1.$$

Naturalmente $z_0 = P_{\alpha_2}^* z_0 \in \overline{P_{\alpha_2}^* A}^{w^*}$, de donde (como en Etapa 1) sale que existe una secuencia $\{a_{2n} : n \geq 1\} \subset A$ tal que $P_{\alpha_2}^* a_{2n} \underset{n\to\infty}{\to} z_0$ en la w^*-topología de X^*.

El proceso se repite para todo $n < \omega_0$. Sea $\alpha_0 = \sup_{n\geq 1} \alpha_n$ que es un ordinal límite con $\alpha_0 < \omega_1$ y además $P^*_{\alpha_0} a_{mn} = a_{mn}, \ \forall m, n \in \mathbb{N}$.

Aserto. $z_0 \in \overline{\{a_{mn} : m, n \in \mathbb{N}\}}^{w^*}$.

En efecto, supongamos, para simplificar, que $z_0 = 0$. Fijados $\epsilon > 0$ y $v_1, ..., v_p \in X$, consideremos el entorno w^*-abierto V de $0 \in X^*$ definido por

$$V := \{x^* \in X^* : |\langle x^*, v_i\rangle| < \epsilon : i = 1, ..., p\}.$$

Queremos ver que existe $a_{rs} \in V$. Cada v_i lo descomponemos del siguiente modo

$$v_i = v_{i1} + v_{i2} \quad \text{siendo } v_{i1} := P_{\alpha_0} v_i.$$

Observemos que $P_\alpha v_i \overset{\|\cdot\|}{\to} P_{\alpha_0} v_i = v_{i1}, \ i = 1, ..., p$, para $\alpha \uparrow \alpha_0$, y que $\langle a_{mn}, v_i\rangle = \langle a_{mn}, v_{i1}\rangle$ porque $P^*_{\alpha_0} a_{mn} = a_{mn}$. A continuación, como $P_\alpha v_i \to P_{\alpha_0} v_i, \ i = 1, ..., p$, en norma, para $\alpha \uparrow \alpha_0$, podemos escoger $r < \omega_0$ de modo que $\|v_{i1} - P_{\alpha_r} v_i\| < \epsilon/2, \ i = 1, ..., p$. Como $P^*_{\alpha_r} a_{rn} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ en la w^*-topología, existe $s < \omega_0$ tal que $|\langle a_{rs}, P_{\alpha_r} v_i\rangle| < \epsilon/2, \ i = 1, ..., p$. Por tanto para $i = 1, ..., p$ se verifica

$$\begin{aligned} |\langle a_{rs}, v_i\rangle| &= |\langle a_{rs}, v_{i1}\rangle| = |\langle a_{rs}, v_{i1} - P_{\alpha_r} v_i + P_{\alpha_r} v_i\rangle| \leq \\ &\leq |\langle a_{rs}, v_{i1} - P_{\alpha_r} v_i\rangle| + |\langle a_{rs}, P_{\alpha_r} v_i\rangle| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba el Aserto.

Como $z_0 \in \overline{\{a_{mn} : m, n \in \mathbb{N}\}}^{w^*} \subset B(P^*_{\alpha_0} X^*)$ y $(B(P^*_{\alpha_0} X^*), w^*)$ es métrico compacto, existe $\{z_m : m \geq 1\} \subset \{a_{mn} : m, n \in \mathbb{N}\}$ tal que $z_m \underset{n\to\infty}{\to} z_0$ en la w^*-topología de X^*. Esto prueba que $(B(X^*), w^*)$ es angélica.

(3) $\Rightarrow$ (0). Basta tener en cuenta que $B(X^*) = \overline{\cup_{\alpha<\omega_1} B(P^*_\alpha X^*)}^{w^*}$, $B(P^*_\alpha X^*)$ es w^*-compacto y que $B(P^*_\alpha X^*) \subset B(P^*_\beta X^*)$ para $\alpha \leq \beta < \omega_1$. ■

Una aplicación de la Proposición 12.3 es el siguiente Corolario.

Corolario 12.7. *El espacio de Johnson-Lindenstrauss JL_2 carece de (PG).*

Demostración. Es conocido que $JL_2 \in (C)$ y que la bola unidad $(B(JL_2^*), w^*)$ no es angélica. Ahora basta aplicar la Proposición 12.3. ■

Nota. Que JL_2 carece de (PG) también sale del hecho de que JL_2 carece de M-sistemas incontables [50].

Corolario 12.8. *Sea X un espacio de Banach tal que $X \in (PG)$ y X^* posee un generador proyectivo (W, Φ) verificando $\overline{W} = X$. Son equivalentes:*

(1) $(B(X^{**}), w^*)$ es angélica.

(2) $(B(X^{**}), w^*)$ es (CT).

(3) $(B(X^{**}), w^*)$ *es* (CCT).

(4) X^* *es* (C).

(5) $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$.

(6) $X_{\aleph_0} = X^{**}$.

(7) X^* *es ultra-*(P).

(8) X^* *es super-*(P).

(9) X^* *es* $\aleph_1$*-super-*(P).

Demostración. Es consecuencia inmediata del Cor. 12.4 y la Proposición 12.1. ■

Corolario 12.9. *Sea X un espacio de Banach tal que $X \in (PG)$ y X es Asplund. Son equivalentes:*

(1) $(B(X^{**}), w^*)$ *es angélica.*

(2) $(B(X^{**}), w^*)$ *es* (CT).

(3) $(B(X^{**}), w^*)$ *es* (CCT).

(4) X^* *es* (C).

(5) $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$.

(6) $X_{\aleph_0} = X^{**}$.

(7) X^* *es ultra-*(P).

(8) X^* *es super-*(P).

(9) X^* *es* $\aleph_1$*-super-*(P).

(10) $(B(X^*), w)$ *es Lindelöf.*

(11) $(B(X^{**}), w^*)$ *es un compacto de Corson.*

Demostración. X^* posee un generador proyectivo $(W, \Phi))$ tal que $W = X$ ya que X es Asplund. Ahora basta aplicar el Cor. 12.5 y Cor. 12.8. ■

Un ejemplo. El espacio largo de James $J(\omega_1)$ es Asplund y posee un generador proyectivo (porque es el dual de un Asplund y por [37, Prop. 8.2.1]). Sin embargo $J(\omega_1)$ no verifica ninguna de los items del Cor. 12.9.

Capítulo 13

La igualdad $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$ para X retículo de Banach

13.1. Introducción

En este Capítulo estudiamos la igualdad $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$ cuando X es un retículo de Banach. En particular nos dedicamos a los siguientes cometidos:

(1) Mostramos que, cuando X es un retículo de Banach σ-completo, X^* es super-(P) sii $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$.

(2) Caracterizamos las propiedades $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$ y $X^{**} = X_{\aleph_0}$ para $X = C(K)$.

13.2. la igualdad $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$ para retículos de Banach

Vamos a estudiar en esta sección la propiedad $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$ y propiedades relacionadas en el ámbito de los retículos de Banach.

Proposición 13.1. *Sea X un retículo de Banach σ-orden-completo. Los siguientes asertos son equivalentes:*

(1) X^* posee la propiedad (C) de Corson.
(2) $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$.
(3) X^* es super-(P).

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3). Estas implicaciones se verifican siempre en todo espacio de Banach (ver Proposición 10.12).

(3) $\Rightarrow$ (1). De (3) y un resultado de Haydon [65] obtenemos que X carece de copia de ℓ_1. De aquí se deduce que:

(a) X es Asplund, es decir, X^* es RNP (ver [82, Theorem 5.4.14, p. 367]).

(b) X^* es o-continuo. En efecto, X^* es orden-completo por ser un retículo dual. Además X^* carece de copias de ℓ_∞ (por ser RNP), de donde sale que X^* es σ-o-continuo por [77, Proposition 1.a.7, p. 7]. En definitiva X^* es o-continuo por [77, Proposition 1.a.8, p. 7].

(c) X es o-continuo. En efecto, X es σ-o-continuo porque es σ-completo, no contiene copia de ℓ_∞ y por [77, Proposition 1.a.7, p. 7]. En definitiva X es o-continuo por [77, Proposition 1.a.8, p. 7].

Hay dos casos posibles:

Caso 1. X^* es retículo o-continuo de tipo contable (ver definiciones en Cap.9).
Entonces de Lema 9.9 y Proposición 9.6 deducimos que X^* posee la propiedad (C) de Corson.

Caso 2. X^* es retículo o-continuo que no es de tipo contable.
Esto quiere decir que X^* admite una descomposición $X^* = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \oplus X^*_\alpha$ como suma directa 1-incondicional de subespacios cerrados X^*_α tal que existe en X^* una copia de $\ell_1(\aleph_1)$ dispuesta disjuntamente respecto de la descomposición $X^* = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \oplus X^*_\alpha$, es decir, existe un subconjunto $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ con cardinal $|\mathcal{A}_1| = \aleph_1$ y, por cada $\alpha \in \mathcal{A}_1$, un elemento $v_\alpha \in X^*_\alpha$ de modo que la familia $\{v_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_1\}$ es equivalente a la base canónica de $\ell_1(\aleph_1)$. Puesto que los v_α son disjuntos dos a dos, de [82, Corollary 2.4.3, p. 87] sale que, si $Tx := (\langle v_\alpha, x\rangle)_{\alpha\in\mathcal{A}_1}$, $\forall x \in X$, entonces $Tx \in c_0(\mathcal{A}_1)$ y $T : X \to c_0(\mathcal{A}_1)$ es un operador lineal y continuo tal que $T^*(e_\alpha) = v_\alpha$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}_1$, siendo $\{e_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_1\}$ la base canónica de $\ell_1(\mathcal{A}_1) := c_0(\mathcal{A}_1)^*$. Sabemos $K := \overline{\{e_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_1\}}^{w^*} = \{e_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_1\} \cup \{0\}$ y que $B := \{e_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_1\}$ es un contorno de K, tal que $\overline{\mathrm{co}}(B) \neq \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$ (porque $0 \notin \overline{\mathrm{co}}(B)$). Sea $H := T^*(K)$, que es un subconjunto w^*-compacto de X^*. Es claro que $H = \overline{\{v_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_1\}}^{w^*} = \{v_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_1\} \cup \{0\}$ y que $B_0 := T^*(B) = \{v_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_1\}$ es un contorno de H tal que $\overline{\mathrm{co}}(B_0) \neq \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(H)$ (porque $0 \notin \overline{\mathrm{co}}(B_0)$). Este hecho contradice (3) y prueba que no se da el Caso 2. ■

Proposición 13.2. *Sea Y un retículo de Banach y $X := Y^*$. Los siguientes asertos son equivalentes:*

(1) X^* posee la propiedad (C) de Corson.
(2) $X^{**} = Seq(X^{**})$.
(3) X^* es super-(P).

Demostración. Basta aplicar la Proposición 13.1 y que el dual de un retículo de Banach es un retículo o-completo y, por tanto, σ-completo. ■

13.3. Caracterización de la igualdad $X^{**} = \mathcal{S}eq(X^{**})$ cuando $X = C(K)$

Necesitamos el siguiente lema elemental.

Lema 13.3. *Sea K un compacto Hausdorff y $p \in K$ un punto de K. Se tiene*

(1) p es un $\mathcal{G}_\delta$-punto de K si y sólo si p tiene en K una base contable de entornos.

(2) Supongamos que p no es un $\mathcal{G}_\delta$-punto de K y sean $B_0 := \{\mathbf{1}_k : k \in K \setminus \{p\}\}$ y $B_1 := B_0 \cup (-B_0)$ subconjuntos de $C(K)^*$. Entonces B_0 y B_1 son contornos de $\mathcal{P}_R(K)$ y $B(C(K)^*)$, respectivamente, y verifican $\overline{\text{co}}(B_0) \neq \mathcal{P}_R(K)$ y $\overline{\text{co}}(B_1) \neq B(C(K)^*)$.

Demostración. (1) Supongamos que p es $\mathcal{G}_\delta$-punto en K y sea $\{V_n : n \geq 1\}$ una secuencia de entornos abiertos de p tal que $\bigcap_{n\geq 1} V_n = \{p\}$. Elegimos entornos abiertos $\{W_n : n \geq 1\}$ de p tales que $W_n \subset \overline{W_n} \subset V_n$, $\forall n \geq 1$. Afirmamos que $\{\bigcap_{i=1}^n W_i : n \geq 1\}$ es una base de entornos de p. En efecto, sea G un entorno abierto de p. Como $\bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcap_{i=1}^n W_i} = \{p\} \subset G$, por razones de compacidad existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{\bigcap_{i=1}^m W_i} \subset G$, y esto prueba que $\{\bigcap_{i=1}^n W_i : n \geq 1\}$ es una base de entornos de p.

Finalmente, es obvio que p es un $\mathcal{G}_\delta$-punto en K, caso de tener una base contable de entornos.

(2) Como p no es un $\mathcal{G}_\delta$-punto en K, es claro que toda función continua f sobre K alcanza en $K \setminus \{p\}$ su máximo sobre K. De aquí que: (i) el máximo de f sobre el subconjunto w^*-compacto $\{\mathbf{1}_k : k \in K\}$ de $C(K)^*$ se alcanza en B_0; (ii) el máximo de f sobre el subconjunto w^*-compacto $\{\pm\mathbf{1}_k : k \in K\}$ de $C(K)^*$ se alcanza en B_1. Así que B_0, B_1 son contornos de $\{\mathbf{1}_k : k \in K\}$ y $\{\pm\mathbf{1}_k : k \in K\}$, respectivamente. Por otra parte, $\overline{\text{co}}(B_0) \neq \overline{\text{co}}^{w^*}(\{\mathbf{1}_k : k \in K\}) = \mathcal{P}_R(K)$ porque $\mathbf{1}_p \in \mathcal{P}_R(K)$, pero $\mathbf{1}_p \notin \overline{\text{co}}(B_0)$ pues $\overline{\text{co}}(B_0) \subset \ell_1(K \setminus \{p\})$. Análogamente $\overline{\text{co}}(B_1) \neq \overline{\text{co}}^{w^*}(\{\pm\mathbf{1}_k : k \in K\}) = B(C(K)^*)$. ∎

Proposición 13.4. *Sea K un compacto Hausdorff. Los siguientes asertos son equivalentes:*

(1) K es disperso contable.
(2) $C(K)^*$ posee la propiedad (C) de Corson.
(3) $Seq(C(K)^{**}) = C(K)^{**}$.
(4) $C(K)^*$ es super-(P).

Demostración. (1) ⇒ (2). Como K es compacto disperso contable, se tiene que $C(K)^* = \ell_1(\mathbb{N})$. Por tanto, al ser separable, $C(K)^*$ tiene la propiedad (C) de Corson.

(2) ⇒ (3) ⇒ (4). Esta implicación está probada en Proposición 10.12.

(4) ⇒ (1). En primer lugar, (4) implica por [65] que $C(K)$ carece de una copia isomórfica de ℓ_1 y esto equivale a que K es un compacto disperso (se trata de un resultado clásico). Por (4) y el Lema 13.3 concluimos que todo punto de K posee una base contable de entornos, es decir, que K es 1º Axioma. De un teorema de Semadeni (ver [73, Corollary 2, p. 35]) concluimos que K es contable. ∎

Nota. Es claro que los asertos de la anterior Proposición 13.4 no son equivalentes a "$C(K)$ no posee copia de ℓ_1" porque este aserto es equivalente a "K es compacto disperso" y hay compactos dispersos que no son contables.

13.4. Caracterización de la igualdad $X^{**} = X_{\aleph_0}$ para $X = C(K)$

Sea $X = C(K)$, siendo K compacto Hausdorff. ¿A qué es equivalente el hecho $X^{**} = X_{\aleph_0}$? Vamos a ver que este hecho es equivalente a que K sea métrico, es decir, que $C(K)$ sea separable. Comencemos introduciendo nueva notación. Si $\mathcal{F} \subset C(K)$, definimos en K la relación de equivalencia $\sim_{\mathcal{F}}$ del siguiente modo

$$\forall x, y \in K, \quad x \sim_{\mathcal{F}} y \text{ sii } f(x) = f(y), \ \forall f \in \mathcal{F}.$$

Sea $K_0 := K/\sim_{\mathcal{F}}$ y $q : K \to K_0$ la aplicación cociente. Es sabido que K_0 con la topología cociente es un espacio compacto Hausdorff y que q es aplicación continua. Además, K_0 es métrico sii $\overline{[\mathcal{F}]}$ es separable.

Recordemos que el dual y bidual de $X = C(K)$ son

$$X^* = \ell_1(K) \oplus_1 M_R^d(K) \text{ y } X^{**} = \ell_\infty(K) \oplus_\infty M_R^d(K)^*,$$

siendo $M_R^d(K)$ el espacio de las medidas de Radon difusas sobre K.

Lema 13.5. *Sean K compacto Hausdorff, $X = C(K)$, Y subespacio de X con $Dens(Y) \geq \aleph_0$ y $q : K \to K/\sim_Y = K_0$ la aplicación cociente. Entonces*

(a) $Dens(C(K_0)) = Dens(Y) = Dens(\mathcal{A}(Y \cup \{1\}))$(= subálgebra cerrada generada por $Y \cup \{1\}$).

(b) Si $z \in \ell_\infty(K) \subset X^{**}$ es tal que $z \in \overline{Y}^{w^*}$, existe $w \in \ell_\infty(K_0)$ tal que $z = w \circ q$.

Demostración. (1) En primer término, es fácil probar que $Dens(Y) = Dens(\mathcal{A}(Y \cup \{1\}))$. Por otra parte, si $i : C(K_0) \to C(K)$ es la inclusión canónica tal que $i(g) = g \circ q$, $\forall g \in C(K_0)$, es claro por el T. de Stone-Weierstrass que $i(C(K_0)) = \mathcal{A}(Y \cup \{1\})$.

(2) Sea $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset Y$ una red tal que $f_\alpha \underset{\alpha \in \mathcal{A}}{\to} z$ en la w^*-topología de X^{**}. Sean $k_i \in K$, $i = 1, 2$, tales que $k_1 \sim_Y k_2$. Entonces $f_\alpha(k_1) = f_\alpha(k_2)$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$. De aquí que $\langle z, \delta_{k_1} \rangle = \langle z, \delta_{k_2} \rangle$ y por tanto existe $w \in \ell_\infty(K_0)$ tal que $z = w \circ q$.

■

Lema 13.6. *Sea K compacto Hausdorff y $X = C(K)$ tal que $Dens(X) = \aleph_1$. Entonces $X^{**} \neq X_{\aleph_0}$.*

Demostración. Sea $\{f_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset B(X)$ una familia de funciones tal que $X = \overline{\bigcup_{\alpha < \omega_1} [\{f_\beta : \beta < \alpha\}]}$. Observemos que, si $A \subset X$ es un subconjunto separable, entonces

(i) Existe $\alpha < \omega_1$ tal que $\overline{[A]} \subset \overline{[\{f_\beta : \beta < \alpha\}]}$.

(ii) Si $q : K \to K/\sim_A := K_0$ es el cociente canónico, el espacio compacto K_0 es métrico y el cociente q no separa entre sí a todos los puntos de K.

Vamos a elegir dos secuencias $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset K$ y $\{y_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset K$, y una secuencia de subespacios separables $\{Y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de X tales que:

(1) $\overline{[\{f_\gamma : \gamma \leq \beta\}]} \subset Y_\beta \subset Y_\alpha$ para $\beta \leq \alpha < \omega_1$.

(2) $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \cap \{y_\alpha : \alpha < \omega_1\} = \emptyset$. ¡Ojo! Se permite la repetición tanto en $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ como en $\{y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.

(3) Para todo $\alpha < \omega_1$, si $q_\alpha : K \to K/\sim_{Y_\alpha}$ es el cociente canónico, ocurre que q_α separa los puntos de $\{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{y_\beta : \beta < \alpha\}$, pero $q_\alpha(x_\alpha) = q_\alpha(y_\alpha)$.

Procedemos por inducción.

Etapa 1. Hacemos $Y_1 := [f_1]$. Como $q_1 : K \to K/\sim_{Y_1}$ no separa todos los puntos de K, podemos elegir dos puntos distintos $x_1, y_1 \in K$ tales que $q_1(x_1) = q_1(y_1)$.

Etapa 2. Sea Y_2 un subespacio cerrado separable de X tal que $Y_1 \cup \{f_2\} \subset Y_2$ y Y_2 separa el par x_1, y_1, es decir, si $q_2 : K \to K/\sim_{Y_2}$ es el cociente canónico, se verifica que $q_2(x_1) \neq q_2(y_1)$. Como q_2 no separa todos los puntos de K, existen dos puntos $u, v \in K$, $u \neq v$, tales que $q_2(u) = q_2(v)$. Es obvio que $\{u, v\} \neq \{x_1, y_1\}$. De hecho $|\{u, v\} \cap \{x_1, y_1\}| \leq 1$. A la hora de elegir x_2, y_2 nos encontramos con dos casos, a saber:

Caso 1. Supongamos que $|\{u, v\} \cap \{x_1, y_1\}| = 0$. Hacemos $x_2 = u, y_2 = v$.

Caso 2. Supongamos que $|\{u, v\} \cap \{x_1, y_1\}| = 1$, v.g., que $u \in \{x_1, y_1\}$. Si $u = x_1$, hacemos $x_2 = u = x_1$ y $y_2 = v$. Si $u = y_1$ hacemos $y_2 = u = y_1$ y $x_2 = v$.

Etapa $\alpha < \omega_1$**.** Supongamos que se han construido los subespacios $\{Y_\beta : \beta < \alpha\}$ y las secuencias $\{x_\beta : \beta < \alpha\}, \{y_\beta : \beta < \alpha\}$ de K verificando (1), (2) y (3). Sea Y_α un subespacio cerrado separable de X tal que $(\bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta) \cup \{f_\alpha\} \subset Y_\alpha$ y Y_α separa los puntos de $\{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{y_\beta : \beta < \alpha\}$, es decir, si $q_\alpha : K \to K/\sim_{Y_\alpha}$ es el cociente canónico, se verifica que $q_\alpha(t) \neq q_\alpha(s)$ si $s, t \in \{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{y_\beta : \beta < \alpha\}$ y $s \neq t$. Como q_α no separa todos los puntos de K, existen dos puntos $u, v \in K$, $u \neq v$, tales que $q_\alpha(u) = q_\alpha(v)$. Es obvio que $|\{u, v\} \cap (\{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{y_\beta : \beta < \alpha\})| \leq 1$. A la hora de elegir x_α, y_α nos encontramos con dos casos, a saber:

Caso 1. Supongamos que $|\{u, v\} \cap (\{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{y_\beta : \beta < \alpha\})| = 0$. Hacemos $x_\alpha = u, y_\alpha = v$.

Caso 2. Supongamos que $|\{u, v\} \cap (\{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{y_\beta : \beta < \alpha\})| = 1$, v.g., que $u \in (\{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{y_\beta : \beta < \alpha\})$. Si $u = x_\beta$ para cierto $\beta < \alpha$, hacemos $x_\alpha = u = x_\beta$ y $y_\alpha = v$. Si $u = y_\beta$ para cierto $\beta < \alpha$, hacemos $y_\alpha = u = y_\beta$ y $x_\alpha = v$.

El proceso se prosigue para todo $\alpha < \omega_1$. Observemos que $X = \cup_{\alpha<\omega_1} Y_\alpha$.

Sea $z := \mathbb{1}_{\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}} - \mathbb{1}_{\{y_\alpha:\alpha<\omega_1\}}$, visto como un elemento de $\ell_\infty(K) \subset X^{**}$.

Aserto. Para todo subespacio separable $Y \subset C(K)$ se verifica $z \notin \overline{Y}^{w^*}$.

En efecto, sea $Y \subset X$ un subespacio separable tal que $z \in \overline{Y}^{w^*}$. Sea $\gamma < \omega_1$ tal que $Y \subset Y_\gamma$. Puesto que $z \in \overline{Y}^{w^*} \subset \overline{Y_\gamma}^{w^*}$, por el Lema 13.5 existe $w \in \ell_\infty(K/\sim_{Y_\gamma})$ tal que

$z = w \circ q_\gamma$. Por tanto

$$\langle z, \delta_{x_\gamma}\rangle = \langle w \circ q_\gamma, \delta_{x_\gamma}\rangle = w(q_\gamma(x_\gamma)) = w(q_\gamma(y_\gamma)) = \langle z, \delta_{y_\gamma}\rangle.$$

Por otra parte $\langle z, \delta_{x_\gamma}\rangle = 1$ y $\langle z, \delta_{y_\gamma}\rangle = -1$. Hemos llegado a una contradicción que prueba el Aserto.

Por tanto $z \in X^{**} \setminus X_{\aleph_0}$ y esto prueba el Lema. ■

Proposición 13.7. *Sea K compacto Hausdorff y $X = C(K)$. Son equivalentes*
(a) $C(K)$ es separable; (b) $X^{**} = X_{\aleph_0}$.

Demostración. Como $(a) \Rightarrow (b)$ es obvio, pasamos a probar que $(b) \Rightarrow (a)$. Supongamos que $Dens(C(K)) \geq \aleph_1$ y probemos que $X^{**} \neq X_{\aleph_0}$. Sea $Y \subset C(K)$ un subespacio tal que $Dens(Y) = \aleph_1$ y $q : K \to K/\sim_Y = K_0$ el cociente canónico. El subálgebra cerrada $Z := \mathcal{A}(Y \cup \{1\})$ generada por $Y \cup \{1\}$ dentro de $C(K)$ verifica que: (i) $Dens(\mathcal{A}(Y \cup \{1\})) = Dens(Y) = \aleph_1$; (ii) $C(K_0) \cong \mathcal{A}(Y \cup \{1\})$ (isometría). Por el Corolario 2.5 concluimos que $X^{**} \neq X_{\aleph_0}$. ■

NOTA. La Proposición 13.7 no puede extenderse, en general, ni a retículos o-continuos ni a álgebras de Banach. Basta considerar el espacio $X := \ell_1 \oplus_1 \ell_2(I)$ con $|I| \geq \aleph_1$. Sin embargo, sí es válida para álgebras de Banach conmutativas X tales que existe $0 \leq K < \infty$ verificando $\|x^2\| \leq K\|x\|^2$, $\forall x \in X$. Ello se debe a que, bajo el requisito $\|x^2\| \leq K\|x\|^2$, $\forall x \in X$, el álgebra X es, en realidad, un subálgebra cerrada del espacio $C(\Delta)$, donde Δ es el compacto de los homomorfismos reales sobre X (el llamado *espacio ideal maximal* de X) con la topología de Gelfand (ver [97, 11.12 Theorem]).

Capítulo 14

Los funcionales de $\ell_\infty(I)^*$ actuando sobre el compacto $(B(\ell_\infty(I)), w^*)$

14.1. Introducción y preliminares

I será un conjunto arbitrario infinito. Si $A \subset I$, sean $A^* := \overline{A}^{\beta I} \setminus A$ y

$$I^{*c} := \bigcup\{A^* : A \subset I \text{ contable}\} \quad \text{y} \quad I^{*u} := I^* \setminus I^{*c}.$$

Consideraremos el espacio $X := \ell_1(I)$ y el compacto convexo $K := (B(\ell_\infty(I)), w^*)$. Estamos interesados en el comportamiento de los funcionales $\psi \in \ell_\infty(I)^*$ sobre el compacto K, es decir, en la relación de ψ con las clases $\mathcal{B}_{1b}(K)$, $\mathcal{B}_{1b}^0(K)$, $\mathcal{U}(K)$, etc.

Proposición 14.1. *Sean I un conjunto infinito, $X := \ell_1(I)$ y $K := (B(\ell_\infty(I)), w^*)$. Se tiene que $\mathcal{B}_1(K) \cap \ell_\infty(I)^* = \ell_1(I)$.*

Demostración. Esto es consecuencia de que $\ell_\infty(I)$ es Grothendieck y de los resultados de Odell-Rosenthal (ver Proposición 1.21). ■

El bidual $X^{**} = \ell_\infty(I)^*$ es el L-espacio $M_R(\beta I)$ de las medidas de Radon sobre el compacto βI. Una primera descomposición de X^{**} en dos bandas complementarias es

$$X^{**} = \ell_1(I) \oplus_1 M_R(I^*). \tag{14.1}$$

Si $f \in B(\ell_\infty(I)) = [-1,1]^I$ la acción de cierta $\mu \in M_R(I^*)$ sobre f es simplemente la integral

$$\int_{I^*} \check{f}(k)\,d\mu(k),$$

siendo $\check{f}$ la extensión de Stone-Čech de f a todo βI. Observemos que $\check{f}$ es continua sobre I^*.

El espacio $\ell_\infty(I)^* = M_R(\beta I)$ se identifica con el espacio $M(I)$ de las medidas acotadas finitamente aditivas en $(I, \mathcal{P}I)$ (ver [47, 464F]), siendo $\mathcal{P}I$ el conjunto de las partes de I. La medida $\mu \in M_R(\beta I)$, vista como elemento de $M(I)$ (que también denotamos por μ), actúa de la siguiente forma. Si $A \subset I$, entonces

$$\mu(A) = \mu(\overline{A}^{\beta I})$$

El espacio $M(I)$ se descompone [47, 464F] como suma directa de dos bandas complementarias

$$M(I) = M_\tau(I) \oplus M_\tau(I)^\perp,$$

siendo $M_\tau(I)$ la banda de las "medidas completamente aditivas" . Esta descomposición es, en realidad, la descomposición anterior (14.1), pues $M_\tau(I) = \ell_1(I)$ y $M_\tau(I)^\perp = M_R(I^*)$. El espacio $M(I)$ admite también la descomposición en bandas complementarias (ver [47, 464I,...,464M])

$$M(I) = M_m(I) \oplus M_{pnm}(I), \tag{14.2}$$

siendo $M_m(I)$ y $M_{pnm}(I)$ los espacios que se describen a continuación.

(a) Consideramos el compacto de Cantor $\mathcal{C}_I := \{0,1\}^I$ sumergido en $B(\ell_\infty(I))$. **En este Capítulo, salvo indicación en contra, denotaremos por ν a la probabilidad de Haar sobre** $\mathcal{C}_I$. Los elementos de $M(I)$, como funcionales de $\ell_\infty(I)^*$, actúan sobre $\mathcal{C}_I$ de la siguiente forma. Si $\sigma \in \mathcal{C}_I$, podemos ver a σ como $\sigma = \mathbb{1}_A$, para cierto $A \subset I$. El elemento $\mathbb{1}_A \in \mathcal{C}_I$ lo identificaremos con $A \subset I$, mientras no haya motivo de confusión. Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}I$, entonces $\{\mathbb{1}_F : F \in \mathcal{F}\}$ es un subconjunto de $\mathcal{C}_I$ (y por tanto de $B(\ell_\infty(I))$) y pondremos:

(i) $\nu_*(\mathcal{F})$ para referirnos a la medida interior $\nu_*(\{\mathbb{1}_F : F \in \mathcal{F}\}$.

(ii) $\nu^*(\mathcal{F})$ para referirnos a la medida exterior $\nu^*(\{\mathbb{1}_F : F \in \mathcal{F}\}$.

(iii) Si $\mu \in M(I)$ y $\sigma = \mathbb{1}_A \in \mathcal{C}_I$, definimos $\mu(\sigma) := \mu(A)$. Si μ lo vemos como elemento de $M_R(\beta I)$, entonces $\mu(\sigma) = \mu(\overline{A}^{\beta I})$.

$M_m(I)$ es la banda de los elementos $\mu \in M(I)$ que actuando sobre $\mathcal{C}_I$ son ν-medibles. Observemos que $M_\tau(I) \subset M_m(I)$ y que se verifica la descomposición en bandas

$$M_m(I) = M_\tau(I) \oplus (M_m \cap M_\tau(I)^\perp). \tag{14.3}$$

(b) Un elemento $\theta \in M(I)$ se dice que es "puramente no-medible" (abrev., *pnm*) si la medida exterior

$$\nu^*(\{\sigma \in \mathcal{C}_I : |\theta|(\sigma) = |\theta|(\mathbb{1}_I)\}) = 1$$

M_{pnm} es la banda de los elementos puramente no-medibles. Se verifica que $M_{pnm}(I) \subset M_\tau(I)^\perp$. De hecho $M_{pnm}(I)$ es el conjunto de los elementos no ν-medibles de $M_\tau(I)^\perp = M_R(I^*)$ y $M_\tau(I)^\perp = (M_m(I) \cap M_\tau(I)^\perp) \oplus M_{pnm}(I)$.

Combinando las descomposiciones (14.2) y (14.3) se obtiene la descomposición en bandas

$$M(I) = M_\tau(I) \oplus (M_m(I) \cap M_\tau(I)^\perp) \oplus M_{pnm}(I). \tag{14.4}$$

Por tanto $M_R(I^*)$ se descompone en las bandas complementarias:

$$M_R(I^*) = (M_m(I) \cap M_\tau(I)^\perp) \oplus M_{pnm}(I). \tag{14.5}$$

Si una medida $\mu \in M_R(I^*)$ verifica $\mu(a) = 0$ para todo $a \subset I$ contable, entonces $\mu \in M_{pnm}(I)$ (ver [47, 464Pc]). De aquí que, si I es incontable y $I^{*u} := I^* \setminus \cup\{\overline{A}^{\beta I} : A \subset I \text{ contable }\}$, se verifica que $M_R(I^{*u}) \subset M_{pnm}(I)$. También se verifica que $\delta_p \in M_{pnm}$ cuando $p \in I^{*c}$. En realidad las medidas puramente atómicas $M_R^a(I^*) = \ell_1(I^*)$ sobre I^* verifican $M_R^a(I^*) \subset M_{pnm}$. En consecuencia, toda medida $\mu \in M_R(I^*)$ con parte atómica no-nula no es ν-medible, y por tanto no universalmente medible, sobre $\ell_\infty(I)$ porque $M_m(I)$ es una banda en $M(I)$ (ver [47, 464M]). En la siguiente proposición vemos que $\delta_p \in M_{pnm}$, $\forall p \in I^*$, y calculamos algunos índices.

Proposición 14.2. *Sea I un conjunto infinito.*

(1) Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}I$ es un filtro de partes de I, que contiene a los conjuntos cofinitos, entonces la medida interior $\nu_*(\mathcal{F}) = 0$ y la medida exterior $\nu^*(\mathcal{F}) \in \{0, 1\}$,

(2) Si $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}I$ es un ultrafiltro no-principal, entonces $\nu^*(\mathcal{U}) = 1$ y $\nu_*(\mathcal{U}) = 0$.

(3) Por tanto, para todo $p \in I^*$, si $\mathcal{U}^p \subset \mathcal{P}I$ es el ultrafiltro no-principal determinado por p, se tiene que $\mathcal{U}^p$ no es ν-medible y $\delta_p \in M_{pnm}(I)$ (T. de Sierpinski).

(4) Para todo $B \subset \mathcal{P}I$ ν-medible con $\nu(B) > 0$ y todo $p \in I^*$ se verifica $B \cap \mathcal{U}^p \neq \emptyset \neq B \cap {}^c\mathcal{U}^p$.

(5) Para todo $p \in I^*$ se tiene $Med(\delta_p, \mathcal{C}_I) = Frag(\delta_p, \mathcal{C}_I) = 1$ y

$$Med(\delta_p, \{-1,1\}^I) = Frag(\delta_p, \{-1,1\}^I) = Med(\delta_p, B(\ell_\infty(I))) = Frag(\delta_p, B(\ell_\infty(I))) = 2.$$

Demostración. (1) Ver [47, 254S, Vol. 2].

(2) Por (1) $\nu_*(\mathcal{U}) = 0$ y $\nu^*(\mathcal{U}) \in \{0, 1\}$. Por otra parte, $\mathcal{P}I = \mathcal{U} \cup {}^c\mathcal{U}$ y además $\nu^*(\mathcal{U}) = \nu^*({}^c\mathcal{U})$, porque ν es invariante por inversión, es decir, por la complementación en I. Por tanto

$$1 = \nu^*(\mathcal{P}I) \leq \nu^*(\mathcal{U}) + \nu^*({}^c\mathcal{U}) = 2\nu^*(\mathcal{U}).$$

De aquí que $\nu^*(\mathcal{U}) = 1$.

(3) $\mathcal{U}^p$ no es ν-medible porque $\nu_*(\mathcal{U}^p) = 0$ pero $\nu^*(\mathcal{U}^p) = 1$ por (2). Por otra parte el conjunto

$$A_p := \{\sigma \in \{0,1\}^I : \langle \delta_p, \sigma \rangle = 1\}$$

se corresponde en $\mathcal{P}I$ con $\mathcal{U}^p$. En consecuencia $\nu^*(A_p) = 1$ pero $\nu_*(A_p) = 0$, es decir, δ_p no es ν-medible. Además, del hecho $\nu^*(A_p) = 1$ y de la definición de $M_{pnm}(I)$ sale que $\delta_p \in M_{pnm}(I)$.

(4) es consecuencia de que $\nu_*(\mathcal{U}) = 0 = \nu_*({}^c\mathcal{U})$.

(5) Veamos que $Med(\delta_p, \{0,1\}^I) = 1$. En primer término, es claro que $0 \leq Med(\delta_p, \mathcal{C}_I) \leq 1$. Sea $B \in (\mathcal{B}_o(\mathcal{C}_I), \nu)^+$. Por (4) existen puntos $x, y \in B$ tales

que $\langle\delta_p, x\rangle = 1$ y $\langle\delta_p, y\rangle = 0$. Por tanto $Med(\delta_p, \mathcal{C}_I) = 1$. Además $Frag(\delta_p, \mathcal{C}) = 1$ porque $0 \leq \delta_p \restriction \mathcal{C} \leq 1$ y por la Proposición 3.26.

Los demás índices se calculan de modo análogo. ■

Si K es un compacto Hausdorff, denotamos por $M_R^d(K)$ al conjunto de las medidas de Radon difusas (atomless) sobre K.

Proposición 14.3. *$M_m(I) \cap M_\tau(I)^\perp \subset M_R^d(I^{*c})$. Es decir, todas las medidas $\mu \in M_m(I) \cap M_\tau(I)^\perp$ son difusas y $sop(\mu) \subset I^{*c}$. En particular toda medida $\mu \in \mathcal{U}(B(\ell_\infty(I)) \cap M_R(I^*)$ es difusa y $sop(\mu) \subset I^{*c}$.*

Demostración. Si $\mu \in M_m(I) \cap M_\tau(I)^\perp$, entonces μ está soportada por I^*. Si ponemos $\mu = \mu_d + \mu_a$ (parte difusa y atómica), necesariamente $\mu_a = 0$ porque $M_m(I)$ es sólido y las medidas puramente atómicas sobre I^* están dentro de $M_{pnm}(I)$. Por tanto, μ es difusa.

Aserto. $|\mu|(I^{*u}) = 0$.

En efecto, si $\rho := \mu \restriction I^{*u}$, entonces $\rho = 0$ pues:

(i) $\rho \in M_{pnm}(I)$ porque todas las medidas de Radon soportadas por I^{*u} están en $M_{pnm}(I)$.

(ii) Por otra parte, $M_m(I)$ es sólido, por lo que $\rho \in M_m(I)$.

Así que $|\mu|(I^{*c}) = \|\mu\|$. Sea $\{K_n : n \geq 1\}$ una secuencia de subconjuntos compactos de I^{*c} tal que $|\mu|(K_n) \uparrow \|\mu\|$. Por cada K_n existe $A_n \subset I$ contable tal que $K_n \subset A_n^*$. Sea $A_0 = \cup_{n\geq 1} A_n \subset I$. Es claro que A_0 es contable, $A_0^* \subset I^{*c}$ y $|\mu|(A_0^*) = \|\mu\|$. Por tanto $\mathrm{sop}(\mu) = \mathrm{sop}(|\mu|) \subset A_0^* \subset I^{*c}$. ■

Si $X = \ell_1(I)$, ¿existe $\mu \in M_R^d(I^{*c})$ difusa que no sea ν-medible y, por tanto, no universalmente medible sobre $B(\ell_\infty(I))$? Es claro que basta considerar el caso $I = \mathbb{N}$.

Proposición 14.4. *Existen medidas difusas $\mu \in M_R^d(\mathbb{N}^*)$ tales que $\mu \in M_{pnm}(\mathbb{N})$.*

Demostración. Vamos a aplicar [47, 464P(b)]. Es conocido que en $\mathbb{N}^*$ existen copias K de βN. Sean $\{k_n : n \geq 1\} \subset K$ los puntos de K correspondientes a $\{n : n \geq 1\} = \mathbb{N}$. Se tiene que el conjunto $P_\mathbb{Q}$ de probabilidades de la forma $\sum_{i=1}^n t_i \cdot \delta_{k_i}$ con $t_i \in \mathbb{Q}^+$ y $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ es contable y verifica $\overline{P_\mathbb{Q}}^{w^*} = P_R(K)$. Como $P_\mathbb{Q} \subset M_{pnm}(\mathbb{N})$, de [47, 464P(b)] sale que $P_R(K) \subset M_{pnm}(\mathbb{N})$. Naturalmente en $P_R(K)$ hay medidas difusas porque las hay en $P_R(\mathbb{N}^*)$, ya que $\mathbb{N}^*$ es perfecto. ■

14.2. $\mathcal{B}_1(B(X^*)) \cap X^{**}$ vs $\mathcal{B}_1^0(B(X^*)) \cap X^{**}$ para $X = \ell_1(I)$

Si X es un espacio de Banach, sabemos que $\mathcal{B}_1(B(X^*)) = \mathcal{B}_1^0(B(X^*))$ sii X es separable (ver la Prop. 3.19), en cuyo caso es claro que $\mathcal{B}_1(B(X^*)) \cap X^{**} = \mathcal{B}_1^0(B(X^*)) \cap$

X^{**}. Si X es no separable, aunque ahora $\mathcal{B}_1(B(X^*)) \neq \mathcal{B}_1^0(B(X^*))$, hay numerosas e interesantes situaciones en que sigue siendo cierta la igualdad $\mathcal{B}_1(B(X^*)) \cap X^{**} = \mathcal{B}_1^0(B(X^*)) \cap X^{**}$. Este es el caso del espacio $X = \ell_1(I)$, $|I| > \aleph_0$. Posteriormente se ven más casos. Comencemos mostrando un contraejemplo de un espacio X tal que $\mathcal{B}_1(B(X^*)) \cap X^{**} \neq \mathcal{B}_1^0(B(X^*)) \cap X^{**}$.

Contraejemplo. Un espacio X tal que $\mathcal{B}_1(B(X^*)) \cap X^{**} \neq \mathcal{B}_1^0(B(X^*)) \cap X^{**}$. Sea I un subconjunto incontable y $X = c_0(I)$. Es claro que $\mathcal{B}_1(B(X^*)) \cap X^{**} = \ell_\infty^c(I) \neq X^{**} = \ell_\infty(I)$. Por otra parte $X^{**} \subset \mathcal{B}_1^0(B(X^*))$ por la Prop. 3.24.

Proposición 14.5. *Sea I un conjunto infinito, $X := \ell_1(I)$ y $K := (B(\ell_\infty(I)), w^*)$. Entonces $\mathcal{B}_1(K) \cap X^{**} = \mathcal{B}_1^0(K) \cap X^{**} = \ell_1(I)$.*

Demostración. Distinguiremos dos casos, a saber:

Caso 1. Suponemos que I es contable. Entonces K es métrico compacto y por tanto $\mathcal{B}_1(K) = \mathcal{B}_1^0(K)$.

Caso 2. Suponemos que I es incontable. En este caso K no es HL y $\mathcal{B}_1(K) \neq \mathcal{B}_1^0(K)$ (ver Prop. 3.18 y Prop. 3.19). Sin embargo, vamos a ver que también en este caso $\mathcal{B}_1^0(K) \cap X^{**} = \mathcal{B}_1(K) \cap X^{**}$. Puesto que $\mathcal{B}_1(K) \subset \mathcal{B}_1^0(K)$, es claro que $\mathcal{B}_1(K) \cap X^{**} \subset \mathcal{B}_1^0(K) \cap X^{**}$. Sea $\psi \in \mathcal{B}_1^0(K) \cap X^{**}$. Entonces $\psi \in \mathcal{U}(K) \cap X^{**} \subset M_m(I)$. Sea $\psi = \psi_1 + \psi_2$ la descomposición de ψ en dos medidas de Radon sobre βI tales que $\psi_1 \in \ell_1(I) = M_\tau(I)$ y $\psi_2 \in M_m(I) \cap M_\tau(I)^\perp$. Teniendo en cuenta que ψ_1 tiene soporte contable y la Prop. 14.3, existe un conjunto contable $J \subset I$ tal que, de hecho, $\psi \in \ell_\infty(J)^*$, esto es, $\psi \in \mathcal{B}_1^0(B(\ell_\infty(J))) \cap \ell_\infty(J)^*$. Por el Caso 1 se tiene que $\psi \in \mathcal{B}_1(B(\ell_\infty(J)))$. Por tanto $\psi \in \mathcal{B}_1(K) \cap X^{**}$. ∎

14.3. Universalmente medibles y cálculo baricéntrico en $M_R(I^*)$

Sea I un conjunto infinito y $K := (B(\ell_\infty(I)), w^*)$. Ya hemos visto que en $M_R(I^*)$ hay muchos elemento que no son universalmente medibles. De hecho todos los elementos de $M_{pnm}(I)$ no son ν-medibles y, por tanto, no universalmente medible. ¿Hay algún elemento no-nulo en $M_R(I^*)$ que sea universalmente medible? Por la Prop. 14.3 es claro que, de existir, debe ser una medida difusa y pertenecer a $M_R^d(I^{*c})$. Por tanto basta considerar el caso $I = \mathbb{N}$.

Mokobodzki dio una respuesta afirmativa a esta cuestión bajo (CH). Modificando el argumento de Mokobodzki y bajo el Axioma de Martin (MA), Normann dio también una respuesta afirmativa [86]. Recordemos que $(CH) \Rightarrow (MA)$.

Proposición 14.6 (Teorema de Mokobodzki-Normann)**.** *[MA] Sea I un conjunto infinito. Entonces existe una medida $\mu \in M_R^d(I^{*c})$ que es universalmente medible sobre $(B(\ell_\infty(I)), w^*)$*

Demostración. Ver [86]. ■

Nosotros nos planteamos la siguiente pregunta. ¿Hay algún elemento no nulo en $M_R(I^*)$ verificando el cálculo baricéntrico? Por la Prop. 14.3 es claro que basta considerar el caso $I = \mathbb{N}$. A continuación vemos que bajo el Axioma de Martin (MA) la respuesta a esta cuestión es afirmativa. Previamente consideramos el siguiente Lema que es un resultado clásico de Martin y Solovay ([83]).

Lema 14.7. *(MA) Sean K un compacto métrico y $\mu \in \mathcal{P}_R(K)$. Denotemos por $\mathcal{M}(\mu)$ al σ-álgebra de los subconjuntos de K que son μ-medibles. Entonces:*

(1) Si $(A_i)_{i\in I}$ con $|I| < \mathfrak{c}$ es una familia de subconjuntos μ-nulos de K (es decir, cada $A_i \in \mathcal{M}(\mu)$ y $\mu(A_i) = 0$), entonces $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{M}(\mu)$ y $\mu(\cup_{i\in I} A_i) = 0$.

(2) Si $(A_i)_{i\in I}$ con $|I| < \mathfrak{c}$ es una familia de subconjuntos μ-medibles de K, entonces $\cup_{i\in I} A_i \in \mathcal{M}(\mu)$ y $\mu(\cup_{i\in I} A_i) = \mu(\cup_{n\geq 1} A_{i_n})$, para una cierta familia contable $\{i_n : n \geq 1\} \subset I$.

Demostración. (1) Ver [86, Th. 3].

(2) En primer término, se ve fácilmente que existe una familia contable $I_0 = \{i_n : n \geq 1\} \subset I$ tal que:

$\mu(\cup_{i\in I_0} A_i) = \text{máx}\{\mu(\cup_{j\in J} A_j) : J \subset I \ \text{ contable}\}$.

Sea $A_0 = \cup_{i\in I_0} A_i$ y $B_i = A_i \setminus A_0$, $\forall i \in I$. Es claro que $(B_i)_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos μ-nulos. Por (1) se tiene que $\cup_{i\in I} B_i \in \mathcal{M}(\mu)$ y $\mu(\cup_{i\in I} B_i) = 0$. Por tanto $\cup_{i\in I} A_i = A_0 \cup (\cup_{i\in I} B_i) \in \mathcal{M}(\mu)$ y $\mu(\cup_{i\in I} A_i) = \mu(A_0)$. ■

Proposición 14.8. *(MA) Sean $I = \mathbb{N}$, $X = \ell_1(I)$ y $K := (B(\ell_\infty(I)), w^*)$. En $M_\tau(I)^\perp$ hay probabilidades difusas que verifican el cálculo baricéntrico. De hecho, todo funcional $F \in M_R(\mathbb{N}^*)$ obtenido aplicando el método de Mokobodzki-Norman verifica el cálculo baricéntrico sobre $B(X^*)$ y además $Eindex(F, B(X^*)) = 0$.*

Demostración. Primeramente comprobamos que los funcionales que produce el método de Mokobodzki-Normann [86] verifican el cálculo baricéntrico sobre $K := B(X^*) = [-1,1]^{\mathbb{N}}$. Vamos a seguir la construcción de [86, Lemma 6, Th. 7], que es preciso tener delante para no perderse, introduciendo algunas modificaciones y observaciones. Sobre el compacto convexo K se consideran:

(1) La familia S de funciones acotadas $f : K \to \mathbb{R}$ cóncavas usc.

(2) La familia Σ de funciones acotadas $h : K \to \mathbb{R}$ que son límite puntual de alguna red creciente $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de funciones de S con $|\mathcal{A}| < \mathfrak{c}$.

Claramente toda $f \in S$ es Borel-medible y toda $h \in \Sigma$ es cóncava y además por (MA) universalmente medible sobre K (ver [86, Th. 3]).

Aserto 1. Para toda $f \in S$ y toda $\mu \in \mathcal{P}_R(K)$ se verifica $f(r(\mu)) \geq \int_K f(x) \cdot d\mu(x)$.

En efecto, dado $\epsilon > 0$, por el T. de separación de Hahn-Banach existe un funcional $\psi \in X$ tal que
$$f(r(\mu)) + \epsilon \geq \psi(r(\mu)) \geq f(r(\mu)) \quad \text{y} \quad \psi \restriction K \geq f.$$
Por tanto
$$f(r(\mu)) + \epsilon \geq \psi(r(\mu)) = \int_K \psi(x) \cdot d\mu(x) \geq \int_K f(x) \cdot d\mu(x).$$
Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, esto prueba el Aserto 1.

Aserto 2. Para toda $h \in \Sigma$ y toda $\mu \in \mathcal{P}_R(K)$ se verifica $h(r(\mu)) \geq \int_K h(x) \cdot d\mu(x)$.

En efecto, sea $(f_i)_{i\in\mathcal{A}} \subset S$ una red creciente tal que $|\mathcal{A}| < \mathfrak{c}$ y $h = \sup_{i\in\mathcal{A}} f_i$. Sea $\mu \in \mathcal{P}_R(K)$ fija. Sea $\ell := \sup_{i\in\mathcal{A}}\{\int_K f_i(x) \cdot d\mu(x)\}$. Puesto que $(f_i)_{i\in\mathcal{A}}$ es una red creciente, existe una secuencia creciente $i_1 < i_2 < i_3...$ en $\mathcal{A}$ tal que $\int_K f_{i_n} d\mu \uparrow \ell$. Por tanto, si $f = \sup_{n\geq 1} f_{i_n}$ se verifica $f \leq h$ y $\ell = \int_K f d\mu$. Claramente f es Borel-medible. Sean $A := \{x \in K : h(x) - f(x) > 0\}$ y $A_i := \{x \in K : f_i(x) - f(x) > 0\}$ para todo $i \in \mathcal{A}$. Cada A_i es Borel-medible, A es universalmente medible y, por tanto, μ-medible y $A = \cup_{i\in\mathcal{A}} A_i$.

SubAserto 21. $\mu(A_i) = 0, \forall i \in \mathcal{A}$.

En efecto, sea $i \in \mathcal{A}$ fijo y $g_i = f_i \vee f$. Entonces $g_i - f \geq 0$ y $\int_K (g_i - f) d\mu = \int_K g_i d\mu - \int_K f d\mu = \ell - \ell = 0$. En consecuencia $g_i = f$ μ-ctp. Como $A_i = \{x \in K : g_i(x) - f(x) > 0\}$, es claro que $\mu(A_i) = 0$.

Por (MA) y Lema 14.7 se tiene que $\mu(\cup_{i\in\mathcal{A}} A_i) = 0$, de donde $\mu(A) = 0$. En particular
$$\ell = \int_K h \cdot d\mu.$$
Por el Aserto 1 se verifica que
$$f_{i_n}(r(\mu)) \geq \int_K f_{i_n} d\mu.$$
Por tanto
$$h(r(\mu)) \geq \sup\{f_{i_n}(r(\mu)) : n \geq 1\} \geq \sup\{\int_K f_{i_n} d\mu : n \geq 1\} = \ell = \int_K h(x) d\mu.$$
Bajo (MA), dadas dos funciones $\phi, -\psi \in \Sigma$ y $\mu \in \mathcal{P}_R(K)$ tales que $\phi \leq \psi$, el método de Normann permite obtener otras dos funciones $\phi', -\psi' \in \Sigma$ tales que

(i) $\phi \leq \phi' \leq \psi' \leq \psi$.

(ii) $\int_K \phi'(x) d\mu = \int_K \psi'(x) d\mu$, es decir, $\phi' = \psi'$ μ-ctp.

Se toman como funciones iniciales las funciones $\phi_1, \psi_1; K \to \mathbb{R}$ tales que
$$\forall x \in K,\ \phi_1(x) = \liminf_{n\geq 1} \pi_n(x) \ \text{ y } \ \psi_1(x) = \limsup_{n\geq 1} \pi_n(x),$$

siendo $\pi_n(x)$ la coordenada n-ésima de $x \in \ell_\infty$. Observemos que $\phi_1, -\psi_1 \in S$. Se ordenan las probabilidades sobre K de modo que $\mathcal{P}_R(K) = \{\mu_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Por cada probabilidad μ_α se obtienen funciones $\phi_{\alpha+1}, -\psi_{\alpha+1} \in \Sigma$ tales que

(a) Si $\alpha > \beta$ entonces $\phi_\beta \leq \phi_\alpha \leq \psi_\alpha \leq \psi_\beta$.

(b) Para todo $\beta \leq \alpha < \mathfrak{c}$ se verifica $\int_K (\psi_{\alpha+1} - \phi_{\alpha+1}) d\mu_\beta = 0$.

Por el Aserto 2 para todo $\beta \leq \alpha < \mathfrak{c}$ se verifica

$$\int_K \phi_{\alpha+1} d\mu_\beta \leq \phi_{\alpha+1}(r(\mu_\beta)) \leq \psi_{\alpha+1}(r(\mu_\beta)) \leq \int_K \psi_{\alpha+1} d\mu_\beta.$$

Por tanto por (b) obtenemos que

$$\phi_{\alpha+1}(r(\mu_\beta)) = \psi_{\alpha+1}(r(\mu_\beta)). \tag{14.6}$$

Se considera $F := \sup_{\alpha<\mathfrak{c}} \phi_\alpha = \operatorname{ínf}_{\alpha<\mathfrak{c}} \psi_\alpha$, que está bien definido, es lineal y continuo sobre ℓ_∞ (convenientemente extendido), es universalmente medible sobre K y por (14.6) verifica

$$\forall \mu \in \mathcal{P}_R(K),\ F(r(\mu)) = \int_K F(x) d\mu,$$

es decir, F verifica el cálculo baricéntrico.

Finalmente, veamos que $Eindex(F, B(X^*)) = 0$. En efecto, sea $H \subset B(X^*)$ un subconjunto convexo w^*-compacto. Por el clásico T. de Choquet sabemos que $Ext(H)$ es un $\mathcal{G}_\delta$ en la w^* topología y que dado $h_0 \in H$ existe una probabilidad de Radon μ soportada por $Ext(H)$ tal que $h_0 = r(\mu)$. De aquí que

$$\langle F, h_0 \rangle = \int_{Ext(H)} \langle F, h \rangle \cdot d\mu(h).$$

En consecuencia $\sup\langle F, H\rangle = \sup\langle F, Ext(H)\rangle$, de donde $Eindex(F, B(X^*)) = 0$. ∎

NOTA. Bajo (CH) el método de Mokobodzki (es más sencillo que el de Mokobodzki-Normann) conduce también a la construcción de elementos $\psi \in M_R^d(\mathbb{N}^*)$ no nulos que verifican el cálculo baricéntrico y satisfacen $Eindex(\psi, B(X^*)) = 0$.

14.4. El problema del $Pindex(\delta_p, B(\ell_\infty(I))$ para $p \in I^*$

Cuestión 6. *Sea I un conjunto infinito y $p \in I^*$. Sabemos que δ_p no es ν-medible y, por tanto, no universalmente medible. ¿Qué podemos decir del $Pindex(\delta_p, B(\ell_\infty(I)))$? ¿Es siempre $Pindex(\delta_p, B(\ell_\infty(I))) > 0$ ó existe algún $p \in I^*$ tal que $Pindex(\delta_p, B(\ell_\infty(I))) =$ 0.*

A continuación vemos varios resultados parciales que apuntan en la dirección de que $Pindex(\delta_p, B(\ell_\infty(I))) > 0,\ \forall p \in I^*$.

Si I es un conjunto infinito y κ un cardinal infinito, sea $I^*(\kappa) = I^* \setminus \bigcup\{\overline{A}^{\beta I} : A \subset I, |A| < \kappa\}$, es decir, $I^*(\kappa) = \{p \in I^* : t(p, I) \geq \kappa\}$, siendo $t(p, I)$ la "tightness" de p respecto de I. Por ejemplo, $I^*(\aleph_0) = I^*$ y $I^*(\aleph_0) \setminus I^*(\aleph_1) = I^{*c}$. Vamos a estudiar el $Pindex(\delta_p, B(\ell_\infty(I)))$ para $p \in I^*(\kappa)$. La siguiente construcción no tiene requerimientos axiomáticos especiales.

Proposición 14.9. *Si I es un conjunto y κ es un cardinal infinito tales que $|I| \geq \kappa$, existe en $I^*(\kappa)$ un subconjunto denso de puntos p tales que $Pindex(\delta_p, B(\ell_\infty(I))) = 2$.*

Demostración. Bastará probarlo en el caso $|I| = \kappa$. Consideremos el espacio compacto $\{0,1\}^\kappa$ y denotemos por λ a la probabilidad de Haar en $\{0,1\}^\kappa$. Sea $\emptyset \neq F \subset \kappa$. Si $\sigma = (\sigma(k))_{k\in\kappa} \in \{0,1\}^\kappa$, ponemos $\sigma\restriction F = (\sigma(k))_{k\in F} \in \{0,1\}^F$. Si $A \subset \{0,1\}^F$, sea $f_A : \{0,1\}^\kappa \to \{-1,1\}$ la función

$$\forall \sigma \in \{0,1\}^\kappa,\ f_A(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma\restriction F \in A, \\ -1, & \text{si } \sigma\restriction F \notin A. \end{cases}$$

Claramente, si F es finito, f_A es una aplicación continua. Decimos que un conjunto no vacío A es *admisible* sii existe un subconjunto finito $\emptyset \neq F \subset \kappa$ con $|F| = n$ tal que $A \subset \{0,1\}^F$ y $|A| = 2^n - n$. Observemos que en estas condiciones $\int_{\{0,1\}^\kappa} f_A d\lambda = 1 - n2^{1-n}$. Es claro que $|\{f_A : A \text{ admisible}\}| = \kappa$ y podemos suponer $I = \{f_A : A \text{ admisible}\}$. Observemos que:

(1) La familia $\{f_A : A \text{ admisible}\}$ separa puntos en $\{0,1\}^\kappa$.

(2) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$|\{i = f_A \in I : \int_{\{0,1\}^\kappa} f_A d\lambda \geq 1 - \tfrac{1}{n}\}| = \kappa.$$

Para cada $\sigma \in \{0,1\}^\kappa$ y $n \geq 1$ sea

$$N(\sigma, n) = \{i = f_A \in I : f_A(\sigma) = -1 \text{ y } |A| \geq 2^n - n\}.$$

Aserto 1. $\bigcap\{\overline{N(\sigma,n)}^{\beta I} : \sigma \in \{0,1\}^\kappa, n \geq 1\} \subset I^*$ y

$$D := I^*(\kappa) \cap \left(\bigcap\{\overline{N(\sigma,n)}^{\beta I} : \sigma \in \{0,1\}^\kappa, n \geq 1\}\right) \neq \emptyset.$$

En efecto, para todo $i = f_A \in I$ existe $\sigma \in \{0,1\}^\kappa$ tal que $f_A(\sigma) = 1$, de donde $i \notin \overline{N(\sigma,n)}^{\beta I}$, si $|A| \geq 2^n - n$. De aquí que $\bigcap\{\overline{N(\sigma,n)}^{\beta I} : \sigma \in \{0,1\}^\kappa, n \geq 1\} \subset I^*$. Por otra parte, dado un subconjunto finito $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \dots \sigma^{(p)} \in \{0,1\}^\kappa$ y números naturales $n_1, \cdots, n_p$, es fácil ver que $|\bigcap_{i=1}^p N(\sigma^{(i)}, n_i)| = \kappa$. De aquí que $D := I^*(\kappa) \cap \left(\bigcap\{\overline{N(\sigma,n)}^{\beta I} : \sigma \in \{0,1\}^\kappa, n \geq 1\}\right) \neq \emptyset$.

Consideremos la función $\psi : \{0,1\}^\kappa \to \{-1,1\}^I \subset B(\ell_\infty(I))$ tal que

$$\forall i = f_A \in I\ ,\ \forall \sigma \in \{0,1\}^\kappa,\ \psi(\sigma)(i) = f_A(\sigma).$$

Observemos que ψ es una función continua inyectiva, cuando se considera en $\{-1,1\}^I$ la w^*-topología de $\ell_\infty(I)$, que coincide con la topología producto de $\{-1,1\}^I$. Así que $K := \psi(\{0,1\}^\kappa) \subset \{-1,1\}^I$ es un espacio compacto homeomorfo a $\{0,1\}^\kappa$. Sea $\mu := \psi(\lambda)$ la probabilidad de Radon en K, imagen de λ por la función continua ψ, y $r(\mu) =: z_0 \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$ el baricentro de μ. Sea $\check{z}_0$ la extensión de Stone-Čech de z_0 a todo βI.

Aserto 2. Se tiene que $\check{z}_0(p) = +1$, para todo $p \in D$.

En efecto, si $p \in D$, entonces $p \in \overline{N(\sigma,n)}^{\beta I}$ para todo $n \geq 1$ y todo $\sigma \in \{0,1\}^\kappa$. Por otra parte, para todo $j = f_A \in N(\sigma,n)$ se tiene

$$\int_{\{0,1\}^\kappa} f_A d\lambda \geq 1 - n2^{1-n},$$

de donde

$$z_0(j) = \pi_j(z_0) = \pi_j(r(\mu)) = \int_K \pi_j(k)d\mu = \int_{\{0,1\}^\kappa} f_A d\lambda \geq 1 - n2^{1-n}.$$

Por tanto, $\check{z}_0(p) \geq 1 - n2^{1-n}$, $\forall n \geq 1$, es decir, $\check{z}_0(p) = +1$.

Por otra parte, $\delta_p \restriction K = -1$. Por tanto, $Pindex(\delta_p, B(\ell_\infty(I))) = 2$.

Finalmente, observemos que, si τ_π es el automorfismo de I^* correspondiente a una cierta biyección $\pi : I \to I$, los puntos $q \in \tau_\pi(D)$ verifican también que $Pindex(q, B(\ell_\infty(I))) = 2$. Como $\bigcup\{\tau_\pi(D) : \pi$ biyección de $I\}$ es denso en $I^*(\kappa)$, esto concluye la demostración. ■

Corolario 14.10. *Sean I un conjunto y κ un cardinal infinito. Entonces en la capa $C(\kappa, I^*) := I^*(\kappa) \setminus I^*(\kappa^+)$ (κ^+ es el cardinal siguiente de κ) hay una familia densa de puntos p tales que $Pindex(\delta_p, B(\ell_\infty(I))) = 2$.*

Demostración. Por la Prop. 14.9 para cada subconjunto $J \subset I$ con $|J| = \kappa$, en $J^*(\kappa)$ hay una familia densa de puntos p tales que $Pindex(\delta_p, B(\ell_\infty(J))) = 2$ y, por tanto, también $Pindex(\delta_p, B(\ell_\infty(I))) = 2$. Finalmente observemos que $\bigcup\{J^*(\kappa) : J \subset I, |J| = \kappa\} = I^*(\kappa) \setminus I^*(\kappa^+)$. ■

Para el cardinal $\mathfrak{c}$ se obtienen mejores resultados bajo el Axioma de Martin (MA) como vemos a continuación.

Proposición 14.11. *(MA) Si I es un conjunto tal que $|I| = \mathfrak{c}$, toda $\mu \in \mathcal{P}_R(\beta I)$ tal que $sop(\mu) \subset I^*(\mathfrak{c})$ (en particular, si $\mu = \delta_p$, $p \in I^*(\mathfrak{c})$) verifica $Pindex(\mu, B(\ell_\infty(I))) \geq 1$. En consecuencia, para toda $\mu \in M_R(I^*(\mathfrak{c})) \setminus \{0\}$ se tiene $Pindex(\mu, B(\ell_\infty(I))) > 0$.*

Demostración. Identificamos $I = \mathfrak{c}$. Sean λ la medida de Lebesgue en $[0,1]$ y Ω el espacio de Stone del álgebra cociente M_λ/N_λ, donde M_λ es el álgebra de los subconjuntos λ-medibles de $[0,1]$ y N_λ es el ideal de los subconjuntos λ-nulos de $[0,1]$. Ω es un espacio compacto extremadamente disconexo (porque M_λ/N_λ es completo) tal que el álgebra de Boole de los subconjuntos clopen de Ω es isomorfa al álgebra cociente M_λ/N_λ. Además existe una probabilidad Borel regular estrictamente positiva normal $\tilde{\lambda}$ en Ω, definida por la condición $\tilde{\lambda}(V) = \lambda(U)$, siendo V cualquier subconjunto clopen de Ω y U un subconjunto λ-medible de $[0,1]$ con $\lambda(U) > 0$ tal que la clase $U + N_\lambda \in M_\lambda/N_\lambda$ es la imagen de V por el anterior isomorfismo.

Sea $0 < \epsilon < 1$ fijo. Escribimos $[0,1] = \{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ y enumeramos como $\{F_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ a la familia de los subconjuntos Borel B de $[0,1]$ con medida de Lebesgue $\lambda(B) \geq 1 - \epsilon/2$. Como $\{x_\alpha : 1 \leq \alpha < \xi\}$ es λ-nulo para cada $\xi < \mathfrak{c}$ (por (MA), ver el Lema 14.7), por cada $\xi < \mathfrak{c}$ podemos elegir un subconjunto compacto K_ξ tal que

$$K_\xi \subset F_\xi \cap \{x_\rho : \xi < \rho < \mathfrak{c}\} \ \text{ y } \ \lambda(K_\xi) > 1 - \epsilon.$$

Puesto que $K_\xi \subset \{x_\rho : \xi < \rho < \mathfrak{c}\}$, la familia $\{K_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ tiene calibre $\mathfrak{c}$, esto es, $\bigcap_{\xi \in A} K_\xi = \emptyset$, si $A \subset \mathfrak{c}$ y $|A| = \mathfrak{c}$. Sea V_ξ un subconjunto clopen de Ω correspondiente a la clase $K_\xi + N_\lambda \in M_\lambda/N_\lambda$ en el isomorfismo entre el álgebra cociente M_λ/N_λ y el álgebra de los subconjuntos clopen de Ω. Observemos que $\tilde{\lambda}(V_\xi) = \lambda(K_\xi) > 1 - \epsilon$ para todo $\xi < \mathfrak{c}$.

Aserto. Se tiene que la familia $\{V_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ tiene calibre $\mathfrak{c}$, esto es, si $A \subset \mathfrak{c}$ y $|A| = \mathfrak{c}$, entonces $\bigcap_{\xi \in A} V_\xi = \emptyset$.

En efecto, supongamos que $\bigcap_{\xi \in A} V_\xi \neq \emptyset$ para cierto subconjunto $A \subset \mathfrak{c}$ con $|A| = \mathfrak{c}$. Entonces, para todo subconjunto finito $F \subset A$, $\bigcap_{\xi \in F} V_\xi$ es un subconjunto clopen no-vacío de Ω. Incluso $\tilde{\lambda}(\bigcap_{\xi \in F} V_\xi) > 0$ porque $\tilde{\lambda}$ es una probabilidad estrictamente positiva sobre Ω. Observemos que $\bigcap_{\xi \in F} K_\xi + N_\lambda \in M_\lambda/N_\lambda$ es la clase correspondiente a $\bigcap_{\xi \in F} V_\xi$ en el isomorfismo entre el álgebra cociente M_λ/N_λ y el álgebra de los subconjuntos clopen de Ω. Por tanto $\lambda(\bigcap_{\xi \in F} K_\xi) = \tilde{\lambda}(\bigcap_{\xi \in F} V_\xi) > 0$ para todo subconjunto finito de $F \subset A$. Puesto que los conjuntos K_ξ son compactos, obtenemos $\bigcap_{\xi \in A} K_\xi \neq \emptyset$, una contradicción porque la familia $\{K_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ tiene calibre $\mathfrak{c}$. Y esto completa la prueba del Aserto.

Consideremos $\mathcal{A} = \{A \subset \mathfrak{c} : \bigcap_{\xi \in A} V_\xi \neq \emptyset\} \cup \{\emptyset\}$. Claramente cada elemento de $A \in \mathcal{A}$ verifica $|A| < \mathfrak{c}$, por lo que $A^* \cap I^*(\mathfrak{c}) = \emptyset$. Además $\mathcal{A}$ es una familia *adecuada* (ver [85, p. 1116]), es decir:

(i) si $B \subset A$ y $A \in \mathcal{A}$, entonces $B \in \mathcal{A}$;

(ii) $A \in \mathcal{A}$ si $A \subset \mathfrak{c}$ y $B \in \mathcal{A}$ para todo subconjunto finito $B \subset A$, y

(iii) $\{\xi\} \in \mathcal{A}$ para todo $\xi < \mathfrak{c}$.

Como $\mathcal{A}$ es familia adecuada y sus elementos verifican $|A| < \mathfrak{c}$, $K := \{\mathbb{1}_A : A \in \mathcal{A}\}$ es un subconjunto w^*-compacto de $\ell_\infty(I)$ tal que todo elemento $k \in K$ (recordemos que $I = \mathfrak{c}$) satisface $\check{k}\restriction I^*(\mathfrak{c}) \equiv 0$. Si $x \in \Omega$ y $A_x = \{\xi \in \omega_1 : x \in V_\xi\}$, entonces $A_x \in \mathcal{A}$. Así que podemos definir la aplicación $T : \Omega \to K$ de modo que, para todo $x \in \Omega$, $T(x) = \mathbb{1}_{A_x}$. Se ve fácilmente que T es una aplicación continua. Sea $\mu := T(\tilde{\lambda})$ la imagen de $\tilde{\lambda}$ por T y $z_0 = r(\mu) \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ el baricentro de μ. Si $\xi \in I$, definimos $\pi_\xi : \ell_\infty(I) \to \mathbb{R}$ como $\pi_\xi(f) = f(\xi)$, para todo $f \in \ell_\infty(I)$. Observemos que π_ξ es una aplicación lineal w^*-continua sobre $\ell_\infty(I)$. Por tanto

$$1 \geq z_0(\xi) = \pi_\xi(z_0) = \pi_\xi(r(\mu)) = \int_K \pi_\xi(k) d\mu(k) = \int_{T(\Omega)} k(\xi) d(T(\tilde{\lambda}))(k) =$$
$$= \int_\Omega \mathbb{1}_{A_x}(\xi) d\tilde{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}(V_\xi) = \lambda(K_\xi) > 1 - \epsilon.$$

En consecuencia, toda $\mu \in \mathcal{P}_R(I^*(\mathfrak{c}))$ verifica que:

(i) $\langle \mu, z_0 \rangle \geq 1 - \epsilon$.

(ii) $\langle \mu, \check{k} \rangle = 0, \ \forall k \in K$.

Por tanto, como $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $Pindex(\mu, B(\ell_\infty(I))) \geq 1$. En consecuencia, toda $\mu \in M_R(I^*(\mathfrak{c}))^+$ verifica $Pindex(\mu, B(\ell_\infty(I))) \geq \|\mu\|$.

Finalmente, si $\mu \in M_R(I^*(\mathfrak{c})) \setminus \{0\}$, se considera la descomposición $\mu = \mu^+ - \mu^-$ en su parte positiva y negativa, que son medidas positivas ortogonales, y se le aplica a cada una de ellas lo anterior, resultando que

$$Pindex(\mu, B(\ell_\infty(I))) \geq \sup\{Pindex(\mu^+, B(\ell_\infty(I))), Pindex(\mu^-, B(\ell_\infty(I)))\} > 0.$$

■

Cuestión 7. *Si X es un eB, es claro que, si un funcional $\psi \in X^{**}$ verifica el cálculo baricéntrico sobre $(B(X^*), w^*)$, entonces $Pindex(\psi, B(X^*)) = 0$. Sabemos también (ver [1, Example I.2.10], Contraejemplo de la Sección 1.5) que existen espacios de Banach X y funcionales $\psi \in X^{**}$ tales que $\psi \in \mathcal{U}(B(X^*))$ pero $Pindex(\psi, B(X^*)) > 0$ y, por tanto, ψ no verifica el cálculo baricéntrico sobre $B(X^*)$. Si $X = \ell_1(I)$, ¿existe algún elemento $\psi \in X^{**} \cap \mathcal{U}(B(X^*))$ tal que $Pindex(\psi, B(X^*)) > 0$ ó que no verifique el cálculo baricéntrico?*

Cuestión 8. *Si I es un conjunto infinito (en particular, si $I = \mathbb{N}$), ¿existe $p \in I^*$ tal que $Pindex(\delta_p, B(\ell_\infty(I))) = 0$?*

Cuestión 9. *Si I es un conjunto infinito (en particular, si $I = \mathbb{N}$), ¿existe $\mu \in M_R(I^*) \setminus \{0\}$ tal que $Bindex(\mu, B(\ell_\infty(I))) = 0$?*

14.5. Los índices $Width(K)$ y $Frag(K)$

Consideremos un espacio de Banach X, un subconjunto w^*-compacto $K \subset X^*$ y un funcional $\psi \in X^{**}$. Ya se han definido los índices $Frag(\psi, K)$, $Frag(K)$, $Pindex(\psi, K)$, $Pindex(K)$ y $Width(K)$ (ver Definición 1.4 y Definición 3.7). Recordemos (ver la Prop.

1.10) que $Pindex(K) = Width(K)$. En este Capítulo vamos a probar que también es cierta la igualdad $Width(K) = Frag(K)$. Para conseguirlo utilizamos el Teorema de Sierpinski (ver Prop. 14.2).

Proposición 14.12. *Sean X un espacio de Banach y $K \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto. Se verifica que*

$$Pindex(K) = Width(K) = Frag(K).$$

Demostración. Ya sabemos que $Pindex(K) = Width(K)$ (ver la Prop. 1.10) y que $Width(K) \geq Frag(K)$ (ver la Prop. 3.11).

Aserto. $Frag(K) \geq Width(K)$.

En efecto, sea $\mathcal{F} := \{z_{M,N} : M, N \subset \mathbb{N}$ subconjuntos disjuntos$\}$ una w^*-$\mathbb{N}$-familia uniforme de K de anchura $width(\mathcal{F}) > \eta > 0$ asociada a $\{x_n : n \geq 1\} \subset B(X^*)$ y $r_0 \in \mathbb{R}$ tales que, para todo par de subconjuntos disjuntos $M, N \subset \mathbb{N}$, se verifica

$$\langle z_{(M,N)}, x_m \rangle > r_0 + \eta, \quad \text{si } m \in M, \quad \text{y } \langle z_{(M,N)}, x_n \rangle < r_0, \quad \text{si } n \in N.$$

Por cada $\sigma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ponemos $h_\sigma = z_{(M,N)}$, siendo $M := \{m \in \mathbb{N} : \sigma(m) = 1\}$ y $N := \{n \in \mathbb{N} : \sigma(n) = 0\}$. Sea $F := \overline{\{h_\sigma : \sigma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}}^{w^*} \subset K$. Sea $T : \ell_1 \to X$ el operador lineal y continuo tal que $T(e_n) = x_n$, $\forall n \geq 1$, siendo $\{e_n : n \geq 1\}$ la base canónica de ℓ_1. Su adjunto $T^* : X^* \to \ell_\infty$ verifica que $T^*(x^*) = (\langle x^*, x_m \rangle)_m$, $\forall x^* \in X^*$. Definimos la aplicación $\Phi : \ell_\infty \to \ell_\infty$ como sigue

$$\forall (a_n)_{n\geq 1} \in \ell_\infty, \ \Phi((a_n)_{n\geq 1}) = \tfrac{1}{\eta}\big(((a_n - r_0) \vee 0) \wedge \eta\big)_{n\geq 1}.$$

La aplicación Φ, aunque no es lineal, es sin embargo w^*-w^*-continua y satisface que $\Phi \circ T^*(F) = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \mathcal{C}$. Sean λ la probabilidad de Haar sobre $\mathcal{C}$ y $\mu \in \mathcal{P}_R(F)$ tal que $\Phi \circ T^*(\mu) = \lambda$, es decir, λ es la imagen de μ por la aplicación w^*-w^*-continua sobreyectiva $g := \Phi \circ T^* : F \to \mathcal{C}$. Sea $p \in \mathbb{N}^*$ arbitrario. Por la Proposición 14.2 el conjunto $\mathcal{U}^p$ no es λ-medible y

$$0 = \lambda_*(\mathcal{U}^p) = \lambda_*({}^c(\mathcal{U}^p)) \ \text{ y } \ 1 = \lambda^*(\mathcal{U}^p) = \lambda^*({}^c(\mathcal{U}^p)).$$

Sea $g^{-1}(\mathcal{U}^p) =: A \subset F$. Sea $\psi := \delta_p \circ T^*$. Como $\|T\| \leq 1$ (porque $x_n \in B(X^*)$, $\forall n \geq 1$), es claro que $\psi \in B(X^{**})$. Además

$$A = \{z \in F : \langle \psi, z \rangle \geq r_0 + \eta\} \ \text{ y } F \setminus A = \{z \in F : \langle \psi, z \rangle \leq r_0\}.$$

Aserto 3. $Med(\psi, F) \geq \eta$.

En efecto, sea $B \in (\mathcal{B}_o(F), \mu)^+$ y $W \subset B$ un subconjunto w^*-compacto tal que $\mu(W) > 0$. Puesto que $\lambda(g(W)) \geq \mu(W) > 0$, por la Proposición 14.2 ocurre que $g(W) \cap \mathcal{U}^p \neq \emptyset \neq g(W) \cap {}^c\mathcal{U}^p$ y esto implica que $B \cap A \neq \emptyset \neq B \cap (F \setminus A)$. En consecuencia $diam\langle \psi, B \rangle \geq \eta$, lo que prueba el Aserto 3.

En consecuencia, como $\|\psi\| \leq 1$, llegamos a que

$$Frag(K) \geq Frag(\psi, K) \geq Frag(\psi, F) \geq Med(\psi, F) \geq \eta.$$

Puesto que $0 \leq \eta < Width(K)$ es arbitrario, concluimos que $Width(K) \leq Frag(K)$, como queríamos probar. ∎

Corolario 14.13. *Sean X un espacio de Banach y $K \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto. Son equivalentes:*

(1) $K \in (P)$; (1') $\overline{\text{co}}^{w^*}(W) \in (P)$ para todo subconjunto w^*-compacto $W \subset \overline{[K]}$.

(2) $Frag(K) = 0$; (2') $Frag(\overline{\text{co}}^{w^*}(W)) = 0$ para todo subconjunto w^*-compacto $W \subset \overline{[K]}$.

(3) $X^{**} \upharpoonright K \subset \mathcal{B}^0_{1b}(K)$; (3') $X^{**} \upharpoonright \overline{\text{co}}^{w^*}(W) \subset \mathcal{B}^0_{1b}(\overline{\text{co}}^{w^*}(W))$ para todo subconjunto w^*-compacto $W \subset \overline{[K]}$.

Demostración. La equivalencia $(1) \Leftrightarrow (1')$ está probada en [62, Proposition 3.8].

Las equivalencias $(1) \Leftrightarrow (2)$ y $(1') \Leftrightarrow (2')$ salen de la Prop. 14.12.

Finalmente, las equivalencias $(2) \Leftrightarrow (3)$ y $(2') \Leftrightarrow (3')$ salen de las definiciones de los índices $Frag(\psi, K)$ y $Frag(K)$ (ver Def. 3.7). ∎

NOTA. (a) Sea X un espacio de Banach, $H \subset X^*$ un subconjunto convexo w^*-compacto metrizable y $\psi \in X^{**}$. Se verifica que

$$Frag(\psi, H) \geq \tfrac{1}{3} Bindex(\psi, H) \geq \tfrac{1}{3} Eindex(\psi, H) \geq \tfrac{1}{3} Pindex(\psi, H).$$

En efecto, puesto que H es metrizable sabemos por la Prop. 3.8 que $Frag(\psi, H) = 2dist(\psi, \mathcal{B}^0_{1b}(H)) = 2dist(\psi, \mathcal{B}_{1b}(H))$. Ahora basta aplicar la Prop. 4.11 y la NOTA que sigue a la Def. 1.13.

(b) Bajo (MA) se ha construido en la Prop. 14.8 un funcional $F \in M_R(\mathbb{N}^*)$ que verifica el cálculo baricéntrico y, por tanto, $Eindex(F, B(\ell_\infty(\mathbb{N}))) = 0 = Pindex(F, B(\ell_\infty(\mathbb{N})))$. Sin embargo $Frag(F, B(\ell_\infty(\mathbb{N}))) > 0$ porque $F \notin \mathcal{S}eq(M_R(\beta\mathbb{N})) = \mathcal{B}_{1b}(B(\ell_\infty(\mathbb{N})) \cap M_R(\beta\mathbb{N}) = \ell_1(\mathbb{N})$. Desconocemos si existe $\psi \in M_R(\mathbb{N}^*)\backslash\{0\}$ tal que $Bindex(\psi, B(\ell_\infty(\mathbb{N}))) = 0$.

(c) Para un espacio de Banach X y $\psi \in X^{**}$ siempre ocurre que $\psi \in \mathcal{S}eq(X^{**}) \Rightarrow Bindex(\psi, B(X^*)) = 0$, pero desconocemos si $Bindex(\psi, B(X^*)) = 0$ implica que $\psi \in \mathcal{S}eq(X^{**})$.

Capítulo 15

Los funcionales de $\ell_\varphi(I)^*$ actuando sobre el compacto $(B(\ell_\varphi(I)), w^*)$

15.1. Introducción

Una función $\varphi : \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \to [0, +\infty]$ se denomina una función de Orlicz si es convexa, par, no-decreciente y continua a la izquierda para $x \geq 0$, $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ (ver [23],[71]). Sea φ una función de Orlicz. Entonces

(1) Definimos $a(\varphi) = \sup\{t \geq 0 : \varphi(t) = 0\}$ y $\tau(\varphi) := \sup\{t \geq 0 : \varphi(t) < \infty\}$.

(2) Si I es un conjunto arbitrario, para cada $x \in \mathbb{R}^I$, se define $I_\varphi(x) = \sum_{i \in I} \varphi(x_i)$. Sean:

(21) $\ell_\varphi(I)$ el correspondiente espacio de Orlicz, i.e. $\ell_\varphi(I) = \{x \in \mathbb{R}^I : \exists \lambda > 0 \text{ tal que } I_\varphi(x/\lambda) < \infty\}$. En $\ell_\varphi(I)$ se considera la norma de Luxemburg $\|x\| := \operatorname{ínf}\{\lambda > 0 : I_\varphi(x/\lambda) \leq 1\}$, $\forall x \in \ell_\varphi(I)$.

(22) $h_\varphi(I)$ será el subespacio de $\ell_\varphi(I)$ formado por los elementos finitos, es decir, los elementos $x \in \ell_\varphi(I)$ tales que, para todo $\lambda > 0$, existe un subconjunto finito $J \subset I$ de modo que $I_\varphi((x \restriction I \setminus J)/\lambda) < \infty$. La familia de los vectores unitarios canónicos $\{e_i : i \in I\}$ es base 1-simétrica de $h_\varphi(I)$. Si $I = \mathbb{N}$ pondremos h_φ y ℓ_φ en lugar de $h_\varphi(\mathbb{N})$ y $\ell_\varphi(\mathbb{N})$, respectivamente.

(3) La función de Orlicz φ satisface: (i) la Δ_2-condición en 0 (abrev., $\varphi \in \Delta_2^0$) si $\varphi(t) > 0$ para $t > 0$ y $\operatorname{lím\,sup}_{t \to 0} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} < \infty$; (ii) la Δ_2-condición en ∞ (abrev., $\varphi \in \Delta_2^\infty$) si $\varphi(t) < \infty$ para todo $0 \leq t < \infty$ y $\operatorname{lím\,sup}_{t \to \infty} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} < \infty$; (iii) la Δ_2-condición (abrev., $\varphi \in \Delta_2$) si $\varphi \in \Delta_2^0$ y $\varphi \in \Delta_2^\infty$; (iv) si I es infinito, entonces $\varphi \in \Delta_2^0$ sii $h_\varphi(I) = \ell_\varphi(I)$.

(4) Definimos la función complementaria φ^* de φ como una nueva función de Orlicz φ^* tal que $\varphi^*(u) = \sup\{tu - \varphi(t) : 0 \leq t < \infty\}$ para todo $u \geq 0$. Se tiene que:

(40) $\varphi^{**} = \varphi$.

(41) $h_\varphi(I)^* = \ell_{\varphi^*}(I)$.

(42) $\ell_\varphi(I)^* = F(\varphi, I)_i \oplus F(\varphi, I)_s$ siendo $F(\varphi, I)_i$ y $F(\varphi, I)_s$ bandas complementarias tales que :

(i) $F(\varphi, I)_i$ es la banda de los funcionales integrales y verifica $F(\varphi, I)_i = \ell_{\varphi^*}(I)$ en el sentido de que, para todo $f \in F(\varphi, I)_i$, existe $u \in \ell_{\varphi^*}(I)$ de modo que $\langle f, x\rangle = \sum_{i\in I} u_i x_i,\ \forall x \in \ell_\varphi(I)$.

(ii) $F(\varphi, I)_s$ es la banda de los funcionales singulares y verifica $F(\varphi, I)_s = h_\varphi(I)^\perp = (\ell_\varphi(I)/h_\varphi(I))^*$. Por tanto, $F(\varphi, I)_s \neq \{0\}$ sii $h_\varphi(I) \neq \ell_\varphi(I)$ sii $\varphi \notin \Delta_2^0$ sii $\ell_1 \subset h_{\varphi^*}(I)$.

15.2. El espacio $\mathcal{S}eq(\ell_\varphi(I)^*)$

Sea φ una función de Orlicz. Sabemos que $\ell_\varphi(I) = h_{\varphi^*}(I)^*$. Estamos interesados en hallar el espacio $\mathcal{S}eq(\ell_\varphi(I)^*) = \mathcal{B}_1(B(\ell_\varphi(I))) \cap \ell_\varphi(I)^*$. Hemos visto que cuando $\varphi(x) = 0,\ |x| \leq 1$, y $\varphi(x) = \infty,\ |x| > 1$ (ahora $\varphi^*(t) = |t|$, $\ell_\varphi(I) = \ell_\infty(I)$ y $h_{\varphi^*}(I) = \ell_{\varphi^*}(I) = \ell_1(I)$), se verifica que (ver la Prop. 14.5):

$$\mathcal{S}eq(\ell_\varphi(I)^*) = \mathcal{B}_1(B(\ell_\varphi(I))) \cap \ell_\varphi(I)^* = \mathcal{B}_1^0(B(\ell_\varphi(I))) \cap \ell_\varphi(I)^* = h_{\varphi^*}(I) = \ell_{\varphi^*}(I).$$

Lema 15.1. *Sean ψ una función de Orlicz y $(x_n)_n \subset B(h_\psi)$ tal que:*

(i) Si $x_n = (x_{nk})_k$, se tiene $x_{nk} \underset{k\to\infty}{\to} 0,\ \forall n \geq 1$.

(ii) Existen $z \in \ell_{\psi^*} = (h_\psi)^*$ y $\epsilon > 0$ tales que $\langle z, x_n\rangle > \epsilon > 0,\ \forall n \geq 1$.

Entonces toda subsecuencia Σ de $(x_n)_n$: (1) contiene otra subsecuencia equivalente a la base de ℓ_1; (2) Σ no es w-Cauchy.

Demostración. Por (i) toda subsecuencia Σ de $(x_n)_n$ contiene otra subsecuencia que es equivalente a una secuencia seminormalizada $(y_k)_k$ tal que: (a) $sop(y_k) < sop(y_{k+1})$; (b) $\langle z, y_k\rangle > \epsilon$. Por tanto $(y_k)_k$ es equivalente a la base de ℓ_1. Finalmente (2) sale de (1) y del T. de Rosenthal. ■

Proposición 15.2. *Sean I un conjunto infinito, φ una función de Orlicz y $X = h_{\varphi^*}(I)$. Entonces $\mathcal{S}eq(X^{**}) = \mathcal{B}_1(B(X^*)) \cap X^{**} = \ell^c_{\varphi^*}(I)$, siendo $\ell^c_{\varphi^*}(I)$ el subespacio de los elementos $x \in \ell_{\varphi^*}(I)$ con soporte contable.*

Demostración. Si $a(\varphi) > 0$, entonces $h_{\varphi^*}(I) = \ell_{\varphi^*}(I) = \ell_1(I),\ \ell_\varphi(I) = \ell_\infty(I)$ y este caso ya se ha considerado en la Prop. 14.5.

Sea $a(\varphi) = 0$.

Aserto 1. $\ell^c_{\varphi^*}(I) \subset \mathcal{S}eq(X^{**})$.

En efecto, sea $u \in \ell^c_{\varphi^*}(I)$ de modo que existe $J := \{j_n : n \geq\} \subset I$ tal que, de hecho, $u \in \ell_{\varphi^*}(J)$. Entonces es trivial ver que, si $u^n = u \restriction \{j_k : 1 \leq n\}$, entonces $u^n \in h_{\varphi^*}(I)$ y $u^n \to u$ en $\sigma(\ell_{\varphi^*}(I), \ell_\varphi(I))$(= w^*-topología de $\ell_{\varphi^*}(I)$ como subespacio de $\ell_\varphi(I)^*$).

Aserto 2. $\mathcal{S}eq(X^{**}) \subset \ell^c_{\varphi^*}(I)$.

En efecto, consideremos un secuencia $(u_n)_n \subset X$ tal que $u_n \overset{w^*}{\to} z_0 \in X^{**}$. Puesto que los u_n tienen soporte contable (porque $u_n \in h_{\varphi^*}(I)$), podemos suponer que $I = \mathbb{N}$. Sea $z_0 = u_0 + v_0$ con $u_0 \in F(\varphi, \mathbb{N})_i = \ell_{\varphi^*} := \ell_{\varphi^*}(\mathbb{N})$ y $v_0 \in F(\varphi, \mathbb{N})_s$. Queremos probar que, de hecho, $v_0 = 0$. Si $u_n = (u_{nk})_k,\ n \geq 0$, es claro que $u_{nk} \underset{n\to\infty}{\to} u_{0k} \in \mathbb{R},\ \forall k \geq 1$, siendo $(u_{0k})_k = u_0$. Es fácil ver que, si $z_n := (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0n}, 0, 0, ..)$, entonces $z_n \in h_{\varphi^*}(\mathbb{N})$ y $z_n \to u_0$ en la w^*-topología de X^{**}. Por tanto $u_n - z_n \in h_{\varphi^*}(\mathbb{N})$ y $u_n - z_n \to v_0$ en (X^{**}, w^*). Supongamos que $v_0 \neq 0$. Entonces existen $z \in \ell_\varphi(\mathbb{N})$ y $\epsilon > 0$ tales que $\langle z, v_0 \rangle > \epsilon$ y, sin pérdida de generalidad (suprimiendo un nº finito de términos), $\langle z, u_n - z_n \rangle > \epsilon,\ \forall n \geq 1$. Por el Lema 15.1 esto no puede ocurrir, por lo que debe ser $v_0 = 0$. ■

Proposición 15.3. *Sean I un conjunto infinito, φ una función de Orlicz y $X = \ell_\varphi(I)$. Son equivalentes:*

(1) $\varphi \in \Delta_2^0$.

(2) $X^* = \ell_{\varphi^*}(I)$ y X^* es Grothendieck.

(3) $\ell_{\varphi^*}(I)$ es Grothendieck.

(4) $\mathcal{S}eq(X^{**}) = X$.

(5) $X \in (WSC)$.

Demostración. (1) ⇔ (2) ⇔ (3) está probado en [54, Cor. 5.5].

(2) ⇒ (4) ⇔ (5) sale de la Prop. 1.21.

(5) ⇒ (1). Si $\varphi \notin \Delta_2^0$, entonces $\ell_\varphi(I)$ contiene una copia de c_0, que no es (WSC). ■

15.3. El espacio $F(\varphi, I)_s$ y la medibilidad

Veamos algunas observaciones sobre el subespacio $F(\varphi, I)_s$ de los funcionales singulares.

(1) Caso de ser $F(\varphi, I)_s \neq \{0\}$, lo que ocurre sii $\ell_\varphi(I) \neq h_\varphi(I)$ sii $\varphi \notin \Delta_2^0$ sii $\ell_1 \subset h_{\varphi^*}(I)$, siempre hay en $\ell_\varphi(I)^*$ funcionales no universalmente medibles por [65]. Aún más, podemos afirmar que los hay en $F(\varphi, I)_s$ (si $F(\varphi, I)_s \neq \{0\}$). En efecto, distinguimos dos casos:

Caso 1. $\ell^c_{\varphi^*}(I) = \ell_{\varphi^*}(I)$, es decir, $I = \mathbb{N}$ ó $a(\varphi^*) = 0$. En este caso, como todos los elementos de $\ell^c_{\varphi^*}(I)$ son universalmente medibles (pues $\ell^c_{\varphi^*}(I) = \mathcal{S}eq(\ell_\varphi(I)^*)$ y $\ell_\varphi(I)^* = \ell_{\varphi^*}(I) \oplus F(\varphi, I)_s$, algún elemento de $F(\varphi, I)_s$ no es universalmente medible porque en $\ell_\varphi(I)^*$ hay elementos no universalmente medibles.

Caso 2. Sea $\ell^c_{\varphi^*}(I) \neq \ell_{\varphi^*}(I)$, es decir, $|I| \geq \aleph_1$ y $a(\varphi^*) > 0$. Por tanto ahora $\ell_{\varphi^*}(I) = \ell_\infty(I), h_{\varphi^*}(I) = c_0(I),\ h_{\varphi^*}(I)^* = \ell_\varphi(I) = \ell_1(I)$ y $\ell_\varphi(I)^* = \ell_\infty(I) = F(\varphi, I)_i$. Así que $F(\varphi, I)_s = \{0\}$ y este caso no ocurre, si suponemos que $F(\varphi, I)_s \neq \{0\}$.

(2) Sabemos que $F(\varphi, I)_s = h_\varphi(I)^\perp = (\ell_\varphi(I)/h_\varphi(I))^*$ y su estructura está descrita en [58] y es la siguiente. Suponemos que I es un conjunto infinito y que $\varphi \notin \Delta_2^0$ de modo que $F(\varphi, I)_s \neq \{0\}$. Denotemos por $M(I)$ al retículo de Banach de las medidas acotadas finitamente aditivas sobre I, que sabemos es un retículo orden isomorfo e isométrico al retículo $M_R(\beta I) = C(\beta I)^*$ de las medidas Borel Radon sobre βI. Sea $\Lambda : M(I) \to C(\beta I)^*$ dicha isometría. Entonces:

(a) Si $\nu \in M(I)$, se tiene, $\forall A \subseteq I,\ \nu(A) = \Lambda(\nu)(\overline{A}^{\beta I})$.

(b) $\Lambda(\{\nu \in M(I) : \nu(\{i\}) = 0,\ \forall i \in I\}) = C(\beta I \setminus I)^*$ (=medidas de Radon de $C(\beta I)^*$ soportadas sobre $I^* = \beta I \setminus I = M_R(I^*)$).

A continuación definimos el subespacio $M_\varphi(I)$ (M_φ simplemente si $I = \mathbb{N}$) de $M_R(I^*)$ distinguiendo dos casos, a saber:

(i) Si $a(\varphi) > 0$, es decir, $\ell_\varphi(I)$ isomorfo a $\ell_\infty(I)$, $M_\varphi(I) = M_R(I^*)$.

(ii) Si $a(\varphi) = 0$, definimos $M_\varphi(I) \subseteq M_R(I^*)$ como el subespacio de los elementos $\nu \in M_R(I^*)$ tales que existe una secuencia $\{G_k\}_{k\geq 1}$ de subconjuntos finitos de I disjuntos dos a dos verificando:

(1) $|\nu|(I^* \setminus (\cup_{k\geq 1} G_k)^*) = 0$. Es decir, $sop(\nu) \subset (\cup_{k\geq 1} G_k)^*$.

(2) $\sum_{k\geq 1} \varphi(1/k) \cdot |G_k| < \infty$, donde $|G_k|$ =card(G_k).

(3) $\sum_{k\geq 1} \varphi\left(\frac{1}{k}[1 + \frac{1}{n}]\right) \cdot |G_k \cap E| = \infty,\ \forall n \geq 1,\ \forall E \subseteq I$ tal que $|\nu|(E^*) > 0$.

Observemos que, para $a(\varphi) = 0$, todas las medidas $\nu \in M_\varphi(I)$ verifican $sop(\nu) \subset I^{*c}$ por (1). Se tiene que existe un orden isomorfismo isométrico $L : M_\varphi(I) \to (\frac{\ell_\varphi(I)}{h_\varphi(I)})^* = F(\varphi, I)_s$ y $M_\varphi(I)$ es 1-complementado en $C(\beta I)^*$ (ver [58]). En consecuencia, existe una proyección $P : M_R(I^*) \to M_\varphi(I)$ de norma 1. En el diagrama siguiente se plasman estas relaciones:

$$M_R(I^*) \xrightarrow{P} M_\varphi(I) \xrightarrow{L} X^* = \left(\frac{\ell_\varphi(I)}{h_\varphi(I)}\right)^* = F(\varphi, I)_s. \tag{15.1}$$

El caso $a(\varphi) > 0$ conduce al espacio $\ell_\infty(I)$, que ya se ha considerado en un Capítulo anterior. Sea $a(\varphi) = 0$. Bajo esta condición, si $\nu \in M_\varphi(I)$, entonces $sop(\nu) \subset I^{*c}$, es decir, ν ignora por completo la parte incontable I^{*u} de I^*, por lo que, a la hora de estudiar $F(\varphi, I)_s$, cuando $a(\varphi) = 0$, bastará considerar el caso $I = \mathbb{N}$.

Proposición 15.4. *Sean I un conjunto infinito, φ una función de Orlicz y $X = h_{\varphi^*}(I)$. Entonces:*

(1) Si $\varphi \in \Delta_2^0$, $\ell_{\varphi^*}(I) = X^{**} = \mathcal{B}_1^0(B(\ell_\varphi(I))) \cap X^{**}$ mientras que $\mathcal{S}eq(X^{**}) = \ell^c_{\varphi^*}(I)$. Por tanto, si $|I| \geq \aleph_1$, $\mathcal{S}eq(X^{**}) \neq X^{**} = \mathcal{B}_1^0(B(\ell_\varphi(I))) \cap X^{**}$

(2) Si $\varphi \notin \Delta_2^0$, se tiene que

$$\ell^c_{\varphi^*}(I) = \mathcal{S}eq(\ell_\varphi(I)^*) = \mathcal{B}_1(B(X^*)) \cap X^{**} = \mathcal{B}_1^0(B(X^*)) \cap X^{**}.$$

Demostración. (1) Si $\varphi \in \Delta_2^0$, $X = h_{\varphi^*}(I)$ es Asplund y carece de copias de ℓ_1. Por la Prop. 3.24 obtenemos

$$\ell_{\varphi^*}(I) = X^{**} = \mathcal{B}_1^0(B(\ell_\varphi(I))) \cap X^{**}.$$

A continuación aplicamos la Prop. 15.2.

(2) Ya hemos visto en la Prop. 15.2 que $\ell^c_{\varphi^*}(I) = \mathcal{S}eq(\ell_\varphi(I)^*) = \mathcal{B}_1(B(X^*)) \cap X^{**}$. Veamos ahora que $\mathcal{B}_1(B(X^*)) \cap X^{**} = \mathcal{B}_1^0(B(X^*)) \cap X^{**}$. Si $a(\varphi) > 0$, entonces $h_{\varphi^*}(I) = \ell_1(I)$, $\ell_\varphi(I) = \ell_\infty(I)$ y este caso ya se ha considerado en la Prop. 14.5.

Sea $a(\varphi) = 0$. Distinguiremos dos casos, a saber:

Caso 1. Suponemos que $I = \mathbb{N}$. Entonces $X = h_{\varphi^*}$ es separable, $K := (B(\ell_\varphi), w^*)$ es métrico y, por tanto, $\mathcal{B}_1(K) = \mathcal{B}_1^0(K)$.

Caso 2. Suponemos que I es incontable. Ahora $K = (B(\ell_\varphi), w^*)$ no es HL y $\mathcal{B}_1(K) \neq \mathcal{B}_1^0(K)$ (ver Prop. 3.18 y Prop. 3.19). Sin embargo, vamos a ver que también en este caso $\mathcal{B}_1^0(K) \cap X^{**} = \mathcal{B}_1(K) \cap X^{**}$. Puesto que $\mathcal{B}_1(K) \subset \mathcal{B}_1^0(K)$, es claro que $\mathcal{B}_1(K) \cap X^{**} \subset \mathcal{B}_1^0(K) \cap X^{**}$. Sea $z \in \mathcal{B}_1^0(K) \cap X^{**}$. Entonces $z \in \mathcal{U}(K) \cap X^{**}$. Sea $z = u + v$ la descomposición de z de modo que $u \in F(\varphi, I)_i$ y $v \in F(\varphi, I)_s$. Notemos que:

(i) u tiene soporte contable, digamos $J_1 \subset I$, porque $u \in F(\varphi, I)_i = \ell_{\varphi^*}(I)$ con $a(\varphi^*) = 0$ ya que $\varphi \notin \Delta_2^0$.

(ii) El funcional v está asociado a cierta medida $\nu \in M_\varphi(I)$ y, como acabamos de ver, tiene soporte en J_2^* para cierto subconjunto contable $J_2 \subset I$.

De (i) y (ii) sale que z se limita a actuar, de hecho, sobre $\ell_\varphi(J)$ siendo $J = J_1 \cup J_2$ contable. Más concretamente, que si $P_J : \ell_\varphi(I) \to \ell_\varphi(J)$ es la proyección canónica, existe un funcional $\tilde{z} \in \ell_\varphi(J)^*$ tal que $z = \tilde{z} \circ P_J$. Claramente $\tilde{z} \in \mathcal{B}_1^0(B(\ell_\varphi(J))) \cap \ell_\varphi(J)^*$. Por el Caso 1, se tiene que $\tilde{z} \in \ell_{\varphi^*}(J)$, de donde

$$z \in \ell_{\varphi^*}(J) \subset \ell^c_{\varphi^*}(I) = \mathcal{B}_1(B(\ell_\varphi(I))) \cap X^{**},$$

como pretendíamos probar. ■

Es claro que la Prop. 15.4 extiende la Proposición 14.5. En relación con $M_\varphi(I)$, cuando $a(\varphi) = 0$, cabe hacerse varias preguntas (para $a(\varphi) > 0$ ver Capítulo anterior):

Cuestión 1. ¿Existen elementos $\psi \in M_\varphi(I) \setminus \{0\}$ que sean universalmente medibles sobre $B(\ell_\varphi(I))$?

Cuestión 2. Si $p \in I^*$, ¿quién es $P(\delta_p)$ como elemento de $M_\varphi(I)$? Sabemos que δ_p no es universalmente medible sobre $(B(\ell_\infty(I)), w^*)$ (Teorema de Sierpinski). ¿Es $P(\delta_p)$ universalmente medible sobre $(B(\ell_\varphi(I)), w^*)$?

Cuestión 3. ¿Existe alguna medida difusa $\mu \in M_\varphi(I)$ que no sea universalmente medible?

15.4. Descripción de $M_\varphi(I)$. El conjunto soporte $S_\varphi(I)$

En lo que sigue φ será una función de Orlicz tal que $\varphi \notin \Delta_2^0$ (es decir $h_\varphi \neq \ell_\varphi$). Vamos a hallar un cierto subconjunto $S_\varphi \subset \mathbb{N}^*$ (resp., $S_\varphi(I) \subset I^*$, si trabajamos con $\ell_\varphi(I)$) tal que las medidas de M_φ (resp., $M_\varphi(I)$) están soportadas por S_φ (resp., $S_\varphi(I)$). Sea $Q : \ell_\varphi(I) \to \ell_\varphi(I)/h_\varphi(I) =: X$ el cociente canónico. Recordemos que para todo $f \in \ell_\varphi(I)$ se tiene que

$$\|Qf\| = \text{ínf}\{\|f-h\| : h \in h_\varphi(I)\} = \text{ínf}\{\lambda > 0 : \exists A \subset I \text{ finito tal que } I_\varphi(f_{I\setminus A}/\lambda) < \infty\}.$$

Sabemos que $h_\varphi(I)$ es proximinal en $\ell_\varphi(I)$ (ver [58]), es decir, para todo $f \in \ell_\varphi(I)$, existe $h_f \in h_\varphi(I)$ tal que

$$\|Qf\| = \text{ínf}\{\|f-h\| : h \in h_\varphi(I)\} = \|f - h_f\|.$$

En particular: (i) $\forall u \in S(X)$, $\exists f \in S(\ell_\varphi(I))$ tal que $Qf = u$; (ii) $\forall u \in S(X)^+$, $\exists f \in S(\ell_\varphi(I))^+$ tal que $Qf = u$. Sean $u \in X^+$ y $f \in \ell_\varphi^+$ con $Qf = u$ y definamos $Tu : I^* \to [0,\infty)$ de la siguiente forma:

$$\forall p \in I^*, Tu(p) = \lim_{A \in \mathcal{U}^p} \|Q(f_A)\| \tag{15.2}$$

siendo $\mathcal{U}^p$ el ultrafiltro de partes de I determinado por p y $f_A = f \cdot \mathbb{1}_A$. Observemos que el límite (15.2) existe porque, dados $A \subset B \subset I$, se tiene que $\|Q(f_A)\| \leq \|Q(f_B)\|$. Además no depende del vector $f \in \ell_\varphi$ tal que $Qf = u$, pues, si también $Qg = u$, entonces $Q(f_A) = Q(g_A)$, $\forall A \subset I$. Como $0 \leq \|Q(f_A)\| \leq \|u\|$, es claro que

$$\forall p \in I^*, \quad 0 \leq T(u)(p) \leq \|u\|,$$

por lo que $Tu \in \ell_\infty(I^*)$.

Lema 15.5. *Sean I conjunto infinito, φ función de Orlicz tal que $\varphi \notin \Delta_2^0$ y $X = \ell_\varphi(I)/h_\varphi(I)$. Sea $f \in \ell_\varphi(I)$ y $u := Qf$. Entonces:*

(1) Si $A \uplus B = I$, ó bien $\|Q(f_A)\| = \|u\|$ ó bien $\|Q(f_B)\| = \|u\|$.

(2) Supongamos que $\|u\| > 0$ y sean $A \uplus B = I = A' \uplus B'$ tales que $\|Q(f_A)\| < \|u\| > \|Q(f_{A'}\|$. Entonces $\|Q(f_{A\cup A'})\| < \|u\|$ y $\|Q(f_{B\cap B'})\| = \|u\|$

Demostración. (1) Basta observar que X es un M-espacio y que $u = Q(f_A) + Q(f_B)$ con $|Q(f_A)| \wedge |Q(f_B)| = 0$.

(2) Puesto que $\|Q(f_A)\| < \|u\|$, $\|Q(f_{A'\setminus A})\| \leq \|Q(f_{A'}\| < \|u\|$ y $|Q(f_A)| \wedge |Q(f_{A'\setminus A})| = 0$, obtenemos que $\|Q(f_{A\cup A'})\| = \|Q(f_A) + Q(f_{A'\setminus A})\| = \|Q(f_A)\| \vee \|Q(f_{A'\setminus A})\| < \|u\|$ pues X es un M-espacio. En consecuencia, por (1) sale que $\|Q(f_{B\cap B'})\| = \|u\|$. ■

Lema 15.6. *Sean φ función de Orlicz tal que $\varphi \notin \Delta_2^0$, $X = \ell_\varphi(I)/h_\varphi(I)$ y $u \in X^+$. Se tiene que:*

(1) La función Tu es usc sobre I^* y, si $a(\varphi) = 0$, $sop(Tu) \subset I^{*c}$.

(2) Si $a(\varphi) = 0$ y $0 < t$, los subconjuntos compactos $K(u,t) := \{p \in I^* : Tu(p) \geq t\} \subset I^{*c}$ tienen interior vacío (relativo a I^*).

(3) $K(u, \|u\|) \neq \emptyset$ y $\|Tu\|_\infty = \|u\|$.

Demostración. Sea $f \in \ell_\varphi^+$ tal que $Qf = u$.

(1) Puesto que $0 \leq Tu \leq \|u\|$, bastará ver que, dado $0 < t \leq \|u\|$, $G_t := \{p \in I^* : Tu(p) < t\}$ es abierto en I^*. Sea $p \in G_t$. Esto quiere decir que existe $A \subset I$ tal que $p \in A^*$ y $\|Q(f_A)\| < t$. En consecuencia $A^* \subset G_t$, de donde sale que G_t es abierto. Si $a(\varphi) = 0$, todo elemento de $\ell_\varphi(I)$ tiene soporte contable y esto justifica que $sop(Tu) \subset I^{*c}$.

(2) Sea $f \in \ell_\varphi(I)^+$ tal que $Qf = u$ y $B := sop(f)$, que es contable pues $a(\varphi) = 0$. Es claro que $sop(Tu) \subset B^*$ y que $K(u,t) \subset B^*$ es un subconjunto compacto por (1). Veamos que $int(K(u,t)) = \emptyset$. Sea $A \subset B$ un subconjunto infinito, digamos, $A : \{i_n : n \geq 1\}$. Puesto que $|f(i_n)| \to 0$ (porque $a(\varphi) = 0$), dado $0 < \lambda < t$, existe un subconjunto infinito $A_0 \subset A$ tal que $I_\varphi(f_{A_0}/\lambda) < \infty$. De aquí que $\|Q(f_{A_0})\| \leq \lambda < t$ y, por tanto, $A_0^* \subset {}^cK(u,t))$. Luego $int(K(u,t)) = \emptyset$.

(3) Si $u = 0$, $K(u, 0) = I^*$. Sea $\|u\| > 0$ y $f \in \ell_\varphi(I)^+$ tal que $Qf = u$. Consideremos el compacto $K \subset I^*$ definido por

$$K := \cap\{B^* : \|Q(f_{^cB})\| < \|u\|\}.$$

Observemos que $K \neq \emptyset$ porque la familia de compactos $\{B^* : \|Q(f_{^cB})\| < \|u\|\}$ tiene la propiedad de la intersección finita por el Lema 15.5. Veamos que $K = \{p \in I^* : Tu(p) = \|u\|\} = K(u, \|u\|)$. Se tiene que:

(a) $K \subset \{p \in I^* : Tu(p) = \|u\|\}$. En efecto, sea $p \in K$ y supongamos que $Tu(p) < \|u\|$. Esto quiere decir que existe $A \in \mathcal{U}^p$ tal que $\|Q(f_A)\| < \|u\|$. En consecuencia $K \subset ({}^cA)^*$, por la definición de K, de donde $p \notin K$, una contradicción que prueba el contenido $K \subset \{p \in I^* : Tu(p) = \|u\|\}$.

(b) $\{p \in I^* : Tu(p) = \|u\|\} \subset K$. En efecto, sea $p \in I^*$ tal que $Tu(p) = \|u\|$. Sea $A \uplus B = I$ tal que $\|Q(f_A)\| < \|u\|$, es decir, $K \subset B^*$. Necesariamente $p \notin A^*$. Por tanto $p \in B^*$ y, en consecuencia, $p \in K$. ∎

Definición 15.7. *Sean I un conjunto infinito, φ función de Orlicz tal que $\varphi \notin \Delta_2^0$ y $X = \ell_\varphi(I)/h_\varphi(I)$. Para cada $u \in X$ definimos $Tu : I^* \to \mathbb{R}$ de modo que $Tu = Tu^+ - Tu^-$. Es claro que $Tu \in \ell_\infty(I)$, $\forall u \in X$.*

Proposición 15.8. *Sean I un conjunto infinito, φ función de Orlicz tal que $\varphi \notin \Delta_2^0$ y $X = \ell_\varphi(I)/h_\varphi(I)$. La aplicación $T : X \to (\ell_\infty(I^*), \|\cdot\|_\infty)$ es un orden isomorfismo isométrico entre X y su imagen $T(X)$. Además $T(X) \subset DBSC(I^*)$(= funciones $h : I^* \to \mathbb{R}$ diferencia de dos funciones semicontinuas acotadas).*

Demostración. (1) Comencemos probando que, si $u, v \in X^+$ y $\lambda, \mu \geq 0$, entonces $T(\lambda u + \mu v) = \lambda Tu + \mu Tv$. Es inmediato que $T(\lambda u) = \lambda Tu$ por la definición de Tu y $T(\lambda u)$ (ver (15.2)). Bastará probar que $T(u + v) = Tu + Tv$.

(1A) Si $u \wedge v = 0$, existen $f \in X^+$ y una descomposición $A \uplus B = I$ tales que $Q(f_A) = u$ y $Q(f_B) = v$. Por tanto:

(i) Si $p \in A^*$, se tiene que $Tv(p) = 0$ y $T(u+v)(p) = Tu(p)$.

(ii) Análogamente, si $p \in B^*$, $Tu(p) = 0$ y $T(u+v)(p) = Tv(p)$.

Así que $T(u+v) = Tu + Tv$ en el caso $u \wedge v = 0$.

(1B) Supongamos que $0 < v \leq u$. Sean $f, g \in \ell_\varphi(I)^+$, $0 \leq g \leq f$, tales que $Qf = u$ y $Qg = v$. Consideremos el cociente $g/f \in \mathbb{R}^I$ (convenimos que $0/0 = 0$), que verifica $0 \leq g/f \leq 1$. Dado $\epsilon > 0$, podemos hallar una partición disjunta $\{E_k : k = 1, \ldots, n\}$ de I y números $\alpha_k \in [0,1]$ tales que

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \mathbb{1}_{E_k} \leq \frac{g}{f} \leq \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \epsilon) \cdot \mathbb{1}_{E_k} \ \Rightarrow \ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot f_{E_k} \leq g \leq \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \epsilon) \cdot f_{E_k}. \tag{15.3}$$

Teniendo en cuenta que Q y T son crecientes, (1A) y (15.3) obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot Q(f_{E_k}) \leq Qg = v \leq \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \epsilon) \cdot Q(f_{E_k}) \tag{15.4}$$

y

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot T(Q(f_{E_k})) \leq Tv \leq \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \epsilon) \cdot T(Q(f_{E_k})). \tag{15.5}$$

Por tanto, como $u = \sum_{k=1}^{n} Q(f_{E_k})$ y los vectores $Q(f_{E_k})$ son disjuntos dos a dos, por (1A), (15.4) y (15.5) obtenemos

$$\begin{gathered} T(u+v) \leq T(u + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \epsilon) Q(f_{E_k})) = T(\sum_{k=1}^{n} Q(f_{E_k}) + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \epsilon) Q(f_{E_k})) = \\ = T(\sum_{k=1}^{n} (1 + \epsilon + \alpha_k) Q(f_{E_k})) \overset{(1A)}{=} (1+\epsilon) \sum_{k=1}^{n} T(Q(f_{E_k})) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T(Q(f_{E_k})) = \\ (1+\epsilon) Tu + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T(Q(f_{E_k})) \leq (1+\epsilon) Tu + (1+\epsilon) Tv = (1+\epsilon)(Tu + Tv). \end{gathered}$$

Puesto que $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $T(u+v) \leq Tu + Tv$. Veamos la otra desigualdad:

$$\begin{gathered} Tu + Tv = T(Q(f)) + T(Q(g)) \leq T(\sum_{k=1}^{n} Q(f_{E_k})) + T(\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \epsilon) Q(f_{E_k})) = \\ = \sum_{k=1}^{n} T(Q(f_{E_k})) + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \epsilon) T(Q(f_{E_k})) = \sum_{k=1}^{n} (1 + \epsilon + \alpha_k) T(Q(f_{E_k})) = \\ = T((1+\epsilon) \sum_{k=1}^{n} Q(f_{E_k}) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k Q(f_{E_k})) \leq T((1+\epsilon)u + v) \leq \\ \leq T((1+\epsilon)(u+v)) = (1+\epsilon) T(u+v). \end{gathered}$$

Puesto que $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $Tu + Tv \leq T(u+v)$. En consecuencia, $T(u+v) = Tu + Tv$ en este caso.

(1C) Sean $u, v \geq 0$ arbitrarios. Elegimos $f, g \in \ell_\varphi(I)^+$ tales que $Qf = u$ y $Qg = v$. Sean $E := \{i \in I : f(i) \leq g(i)\}$ y $F = I \setminus E$. Entonces

$$f + g = (f_E + g_E) + (f_F + g_F) \text{ siendo } (f_E + g_E) \wedge (f_F + g_F) = 0 \text{ y } f_E \leq g_E,\ g_F \leq f_F.$$

Así que:

$$T(u+v) = T(Qf + Qg) = T(Q(f_E + g_E) + Q(f_F + g_F)) \overset{(1A)}{=}$$
$$= T(Q(f_E + g_E)) + T(Q(f_F + g_F)) \overset{(1B)}{=} T(Q(f_E)) + T(Q(g_E)) + T(Q(f_F)) + T(Q(g_F)) =$$
$$\overset{(1A)}{=} T(Q(f_E + f_F)) + T(Q(g_E + g_F)) = T(Qf) + T(Qg) = Tu + Tv.$$

(2) Probemos que T es lineal.

(2A) En primer término $T(\lambda u) = \lambda Tu,\ \forall u \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Basta considerar los casos $\lambda \geq 0$ y $\lambda < 0$, junto con la definición Def. 15.7 de T.

(2B) Probemos que $T(u+v) = Tu + Tv,\ \forall u, v \in X$. Sea $z = u + v$. Se tiene que

$$z^+ - z^- = z = u + v = u^+ - u^- + v^+ - v^- \ \Rightarrow\ u^+ + v^+ + z^- = z^+ + u^- + v^-.$$

Por (1) obtenemos:

$$Tu^+ + Tv^+ + Tz^- = T(u^+ + v^+ + z^-) = T(z^+ + u^- + v^-) = Tz^+ + Tu^- + Tv^-.$$

En consecuencia, de lo anterior y la Def. 15.7 concluimos que:

$$T(u+v) = Tz = Tz^+ - Tz^- = Tu^+ - Tu^- + Tv^+ - Tv^- = Tu + Tv$$

(3) Veamos que T es un orden isomorfismo isométrico entre X y su imagen en $(\ell_\infty(I), \|\cdot\|_\infty)$. Se tiene que:

(i) Para todo $u \in X$, $(Tu)^+ = (Tu^+ - Tu^-)^+ = Tu^+$ y $(Tu)^- = Tu^-$. Es decir, T es un homomorfismo de retículos.

(ii) Veamos que T es una isometría. Aplicaremos que tanto X como $\ell_\infty(I)$ son M-espacios, el punto (i) anterior y el Lema 15.6. Para todo $u \in X$ se verifica:

$$\|u\| = \sup\{\|u^+\|, \|u^-\|\} = \sup\{\|Tu^+\|_\infty, \|Tu^-\|_\infty\} =$$
$$= \sup\{\|(Tu)^+\|_\infty, \|(Tu)^-\|_\infty\} = \|Tu\|_\infty.$$

En consecuencia T es un orden isomorfismo isométrico entre X y su imagen en $(\ell_\infty(I), \|\cdot\|_\infty)$.

(4) Finalmente, puesto que $Tu = Tu^+ - Tu^-,\ \forall u \in X$, y Tu^+, Tu^- son funciones acotada usc sobre I^* (ver el Lema 15.6), es claro que $T(X)$ es un subespacio de $DBSC(I^*)$.
■

Definición 15.9. *Sean I un conjunto infinito, φ función de Orlicz tal que $\varphi \notin \Delta_2^0$ y $X = \ell_\varphi(I)/h_\varphi(I)$.*

(1) Un subconjunto compacto $K \subset I^*$ es un **φ-compacto** *si $K = K(u,t) = \{p \in I^* : Tu(p) \geq t\}$ para cierto $u \in X^+$ y $t > 0$. Obviamente, si $a(\varphi) = 0$, todo φ-compacto K verifica $K \subset I^{*c}$. La colección de los subconjuntos φ-compactos de I^* se denota por $\mathcal{K}_\varphi(I)$.*

(2) Un subconjunto compacto $K \subset I^*$ es un **super-φ-compacto** *si existe $u \in S(X)^+$ tal que $K = K(u,1) = \{p \in I^* : Tu(p) = \|u\| = 1\}$. La colección de los subconjuntos super-φ-compactos se denota por $\mathcal{SK}_\varphi(I)$. Obviamente $\mathcal{SK}_\varphi(I) \subset \mathcal{K}_\varphi(I)$.*

(3) Si $u \in X^+$, el **φ-soporte** *$S_\varphi(I,u)$* **de** *u en I^* es $S_\varphi(I,u) = \{p \in I^* : Tu(p) > 0\}$. Es claro que $S_\varphi(I,u)$ es un $\mathcal{K}_\sigma$ tal que, si $a(\varphi) = 0$, $S_\varphi(I,u) \subset I^{*c}$.*

(4) El **φ-soporte** *$S_\varphi(I)$* **de** *X es $S_\varphi(I) = \bigcup_{u \in X^+} S_\varphi(I,u)$. Claramente $S_\varphi(I) \subset I^{*c}$ cuando $a(\varphi) = 0$.*

NOTA. Si $a(\varphi) > 0$, entonces $h_{\varphi^*}(I)$ y $\ell_\varphi(I)$ son isomorfos a $c_0(I)$ y $\ell_\infty(I)$, respectivamente, y $S_\varphi(I) = I^*$. Si $a(\varphi) = 0$, $S_\varphi(I) \subset I^{*c}$ y $S_\varphi(I)$ es denso en I^{*c}.

Proposición 15.10. *Sean I un conjunto infinito, φ función de Orlicz tal que $\varphi \notin \Delta_2^0$ y $X = \ell_\varphi(I)/h_\varphi(I)$. Sea $\{K_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{SK}_\varphi(I)$. Entonces existe $K_0 \in \mathcal{SK}(I)$ tal que $\bigcup_{n\geq 1} K_n \subset K_0$.*

Demostración. Sea $f_n \in S(\ell_\varphi(I))^+$ tal que $K_n = \{p \in I^* : T(Qf_n)(p) = 1\}$, $n \geq 1$. De entrada $I_\varphi(f_n) \leq 1$ porque $f_n \in B(\ell_\varphi(I))$. Anulando en f_n un número finito y suficiente de coordenadas (lo que no afecta a Qf_n), podemos suponer sin pérdida de generalidad que $I_\varphi(f_n) \leq 2^{-n}$. Sea $f := \vee_{n\geq 1} f_n$. Entonces $f(i) = \vee_{n\geq 1} f_n(i)$, $\forall i \in I$, y se tiene:

$$I_\varphi(f) = \sum_{i\in I} \varphi(f(i)) \leq \sum_{i\in I}\sum_{n\geq 1} \varphi(f_n(i)) = \sum_{n\geq 1}\sum_{i\in I} \varphi(f_n(i)) = \sum_{n\geq 1} I_\varphi(f_n) \leq 1.$$

En consecuencia $f \in B(\ell_\varphi(I))^+$ y, de hecho, $f \in S(\ell_\varphi(I))$ pues $0 \leq f_n \leq f$. En consecuencia, si $p \in K_n$, es claro que $T(Qf)(p) = 1$. Por lo tanto

$$\bigcup_{n\geq 1} K_n \subset K_0 := \{p \in I^* : T(Qf)(p) = 1\}.$$

■

Proposición 15.11. *Sean I un conjunto infinito, φ función de Orlicz tal que $\varphi \notin \Delta_2^0$, $X = \ell_\varphi(I)/h_\varphi(I)$ y $Q : \ell_\varphi(I) \to X$ el operador cociente canónico. Sean $\mu \in M_R(I^*)$, $x_\mu^* \in X^*$ el funcional que μ induce sobre X, es decir, $x_\mu^* = L \circ P(\mu)$ según (15.1), y $z_\mu^* := x_\mu^* \circ Q$ el funcional que μ induce sobre $\ell_\varphi(I)$. Entonces para todo $u \in X$ se verifica*

$$\langle x_\mu^*, u\rangle = \int_{I^*} Tu \cdot d\mu.$$

Por tanto, $x_\mu^* = \mu \circ T$ y $z_\mu^* = \mu \circ T \circ Q$.

Demostración. Procedemos por etapas.

Etapa 1. Suponemos $\mu \geq 0$ y $u \in X^+$. Sea $f \in \ell_\varphi(I)^+$ tal que $Qf = u$. Entonces (ver [58, Proposition 7.1]) se verifica:

$$\langle x_\mu^*, u \rangle = \text{ínf} \sum_{k=1}^{n} \|Qf_{E_k}\| \cdot \mu(E_k^*),$$

en donde el ínfimo se toma sobre el conjunto de las particiones finitas $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ de I. Teniendo en cuenta la definición de Tu, que $\|Qf_{E_k}\| = \sup\{Tu(p) : p \in E_k^*\}$ y que Tu es μ-integrable (es boreliana), es claro que

$$\langle x_\mu^*, u \rangle = \int_{I^*} Tu \cdot d\mu.$$

Etapa 2. Sean $\mu \in M_R(I^*)^+$ y $u \in X$ arbitrario. Entonces teniendo en cuenta la Etapa 1 y que $Tu^+ = T(u^+)$, $Tu^- = T(u^-)$ obtenemos:

$$\langle x_\mu^*, u \rangle = \langle x_\mu^*, u^+ \rangle - \langle x_\mu^*, u^- \rangle = \int_{I^*} T(u^+) \cdot d\mu - \int_{I^*} T(u^-) \cdot d\mu =$$
$$= \int_{I^*} Tu^+ \cdot d\mu - \int_{I^*} Tu^- \cdot d\mu = \int_{I^*} Tu \cdot d\mu.$$

Etapa 3. Sean $\mu \in M_R(I^*)$ y $u \in X$ arbitrarios. Entonces teniendo en cuenta que $x^*\mu = x_{\mu^+}^* - x_{\mu^-}^*$ obtenemos:

$$\langle x_\mu^*, u \rangle = \langle x_{\mu^+}^* - x_{\mu^-}^*, u \rangle = \int_{I^*} Tu \cdot d\mu^+ - \int_{I^*} Tu \cdot d\mu^- = \int_{I^*} Tu \cdot d\mu.$$

■

Corolario 15.12. *Sean I un conjunto infinito, φ función de Orlicz tal que $\varphi \notin \Delta_2^0$ y $\mu \in M_R(I^*)$.*

(1) $P\mu$ es la única medida $\nu \in M_\varphi(I)$ tal que $x_\nu^* = x_\mu^*$, es decir, tal que

$$\forall u \in X, \int_{I^*} Tu \cdot d\nu = \int_{I^*} Tu \cdot d\mu.$$

(2) Si $\mu \geq 0$, entonces $0 \leq P\mu \leq \mu$.

Demostración. (1) Los funcionales x_μ^* y $x_{P\mu}^*$ determinados por μ y $P\mu$, resp., sobre X coinciden. En consecuencia por la Prop. 15.11 se verifica

$$\int_{I^*} Tu \cdot d\mu = \langle x_\mu^*, u \rangle = \langle x_{P\mu}^*, u \rangle = \int_{I^*} Tu \cdot dP\mu.$$

Sea $\nu \in M_\varphi(I)$ tal que

$$\forall u \in X, \quad \int_{I^*} Tu \cdot d\mu = \int_{I^*} Tu \cdot d\nu.$$

Entonces, si x_μ^* y x_ν^* son los funcionales determinados por μ y ν, resp., sobre X, por la Prop. 15.11 se verifica

$$\forall u \in X, \quad \langle x_\mu^*, u\rangle = \int_{I^*} Tu \cdot d\mu = \int_{I^*} Tu \cdot d\nu = \langle x_\nu^*, u\rangle.$$

Es decir, $x_\mu^* = x_\nu^*$, de donde $P\mu = P\nu = \nu$.

(2) Sean x_μ^* y $x_{P\mu}^*$ los funcionales determinados por μ y $P\mu$, resp., sobre X (son iguales). Sabemos (ver [58, Prop. 7.1]) que existe $f \in \ell_\varphi(I)^+$ tal que $I_\varphi(f) \leq 1$ y para todo subconjunto infinito $E \subset I$:

$$P\mu(E^*) = \langle x_{P\mu}^*, Qf_E\rangle = \langle x_\mu^*, Qf_E\rangle.$$

Por la Prop. 15.11 se verifica

$$\langle x_\mu^*, Qf_E\rangle = \int_{I^*} T(Qf_E) \cdot d\mu.$$

Por otra parte $0 \leq T(Qf_E) \leq \mathbb{1}_{E^*}$. Así que

$$\int_{I^*} T(Qf_E) \cdot d\mu \leq \int_{I^*} \mathbb{1}_{E^*} \cdot d\mu = \mu(E^*).$$

En definitiva, $P\mu(E^*) \leq \mu(E^*)$, lo que implica que $0 \leq P\mu \leq \mu$. ■

Proposición 15.13. *Sean I un conjunto infinito, φ función de Orlicz tal que $\varphi \notin \Delta_2^0$ y $\mu \in M_R(I^*)$. Son equivalentes:*

(a) $\mu \in M_\varphi(I)$; (b) existe $K \in \mathcal{SK}_\varphi(I)$ tal que sop$(\mu) \subset K$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. Bastará considerar el caso $\mu \geq 0$ pues $M_\varphi(I)$ es una banda de $M_R(I^*)$. Sea $x_\mu^* \in X^*$ el funcional que μ induce sobre X. Sabemos que existe $f \in \ell_\varphi(I)^+$ con $I_\varphi(f) \leq 1$ de modo que para todo subconjunto $E \subset I$ se verifica

$$\mu(E) = \langle x_\mu^*, Q(f_E)\rangle.$$

Así que por la Prop. 15.11 se tiene

$$\|\mu\| = \mu(I^*) = \langle x_\mu^*, Qf\rangle = \int_{I^*} T(Qf) \cdot d\mu. \tag{15.6}$$

Sea $K := \{p \in I^* : T(Qf)(p) = 1\}$ que verifica $K \in \mathcal{SK}_\varphi(I)$. Puesto que $0 \leq T(Qf) \leq 1$, por (15.6) se tiene que $\mu(K) = \|\mu\|$ y *sop*$(\mu) \subset K$.

$(b) \Rightarrow (a)$. Basta probar la implicación para $\mu \geq 0$. Sea $f \in S(\ell_\varphi(I))^+$ tal que $sop(\mu) \subset K := \{p \in I^* : T(Qf)(p) = 1\} \in \mathcal{SK}(I)$. Se tiene:

(i) Claramente $\|\mu\| = \int_{I^*} T(Qf) \cdot d\mu$. También $\|P\mu\| = \int_{I^*} T(Qf) \cdot dP\mu$ porque $sop(P\mu) \subset K$ ya que $0 \leq P\mu \leq \mu$.

(ii) Los funcionales x_μ^* y $x_{P\mu}^*$ determinados por μ y $P\mu$, respect., sobre X coinciden. En consecuencia por la Prop. 15.11 se verifica

$$\int_{I^*} T(Qf) \cdot d\mu = \langle x_\mu^*, Qf \rangle = \langle x_{P\mu}^*, Qf \rangle = \int_{I^*} T(Qf) \cdot dP\mu.$$

De todo lo anterior sale que $\|\mu\| = \|P\mu\|$, lo que implica que $\mu = P\mu$ ya que $0 \leq P\mu \leq \mu$. Por tanto $\mu \in M_\varphi(I)$. ■

Corolario 15.14. *Sean I un conjunto infinito, φ función de Orlicz tal que $\varphi \notin \Delta_2^0$, $\mu \in M_R(I^*)$ y $\ell := \sup\{|\mu|(K) : K \in \mathcal{SK}_\varphi(I)\}$. Entonces existe un compacto $K_0 \in \mathcal{SK}_\varphi(I)$ tal que $|\mu|(K_0) = \ell$ y $P\mu = \mu \restriction K_0$.*

Demostración. Bastará considerar el caso $\mu \geq 0$. Sean $K_n \in \mathcal{SK}_\varphi(I)$ tales que $\mu(K_n) \to \ell$. Por la Prop. 15.10 existe $K_0 \in \mathcal{SK}_\varphi(I)$ tal que $\bigcup_{n\geq 1} K_n \subset K_0$. Observemos que $\mu(K_0) = \ell$ y que $\mu(K \setminus K_0) = 0$ para todo $K \in \mathcal{SK}_\varphi(I)$. Sea $\nu := \mu \restriction K_0$. Es claro que $\nu \in M_\varphi(I)$ (por la Prop. 15.13), que $0 \leq \nu \leq \mu$ y que $\mu(K) = \nu(K)$ para todo $K \in \mathcal{SK}_\varphi(I)$.

Aserto. $P\mu = \nu$.

En efecto, sea $\rho := \mu - \nu$ que verifica $\rho \geq 0$. Sabemos que existe (ver [58, Prop. 7.1]) $g \in \ell_\varphi(I)^+$ tal que $I_\varphi(g) \leq 1$ y que $sop(P\rho) \subset K_1 := \{p \in I^* : T(Qg)(p) = 1\} \in \mathcal{SK}_\varphi(I)$. Por otra parte

$$0 \leq P\rho(K_1) \leq \rho(K_1) = \mu(K_1) - \nu(K_1) = 0.$$

En consecuencia $P\rho = 0$. Puesto que $P\nu = \nu$, obtenemos

$$0 = P\rho = P\mu - P\nu = P\mu - \nu.$$

Por tanto $P\mu = \nu$. ■

Proposición 15.15. *Sean I un conjunto infinito y φ función de Orlicz tal que $\varphi \notin \Delta_2^0$.*

(1) Sea $p \in I^*$. Se tiene que $P(\delta_p) = \delta_p$, si $p \in S_\varphi(I)$, y $P(\delta_p) = 0$, si $p \notin S_\varphi(I)$.

(2) $S_\varphi(I) = \cup\{K : K \in \mathcal{SK}_\varphi(I)\}$.

Demostración. (1) Por el Cor. 15.14, $P(\delta_p) = \delta_p \restriction K_0$ para un cierto $K_0 \in \mathcal{SK}_\varphi(I)$. Así que $P(\delta_p) = \delta_p$ ó $P(\delta_p) = 0$.

Sea $p \in S_\varphi(I)$. Entonces existe $f \in B(\ell_\varphi(I))^+$ tal que $T(Qf)(p) > 0$. Por tanto

$$\int_{I^*} T(Qf) \cdot dP(\delta_p) = \langle x_{P(\delta_p)}^*, Qf \rangle = \langle x_{\delta_p}^*, Qf \rangle = \int_{I^*} T(Qf) \cdot d(\delta_p) = T(Qf)(p) > 0.$$

Esto quiere decir que $P(\delta_p) \neq 0$, es decir, $P(\delta_p) = \delta_p$.

Si $p \notin S_\varphi(I)$, $P(\delta_p) = 0$ porque $\delta_p \restriction K = 0$ para todo $K \in \mathcal{SK}_\varphi(I)$.

(2) Sale de (1) y del Cor. 15.14. ■

Lema 15.16. *Sean I un conjunto infinito y φ una función de Orlicz tal que $\varphi \notin \Delta_2^0$. Entonces todo compacto $K \in \mathcal{SK}_\varphi(I)$ contiene un subconjunto homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$.*

Demostración. (A) Supongamos que $a(\varphi) > 0$. Ahora $\ell_\varphi(I) = \ell_\infty(I)$, $h_\varphi(I) = c_0(I)$ y el isomorfismo $T : \ell_\varphi(I)/h_\varphi(I) \to DBSC(I^*)$ descrito en la Prop. 15.8 es un orden isomorfismo isométrico entre $\ell_\varphi(I)/h_\varphi(I)$ y $C(I^*)$ (ver [58, Prop. 1.2]). Aún más, si $g \in \ell_\varphi(I)$, $T \circ Q(g) = \breve{g} \restriction I^*$, siendo $\breve{g}$ la extensión de Stone-Čech de g a todo βI. Sea $f \in S(\ell_\varphi(I))^+$ tal que $K := \{p \in I^* : T(Qf)(p) = 1\}$. Entonces $v := T(Qf) = \breve{f} \restriction I^* \in C(I^*)$ es una función verificando $v \in S(C(I^*))^+$ y $K = \{p \in I^* : v(p) = 1\}$. Sean $i_n \in I, n \geq 1$, tales que $f(i_n) \geq 1 - 1/n$ y $A = \{i_n : n \geq 1\}$. Entonces $A^* \subset K$ y A^* es homeomorfo a $\mathbb{N}^*$. Como $\mathbb{N}^*$ contiene una copia de $\beta\mathbb{N}$ (ver [113, pg. 77, Cor. 3.23]), concluimos que K también la contiene.

(B) Sea $a(\varphi) = 0$. Entonces $K \subset I^{*c}$ y podemos suponer que $I = \mathbb{N}$. Sea $f \in S(\ell_\varphi)^+$ tal que $K := \{p \in I^* : T(Qf)(p) = 1\}$.

Aserto 1. Si $W \in \mathcal{SK}_\varphi(\mathbb{N})$, existe una descomposición $\mathbb{N} = A_0 \uplus A_1$ con A_0 y A_1 infinitos tales que $W \cap A_0^*, W \cap A_1^* \in \mathcal{SK}_\varphi(\mathbb{N}^*) \setminus \{\emptyset\}$.

En efecto, sea $g \in S(\ell_\varphi)^+$ tal que $W = \{p \in \mathbb{N}^* : T(Qg)(p) = 1\}$. Observemos que g verifica $I_\varphi(g) \leq 1$ pero $I_\varphi(\lambda g) = \infty$ para todo $\lambda > 1$. Podemos escoger dos sucesiones crecientes disjuntas $(n_k)_k$ y $(m_k)_k$ en $\mathbb{N}$ tales que

$$\forall \lambda > 1, \quad \sum_{k \geq 1} \varphi(\lambda \cdot g(n_k)) = \infty = \sum_{k \geq 1} \varphi(\lambda \cdot g(m_k)).$$

Ahora basta coger dos subconjuntos disjuntos $A_0 \uplus A_1 = \mathbb{N}$ de modo que $(n_k)_k \subset A_0$ y $(m_k)_k \subset A_1$. Observemos que $W = (W \cap A_0^*) \uplus (W \cap A_1^*)$ y que

$$W \cap A_0^* = \{p \in \mathbb{N}^* : T(g_{A_0})(p) = 1\} \neq \emptyset \neq \{p \in \mathbb{N}^* : T(g_{A_1})(p) = 1\} = W \cap A_1^*.$$

Aserto 2. $|K| = 2^{\mathfrak{c}}$ y K contiene una copia de $\beta\mathbb{N}$.

En efecto, sean $S := \bigcup_{n \geq 1} \{0,1\}^n$ y $s \in S$.

(i) Si $s \in \{0,1\}^n$ decimos que la longitud de s es n, abrev., $|s| = n$.

(ii) Si $|s| \geq m$, entonces la restricción $s \restriction m$ de s a m es $s \restriction m := (s(1), \ldots, s(m)) \in \{0,1\}^m$.

(iii) Si $s, t \in S$, ponemos $s \prec t$ sii $|s| = m \leq |t|$ y $s = t \restriction m$.

Es claro que $(S, \prec)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Por cada $s \in S$ elegimos, mediante un proceso inductivo y apoyándonos en el Aserto 1, un subconjunto infinito $A_s \subset \mathbb{N}$ de modo que:

(a) $A_0 \uplus A_1 = \mathbb{N}$ y $A_s = A_{s0} \uplus A_{s1},\ \forall s \in S$.

(b) $A_s^* \cap K \neq \emptyset$.

Sea $\{s^n : n \geq 1\} \subset S$ una sucesión de elementos de S incomparables dos a dos y elijamos $d_n \in A_{s_n}^* \cap K$. Entonces $D := \{d_n : n \geq 1\}$ es un subconjunto infinito contable discreto de K. Por [113, Th. 3.3, pg. 71] se tiene que $|K| = 2^{\mathfrak{c}}$ y por [113, 3.5 Prop., pg. 72] que $\overline{D} \subset K$ es homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$. ■

15.5. Extensión del Teorema de Sierpinski

Lema 15.17. *Sean I un conjunto infinito y φ una función de Orlicz tal que $\varphi \notin \Delta_2^0$. Sea $\rho \in M_R(I^*)$ tal que $\mathrm{sop}(\rho) \subset K \in \mathcal{SK}_\varphi(I)$. Sea $z_\rho^* \in \ell_\varphi(I)$ el funcional que ρ induce sobre $\ell_\varphi(I)$, es decir, $z_\rho^* = \rho \circ T \circ Q \in \ell_\varphi(I)^*$. Si $z_\rho^* \in \mathcal{U}(B(\ell_\varphi(I))$, se tiene que $\rho \in \mathcal{U}(B(\ell_\infty(I))$.*

Demostración. Sea $f \in S(\ell_\varphi(I))^+$ tal que $K = \{p \in I^* : T(Qf)(p) = 1\}$. Sea $\Phi : \ell_\infty(I) \to \ell_\varphi(I)$ tal que $\Phi(x) = (x(i)f(i))_{i \in I},\ \forall x \in \ell_\infty(I)$. Se tiene que:

(i) Φ es una aplicación lineal y $\|\cdot\|$-continua de norma $\|\Phi\| \leq 1$.

(ii) La aplicación $\Phi : B(\ell_\infty(I)) \to B(\ell_\varphi(I))$ es w^*-w^*-continua.

Observemos que, si $x \in \ell_\infty(I)$ y $\check{x}$ es la extensión de Stone-Čech de x a todo βI, se verifica:

(1) $\forall p \in K,\ \check{x}(p) = T(Q \circ \Phi(x))(p)$, de donde sale que $\check{x} = T(Q \circ \Phi(x))$ ρ-ctp. Esto se prueba fácilmente comenzando por $x = \mathbb{1}_E,\ E \subset I$, y observando que si $p \in K$ se verifica:

$$\check{x}(p) = (\mathbb{1}_{E^*})(p) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } p \in E^* \\ 0 & \text{si } p \notin E^* \end{array} \right\} = T(Qf_E)(p) = T(Q(\Phi(\mathbb{1}_E)))(p).$$

(2) En consecuencia, para todo $x \in \ell_\infty(I)$ se tiene:

$$\langle \rho, x \rangle := \int_K \check{x} \cdot d\rho = \int_K T(Q \circ \Phi(x)) \cdot d\rho = \langle z_\rho^*, \Phi(x) \rangle,$$

es decir, $\rho = z_\rho^* \circ \Phi$.

De aquí sale inmediatamente que, si z_ρ^* es universalmente medible sobre $B(\ell_\varphi(I))$, ρ lo es sobre $B(\ell_\infty(I))$. ■

Sean I un conjunto infinito, φ una función de Orlicz tal que $\varphi \notin \Delta_2^0$ y $p \in I^*$. La delta de Dirac δ_p la veremos como un elemento del dual $\ell_\infty(I)^*$. Además δ_p determina un funcional sobre $\ell_\varphi(I)$, que la hemos denotado por $z_{\delta_p}^*$, tal que $\langle z_{\delta_p}^*, g \rangle = T(Qg)(p),\ \forall g \in \ell_\varphi(I)$, es decir, $z_{\delta_p}^* = \delta_p \circ T \circ Q$.

Proposición 15.18. *[Extensión del T. de Sierpinski] Sean I un conjunto infinito y φ una función de Orlicz tal que $\varphi \notin \Delta_2^0$. Entonces:*

(A) Si $p \in I^*$, se verifica que: (i) si $p \in S_\varphi(I)$, $z^*_{\delta_p}$ no es universalmente medible sobre $B(\ell_\varphi(I))$; (ii) si $p \notin S_\varphi(I)$, $z^*_{\delta_p} = 0$.

(B) Supongamos que $\rho \in M_R(I^*)$ es tal que tiene parte atómica soportada sobre algún punto de $S_\varphi(I)$. Entonces el funcional $z^*_\rho := \rho \circ T \circ Q$ (inducido por ρ sobre $\ell_\varphi(I)$) no es universalmente medible sobre $B(\ell_\varphi(I))$.

Demostración. (A) Basta aplicar el Lema 15.17, que $p \in K$ para cierto $K \in \mathcal{SK}_\varphi(I)$ (por la Prop. 15.15), si $p \in S_\varphi(I)$, y que δ_p no es universalmente medible sobre $B(\ell_\infty(I))$ (T. de Sierpinski, ver la Prop. 14.2).

(B) Sea $\nu = P\rho$ y observemos que: (i) $z^*_\nu = z^*_\rho$; (ii) *sop*$(\nu) \subset K$ para cierto $K \in \mathcal{SK}_\varphi(I)$ y $\nu = z^*_\nu \circ \Phi$ para cierto funcional $\Phi : \ell_\infty(I) \to \ell_\varphi(I)$ (ver Lema 15.17); (iii) ν tiene parte atómica soportada sobre algún punto de K por lo que ν no es universalmente medible sobre $B(\ell_\infty(I))$ (ver [46, 464M]). Por el Lema 15.17 $z^*_\nu = z^*_\rho$ no es universalmente medible sobre $B(\ell_\varphi(I))$. ■

Corolario 15.19. *Sean I un conjunto infinito y φ una función de Orlicz tal que $\varphi \notin \Delta_2^0$.*

(1) Sea $C \subset \mathcal{S}_\varphi(I)$ un subconjunto contable y $W := \overline{C}$. Se tiene que:

(11) Existe $K \in \mathcal{SK}_\varphi(I)$ tal que $W \subset K$.

(12) Si $\rho \in M_R(W) \setminus \{0\}$, el funcional $z^*_\rho \in \ell_\varphi(I)^*$ asociado a ρ no es universalmente medible sobre $B(\ell_\varphi(I))$.

(2) Si $K \in \mathcal{SK}_\varphi(I)$, existe un subconjunto $W \subset K$ homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$ tal que todas las medidas $\rho \in M_R(W) \setminus \{0\}$ (entre ellas las hay difusas) verifican que el funcional $z^*_\rho \in \ell_\varphi(I)^*$ inducido por ρ no es universalmente medible sobre $B(\ell_\varphi(I))$.

Demostración. (11) sale de la Prop. 15.10 y la Prop. 15.15. (12) sale del Lema 15.17 y de que $\rho \notin \mathcal{U}(B(\ell_\infty(I)))$ cuando $\rho \in M_R(W) \setminus \{0\}$ (ver [46, 464P(b)]).

(2) Por el Lema 15.16 existe en un subconjunto $W \subset K$ homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$. Por tanto si $C := \{w_n : n \geq 1\} \subset W$ son los puntos correspondientes a $\mathbb{N}$, se tiene que $W = \overline{C}$. Por (12) toda medida $\rho \in M_R(W) \setminus \{0\}$ verifica que z^*_ρ no es universalmente medible sobre $B(\ell_\varphi(I))$. Finalmente observemos que $M_R(W) = M_R(\beta\mathbb{N})$ y que en $M_R(\beta\mathbb{N})$ hay medidas difusas. ■

15.6. Extensión del Teorema de Mokobodzki-Norman

Por la Sección anterior sabemos que hay muchas medidas $\rho \in M_R(I^*)$ tales que z^*_ρ no es universalmente medible sobre $\ell_\varphi(I)$. ¿Hay alguna medida $\rho \in M_\varphi(I)$ no nula (necesariamente difusa) tal que z^*_ρ sea universalmente medible sobre $\ell_\varphi(I)$? La respuesta es afirmativa, bajo (MA), y se ve en el la siguiente proposición.

Proposición 15.20. *[Extensión del T. de Mokobozdki-Norman] (MA) Sean I un conjunto infinito y φ una función de Orlicz tal que $\varphi \notin \Delta_2^0$ (es decir, $F(\varphi, I)_s \neq \{0\}$). Entonces existe una probabilidad difusa $\mu \in M_\varphi(I) = F(\varphi, I)_s$ que es universalmente medible sobre $(B(\ell_\varphi(I)), w^*)$. Además μ verifica el cálculo baricéntrico.*

Demostración. Si $a(\varphi) > 0$, entonces $\ell_\varphi(I)$ es $\ell_\infty(I)$ y el Teorema de Mokobodzki-Norman (ver [86, Th. 7]) asegura, bajo (MA), que existe una probabilidad difusa $\nu \in \mathcal{P}_R(I^*)$ tal que $\nu \in \mathcal{U}(\ell_\infty(I))$. Además ν verifica el cálculo baricéntrico por la Prop. 14.8.

Sea $a(\varphi) = 0$. En este caso los funcionales singulares, es decir, los elementos de $(\ell_\varphi(I)/h_\varphi(I))^*$, son medidas de Radon sobre I^* que "viven" dentro de I^{*c}. Así que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $I = \mathbb{N}$. Como $\varphi \notin \Delta_2^0$, se tiene que $\ell_1 \subset h_{\varphi^*}$. Sea $F : \ell_1 \to h_{\varphi^*}$ el correspondiente isomorfismo entre ℓ_1 y su imagen. Se puede suponer sin dificultad que F es un operador positivo, es decir, $Fx \geq 0$ si $x \in \ell_1^+$. Sea $\nu \in \mathcal{P}_R(I^*)$ la probabilidad difusa citada en el párrafo anterior y $z_0 := F^{**}(\nu) \in (\ell_\varphi^*)^+$. Se verifica que $z_0 \in \mathcal{U}(\ell_\varphi)$ porque $z_0 = \nu \circ F^*$, siendo F^* un operador w^*-w^*-continuo.

Por otra parte, como $\ell_\varphi^* = F(\varphi, \mathbb{N})_i \oplus F(\varphi, \mathbb{N})_s$, se tiene $z_0 = z_i + z_s$ con $z_i \in F(\varphi, \mathbb{N})_i^+ = \ell_{\varphi^*}^+$ y $z_s \in F(\varphi, \mathbb{N})_s^+$. Por tanto, puesto que $z_i \in \mathcal{U}(\ell_\varphi)$ (recordemos que $F(\varphi, \mathbb{N})_i = \mathcal{B}_1(B(\ell_\varphi)) \cap \ell_\varphi^*$), concluimos que $z_s = z_0 - z_i \in \mathcal{U}(B(\ell_\varphi))$.

Aserto 1. $z_s \neq 0$.

En efecto, supongamos que $z_s = 0$. Entonces $z_0 = z_i \in \ell_{\varphi^*} = \mathcal{B}_1(B(\ell_\varphi)) \cap \ell_\varphi^* = \mathcal{S}eq(\ell_\varphi^*)$. Por otra parte, $\nu \in \ell_\infty^* = \overline{\ell_1}^{w^*}$, de donde $F^{**}(\nu) = z_0 \in \overline{F(\ell_1)}^{w^*}$. Por el Lema 1.19 existe una secuencia $(u_n)_n \subset \ell_1$ tal que $F(u_n) = F^{**}(u_n) \overset{w^*}{\to} z_0$ en (ℓ_φ^*, w^*). De aquí que $u_n \overset{w^*}{\to} \nu$ en ℓ_∞^*, es decir, $\nu \in \mathcal{S}eq(\ell_\infty^*)$, lo que es imposible pues, en la descomposición $\ell_\infty^* = \ell_1 \oplus M_R(\mathbb{N}^*)$, se tiene que $\mathcal{S}eq(\ell_\infty^*) = \ell_1$ y $\nu \in M_R(\mathbb{N}^*)$.

Aserto 2. z_s es, como elemento de $F(\varphi, \mathbb{N})_s = M_\varphi(\mathbb{N}) \subset M_R(\mathbb{N}^*)$, una medida positiva difusa sobre $\mathbb{N}^*$, que verifica (ó mejor, su funcional asociado $z_{z_s}^* \in \ell_\varphi^*$ verifica) el cálculo baricéntrico.

En efecto, ya sabemos que $z_s \geq 0$. Veamos que z_s carece de parte atómica. De poseerla, por la Prop. 15.18, no sería z_s (es decir, $z_{z_s}^* = z_s \circ T \circ Q$) universalmente medible sobre $B(\ell_\varphi)$, lo que contradice el hecho $z_s \in \mathcal{U}(B(\ell_\varphi))$ probado anteriormente.

Además, z_s verifica el cálculo baricéntrico sobre $B(\ell_\varphi)$ porque $z_s = z_0 - z_i$ y porque:

(i) z_0 lo verifica ya que $z_0 = F^{**}\nu$ y ν lo verifica sobre $B(\ell_\infty)$.

(ii) z_i verifica el cálculo baricéntrico, pues todo elemento de $\mathcal{B}_1(B(X^*)) \cap X^{**}$ lo verifica para todo espacio de Banach X.

Sea $\mu := z_s/\|z_s\|$. Entonces μ es una probabilidad difusa sobre $\mathbb{N}^*$ tal que $\mu \circ T \circ Q$ es universalmente medible sobre $B(\ell_\varphi)$ y verifica el cálculo baricéntrico. ■

Bibliografía

[1] E. M. Alfsen, *Compact Convex Sets and Boundary Integrals*, Springer-Verlag, 1971.

[2] S. Argyros, *On nonseparable Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 270 (1982), 193-216.

[3] S. Argyros, G. Godefroy and H.P. Rosenthal, *Descriptive Set Theory and Banach Spaces*, in Handbook of the Geom. of Banach Spaces Vol. 2, W.B. Johnson and J. Lindenstrauss, Ed., North-Holland, Amsterdam, (2003),1007-1069.

[4] S. Argyros and S. Mercourakis, *On weakly Lindelöf Banach spaces*, Rocky Mountain J. Math., 23(1993), 395-446.

[5] S. Argyros, S. Mercourakis and S. Negrepontis, *Functional-analytic properties of Corson-compact spaces*, Studia Math., 89 (1988), 197-229.

[6] A. V. Arkhangel'skii, *Topological Function Spaces*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1992.

[7] B. Balcar and F. Franěk, *Independent families in complete Boolean algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., 274 (2) (1982), 607-618.

[8] P. Bandyopadhyay and G. Godefroy, *Linear Structures in the Set of Norm-Attaining Functionals on a Banach Space*, Jour. Convex Anal., 13 (2006), 489-497.

[9] Benyamini and Lindenstrauss, *Geometric Nonlinear Functional Analysis, Vol.1*, AMS, Colloq. Publ., N^o. 48, 2000.

[10] J. Bourgain, *New Classes of $\mathcal{L}^p$-spaces*, Lect. Notes in Math., N^o 889, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[11] J. Bourgain, D. H. Fremlin and M. Talagrand, *Pointwise compact sets of Baire-measurable functions*, Amer. J. of Math., 100 (1978), 845-886.

[12] R. D. Bourgin, *Geometric Aspects of Convex Sets with the Radon-Nikodým Property*, Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, Vol. 993 (1983).

[13] C. Brech,*On the density of Banach spaces $C(K)$ with the Grothendieck property*, Proc. Amer. Math. Soc., 134 (2006), 3653-3663.

[14] B. Cascales, V.P. Fonf, J. Orihuela and S. Troyanski, *Boundaries of Asplund spaces*, preprint, 2009.

[15] B. Cascales, O.F.K.Kalenda and J. Spurný, *A quantitative version of James' compactness theorem*, Proc. Edinb. Math. Soc., Published online: 23 febrero 2012, DOI:10.1017/S0013091510000842.

[16] B. Cascales, G. Manjabacas and G. Vera, *A Krein-Šmulian type result in Banach spaces*, Quart.J. Math. Oxford Ser.(2), 48 (1997), 161-167.

[17] B. Cascales, W. Marciszewski and M. Raja, *Distance to spaces of continuous functions*, Topology Appl., 153 (2006), 2303-1319.

[18] B. Cascales, M. Muñoz and J. Orihuela, *James boundaries and σ-fragmented selectors*, Studia Math., 188 (2008), 97-122.

[19] B. Cascales and I. Namioka, *The Lindelöf property and σ-fragmentability*, Fund. Math., 180 (2003), 161-183.

[20] B. Cascales, I. Namioka and J. Orihuela,*The Lindelöf property in Banach spaces*, Studia Math., 154 (2003), 165-192.

[21] B. Cascales, I. Namioka and G. Vera, *The Lindelöf property and fragmentability*, Proc. Amer. Math. Soc., 128 (2000), 3301-3309.

[22] B. Cascales and R. Shvydkoy, *On the Krein-Šmulian Theorem for weaker topologies*, Illinois J. Math., 47 (2003), 957-976.

[23] S. Chen, *Geometry of Orlicz spaces*, Dissert. Math., Vol. 356, Warszawa, 1996.

[24] G.Choquet,*Lectures on Analysis, Vol. II*, W.A. Benjamin, Inc., New York, 1969.

[25] W. W. Comfort and S. Negrepontis, *Chain Conditions in Topology*, Cambridge Tracts in Math. 79, Cambridge Univ. Press, 1982.

[26] W. W. Comfort and S. Negrepontis, *The theory of ultrafilters*, Springer-Verlag, 1974.

[27] M. M. Day,*Normed linear spaces*, Springer-Verlag, 1973.

[28] R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Longman Scientific and Technical, 1993.

[29] J. Diestel, *Sequences and series in Banach Spaces*, GTM 92, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[30] J. DIESTEL, *Geometry of Banach Spaces-Selected Topics*, Lect. Notes in Math., Vol. 485, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[31] J. DIESTEL AND J. J. UHL, *Vector measures*, Am. Math. Soc., 1977.

[32] P.N. DOWLING, W.B. JOHNSON, C.J. LENNARD, AND B.TURETT, *The optimality of James's distortion theorems*, Proc. Amer. Math. Soc., 125(1967), 167-174.

[33] G.A. Edgar, *A long James space*, in Measure Theory, Oberwolfach 1979, Ed. D. Kölzow, Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, Vol. 794(1980), 31-37.

[34] G.A. Edgar, *Measurablity in a Banach Space*, Indiana Univ. Math. J., 26 (1977), 663-677.

[35] G.A. Edgar, *Measurablity in a Banach Space II*, Indiana Univ. Math. J., 28 (1979), 559-579.

[36] R. ENGELKING, *General Topology*, 1972.

[37] M. FABIAN, *Gâteaux differentiability of convex functions and topology. Weak Asplund Spaces*, John Wiley and Sons, New-York, 1997.

[38] M. FABIAN, P. HABALA, P. HĂCEK, J. PELANT, V. MONTESINOS AND V. ZIZLER, *Functional analysis and infinite dimensional geometry*, Canad. Math. Soc. Books in Mathematics, n° 8, Springer-Verlag, New-York, 2001.

[39] M. FABIAN, P. HÁJEK, V. MONTESINOS AND W. ZIZLER, *A quantitative version of Krein's Theorem*, Rev. Mat. Iberoam., 21(1) (2005), 237-248.

[40] V. FARMAKI, *The structure of Eberlein, uniformy Eberlein and Talagrand compact spaces in* $\sum(\mathbb{R}^\Gamma)$, Fundamenta Math. 128 (1987), 15-28.

[41] C. FINET AND G. GODEFROY, *Biorthogonal systems and big quotient spaces*, Banach Spaces Theory, Bor-Luh-Lin, Ed., Contemp. Math., Vol. 85 (1989), 87-100.

[42] K. FLORET, *Weakly Compact Sets*, Lect. Notes Math., Vol. 801, Springer-Verlag, Berlín, 1978.

[43] V. P. FONF AND J. LINDENSTRAUSS, *Boundaries and generation of convex sets*, Israel J. Math., 136 (2003), 157-172.

[44] V. P. FONF, J. LINDENSTRAUSS AND R. R. PHELPS, *Infinite dimensional convexity*, in Handbook of the Geometry of Banach Spaces, vol. 1, W. B. Johnson and J. Lindenstrauss (Eds.), North-Holland, (2001), 599-670.

[45] M. FOREMAN, M. MAGIDOR AND S, SHELAH, *Martin's Maximum, saturated ideals, and non-regular ultrafilters. Part I*, Ann. Math., 127(1988), 1-47.

[46] D. H. Fremlin, *Consequences of Martin's axioma*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.

[47] D. H. Fremlin, *Measure Theory* , Vol.1, 2, 3 y 4, Torres Fremlin, 2000, 2001, 2002 y 2003.

[48] G. Godefroy, *Boundaries of a convex set and interpolation sets*, Math. Ann., 277 (1987), 173-184.

[49] G. Godefroy and M. Talagrand, *Espaces de Banach representables*, Israel J. Math., 41 (1982), 321-330.

[50] A. S. Granero, *Algunas estructuras incontables y la propiedad de Choquet-Edgar en espacios de Banach no separables*, Actas de las X Jornadas Hispano-Lusas de Mat., Sección III, Univ. de Murcia, (1985), 397-406.

[51] A. S. Granero, *An extension of the Krein-Šmulian Theorem*, Rev. Mat. Iberoam., 22(1) (2006), 93-110.

[52] A. S. Granero, *The extension of the Krein-Šmulian Theorem for Orlicz sequence spaces and convex sets*, J. Math. Anal. Appl., 326 (2007),1383-1393.

[53] A. S. Granero, *The Krein-Šmulian Theorem and its Extensions*, Acta Univ. Carolinae, Math. et Physica, Vol. 92(2) (2008), 9-46.

[54] A. S. Granero, *The Grothendieck property in the class of Orlicz-type modular spaces*, preprint, http://www.mat.ucm.es/ granero.

[55] A. S. Granero, P. Hájek and V. Montesinos, *Convexity and w^*-compactness in Banach spaces*, Math. Ann., 328 (2004), 625-631.

[56] A. S. Granero, J. M. Hernández,*James boundaries in dual Banach spaces*, J. Funct. Anal., 263 (2012).

[57] A. S. Granero, J. M. Hernández and H. Pfitzner, *The distance $dist(B, X)$ when B is a boundary of the unit ball $B(X^{**})$*, Proc. Amer. Math. Soc., 139 (2011), 1095-1098.

[58] A. S. Granero and H. Hudzik,*The classical Banach spaces $\ell_\varphi(I)/h_\varphi(I)$*, Proc. Amer. Math. Soc., 124 (1996), 3777-3787.

[59] A. S. Granero and M. Sánchez, *The class of universally Krein Šmulian Banach spaces*, Bull. London Math. Soc., 39 (2007), 529-540.

[60] A. S. Granero and M. Sánchez, *Convexity, compactness and distances*, Methods in Banach spaces, Ed. Jesús M.F. Castillo and William B. Johnson, Proceed. of the 3th Conference in Cáceres, Lecture Notes Series of the London Mat. Soc., Vol. 337 (2006), 215-237.

[61] A. S. Granero and M. Sánchez, *Distances to convex sets*, Studia Math.,182 (2007), 165-181.

[62] A. S. Granero and M. Sánchez, *Convex w^*-closures versus convex norm-closures*, J. Math. Anal. Appl., 350 (2009), 485-497.

[63] J. Hagler, *A counterexample to several questions about Banach spaces*, Studia Math., 60 (1977), 289-308.

[64] P. Hájek, V. Montesinos, J. Vanderwerff and V. Zizler,*Biorthogonal Systems in Banach Spaces*, CMS Books in Math., Vol. 26, Springer, 2008.

[65] R. Haydon,*Some more characterizations of Banach spaces containing ℓ_1*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 80 (1976), 269-276.

[66] I. Juhàsz, *Cardinal Functions in Topology*, Math. Centrum Tract. N. 34, Amsterdam, 1971.

[67] I. Juhàsz, *Cardinal Functions in Topology-ten years later*, Second Edition, Math. Centrum Tract. N. 123, Amsterdam, 1980.

[68] O. Kalenda,*Valdivia Compact Spaces in Topology and Banach Spaces Theory*, Extracta Math., 15 (2000), 1-85.

[69] O. Kalenda and J. Spurny, *Boundaries of compact convex sets and fragmentability*, J. Funct. Anal., 256 (2009), 865-880.

[70] A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer-Verlag, 1995.

[71] M. A. Krasnosel'skiĭ and Ya. B. Rutickiĭ, *Convex functions and Orlicz spaces*, Noordhoff, Groningen, 1961.

[72] K. Kuratowski, *Topology I*, Academic Press, New-York, 1966.

[73] H. E. Lacey, *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[74] D. Lewis and C. Stegall, *Banach spaces whose duals are isomorphic to $\ell_1(\Gamma)$*, Journal of Funct. Anal. 12 (1971), 167-177.

[75] J. Lindenstrauss and C. Stegall,*Examples of Banach spaces which do not contain ℓ_1 and whose duals are non-separable*, Studia Math., 54 (1975), 81-105.

[76] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[77] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II*, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[78] M. López-Pellicer and V. Montesinos,*Cantor sets in the dual of a separable Banach space. Applications*, in General Topology in Banach Spaces, T. Banakh (Ed.), Nova Sci. Publ., Huntington, (2001), 35-59.

[79] M. Morillon, *A new proof of James' sup theorem*, Extracta Math., 20 (2005), 261-271.

[80] J. Margalef, E. Outerelo y J.L. Pinilla, *Topología IV*, Ed. Alhambra, Madrid, 1980.

[81] R.D. McWilliams,*A note on weak sequential convergence*, Pacific J. Math., 12 (1962), 333-335.

[82] P. Meyer-Nieberg, *Banach Lattices*, Springer-Verlag, 1992.

[83] D. Martin and R.M. Solovay, *Internal Cohen extensions*, Ann. Math. Logic, 2 (1970), 143-178.

[84] I. Namioka, *Radon-Nikodym compacts spaces and fragmentability*, Mathematika 34 (1989), no. 2, 258-281.

[85] S. Negrepontis, *Banach spaces and topology*, in Handbook of Set-Theoretic Topology, K. Kunen and J. Vaughan (eds.), North-Holland, Amsterdam, 1984, 1045-1142.

[86] D. Normann, *Martin axiom and medial functions*, Math. Scand., 38 (1976), 167-176.

[87] E. Odell and H.P. Rosenthal, *A double-dual characterization of separable Banach spaces containing ℓ^1*, Israel J. Math., 20 (1975), 375-384.

[88] J. Orihuela, *On weakly Lindelöf Banach spaces*, in "Progress in Functioanl Analysis", eds. K.D. Bierstedt, J. Bonet, J. Horváth, M. Maestre, Elsevier Sci. Publ. B.V., (1992), 279-291.

[89] J.R. Partington, *Subspaces of certain Banach sequence spaces*, Bull. London Math. Soc., 13 (1981), 162-166.

[90] H. Pfitzner, *Boundaries for Banach spaces determine weak compactness*, Inv. Math., 182 (2010), 585-604.

[91] R.R. Phelps, *Convex functions, monotone operators and differentiability*, Springer-Verlag, 1993.

[92] R. Pol, *A function space C(K) which is weakly Lindelöf but not weakly compactly generated*, Studia Math., 64 (1979), 279-285.

[93] R. Pol, *On a question of H. Corson and some related problems*, Fund. Math., vol. 109 (1980),143-154.

[94] C.A. Rogers et al., *Analytic sets*, Academic Press, London, 1978.

[95] H. P. Rosenthal, *The heredity problem for weakly compactly generated Banach spaces*, Compositio Math., 28 (1974), 83-111.

[96] H. P. Rosenthal, *On injective Banach spaces and the spaces $L^\infty(\mu)$ for finite measures μ*, Acta Math., 124 (1970), 205-248.

[97] W. Rudin, *Functional Analysis*, Tata McGraw-Hill, New-Delhi, 1973.

[98] E. Saab, *Points extremaux, separabilité et $\mathcal{K}$-analyticité faibles*, C.R.A.S., t. 285 (1978), 1057-1058.

[99] H. H. Schaefer,*Espacios vectoriales topológicos*, Ed. Teide, Barcelona, 1974.

[100] Z. Semadeni, *Banach spaces of continuous functions*, Monografie Mat. 55 (PWN), Warsaw, 1971.

[101] W. Sierpinski, *Sur une suite infinie de fonctions de clase 1 dont toute fonction d'accumulation est non mesurable*, Fund. Math., 33 (1945), 104-105.

[102] S. Simons, *A convergence theorem with boundary*, Pacific J. Math., 40 (1972), 703-708.

[103] S. Simons, *An Eigenvector Proof of Fatou's Lemma for Continuous Functions*, Math. Intel., 17(1995), 67-70.

[104] C. Stegall, *Functions of the first Baire class with values in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 111 (1991), 981-991.

[105] M. Talagrand, *Deux generalisations d'un théorème de I. Namioka*, Pacific J. Math., 81(1) (1979), 239-251.

[106] M. Talagrand, *Sur les espaces de Banach contenant $\ell_1(\tau)$*, Israel J. Math., 40 (1981), 324-330.

[107] M. Talagrand, *Pettis integral and measure theory*, Mem. Amer. Math. Soc., 307(1984).

[108] M. Talagrand, *Un nouveau $C(K)$ space qui possede la proprieté de Grothendieck*, Israel J. Math., 37 (1980), 181-191.

[109] S. Todorcevic, *Biorthogonal systems and quotient spaces via Baire category methods*, Math. Ann., 335 (2006), 687-715.

[110] S. Todorcevic, *Directed sets and cofinal types*, Trans. Amer. Math. Soc., 290 (1985), 711-723.

[111] M. Valdivia, *Simultaneous resolutions of the identity operators in normed spaces*, Collect. Math., 42 (2) (1991), 265-284.

[112] M. Valdivia, *Topics in Locally Convex Spaces*, North-Holland, Math. Studies, Vol. 67, 1982.

[113] R. C. Walker, *The Stone-Čech compactification*, Springer-Verlag, Berlín, 1974.

[114] A. Wilansky, *Modern Methods in Topological Vector Spaces*, McGraw-Hill, 1978.