Compacidad, convexidad y distancias en espacios de Banach duales: extensiones del Teorema de Krein-Šmulian

MARCOS SÁNCHEZ MARTÍN

Tesis Doctoral dirigida por Antonio Suárez Granero
Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
Curso 2006/07

Índice general

Prólogo

El trabajo que presentamos está dedicado a estudiar la relación de las distancias $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z)$ y $\hat{d}(K, Z)$ dentro de un espacio de Banach dual X^*, cuando K es un subconjunto w*-compactos de X^* y Z es un subconjunto convexo de X^*.

Si nuestro espacio de Banach dual es, en realidad, un bidual, digamos X^{**}, y el subconjunto w*-compacto K no está dentro del espacio de Banach X, aparece un interesante problema relacionado con el clásico Teorema de Krein-Šmulian, a saber: ¿qué relación guarda la distancia $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z)$ con la distancia $\hat{d}(K, Z)$ cuando Z es un subespacio de X y, en particular, cuando $Z = X$? En los últimos años se han realizado notables avances en el estudio de ésta y otras cuestiones análogas. Los resultados de estos estudios, que constituyen nuestro punto de partida, quedan recogidos en el Capítulo 1.

En el Capítulo 2 consideramos el problema antes citado en su forma general: ahora X^* es un espacio de Banach dual y Z un subespacio de X^*. Introducimos el concepto de control de la distancia $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z)$ por parte de la distancia $\hat{d}(K, Z)$, definimos la familia de los espacios de Banach universalmente Krein-Šmulian y damos la siguiente sorprendente caracterización de esta familia: un espacio de Banach Z tiene universalmente 3-control (es decir, ocurre que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z) \leq 3\hat{d}(K, Z)$ para todo dual X^* tal que $Z \subset X^*$ y todo subconjunto w*-compacto K de X^*) sii Z no contiene una copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$.

En el Capítulo 3 se aplican a los subconjuntos convexos de un dual X^* las técnicas antes desarrolladas, generalizando los resultados precedentes a dicha familia de subconjuntos convexos.

En el Capítulo 4 damos condiciones intrínsecas necesarias y suficientes para que un subconjunto w*-compacto $K \subset X^*$ de un espacio de Banach dual X^* verifique $\overline{\text{co}}^{w^*}(H) = \overline{\text{co}}(H)$, para todo subconjunto w*-compacto H de K.

En el Capitulo 5 se estudia el control en X^{**} de la distancia $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X)$ por parte de la distancia $\hat{d}(K, X)$, cuando K es un subconjunto w*-compacto de X^{**} y X es un retículo de Banach y, más generalmente, una suma directa 1-incondicional de espacios de Banach WCG.

Un caso especial de espacio dual es el espacio $\ell_\infty(I)$. El estudio de la conexión entre las distancias $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z)$ y las distancias $\hat{d}(K, Z)$, cuando Z es un subespacio de $\ell_\infty(I)$ y K un subconjunto w*-compacto de $\ell_\infty(I)$, se hace en el Capítulo 6.

El Capítulo 7 se dedica a estudiar el control dentro de $\ell_\infty(Z)$ del subespacio de las funciones acotadas de la primera clase de Baire sobre Z, siendo Z un espacio polaco. Se obtienen generalizaciones de los clásicos resultados de Bourgain, Fremlin y Talagrand [6].

Finalmente, en el Capítulo 8 reunimos algunos resultados sueltos como: (i) el control en su bidual X^{**} de un espacio de Banach X con generador proyectivo; (ii) la relación entre el control en X^* y la existencia en X de copias de ℓ_1; (iii) la conexión en $\mathbb{R}^H$ entre las distancias $\hat{d}(\overline{K}^{w^*}, C(H))$ y $\hat{d}(K, C(H))$ cuando H es un espacio topológico y $K \subset \mathbb{R}^H$ es un subconjunto numerablemente τ_p-compacto.

Capítulo 1

Introducción

En este Capítulo recopilamos ciertos resultados recientes ([21],[23],[24],[25]), que serán el punto de partida y la base de las investigaciones que aquí desarrollamos. Dichos resultados se refieren a la conexión entre las distancias $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z)$ y $\hat{d}(K, Z)$, cuando K es un subconjunto w*-compacto de un espacio de Banach bidual X^{**} y Z es un subespacio de X (en particular, cuando $Z = X$).

La notación que utilizamos es la habitual (ver [36] y [19]). Si A es un conjunto, el cardinal de A se denota por $|A|$ ó por $\#A$. Por $\uplus$ indicamos la unión disjunta. Si X es un espacio de Banach, indicamos por B_X y S_X (ó bien $B(X)$ y $S(X)$) la bola unidad cerrada y la esfera unidad de X, respectivamente, y por X^* su dual topológico. Si $C \subset X^{**}$ es un subconjunto convexo, $x^{**} \in X^{**}$ y $A \subset X^{**}$, sea $d(x^{**}, C) = \inf\{\|x^{**} - x\| : x \in C\}$ la distancia de x^{**} a C y $\hat{d}(A, C) = \sup\{d(a, C) : a \in A\}$ la distancia de A a C. $\text{co}(A)$ indica la clausura convexa de A, $\overline{\text{co}}(A)$ es la $\|\cdot\|$-clausura de $\text{co}(A)$ y $\overline{\text{co}}^{w^*}(A)$ la w*-clausura de $\text{co}(A)$. $sp(A)$ (ó bien $[A]$) será el subespacio generado por A y $\overline{sp}(A)$ (ó bien $\overline{[A]}$) el subespacio cerrado generado por A. Observemos que: (i) $\hat{d}(\overline{\text{co}}(A), C) = \hat{d}(\text{co}(A), C) = \hat{d}(A, C)$; (ii) si $X^\perp = \{z \in X^{***} : z(x) = 0,\ \forall x \in X\}$ y $Q : X^{**} \to \frac{X^{**}}{X}$ es la aplicación cociente canónico, entonces:

$$d(x^{**}, X) = \sup\{z(x^{**}) : z \in S(X^\perp)\} = \|Qx^{**}\|.$$

Existen algunos hechos que sugieren que la distancia $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X)$, cuando $K \subset X^{**}$ es un subconjunto w*-compacto de X^{**}, está controlada por la distancia $\hat{d}(K, X)$. A saber, por un lado tenemos el clásico Teorema de Krein-Šmulian (ver [17, p. 51]). Con la terminología de las distancias, este Teorema dice lo siguiente: si X es un espacio de Banach, todo subconjunto w*-compacto $K \subset X^{**}$ tal que $\hat{d}(K, X) = 0$ (es decir, $K \subset X$ es un subconjunto w-compacto de X) verifica que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X) = \hat{d}(K, X) = 0$, esto es, $\overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ está dentro de X, por lo que $\overline{\text{co}}(K) = \overline{\text{co}}^{w}(K) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ y $\overline{\text{co}}(K)$ es w-compacto.

Por otro lado, si el dual X^* del espacio de Banach X no posee una copia de ℓ_1, entonces $\hat{d}(K, Z) = \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z)$ para todo subconjunto w*-compacto $K \subset X^{**}$ de X^{**} y todo subconjunto convexo $Z \subset X^{**}$. En efecto, es conocido (ver [30]) que si X^*

no tiene una copia de ℓ_1 entonces ocurre que $\overline{\text{co}}(K) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ para todo subconjunto w*-compacto de X^{**}. Por tanto, como $\hat{d}(\overline{\text{co}}(K), Z) = \hat{d}(K, Z)$, obtenemos que $\hat{d}(K, Z) = \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z)$.

En vista de estos hechos, uno se inclina a conjeturar que $\hat{d}(K, X) = \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X)$ para todo subconjunto w*-compacto $K \subset X^{**}$ y todo espacio de Banach X. En realidad, las cosas no ocurren exactamente así, porque, como vamos a ver, existen espacios de Banach X y subconjuntos w*-compactos $K \subset X^{**}$ tales que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X) \geq 3\hat{d}(K, X) > 0$. Sin embargo, como vemos a continuación, existe una constante universal $1 \leq M < \infty$ tal que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z) \leq M\hat{d}(K, Z)$, para todo subespacio $Z \subset X$ y todo subconjunto w*-compacto $K \subset X^{**}$, y, además, $3 \leq M \leq 5$. Identificamos, también, diferentes clases de espacios de Banach para los que vale la constante de control $M = 1$.

1.1 La extensión del Teorema de Krein-Šmulian

Comenzaremos probando el siguiente simple lema.

Lema 1.1. *Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida positiva finita y $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \Sigma$ una secuencia de subconjuntos medibles verificando $\mu(A_n) \geq \delta > 0$ para todo $n \geq 1$ y cierto $\delta > 0$. Entonces existe un subconjunto infinito $I \subset \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{n\in I} A_n \neq \emptyset$.*

Demostración. Consideremos la secuencia $B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k,\ n \geq 1$, que es decreciente y verifica $\mu(B_n) \geq \delta$ para todo $n \geq 1$. De aquí que $\mu(\bigcap_{n\geq 1} B_n) \geq \delta$ y por tanto $\bigcap_{n\geq 1} B_n \neq \emptyset$. Cojamos $w \in \bigcap_{n\geq 1} B_n$ y elijamos por inducción una subsecuencia $\{A_{n_k}\}_{k\geq 1},\ n_k < n_{k+1}$, tal que $w \in A_{n_k}$ para todo $k \geq 1$. Entonces $I = \{n_k : k \geq 1\}$ es el subconjunto infinito que buscamos. ∎

Si I es un conjunto infinito, βI denota la compactificación Stone-Čech de I, $I^* := \beta I \setminus I$ y, si $f \in \ell_\infty(I)$, $\check{f} \in C(\beta I)$ denota la extensión de Stone-Čech de f a todo βI.

Proposición 1.2. *Sean I un conjunto infinito y $X = (c_0(I), \|\cdot\|_\infty)$. Entonces todo subconjunto w*-compacto $K \subset X^{**} = \ell_\infty(I)$ verifica que $\hat{d}(K, X) = \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X)$.*

Demostración. Recordemos, en primer término, que si $f \in X^{**} = \ell_\infty(I)$, se tiene que

$$d(f, X) = \sup\{|\check{f}(p)| : p \in \beta I \setminus I\}.$$

Supongamos que exista un subconjunto w*-compacto $K \subset B_{X^{**}}$ tal que $\hat{d}(K, X) < \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X)$. Entonces podemos encontrar dos números reales positivos a, b tales que

$$\hat{d}(K, X) < a < b < \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X) \leq 1.$$

Elijamos un punto $z_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ tal que $d(z_0, X) > b$. En estas condiciones existen $\epsilon > 0$ y $p_0 \in \beta I \setminus I$ tales que $|\check{z}_0(p_0)| > b + \epsilon$, por ejemplo, $\check{z}_0(p_0) > b + \epsilon$. Sea $U \subset I$ tal que $p_0 \in \overline{U}^{\beta I}$ y $z_0(j) > b + \epsilon,\ \forall j \in U$. Sea μ una probabilidad de Radon sobre

K tal que $z_0 = r(\mu)$ (es decir, z_0 es la resultante o baricentro de μ) y denotemos $A_j := \{k \in K : k(j) \geq b\}$, $j \in U$, que es un subconjunto cerrado de K.

Aserto. $\mu(A_j) > \frac{\epsilon}{1-b}$, $\forall j \in U$.

En efecto, sea $\pi_j : \ell_\infty(I) \to \mathbb{R}$, $j \in I$, tal que $\pi_j(f) = f(j)$ para todo $f \in \ell_\infty(I)$. Observemos que π_j es una aplicación lineal w*-continua sobre $\ell_\infty(I)$, para todo $j \in I$. Por tanto, para todo $j \in U$ tenemos

$$z_0(j) = \pi_j(z_0) = \pi_j(r(\mu)) = \int_K \pi_j(k)d\mu = \int_K k(j)d\mu =$$
$$= \int_{A_j} k(j)d\mu + \int_{K\setminus A_j} k(j)d\mu \leq \mu(A_j) + (1-\mu(A_j))b,$$

lo que implica que

$$\mu(A_j) \geq \frac{z_0(j)-b}{1-b} > \frac{\epsilon}{1-b}.$$

Sea $V_0 \subset U$ un subconjunto infinito arbitrario. Por el Lema 1.1 existe un subconjunto infinito contable $N_0 \subset V_0$ tal que $\emptyset \neq \bigcap_{j\in N_0} A_j \subset K$. Elijamos $x_0 \in \bigcap_{j\in N_0} A_j$. Entonces para todo $q \in \overline{N_0}^{\beta I}$ se tiene que $\check{x}_0(q) \geq b$, lo que implica, teniendo en cuenta que $\emptyset \neq \overline{N_0}^{\beta I} \setminus I \subset \mathbb{N}^*$, que $d(x_0, X) \geq b$, una contradicción, pues x_0 pertenece a K. ■

Definición 1.3. *Un espacio de Banach X posee la propiedad J (abreviadamente, $X \in J$) si para todo $z \in B_{X^{**}} \setminus X$ y todo número $b \in \mathbb{R}$ con $0 < b < d(z, X)$, existe una secuencia $\{x_n^*\}_{n\geq 1} \subset \mathfrak{S}(B_{X^*}, z, b) := \{u \in B_{X^*} : z(u) \geq b\}$ tal que $x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$.*

Para esta clase de espacios de Banach con la propiedad J probamos el siguiente resultado.

Proposición 1.4. *Sea X un espacio de Banach tal que $X \in J$. Entonces todo subconjunto w*-compacto $K \subset X^{**}$ verifica que $\hat{d}(K, X) = \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X)$.*

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que existan un subconjunto w*-compacto $K \subset B_{X^{**}}$ y dos números reales a, b tales que:

$$\hat{d}(K, X) < a < b < \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X).$$

Sea $z_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ tal que $d(z_0, X) > b$. Como $X \in J$ existe una secuencia $\{x_n^*\}_{n\geq 1} \subset \mathfrak{S}(B_{X^*}, z_0, b)$ tal que $x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$. Sea $T : X \to c_0 := c_0(\mathbb{N})$ tal que $T(x) = (x_n^*(x))_{n\geq 1}$, $\forall x \in X$. Claramente T es una aplicación lineal continua con norma $\|T\| \leq 1$. Sea $L = T^{**}(K)$, que es un subconjunto w*-compacto de B_{ℓ_∞}.

Aserto 1. $\hat{d}(L, c_0) \leq \hat{d}(K, X)$.

En efecto, sea $c_0^\perp = \{f \in c_0^{***} = \ell_\infty^* : \langle f, u\rangle = 0,\ \forall u \in c_0\}$ y cojamos $v \in B_{c_0^\perp}$. Entonces $\|T^{***}(v)\| \leq 1$ y para todo $x \in X$ se tiene:

$$\langle T^{***}(v), x\rangle = \langle v, T^{**}x\rangle = \langle v, Tx\rangle = 0.$$

Por tanto $T^{***}(B_{c_0^\perp}) \subset B_{X^\perp}$ y de aquí , si $k \in K$ y $T^{**}(k) =: h \in L$, se deduce que:

$$d(h, c_0) = \sup\{\langle v, h\rangle : v \in B_{c_0^\perp}\} =$$
$$= \sup\{\langle v, T^{**}(k)\rangle : v \in B_{c_0^\perp}\} = \sup\{\langle T^{***}(v), k\rangle : v \in B_{c_0^\perp}\} \leq$$
$$\leq \sup\{\langle w, k\rangle : w \in B_{X^\perp}\} = d(k, X).$$

Aserto 2. Si $w_0 := T^{**}(z_0) \in \overline{\text{co}}^{w^*}(L)$, entonces $d(w_0, c_0) \geq b$.

En efecto, sea $\{e_n\}_{n\geq 1}$ la base canónica de ℓ_1, que satisface $T^*(e_n) = x_n^*$, $\forall n \geq 1$. Como $x_n^* \in \mathfrak{S}(B_{X^*}, z_0, b)$, se tiene

$$\langle w_0, e_n\rangle = \langle T^{**}(z_0), e_n\rangle = \langle z_0, T^*(e_n)\rangle = \langle z_0, x_n^*\rangle \geq b. \tag{1.1}$$

Sea ψ un punto w*-límite de la secuencia $\{e_n\}_{n\geq 1}$ en (ℓ_∞^*, w^*). Claramente $\psi \in B_{c_0^\perp}$ y también $\psi(w_0) \geq b$ por (1.1). Por tanto $d(w_0, c_0) \geq b$. Así que $L \subset B_{\ell_\infty}$ es un subconjunto w*-compacto tal que

$$\hat{d}(L, c_0) \leq \hat{d}(K, X) < a < b \leq \hat{d}(w_0, c_0) \leq \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(L), c_0),$$

lo que contradice la Proposición 1.2. ■

En el siguiente corolario establecemos que hay muchos espacios de Banach que poseen la propiedad J y que, por tanto, satisfacen la Proposición 1.4. Recordemos que para un espacio de Banach X, la bola unidad cerrada del dual (B_{X^*}, w^*) es *angélica* en la w*-topología si, para todo subconjunto $A \subset B_{X^*}$ y todo $z \in \overline{A}^{w^*}$, existe una secuencia $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset A$ tal que $a_n \xrightarrow{w^*} z$. Es fácil probar que si la bola unidad dual (B_{X^*}, w^*) es angélica entonces: (i) si $Y \subset X$ es un subespacio, la bola unidad dual (B_{Y^*}, w^*) es angélica; (i) si $T : X \to Y$ es un operador continuo tal que $Y = \overline{T(X)}$, la bola unidad dual (B_{Y^*}, w^*) es angélica. Las siglas WCG y WLD son las abreviaturas de las frases en inglés *weakly compactly generated* y *weakly Lindelöf determined*, respectivamente. (ver [19],[1] para su definición y propiedades). Es conocido que si X es un espacio de Banach WLD, la bola unidad dual $(B(X^*), w^*)$ es angélica.

Corolario 1.5. *Si X es un espacio de Banach tal que la bola unidad dual (B_{X^*}, w^*) es angélica (por ejemplo, si X es WCG ó WLD), entonces $X \in J$ y, por tanto, para todo subconjunto w^*-compacto $K \subset X^{**}$ se tiene que $\hat{d}(K, X) = \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X)$.*

Demostración. Probemos que si $z_0 \in B_{X^{**}} \setminus X$ y $0 < b < d(z_0, X)$, entonces $0 \in \overline{\mathfrak{S}(B_{X^*}, z_0, b)}^{\sigma(X^*,X)}$. Sea $\psi \in S(X^\perp) \subset X^{***}$ tal que $\psi(z_0) > b$. Como B_{X^*} es un subconjunto w*-denso en $B_{X^{***}}$ y $\psi(z_0) > b$, se tiene $\psi \in \overline{\mathfrak{S}(B_{X^*}, z_0, b)}^{\sigma(X^{***},X^{**})}$, de donde obtenemos $0 \in \overline{\mathfrak{S}(B_{X^*}, z_0, b)}^{\sigma(X^*,X)}$, pues $\psi \in X^\perp$. Ahora basta aplicar que (B_{X^*}, w^*) es angélica. ■

Probamos a continuación algunos hechos auxiliares. Si X es un espacio de Banach, denotemos por $I_X : X \to X$ la aplicación identidad de X, por $J_X : X \to X^{**}$ la inmersión canónica de X en X^{**} y por $R_X : X^{***} \to X^*$ la restricción canónica tal que $\langle R_X(z), x\rangle = \langle z, J_X(x)\rangle$, para todo $z \in X^{***}$ y todo $x \in X$. Notemos que $R_X = (J_X)^*$ y que $R_X \circ J_{X^*} = I_{X^*}$.

Es bien conocido que $J_{X^*}(X^*)$ está 1-complementado en X^{***} con proyección $P_X : X^{***} \to X^{***}$ tal que $P_X = J_{X^*} \circ R_X$. Como $\ker(P_X) = \{z \in X^{***} : \langle z, J_X(x)\rangle = 0,\ \forall x \in X\} = X^{\perp}$, disponemos de la descomposición $X^{***} = X^{\perp} \oplus J_{X^*}(X^*)$. El subespacio $X^{\perp}$ está complementado en X^{***} con proyección $Q_X : X^{***} \to X^{***}$ tal que $Q_X = I_{X^{***}} - P_X$. Observemos que $1 \le \|Q_X\| \le 2$ y que:

$$B_{X^{\perp}} \subset Q_X(B_{X^{***}}) \subset \|Q_X\| \cdot B_{X^{\perp}} \subset 2B_{X^{\perp}}.$$

Lema 1.6. *Sean X un espacio de Banach y $Q_X : X^{***} \to X^{***}$ la proyección canónica sobre $X^{\perp}$. Supongamos que $Y \subset X$ es un subespacio cerrado. Entonces para todo $u \in Y^{**}$ (ahora consideramos Y^{**} como un subespacio de X^{**}) se tiene:*

$$d(u, X) \le d(u, Y) \le \|Q_X\| \cdot d(u, X) \le 2d(u, X).$$

Demostración. En primer término, es claro que $d(u, X) \le d(u, Y)$, porque $Y \subset X$.

En lo que sigue distinguimos entre X y $J_X(X)$, entre Y y $J_Y(Y)$, etc. Sea $i : Y \to X$ la aplicación inclusión. Entonces $i^* : X^* \to Y^*$ es una aplicación cociente, $i^{**} : Y^{**} \to X^{**}$ es una aplicación inmersión tal que $(i^{**})_{\restriction Y} = i$, y $i^{***} : X^{***} \to Y^{***}$ es de nuevo una aplicación cociente tal que $(i^{***})_{\restriction X^*} = i^*$. Observemos que $i^{***}(B_{X^{***}}) = B_{Y^{***}}$. Se comprueba fácilmente que $J_X \circ i = i^{**} \circ J_Y$ y que $J_{Y^*} \circ i^* = i^{***} \circ J_{X^*}$, de donde concluimos que

$$i^* \circ R_X = i^* \circ (J_X)^* = (J_X \circ i)^* = (i^{**} \circ J_Y)^* = (J_Y)^* \circ i^{***} = R_Y \circ i^{***}.$$

Aserto. $Q_Y \circ i^{***} = i^{***} \circ Q_X$.

En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} Q_Y \circ i^{***} &= (I_{Y^{***}} - J_{Y^*} \circ R_Y) \circ i^{***} = i^{***} - J_{Y^*} \circ R_Y \circ i^{***} = \\ &= i^{***} - J_{Y^*} \circ i^* \circ R_X = i^{***} - i^{***} \circ J_{X^*} \circ R_X = \\ &= i^{***} \circ (I_{X^{***}} - J_{X^*} \circ R_X) = i^{***} \circ Q_X. \end{aligned}$$

Del Aserto se deduce que $\|Q_Y\| \le \|Q_X\|$ y que

$$\begin{aligned} B_{Y^{\perp}} &\subset Q_Y(B_{Y^{***}}) = Q_Y(i^{***}(B_{X^{***}})) = \\ &= i^{***}(Q_X(B_{X^{***}})) \subset i^{***}(\|Q_X\| \cdot B_{X^{\perp}}). \end{aligned}$$

Por tanto, si $u \in Y^{**}$, finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} d(u, J_Y(Y)) &= \sup\{\langle z, u\rangle : z \in B_{Y^{\perp}}\} \le \\ &\le \sup\{\langle i^{***}(w), u\rangle : w \in \|Q_X\| \cdot B_{X^{\perp}}\} = \\ &= \|Q_X\| \cdot \sup\{\langle w, i^{**}(u)\rangle : w \in B_{X^{\perp}}\} = \\ &= \|Q_X\| \cdot d(i^{**}(u), J_X(X)) \le 2d(i^{**}(u), J_X(X)). \end{aligned}$$

■

Nota. Ver el Lema 3.2 para una demostración más simple del Lema 1.6.

Un subconjunto w*-compacto $A \subset X^*$ de un espacio de Banach dual X^* se dice que está *w*-fragmentado por la norma* de X^* (ver [19, p. 81],[40]) si para todo subconjunto no vacío $B \subset A$ y todo $\epsilon > 0$ existe un subconjunto w*-abierto $V \subset X^*$ tal que $V \cap B \neq \emptyset$ y $\mathrm{diam}(V \cap B) \leq \epsilon$, siendo $\mathrm{diam}(V \cap B)$ el diámetro de $V \cap B$.

Lema 1.7. *Sean X un espacio de Banach, $Z \subset X^*$ un subespacio y $K \subset B_{X^*}$ un subconjunto w*-compacto tal que existen $a, b > 0$ verificando:*

$$\hat{d}(K, Z) < a < b < \hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), Z).$$

Entonces existen $z_0 \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$ y $\psi \in S(Z^\perp(X^{**}))$ con $\psi(z_0) > b$ tales que, si μ es una probabilidad de Radon sobre K con baricentro $r(\mu) = z_0$, se verifica que: (a) μ no tiene átomos; (b) si $H = \mathrm{supp}(\mu)(=$ soporte de $\mu)$, para todo subconjunto w*-abierto V de X^* con $V \cap H \neq \emptyset$ existe $\xi \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(V \cap H)$ tal que $\psi(\xi) > b$; (c) H no está fragmentado por la norma de X^*.

Demostración. Elegimos $z \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$ y $\psi \in S(Z^\perp(X^{**}))$ tales que $\psi(z) > b + \epsilon$ para cierto $\epsilon > 0$. Por el Teorema de Bishop-Phelps, existe $\phi \in S(X^{**})$ con $\|\psi - \phi\| \leq \epsilon/4$ tal que ϕ alcanza su máximo sobre $\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$ en cierto $z_0 \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$. Así que:

$$\phi(z_0) \geq \phi(z) = \psi(z) + (\phi - \psi)(z) > b + \epsilon - \tfrac{1}{4}\epsilon = b + \tfrac{3}{4}\epsilon\ , \tag{1.2}$$
$$\psi(z_0) = \phi(z_0) + (\psi - \phi)(z_0) > b + \tfrac{3}{4}\epsilon - \tfrac{1}{4}\epsilon = b + \tfrac{1}{2}\epsilon \ \text{ y} \tag{1.3}$$
$$\forall k \in K, \phi(k) = \psi(k) + (\phi - \psi)(k) < a + \tfrac{1}{4}\epsilon < b + \tfrac{3}{4}\epsilon < \phi(z_0). \tag{1.4}$$

En particular, observemos que $z_0 \notin K$ por (1.4).

(a) Sea μ una probabilidad de Radon sobre K con baricentro $r(\mu) = z_0$ y supongamos que μ posee algún átomo, es decir, que existen $0 < \lambda \leq 1$ y $k_0 \in K$ tales que $\mu = \lambda \cdot \delta_{k_0} + \mu_1,\ \mu_1 \geq 0$. Si $\lambda = 1$ entonces $\mu = \delta_{k_0}$, de donde $r(\mu) = k_0 \in K$, lo que es imposible porque $r(\mu) = z_0 \notin K$ por (1.4). Así que, $0 < \lambda < 1$, esto es, $\mu_1 \neq 0$ y $\|\mu_1\| = 1 - \lambda > 0$. Entonces $\mu = \lambda \cdot \delta_{k_0} + (1 - \lambda)\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|}$ y

$$z_0 = r(\mu) = \lambda k_0 + (1 - \lambda) r(\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|}),$$

de donde, puesto que $\phi(k_0) < \phi(z_0)$ (por (1.4)) y $\phi(r(\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|})) \leq \phi(z_0)$ (porque $r(\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|}) \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$), obtenemos que

$$\phi(z_0) = \lambda\phi(k_0) + (1 - \lambda)\phi(r(\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|})) < \lambda\phi(z_0) + (1 - \lambda)\phi(z_0) = \phi(z_0),$$

una contradicción.

(b) Sea $H = \mathrm{supp}(\mu)$ y supongamos que existe un subconjunto w*-abierto V de X^* con $V \cap H \neq \emptyset$ tal que $\psi(\xi) \leq b$, para todo $\xi \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(V \cap H)$. Denotemos por $\mu_1 = \mu_{\restriction V \cap H}$ a la restricción de μ a $V \cap H$, esto es, $\mu_1(B) = \mu(B \cap V \cap H)$ para todo subconjunto

Borel $B \subset K$. Sea $\mu_2 := \mu - \mu_1$. Observemos que μ_1 y μ_2 son medidas positivas tales que

(i) $\mu_1 \neq 0$, porque $\emptyset \neq V \cap H = V \cap \operatorname{supp}(\mu)$, y

(ii) $\mu_2 \neq 0$ pues si $\mu_2 = 0$, esto es, $\mu = \mu_1 = \mu_{\restriction V \cap H}$, entonces $z_0 = r(\mu) \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap H)$ y $\psi(z_0) \leq b$, que contradice a (1.3).

Por tanto tenemos la descomposición $\mu = \mu_1 + \mu_2$ verificándose que $1 = \|\mu\| = \|\mu_1\| + \|\mu_2\|$ con $\|\mu_1\| \neq 0 \neq \|\mu_2\|$. Así que podemos escribir:

$$z_0 = r(\mu) = \|\mu_1\| \cdot r(\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|}) + \|\mu_2\| \cdot r(\frac{\mu_2}{\|\mu_2\|}).$$

Puesto que $r(\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|}) \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap H)$, entonces $\psi(r(\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|})) \leq b$, de donde $\phi(r(\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|})) \leq b + \frac{1}{4}\epsilon$ (porque $\|\psi - \phi\| \leq \epsilon/4$). Por tanto, teniendo en cuenta que $r(\frac{\mu_2}{\|\mu_2\|}) \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$, lo que implica que $\phi(r(\frac{\mu_2}{\|\mu_2\|})) \leq \phi(z_0)$, y (1.4) obtenemos

$$\phi(z_0) = \|\mu_1\| \phi(r(\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|})) + \|\mu_2\| \phi(r(\frac{\mu_2}{\|\mu_2\|})) \leq$$
$$\leq \|\mu_1\|(b + \tfrac{1}{4}\epsilon) + \|\mu_2\|\phi(z_0) < \|\mu_1\|\phi(z_0) + \|\mu_2\|\phi(z_0) = \phi(z_0),$$

una contradicción.

(c) Sea $\eta = b - a$ y supongamos que H está w*-fragmentado por la norma de X^*. Entonces existe un subconjunto w*-abierto V tal que $V \cap H \neq \emptyset$ y $\operatorname{diam}(V \cap H) < \frac{\eta}{2}$. Por tanto, si $h_0 \in V \cap H$, se tiene que $\overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap H) \subset B(h_0; \eta/2)$ (=bola cerrada de centro h_0 y radio $\eta/2$). De aquí que, para todo $\xi \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap H)$, se verifica

$$\psi(\xi) \leq \psi(h_0) + \frac{\eta}{2} \leq d(h_0, Z) + \frac{\eta}{2} < a + \frac{\eta}{2} < b,$$

lo que contradice a (b). ■

Probemos a continuación la extensión del Teorema de Krein-Šmulian.

Proposición 1.8 (Extensión del Teorema de Krein-Šmulian). *Si X es un espacio de Banach, $Z \subset X$ un subespacio de X y $K \subset X^{**}$ un subconjunto w*-compacto, se tiene que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z) \leq 5\hat{d}(K, Z)$.*

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que existe un subespacio $Z \subset X$ y un subconjunto w*-compacto $K \subset B_{X^{**}}$ tal que

$$\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z) > 5\hat{d}(K, Z).$$

En estas condiciones podemos hallar dos números reales $a, b > 0$ tales que

$$\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z) > b > 5a > 5\hat{d}(K, Z).$$

Por el Lema 1.7 tenemos el siguiente Hecho:

Hecho. Existe un funcional $\psi \in S(X^{\perp})$ y un subconjunto w*-compacto $\emptyset \neq H \subset K$ tal que para todo subconjunto w*-abierto V con $V \cap H \neq \emptyset$ existe $\xi \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(V \cap H)$ con $\psi(\xi) > b$.

Etapa 1. Aplicando el Hecho con $V_0 = X^{**}$ elegimos $\xi_1 \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(H)$ tal que $\psi(\xi_1) > b$. Como $B(X^*)$ es un subconjunto w*-denso en $B(X^{***})$, existe $x_1^* \in S(X^*)$ verificando $x_1^*(\xi_1) > b$. Por tanto $\xi_1 \in \{u \in X^{**} : \langle u, x_1^* \rangle > b\} \cap \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(H)$, de donde deducimos que, si definimos $V_1 := \{u \in X^{**} : \langle u, x_1^* \rangle > b\}$, entonces $V_1 \cap H \neq \emptyset$. Elegimos $\eta_1 \in V_1 \cap H$. Puesto que $d(\eta_1, Z) < a$, podemos hacer la descomposición $\eta_1 = \eta_1^1 + \eta_1^2$ con $\eta_1^1 \in Z$ y $\eta_1^2 \in aB_{X^{**}}$.

Etapa 2. Sea $Y_1 = [\{\eta_1^1\}] \subset Z$. Puesto que $V_1 \cap H \neq \emptyset$, por el Hecho existe $\xi_2 \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(V_1 \cap H)$ con $\psi(\xi_2) > b$. Como $\dim(Y_1) < \infty$, $\psi(\xi_2) > b$ y $\psi \in Y_1^{\perp}$, existe $x_2^* \in S(X^*)$ tal que $x_2^*(\xi_2) > b$ y $x^*_{2 \restriction Y_1} = 0$. Por tanto $\xi_2 \in \{u \in X^{**} : \langle u, x_2^* \rangle > b\} \cap \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(V_1 \cap H)$, de donde deducimos que, si definimos $V_2 := \{u \in X^{**} : \langle u, x_i^* \rangle > b,\ i = 1, 2\}$, entonces $V_2 \cap H \neq \emptyset$. Elegimos $\eta_2 \in V_2 \cap H$. Como $d(\eta_2, Z) < a$, podemos hacer la descomposición $\eta_2 = \eta_2^1 + \eta_2^2$ con $\eta_2^1 \in Z$ y $\eta_2^2 \in aB_{X^{**}}$.

Reiterando, obtenemos las secuencias $\{x_n^*\}_{n \geq 1} \subset S(X^*)$, $\{\eta_k\}_{k \geq 1} \subset H$ verificando

$$\eta_k = \eta_k^1 + \eta_k^2 \text{ con } \eta_k^1 \in Z \text{ y } \eta_k^2 \in aB_{X^{**}},\ k \geq 1,$$

tal que $x_i^*(\eta_k) > b, i = 1, ..., k$, y $x^*_{k+1 \restriction Y_k} = 0$, donde

$$Y_k = [\{\eta_i^1 : i = 1, ..., k\}] \subset Y_{k+1} \subset Z.$$

Sean $Y = \overline{\cup_{k \geq 1} Y_k} \subset Z$ y $K_1 = (K + aB_{X^{**}}) \cap Y^{**}$. Entonces Y es un subespacio cerrado separable de Z y K_1 es un subconjunto w*-compacto de Y^{**} (considerado Y^{**} canónicamente sumergido en $Z^{**} \subset X^{**}$). Observemos que $\{\eta_i^1 : i \geq 1\} \subset K_1$. Por el Lema 1.6, como $K_1 \subset Y^{**}$ y $\hat{d}(K_1, Z) \leq 2a$, tenemos que $\hat{d}(K_1, Y) \leq 4a$ (de hecho, $\hat{d}(K_1, Y) \leq 2\|Q_Z\| a \leq 2\|Q_X\| a \leq 4a$).

Sea η_0 un punto w*-límite de $\{\eta_k\}_{k \geq 1}$ en X^{**}.

Aserto 1. $d(\eta_0, Y) \leq 5a$.

En efecto, en primer término es claro que $\eta_0 \in K_1 + aB(X^{**})$. Por otra parte, $\hat{d}(K_1, Y) \leq 4a$. Por tanto $d(\eta_0, Y) \leq 5a$.

Aserto 2. $d(\eta_0, Y) \geq b$.

En efecto, sea $\phi \in B(X^{***})$ un punto w*-límite de $\{x_n^*\}_{n \geq 1}$. Puesto que $x_n^*(\eta_k) > b$, si $k \geq n$, deducimos que $x_n^*(\eta_0) \geq b$, $\forall n \geq 1$. De aquí obtenemos que $\phi(\eta_0) \geq b$. Aún más, $\phi \in Y^{\perp}(X^{***})$ porque $x^*_{n+1 | Y_n} = 0$ e $Y_n \subset Y_{n+1}$. Por tanto $d(\eta_0, Y) \geq \phi(\eta_0) \geq b$.

Puesto que $b > 5a$, obtenemos una contradicción y esto completa la demostración. ■

Cuando $K \cap Z$ es w*-denso en K, el argumento de la Proposición 1.8 nos da el siguiente resultado.

Proposición 1.9. *Sean X un espacio de Banach, $Z \subset X$ un subespacio cerrado y $K \subset X^{**}$ un subconjunto w*-compacto. Si $Z \cap K$ es w*-denso en K, se tiene que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z) \leq 2\hat{d}(K, Z)$.*

Demostración. Supongamos que existe un subespacio cerrado $Z \subset X$ y un subconjunto w*-compacto $K \subset B_{X^{**}}$ tal que $Z \cap K$ es w*-denso en K y sin embargo $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z) > 2\hat{d}(K, Z)$. Sean $a, b > 0$ tales que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z) > b > 2a > 2\hat{d}(K, Z)$. A continuación seguimos la argumentación de la Proposición 1.8 pero introduciendo los siguientes cambios:

(i) Como $Z \cap K$ es w*-denso en K, ocurre que $\emptyset \neq V_k \cap H \subset \overline{V_k \cap Z \cap K}$, $\forall k \geq 1$. Ahora elegimos η_k en $V_k \cap K \cap Z$, de modo que, como $\eta_k \in Z$, se puede hacer la descomposición $\eta_k = \eta_k^1 + \eta_k^2$ con $\eta_k^1 = \eta_k$ y $\eta_k^2 = 0$;

(ii) Definimos

$$Y_k = [\{\eta_i : i = 1, ..., k\}] \ , Y = \overline{\cup_{k \geq 1} Y_k} \subset Z \text{ y}$$
$$K_1 = \text{w}^*\text{-cl}(\{\eta_i : i \geq 1\}) \subset Y^{**} \cap K.$$

Claramente $\hat{d}(K_1, Z) \leq \hat{d}(K, Z) < a$, de donde $\hat{d}(K_1, Y) \leq 2\hat{d}(K_1, Z) \leq 2a$ (de hecho, $\hat{d}(K_1, Y) \leq \|Q_Z\| a \leq \|Q_X\| a \leq 2a$). Finalmente, todo punto w*-límite η_0 de $\{\eta_k\}_{k \geq 1}$ en X^{**} satisface $\eta_0 \in K_1$, $d(\eta_0, Y) \leq 2a$ y $d(\eta_0, Y) \geq b$, que es una contradicción. ■

Observación. El argumento de la Proposición 1.8, de hecho, conduce a que

$$\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z) \leq (2\|Q_Z\| + 1)\hat{d}(K, Z) \leq (2\|Q_X\| + 1)\hat{d}(K, Z) \leq 5\hat{d}(K, Z).$$

También en la Proposición 1.9 se obtiene, de hecho, que

$$\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z) \leq \|Q_Z\| \hat{d}(K, Z) \leq \|Q_X\| \hat{d}(K, Z) \leq 2\hat{d}(K, Z).$$

Corolario 1.10. *Sean X un espacio de Banach, $Z \subset X^*$ un subespacio de X^* y $K \subset X^*$ un subconjunto w*-compacto w*-fragmentado por la norma de X^*. Entonces $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z) = \hat{d}(K, Z)$.*

Demostración. Todo se sigue inmediatamente del Lema 1.7. También puede deducirse de [40, Theorems 2.3 and 2.5], en donde se prueba que $\overline{\text{co}}(K) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ siempre que $K \subset X^*$ sea un subconjunto de X^*, que esté w*-fragmentado por la norma de X^*. ■

Nos interesa considerar los casos $X = (\ell_1(I), \|\cdot\|_1)$ y $X = (\ell_\infty(I), \|\cdot\|_\infty)$, en relación con el comportamiento de la distancia $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X)$ respecto de la distancia $\hat{d}(K, X)$, para todo subconjunto w*-compacto $K \subset X^{**}$. El comportamiento de $(\ell_1(I), \|\cdot\|_1)$ es óptimo (es decir, $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X) = \hat{d}(K, X)$, para todo subconjunto w*-compacto $K \subset X^{**}$). Sin embargo, el comportamiento de $(\ell_\infty(I), \|\cdot\|_\infty)$ no es bueno, como veremos más tarde.

Respecto del espacio de Banach $X = (\ell_1(I), \|\cdot\|_1)$, tenemos que hacer observar, en primer término, que no se puede aplicar la Proposición 1.4 porque desconocemos si $\ell_1(I)$ tiene la propiedad J, cuando I es incontable (si I es contable, $\ell_1(I)$ es separable y tiene la propiedad J). De hecho, si aceptamos que existe un cardinal medible incontable α (ver [14, p. 186, 196] para las definiciones, etc.) e I es a un conjunto con $|I| = \alpha$, se prueba fácilmente que $\ell_1(I)$ no tiene la propiedad J.

Proposición 1.11. *Sean I un conjunto infinito y $X = (\ell_1(I), \|\cdot\|_1)$. Entonces todo subconjunto w^*-compacto $K \subset X^{**}$ verifica que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X) = \hat{d}(K, X)$.*

Demostración. Primero, observemos que $X^* = \ell_\infty(I)$ y que X^{**} es el espacio $M_R(\beta I)$ de las medidas de Radon sobre βI. Así que X^{**} puede descomponerse de la siguiente forma
$$X^{**} = \ell_1(I) \oplus_1 M_R(\beta I \setminus I).$$
Notemos que el subespacio $\ell_1(I)$ de esta descomposición coincide con el subespacio $J(X)$, siendo $J : X \to X^{**}$ la inclusión canónica. Si $\mu \in M_R(\beta I)$, escribimos $\mu = \mu_1 + \mu_2$, donde $\mu_1 \in \ell_1(I)$ y $\mu_2 = \mu_{\restriction \beta I \setminus I} \in M_R(\beta I \setminus I)$. Por tanto $d(\mu, X) = \|\mu_2\|$.

Supongamos que existen un subconjunto w*-compacto $K \subset B_{X^{**}}$ y dos números $a, b > 0$ tales que:
$$\hat{d}(K, X) < a < b < \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X).$$
Por el Lema 1.7 tenemos el siguiente Hecho:

Hecho. Existe un funcional $\psi \in S(X^{***}) \cap X^\perp$ y un subconjunto w*-compacto $\emptyset \neq H \subset K$ tal que para todo subconjunto w*-abierto V con $V \cap H \neq \emptyset$ existe $\xi \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap H)$ con $\psi(\xi) > b$.

Etapa 1. Aplicando el Hecho elegimos $\xi_1 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$ con $\psi(\xi_1) > b$. Como $B(X^*)$ es w*-denso en $B(X^{***})$, existe $x_1^* \in S(X^*)$ con $x_1^*(\xi_1) > b$. A continuación elegimos $\eta_1 \in H$ tal que $x_1^*(\eta_1) > b$. Si $\eta_1 = \eta_1^1 + \eta_1^2$, con $\eta_1^1 \in \ell_1(I)$ y $\eta_1^2 \in M_R(\beta I \setminus I)$, entonces
$$\|\eta_1^2\| = d(\eta_1, X) \le \hat{d}(K, X) < a,$$
de donde $\|\eta_1^1\| = \|\eta_1\| - \|\eta_1^2\| > b - a$, porque $\|\eta_1\| \ge x_1^*(\eta_1) > b$. Por tanto podemos hallar un vector $y_1 \in B(X^*) = B(\ell_\infty(I))$ con soporte finito, digamos $\text{supp}(y_1) = \{\gamma_{11}, ..., \gamma_{1p_1}\} \subset I$, tal que $y_1(\eta_1^1) > b - a$. Como $y_1(\eta_1^2) = 0$, tenemos que
$$y_1(\eta_1) = y_1(\eta_1^1) > b - a.$$

Etapa 2. Sea $V_1 = \{u \in X^{**} : y_1(u) > b - a\}$, que es un subconjunto w*-abierto de X^{**} con $V_1 \cap H \neq \emptyset$, porque $\eta_1 \in V_1 \cap H$. Por el Hecho existe $\xi_2 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V_1 \cap H)$ con $\psi(\xi_2) > b$. Puesto que $\psi(\xi_2) > b$ y $\psi(e_{\gamma_{1i}}) = 0,\ 1 \le i \le p_1$ (donde $e_{\gamma_{1i}} \in \ell_1(I)$ es el vector unitario tal que $e_{\gamma_{1i}}(\gamma) = 1$, si $\gamma = \gamma_{1i}$, y $e_{\gamma_{1i}}(\gamma) = 0$, si $\gamma \neq \gamma_{1i}$), existe $x_2^* \in B_{X^*}$ con $x_2^*(\xi_2) > b$ y $x_2^*(e_{\gamma_{1i}}) = 0,\ 1 \le i \le p_1$. Es claro que se puede elegir $\eta_2 \in V_1 \cap H$

tal que $x_2^*(\eta_2) > b$ y también $y_1(\eta_2) > b - a$ porque $\eta_2 \in V_1$. Sea $\eta_2 = \eta_2^1 + \eta_2^2$, con $\eta_2^1 \in \ell_1(I)$, $\eta_2^2 \in M_R(\beta I \setminus I)$ y $\|\eta_2^2\| = d(\eta_2, X) \leq \hat{d}(K, X) < a$. Puesto que

$$\|\eta_2^1\| \geq |x_2^*(\eta_2^1)| = |x_2^*(\eta_2) - x_2^*(\eta_2^2)| \geq |x_2^*(\eta_2)| - |x_2^*(\eta_2^2)| > b - a,$$

y $x_2^* = 0$ sobre el soporte $\mathrm{supp}(y_1)$ de y_1, podemos hallar $y_2 \in B_{X^*}$ con soporte finito $\mathrm{supp}(y_2) = \{\gamma_{21}, ..., \gamma_{2p_2}\} \subset I \setminus \mathrm{supp}(y_1)$ tal que $y_2(\eta_2^1) > b - a$. De aquí que $y_2(\eta_2) = y_2(\eta_2^1) > b - a$.

Reiterando, obtenemos la secuencia $\{y_k\}_{k\geq 1} \subset B_{X^*}$ con soportes disjuntos dos a dos y la secuencia $\{\eta_k\}_{k\geq 1} \subset H \subset B_{X^{**}}$ tal que $y_n(\eta_k) > b - a$ para $k \geq n$. Como $\|\sum_{i=1}^n y_i\| \leq 1$ (porque los vectores $\{y_k\}_{k\geq 1} \subset B(\ell_\infty(I))$ tienen soportes disjuntos dos a dos) y $(\sum_{i=1}^n y_i)(\eta_n) > n(b - a)$, $\forall n \geq 1$, obtenemos que $\|\eta_n\| > n(b - a)$, $\forall n \geq 1$, que es una contradicción, porque $\|\eta_n\| \leq 1$. ■

1.2 Contraejemplos

Ya sabemos que todo espacio de Banach X, todo subespacio $Z \subset X$ y todo subconjunto w*-compacto $K \subset X^{**}$ verifican, en general, que $\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), Z) \leq 5\hat{d}(K, Z)$, y si $K \cap Z$ es w*-denso en K, entonces $\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), Z) \leq 2\hat{d}(K, Z)$. En vista de estos resultados cabe hacerse varias preguntas, a saber

(1) Realmente, ¿existen algún espacio de Banach X y algún subconjunto w*-compacto $K \subset X^{**}$ tal que $\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), Z) > \hat{d}(K, Z) > 0$?

(2) ¿Cuál es la constante óptima $1 \leq M < \infty$ tal que $\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), Z) \leq M\hat{d}(K, Z)$ para todo espacio de Banach X, todo subespacio $Z \subset X$ y todo subconjunto w*-compacto $K \subset X^{**}$?

(3) ¿Cuál es la constante óptima $1 \leq M < \infty$ tal que $\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), Z) \leq M\hat{d}(K, Z)$ para todo espacio de Banach X, todo subespacio $Z \subset X$ y todo subconjunto w*-compacto $K \subset X^{**}$ tal que $K \cap Z$ es w*-denso en K?

En la siguiente proposición construimos un espacio de Banach X y dentro de X

(1) un subconjunto w*-compacto $K \subset B_{X^{**}}$ tal que $K \cap X$ es w*-denso en K y $\hat{d}(K, X) = \frac{1}{2}$ pero $\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), X) = 1$. Esto prueba que la constante óptima M de la pregunta (3) verifica $M = 2$.

(2) un subconjunto w*-compacto $H \subset B_{X^{**}}$ tal que $\hat{d}(H, X) = \frac{1}{3}$ pero $\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(H), X) = 1$. Esto prueba que la respuesta a la pregunta (1) es afirmativa y que la constante óptima M de la pregunta (2) verifica $3 \leq M \leq 5$.

Proposición 1.12. *Existe un espacio de Banach X verificando que:*

(A) existe un subconjunto w*-compacto $K \subset B_{X^{**}}$ tal que $K \cap X$ es w*-denso en K y $\hat{d}(K, X) = \frac{1}{2}$ pero $\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), X) = 1$, y

(B) existe un subconjunto w^*-compacto $H \subset B_{X^{**}}$ tal que $\hat{d}(H,X) = \frac{1}{3}$ pero $\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(H),X) = 1$.

Demostración. Consideremos el compacto de Cantor $\mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ y el conjunto $\mathcal{S} = \{0,1\}^{(\mathbb{N})} = \{0,1\} \cup \{0,1\}^2 \cup \{0,1\}^3 \cup \cdots$. Sea λ la probabilidad de Haar sobre $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Si $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots) \in \mathcal{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, ponemos $\sigma_{\restriction n} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathcal{S}$. Si $A \subset \{0,1\}^n$, sea $f_A : \mathcal{C} \to \{0,1\}$ la función continua definida por

$$\forall \sigma \in \mathcal{C},\ f_A(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma_{\restriction n} \in A, \\ 0, & \text{si } \sigma_{\restriction n} \notin A. \end{cases}$$

Claramente para todo $A \subset \{0,1\}^n$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $0 \leq \int_{\mathcal{C}} f_A d\lambda \leq 1$. Sea

$$I = \{f_A : A \subset \{0,1\}^n \text{ con } |A| = 2^n - n \text{ y } n \in \mathbb{N}\},$$

que satisface $|I| = \aleph_0$. Así que podemos identificar I con $\mathbb{N}$. Por ejemplo, ponemos $I = \{f_{A_m} : m \geq 1\}$ y hacemos corresponder $m \in \mathbb{N}$ con $f_{A_m} \in I$. Observemos que:

(1) La familia contable I separa puntos en $\mathcal{C}$.

(2) Para todo $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{f_A \in I : \int_{\mathcal{C}} f_A d\lambda \leq 1 - \frac{1}{k}\}$ es finito. Por tanto, $\lim_{m\to\infty} \int_{\mathcal{C}} f_{A_m}(\sigma) d\lambda(\sigma) = 1$.

(3) Si $\sigma \in \mathcal{C}$, sea $\mathcal{O}(\sigma) = \{f_A \in I : f_A(\sigma) = 0\}$. Dado un subconjunto finito $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \dots \sigma^{(p)} \in \mathcal{C}$, es fácil ver que $|\bigcap_{i=1}^p \mathcal{O}(\sigma^{(i)})^{\epsilon_i}| = \aleph_0$, donde $\epsilon_i = \pm 1$, $\mathcal{O}(\sigma^{(i)})^{+1} = \mathcal{O}(\sigma^{(i)})$ y $\mathcal{O}(\sigma^{(i)})^{-1} = I \setminus \mathcal{O}(\sigma^{(i)})$.

(4) Para todo $f_A \in I$ existe $\sigma \in \mathcal{C}$ tal que $f_A(\sigma) = 1$.

De (3) y (4) obtenemos que el compacto $\mathcal{O} = \bigcap_{\sigma \in \mathcal{C}} \overline{\mathcal{O}(\sigma)}^{\beta I}$ satisface $\emptyset \neq \mathcal{O} \subset I^* := \beta I \setminus I$. Consideremos la función $\psi : \mathcal{C} \to \{0,+1\}^I \subset B_{\ell_\infty(I)}$ tal que

$$\forall i = f_A \in I,\ \forall \sigma \in \mathcal{C},\ \psi(\sigma)(i) = f_A(\sigma).$$

Observemos que ψ es a una función inyectiva y continua, cuando se considera en $\{0,+1\}^I$ la w*-topología de $\ell_\infty(I)$, que coincide con la topología producto de $\{0,+1\}^I$. Así que $D := \psi(\mathcal{C}) \subset \{0,+1\}^I$ es un compacto homeomorfo a $\mathcal{C}$ tal que $\check{D}_{\restriction \mathcal{O}} = 0$. Sea $\mu := \psi(\lambda)$ la probabilidad de Radon sobre D, imagen de λ por la función continua ψ, y $r(\mu) =: z_0 \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(D)$ el baricentro de μ. Por (2) tenemos que $\check{z}_0(p) = +1$, para todo $p \in I^* := \overline{I}^{\beta I} \setminus I$. Por tanto, $\check{z}_0 \restriction \mathcal{O} = +1$.

Por cada $m \in \mathbb{N}$ (que se corresponde con $f_{A_m} \in I$) definimos

$$D_1^m = \{d \in D : \pi_m(d) = 1\},\ D_0^m = \{d \in D : \pi_m(d) = 0\},\ m \geq 1,$$

siendo $\pi_m : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ la proyección que nos da la coordenada m-ésima. Entonces $\mu(D_1^m) \to 1$ y, por tanto, $\mu(D_0^m) = \mu(D \setminus D_1^m) \to 0$ para $m \to \infty$. En efecto, si $m \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\mu(D_m^1) = \int_D \pi_m(x) d\mu(x) = \int_{\mathcal{C}} \pi_m \circ \psi(\sigma) d\lambda(\sigma) = \int_{\mathcal{C}} \psi(\sigma)(f_{A_m}) d\lambda(\sigma) = \int_{\mathcal{C}} f_{A_m}(\sigma) d\lambda(\sigma).$$

Por (2) sabemos que $\lim_{m\to\infty} \int_{\mathcal{C}} f_{A_m}(\sigma)d\lambda(\sigma) = 1$. Por tanto $\mu(D_1^m) \to 1$ para $m \to \infty$.

Sea $X := \{f \in \ell_\infty(I) : \check{f}_{\restriction \mathcal{O}} = 0\}$. Su dual X^* es

$$X^* = \ell_1(I) \oplus_1 M_R(I^*, \mathcal{O}),$$

donde $M_R(I^*, \mathcal{O})$ es el espacio de las medidas de Radon ν sobre I^* tales que $|\nu|(\mathcal{O}) = 0$ ($\oplus_1$ significa la ℓ_1-suma). Observemos que $\ell_1(I) \oplus_1 M_R(I^*, \mathcal{O})$ es un subespacio cerrado complementado de $(\ell_\infty(I))^* = \ell_1(I) \oplus_1 M_R(\beta I \setminus I)$.

El bidual X^{**} de X es

$$X^{**} = \ell_\infty(I) \oplus_\infty M_R(I^*, \mathcal{O})^*,$$

donde $\oplus_\infty$ significa la ℓ_∞-suma. Sean $\pi_1, \pi_2 : X^{**} \to X^{**}$ las proyecciones canónicas sobre los sumandos $\ell_\infty(I)$ y $M_R(I^*, \mathcal{O})^*$, respectivamente. Observemos que los subespacios $\pi_1(X^{**}) = \ell_\infty(I)$ y $\pi_2(X^{**}) = M_R(I^*, \mathcal{O})^*$ son subespacios w*-cerrados de X^{**}. Aún más, la w*-topología $\sigma(X^{**}, X^*)$ coincide sobre $\pi_1(X^{**}) = \ell_\infty(I)$ con la $\sigma(\ell_\infty(I), \ell_1(I))$-topología. Si $x \in X^{**}$ ponemos $x = (x_1, x_2)$, con $\pi_1(x) = x_1 \in \ell_\infty(I)$ y $\pi_2(x) = x_2 \in M_R(I^*, \mathcal{O})^*$. Por tanto, si $J : X \to X^{**}$ es la inmersión canónica y $f \in X$, escribimos $J(f) = (f_1, f_2)$, donde $f_1 = \pi_1(f) = f$ y $\pi_2(f) = f_2$ es tal que $f_2(\nu) = \nu(\check{f}) = \int_{I^*\setminus\mathcal{O}} \check{f} d\nu$, para toda $\nu \in M_R(I^*, \mathcal{O})$. Notemos que el espacio $(\mathcal{B}_{ob}(I^*, \mathcal{O}), \|\cdot\|_\infty)$ de las **funciones borelianas acotadas** $h : I^* \to \mathbb{R}$ que se anulan sobre $\mathcal{O}$ con la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$, se puede considerar isométrica e isomórficamente sumergido en $\pi_2(X^{**}) = M_R(I^*, \mathcal{O})^*$. De hecho, si $f \in X$, entonces $\pi_2(f) = f_2 = \check{f} \in \mathcal{B}_{ob}(I^*, \mathcal{O})$.

(A) La aplicación $\phi : \ell_\infty(I) \to X^{**}$ tal que $\phi(f) = (f, 0)$, $\forall f \in \ell_\infty(I)$, es un isomorfismo isométrico entre $\ell_\infty(I)$ y $\pi_1(X^{**})$ y también un isomorfismo para la $\sigma(\ell_\infty(I), \ell_1(I))$-topología de $\ell_\infty(I)$ y la w*-topología de $\pi_1(X^{**})$. Así que $\phi(D) = \{(d, 0) : d \in D\} \subset B_{X^{**}}$ es un subconjunto w*-compacto de $B_{X^{**}}$ homeomorfo a $\mathcal{C}$. Sea

$$K := \{(f, 0) \in B_{X^{**}} : 0 \le f \le d \text{ para algún } d \in D\}.$$

Es inmediato que K es un subconjunto w*-compacto de $B_{\ell_\infty(I)} \subset B_{X^{**}}$ tal que $\phi(D) \subset K$ y $\overline{K \cap J(X)}^{w^*} = K$.

Aserto 1. $\hat{d}(K, J(X)) = \frac{1}{2}$.

En efecto, sea $(f, 0) \in K$. Entonces, claramente, $\|(f, 0) - \frac{1}{2}J(f)\| = \|(\frac{1}{2}f, -\frac{1}{2}\check{f})\| \le \frac{1}{2}$. En consecuencia, $\hat{d}(K, J(X)) \le \frac{1}{2}$.

Por otra parte, dado $\tau \in \mathcal{C}$, sea $\psi(\tau) =: d_\tau \in D$. Es inmediato que $\operatorname{supp}(d_\tau) = \{i \in I : d_\tau(i) = 1\} =: A_\tau$ es un subconjunto infinito. Afirmamos que $d((d_\tau, 0), J(X)) \ge \frac{1}{2}$. En efecto, de no ser así, existiría $h \in X$ tal que $\|(d_\tau, 0) - J(h)\| = \|(d_\tau, 0) - (h, \check{h})\| < \frac{1}{2}$. Así que $\|d_\tau - h\| < \frac{1}{2}$ en $\ell_\infty(I)$, lo que implica que $\frac{1}{2} < h$ sobre A_τ, de donde $\check{h} \ge \frac{1}{2}$

sobre $\overline{A_\tau}^{\beta I}$. Puesto que A_τ es infinito, existe $p \in \overline{A_\tau}^{\beta I} \setminus I \subset I^*$, que obviamente verifica $\check{h}(p) \geq \frac{1}{2}$. Sea $\delta_p \in M_R(I^*, \mathcal{O})$ la probabilidad de Dirac con masa 1 sobre p. Entonces

$$|((d_\tau, 0) - (h, \check{h}))(\delta_p)| = |0 - \check{h}(\delta_p)| = |-\check{h}(p)| \geq \tfrac{1}{2},$$

de donde $\|(d_\tau, 0) - J(h)\| \geq \frac{1}{2}$, que contradice la hipótesis de partida. Así que $\hat{d}(K, J(X)) \geq \frac{1}{2}$.

Aserto 2. $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), J(X)) = 1$.

En efecto, en primer término $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), J(X)) \leq 1$ porque $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) \subset B_{(X^{**}}$. Por otra parte, sea $\nu := \phi(\mu)$ la probabilidad sobre $\phi(D) \subset K$ imagen de μ por la inyección lineal continua ϕ. Es inmediato ver que el baricentro $r(\nu)$, que es un punto de $\overline{\text{co}}^{w^*}(K)$, verifica $r(\nu) = (z_0, 0)$, siendo $z_0 = r(\mu) \in B_{\ell_\infty(I)}$. Afirmamos que $d((z_0, 0), J(X)) \geq 1$. En efecto, dado $h \in X$, se tiene que $\check{h}_{\restriction \mathcal{O}} = 0$ mientras que $\check{z}_0 \restriction \mathcal{O} = +1$. Así que dado $\epsilon > 0$ existe un entorno abierto V de $\mathcal{O}$ en βI tal que

$$\forall v \in V,\ \check{h}(v) \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ mientras que } \check{z}_0(v) \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}.$$

En particular, $\forall v \in V \cap I$, $\check{h}(v) \leq \frac{\epsilon}{2}$ y $\check{z}_0(v) \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}$, de donde concluimos que $\|z_0 - h\| \geq 1$, es decir, $\|(z_0, 0) - (h, \check{h})\| \geq 1$, lo que prueba que $d((z_0, 0), J(X)) \geq 1$.

(B) Sea $g := \mathbb{1}_{I^* \setminus \mathcal{O}} \in \mathcal{B}_{ob}(I^*, \mathcal{O})$ y consideremos $\Phi : \ell_\infty(I) \to X^{**}$ tal que $\Phi(f) = (f, +\frac{1}{3}g)$, $\forall f \in \ell_\infty(I)$. Φ es una aplicación afín entre $\ell_\infty(I)$ y $\pi_1(X^{**})$, que es continua para la $\sigma(\ell_\infty(I), \ell_1(I))$-topología de $\ell_\infty(I)$ y la w*-topología de $\pi_1(X^{**})$. Así que $\Phi(D) = \{(d, \frac{1}{3}g) : d \in D\} =: H \subset B_{X^{**}}$ es un subconjunto w*-compacto de $B_{X^{**}}$ homeomorfo a $\mathcal{C}$.

Aserto 3. $\hat{d}(H, J(X)) = \frac{1}{3}$.

En efecto, sea $(d, +\frac{1}{3}g) \in H$. Entonces, claramente, $\|(d, +\frac{1}{3}g) - \frac{2}{3}J(d)\| = \|(\frac{1}{3}d, +\frac{1}{3}g - \frac{2}{3}\check{d})\| \leq \frac{1}{3}$. En consecuencia, $\hat{d}(H, J(X)) \leq \frac{1}{3}$.

Por otra parte, dado $\tau \in \mathcal{C}$, sean $\psi(\tau) =: d_\tau \in D$ y $\text{supp}(d_\tau) = \{i \in I : d_\tau(i) = 1\} =: A_\tau$, que es un subconjunto infinito. Afirmamos que $d((d_\tau, +\frac{1}{3}g), J(X)) \geq \frac{1}{3}$. En efecto, de no ser así, existiría $h \in X$ tal que $\|(d_\tau, +\frac{1}{3}g) - J(h)\| = \|(d_\tau - h, +\frac{1}{3}g - \check{h})\| < \frac{1}{3}$. Por tanto $\|d_\tau - h\| < \frac{1}{3}$ en $\ell_\infty(I)$, lo que implica que $\frac{2}{3} < h$ sobre A_τ, de donde $\check{h} \geq \frac{2}{3}$ sobre $\overline{A_\tau}^{\beta I}$. Puesto que A_τ es infinito, existe $p \in \overline{A_\tau}^{\beta I} \setminus I \subset I^*$, que obviamente verifica $\check{h}(p) \geq \frac{2}{3}$. Sea $\delta_p \in M_R(I^*, \mathcal{O})$ la probabilidad de Dirac con masa 1 sobre p. Entonces

$$|((d_\tau, +\tfrac{1}{3}g) - (h, \check{h}))(\delta_p)| = |\ (\tfrac{1}{3}g - \check{h})(\delta_p)| = |\tfrac{1}{3}g(p) - \check{h}(p)| \geq \tfrac{1}{3},$$

de donde $\|(d_\tau, +\frac{1}{3}g) - J(h)\| \geq \frac{1}{3}$, que contradice la hipótesis de partida. Así que $\hat{d}(H, J(X)) \geq \frac{1}{3}$.

Aserto 4. $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(H), J(X)) = 1$.

En efecto, en primer término $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(H), J(X)) \leq 1$ porque $\overline{\text{co}}^{w^*}(H) \subset B_{X^{**}}$. Por otra parte, sea $\rho := \Phi(\mu)$ la probabilidad sobre $\Phi(D) \subset H$ imagen de μ por la inyección afín continua Φ. Como en el caso (A) es inmediato que $r(\rho) = (z_0, +\frac{1}{3}g)$. Afirmamos que $d((z_0, +\frac{1}{3}g), J(X)) \geq 1$. En efecto, dado $h \in X$, se tiene que $\check{h}_{\restriction\mathcal{O}} = 0$ mientras que $\check{z}_0 \restriction \mathcal{O} = +1$. Así que dado $\epsilon > 0$ existe un entorno abierto V de $\mathcal{O}$ en βI tal que

$$\forall v \in V,\ \check{h}(v) \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ mientras que } \check{z}_0(v) \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}.$$

En particular, $\forall v \in V \cap I,\ \check{h}(v) \leq \frac{\epsilon}{2}$ y $\check{z}_0(v) \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}$, de donde concluimos que $\|z_0 - h\| \geq 1$, es decir, $\|(z_0, +\frac{1}{3}g) - (h, \check{h})\| \geq 1$, lo que prueba que $d((z_0, +\frac{1}{3}g), J(X)) \geq 1$. ■

Capítulo 2

Espacios de Banach universalmente Krein-Šmulian

Vamos a dedicar este Capítulo a investigar condiciones para que las distancias $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z)$ estén M-controladas por las distancias $\hat{d}(K, Z)$ (esto es, si existe una constante $1 \leq M < \infty$ tal que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z) \leq M\hat{d}(K, Z)$), cuando Z es un cierto subespacio de un espacio de Banach dual X^* y K un subconjunto w*-compacto de X^*. El estudio que aquí realizamos nos va a conducir a la caracterización de la existencia de copias isomorfas de $\ell_1(\mathfrak{c})$ en un espacio de Banach Z.

En todo lo que sigue convenimos en adoptar la siguiente terminología. Un subconjunto convexo $Z \subset X^*$ del dual X^* de un espacio de Banach X *tiene M-control en X^**, para algún $1 \leq M < \infty$, si $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z) \leq M\hat{d}(K, Z)$ para todo subconjunto w*-compacto $K \subset X^*$. Un subconjunto convexo $Z \subset X^*$ *tiene control en X^** sii Z tiene M-control en X^*, para algún $1 \leq M < \infty$.

El control ejercido por las distancias $\hat{d}(K, Z)$ sobre las distancias $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z)$, para $K \subset X^*$ subconjunto w*-compacto y $Z \subset X^*$ subespacio ó subconjunto convexo, es muy variable. Si $Z \subset X^*$ es un subconjunto convexo w*-cerrado del espacio dual X^* y $K \subset X^*$ es un subconjunto arbitrario, es fácil ver que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z) = \hat{d}(K, Z)$. Veamos este hecho elemental.

Proposición 2.1. *Sean X un espacio de Banach, $Z \subset X^*$ un subconjunto convexo w^*-cerrado de X^* y $W \subset X^*$ un subconjunto arbitrario de X^*. Entonces*

$$\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(W), Z) = \hat{d}(W, Z).$$

Demostración. En primer término, es obvio que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(W), Z) \geq \hat{d}(W, Z) =: a$. Fijemos un punto $w_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(W)$ y sea $\epsilon > 0$. Elegimos una red $\{w_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\} \subset \text{co}(W)$ tal que $w_\alpha \xrightarrow{w^*} w_0$ cuando $\alpha \in \mathcal{A}$. Puesto que $\hat{d}(\text{ co}(W), Z) = \hat{d}(W, Z)$, por cada $\alpha \in \mathcal{A}$ elegimos $z_\alpha \in Z$ tal que $\|w_\alpha - z_\alpha\| < a + \epsilon$. Así que la red $\{w_\alpha - z_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ está dentro de la bola $(a + \epsilon)B(X^*)$, que es un subconjunto w*-compacto. Por tanto, pasando a una subred si fuera preciso, podemos suponer que $w_\alpha - z_\alpha \xrightarrow{w^*} u_0$ para cierto $u_0 \in (a + \epsilon)B(X^*)$.

Como $w_\alpha \overset{w^*}{\to} w_0$, concluimos que $z_\alpha = w_\alpha - (w_\alpha - z_\alpha) \overset{w^*}{\to} w_0 - u_0$ y, también, que $w_0 - u_0 =: z_0 \in Z$ porque Z es w*-cerrado. En consecuencia podemos escribir $w_0 = z_0 + u_0$ con $z_0 \in Z$ y $u_0 \in (a+\epsilon)B(X^*)$, de donde concluimos, al ser $\epsilon > 0$ un número arbitrario, que $d(w_0, Z) \leq \hat{d}(W, Z)$. Por tanto $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(W), Z) = \hat{d}(W, Z)$. ■

Sin embargo, si $Z \subset X^*$ es un subespacio X^*, que no es w*-cerrado, todas las situaciones son posibles, a saber

(A) Hay situaciones en que el control es óptimo, es decir, $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z) = \hat{d}(K, Z)$ para todo subconjunto w*-compacto $K \subset X^*$. En esta Sección mostramos que esto ocurre cuando la bola unidad dual cerrada (B_{Z^*}, w^*) es angélica.

(B) Como vimos en el Capítulo 1, todo espacio de Banach X posee “buen” control en su bidual X^{**}. De hecho, hemos visto que es válida la siguiente extensión del Teorema de Krein-Šmulian : si $Z \subset X$ es un subespacio del espacio de Banach X y $K \subset X^{**}$ es un subconjunto w*−compacto de X^{**}, entonces: (i) Siempre ocurre $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z) \leq 5\hat{d}(K, Z)$ y, si $Z \cap K$ es w*-denso in K, entonces $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z) \leq 2\hat{d}(K, Z)$; (ii) la igualdad $\hat{d}(K, X) = \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X)$ es válida en muchos casos, por ejemplo, si $\ell_1 \not\subset X^*$, si X tiene bola unidad dual cerrada w*-angélica (por ejemplo, si X es WCG ó WLD), si $X = \ell_1(I)$, si K está fragmentado por la norma de X^{**}, etc. Sin embargo, no todo espacio de Banach Y posee control óptimo en su bidual Y^{**}, porque, como ya hemos visto, existen ejemplos de espacios de Banach Y y subconjuntos w*-compactos $K \subset Y^{**}$ tales que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Y) \geq 3\hat{d}(K, Y) > 0$.

(C) Finalmente, existen subespacios $Z \subset X^*$ que no tienen control de ningún tipo en X^*. En esta Sección construimos ejemplos de este comportamiento y caracterizamos esta clase de espacios de Banach.

A continuación introducimos cierta terminología. Si Y es un espacio de Banach y τ una topología vectorial localmente convexa Hausdorf sobre Y más grosera que la de la norma (por ejemplo $\tau = \sigma(Y, Z)$ siendo Z un subespacio de Y^* que separa puntos de Y), se dice que (Y, τ) verifica el *Teorema de Krein-Šmulian* sii para todo subconjunto $\|\cdot\|$-acotado τ-compacto $K \subset Y$ se tiene que $\overline{\text{co}}^\tau(K)$ es τ-compacto. Si, además, $\overline{\text{co}}^\tau(K) = \overline{\text{co}}^{\|\cdot\|}(K)$, entonces se dice que (Y, τ) satisface el *Teorema fuerte de Krein-Šmulian.*

Si X es un espacio de Banach, $Y \subset X^*$ un subespacio cerrado y (Y, w^*) satisface el Teorema de Krein-Šmulian (resp., el Teorema fuerte de Krein-Šmulian), entonces se dice que Y satisface la *propiedad de Krein-Šmulian* (abrev., KSP) en X^* (resp., la KSP *fuerte* en X^*).

Si Y es un espacio de Banach tal que, para todo espacio de Banach X y todo subespacio cerrado $Z \subset X^*$ isomorfo a Y, Z satisface la KSP en X^* (resp., la KSP fuerte en X^*), entonces se dice que Y es *universalmente Krein-Šmulian* (abrev., uKS) (resp., *fuertemente* uKS). Claramente, si un subespacio cerrado $Z \subset X^*$ tiene control en X^*, entonces Z tiene la KSP en X^*.

Un espacio de Banach Y tiene *universalmente M-control* (abrev., $uC(M)$), para algún $1 \leq M < \infty$, si para todo espacio de Banach X y todo subespacio $Z \subset X^*$ isomorfo a Y, $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z) \leq M\hat{d}(K, Z)$ para todo subconjunto w*-compacto $K \subset X^*$. Un espacio de Banach Y tiene *universalmente control* (abrev., uC) si para todo espacio de Banach X y todo subespacio $Z \subset X^*$ isomorfo a Y, Z tiene control en X^*.

En este capítulo mostramos que la clase de los espacios de Banach uKS, la clase de los espacios de Banach fuertemente uKS, la clase de los espacios de Banach que tienen uC y la clase de los espacios de Banach que tienen $uC(3)$ coinciden con la clase $\mathcal{F}$ de los espacios de Banach X que no poseen una copia isomorfa de $\ell_1(\mathfrak{c})$. La clase $\mathcal{F}$ ha sido estudiada por muchos autores, por ejemplo, por Talagrand en [52], por Cascales, Manjabacas y Vera en [7], por Cascales y Shvydkoy en [11], etc. Estos autores prueban interesantes resultados para esta clase $\mathcal{F}$, por ejemplo, si Y es un espacio de Banach, los siguientes asertos son equivalentes: (1) $Y \in \mathcal{F}$; (2) Y no admite a ℓ_∞ como cociente; (3) (B_{Y^*}, w^*) no contiene una copia homeomorfa de $\beta\mathbb{N}$. La clase $\mathcal{F}$ es muy amplia y contiene, entre otros, a los espacios de Banach X con bola unidad dual cerrada (B_{X^*}, w^*) angélica, a los espacios de Banach con la propiedad (C) de Corson, etc.

Empecemos con las siguientes observaciones:

(i) Si $Z \subset X^*$ es un subespacio de un espacio de Banach dual X^* y $u \in X^*$, entonces $d(u, Z) = \sup\{\langle v, u\rangle : v \in B_{Z^\perp}\}$ donde $Z^\perp = \{v \in X^{**} : \langle v, z\rangle = 0, \ \forall z \in Z\}$.

(ii) Trivialmente, la propiedad KSP y la KSP fuerte son propiedades diferentes. En efecto, si X es un espacio de Banach con una copia isomórfica de ℓ_1, entonces X^* tiene la KSP en X^* pero no la KSP fuerte (ver [30]).

La siguiente proposición es elemental.

Proposición 2.2. *Si Y es un espacio de Banach, entonces:*

(1) Y es uKS sii para todo subespacio normante $Z \subset Y^*$, $(Y, \sigma(Y, Z))$ satisface el Teorema de Krein-Šmulian .

(2) Y es fuertemente uKS sii para todo subespacio normante $Z \subset Y^*$, $(Y, \sigma(Y, Z))$ satisface el Teorema fuerte de Krein-Šmulian.

Demostración. (1) Sea Y un espacio de Banach que es uKS y supongamos que $W \subset Y^*$ es un subespacio normante sobre Y. Entonces existe una inmersión isomórfica $i : Y \to W^*$ de modo que $(i(Y), \sigma(W^*, W))$ e $(Y, \sigma(Y, W))$ son isomorfos. Como Y es uKS, entonces $i(Y)$ tiene la KSP en W^* con respecto a la w*-topología $\sigma(W^*, \overline{W})$. Puesto que las topologías $\sigma(W^*, \overline{W})$ y $\sigma(W^*, W)$ coinciden sobre B_{W^*}, concluimos que $(Y, \sigma(Y, W))$ satisface el Teorema de Krein-Šmulian.

Para probar la implicación inversa, sea X un espacio de Banach e $i : Y \to X^*$ una inmersión isomórfica. Sea $i(Y) =: Z \subset X^*$ la copia isomórfica de Y en X^*. Así que $i^*(X) \subset Y^*$ es un subespacio de Y^* normante sobre Y tal que (Z, w^*) e $(Y, \sigma(Y, i^*(X)))$ son isomorfos. Por tanto, si $(Y, \sigma(Y, i^*(X)))$ satisface el Teorema de Krein-Šmulian, entonces Z tiene la KSP en X^*.

(2) Esta prueba es análoga a la de la parte (1). ■

El siguiente Lema es, en esencia, el Lema 1.7 con algunas modificaciones. Para comodidad del lector reproducimos su prueba con los cambios pertinentes.

Lema 2.3. *Sean X un espacio de Banach y K un subconjunto w*-compacto de X^* tal que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(K)) > d \geq 0$. Entonces existen $r_0 \in \mathbb{R}$, $z_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ y $\psi \in S(X^{**})$ tales que $\psi(z_0) > r_0 + d$ y $\psi(k) < r_0$, $\forall k \in K$. Aún más, si μ es una probabilidad de Radon sobre K con baricentro $r(\mu) = z_0$ y $H = \text{supp}(\mu)$(= soporte de μ), entonces:*

(a) Para todo subconjunto w*-abierto V de X^* con $V \cap H \neq \emptyset$ existe $\xi \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap H)$ tal que $\psi(\xi) > r_0 + d$.

(b) Existen una secuencia $\{x_n : n \geq 1\} \subset B_X$ y, para todo par de subconjuntos disjuntos M, N de $\mathbb{N}$, un punto $\eta_{M,N} \in H$ tal que

$$\eta_{M,N}(x_m) \geq r_0 + d, \ \forall m \in M, \quad y \quad \eta_{M,N}(x_n) \leq r_0, \ \forall n \in N.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $K \subset B(X^*)$. Puesto que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(K)) > d \geq 0$, por el Teorema de Hahn-Banach (ver Lema 3.1) existen $r_0 \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, $z \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ y $\psi \in S(X^{**})$ tales que $\psi(z) > r_0 + d + \epsilon$ y $\psi(k) < r_0 - \epsilon$, $\forall k \in K$. Por el Teorema de Bishop-Phelps, existe $\phi \in S(X^{**})$ con $\|\psi - \phi\| \leq \epsilon/4$ tal que ϕ alcanza su máximo valor sobre $\overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ en cierto $z_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$. Así que:

$$\phi(z_0) \geq \phi(z) = \psi(z) + (\phi - \psi)(z) > r_0 + d + \epsilon - \tfrac{1}{4}\epsilon = r_0 + d + \tfrac{3}{4}\epsilon \ , \tag{2.1}$$
$$\psi(z_0) = \phi(z_0) + (\psi - \phi)(z_0) > r_0 + d + \tfrac{3}{4}\epsilon - \tfrac{1}{4}\epsilon = r_0 + d + \tfrac{1}{2}\epsilon \tag{2.2}$$

y para todo $k \in K$

$$\phi(k) = \psi(k) + (\phi - \psi)(k) < r_0 - \epsilon + \tfrac{1}{4}\epsilon < r_0 + d + \tfrac{3}{4}\epsilon < \phi(z_0). \tag{2.3}$$

En particular, observemos que $z_0 \notin K$ por (2.3).

(a) Sea μ una probabilidad de Radon sobre K con baricentro $r(\mu) = z_0$ y soporte $H := \text{supp}(\mu)$ y supongamos que existe un subconjunto w*-abierto V de X^* con $V \cap H \neq \emptyset$ tal que $\psi(\xi) \leq r_0 + d$, para todo $\xi \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap H)$. Denotemos por $\mu_1 = \mu_{\restriction V \cap H}$ a la restricción de μ a $V \cap H$ (esto es, $\mu_1(B) = \mu(B \cap V \cap H)$, para todo subconjunto Borel $B \subset K$) y $\mu_2 := \mu - \mu_1$. Observemos que μ_1 y μ_2 son medidas positivas tales que $\mu_1 \neq 0$ (porque $\emptyset \neq V \cap H = V \cap \text{supp}(\mu)$) y $\mu_2 \neq 0$ (si $\mu_2 = 0$, esto es, $\mu = \mu_1 = \mu_{\restriction V \cap H}$, entonces $z_0 = r(\mu) \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap H)$ y $\psi(z_0) \leq r_0 + d$, lo que contradice a (2.2)). Por tanto se tiene la descomposición $\mu = \mu_1 + \mu_2$ y también:

$$z_0 = r(\mu) = \|\mu_1\| \cdot r(\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|}) + \|\mu_2\| \cdot r(\frac{\mu_2}{\|\mu_2\|}).$$

Puesto que $r(\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|}) \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap H)$, entonces $\psi(r(\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|})) \leq r_0 + d$, de donde $\phi(r(\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|})) \leq r_0 + d + \frac{1}{4}\epsilon$ (porque $\|\psi - \phi\| \leq \epsilon/4$). Por tanto, teniendo en cuenta que $r(\frac{\mu_2}{\|\mu_2\|}) \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$

y (2.1), obtenemos

$$\phi(z_0) = \|\mu_1\|\phi(r(\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|})) + \|\mu_2\|\phi(r(\frac{\mu_2}{\|\mu_2\|})) \leq$$
$$\leq \|\mu_1\|(r_0 + d + \frac{1}{4}\epsilon) + \|\mu_2\|\phi(z_0) < \|\mu_1\|\phi(z_0) + \|\mu_2\|\phi(z_0) = \phi(z_0),$$

una contradicción.

(b) Primero observemos que para todo subconjunto w*-abierto $V \subset X^*$ con $V \cap H \neq \emptyset$ existen $\xi \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap H)$ y $\eta \in \text{co}(V \cap H) \subset \overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap H)$ tales que $\psi(\xi) > r_0 + d$ y $\psi(\eta) < r_0$. En efecto, por (a) existe un punto $\xi \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap H)$ tal que $\psi(\xi) > r_0 + d$. Por otro lado $\psi(k) < r_0$, $\forall k \in K$, de donde obtenemos que $\psi(\eta) < r_0$, para todo $\eta \in \text{co}(V \cap H)$

Así que por [30, 2. LEMMA] existe una secuencia $\{x_n : n \geq 1\} \subset S(X)$ tal que si ponemos

$$A_n = \{\xi \in H : \xi(x_n) > r_0 + d\},\ B_n = \{\eta \in H : \eta(x_n) < r_0\},\ \forall n \geq 1,$$

entonces para todo par de subconjuntos finitos disjuntos $M, N \subset \mathbb{N}$ el subconjunto w*-abierto $V(M, N) := (\bigcap_{m \in M} A_m) \cap (\bigcap_{n \in N} B_n)$ de H es no vacío.

En particular, para todo par de subconjuntos finitos disjuntos $M, N \subset \mathbb{N}$, se tiene

$$\emptyset \neq V(M, N) \subset (\bigcap_{m \in M} \overline{A_m}^{w^*}) \cap (\bigcap_{n \in N} \overline{B_n}^{w^*}) \subset H.$$

Puesto que H es w*-compacto concluimos que para todo par de subconjuntos disjuntos (finitos ó infinitos) $M, N \subset \mathbb{N}$

$$\emptyset \neq (\bigcap_{m \in M} \overline{A_m}^{w^*}) \cap (\bigcap_{n \in N} \overline{B_n}^{w^*}) \subset H.$$

Puesto que $\overline{A_m}^{w^*} \subset \{\xi \in H : \xi(x_m) \geq r_0 + d\}$ y $\overline{B_n}^{w^*} \subset \{\eta \in H : \eta(x_n) \leq r_0\}$, finalmente obtenemos que para todo par de subconjuntos disjuntos (finitos ó infinitos) $M, N \subset \mathbb{N}$ existe $\eta_{M,N} \in H$ tal que

$$\eta_{M,N}(x_m) \geq r_0 + d,\ \forall m \in M, \quad \text{y } \eta_{M,N}(x_n) \leq r_0,\ \forall n \in N.$$

■

Si X es un conjunto, una familia $(A_i, B_i)_{i \in I}$ de pares de partes no vacías de X se dice que es *una familia independiente* si $A_i \cap B_i = \emptyset$, $\forall i \in I$, y para todo subconjunto finito no vacío $F \subset I$ se tiene que $\bigcap_{i \in F} \epsilon_i A_i \neq \emptyset$, siendo $\epsilon_i = \pm 1$, $(+1)A_i := A_i$ y $(-1)A_i := B_i$.

Lema 2.4. *En $\mathbb{N}$ existe una familia independiente $(M_i, N_i)_{i < \mathfrak{c}}$ con cardinal $\mathfrak{c}$.*

Demostración. Consideremos el contraejemplo de la parte (A) de la Proposición 1.12. Con la notación allí utilizada, recordemos que, dado un subconjunto finito $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \ldots, \sigma^{(p)} \in \mathcal{C}$, se tiene que $|\bigcap_{i=1}^{p} \epsilon_i \mathcal{O}(\sigma^{(i)})| = \aleph_0$, donde $\epsilon_i = \pm 1$, $(+1)\mathcal{O}(\sigma^{(i)}) := \mathcal{O}(\sigma^{(i)})$ y $(-1)\mathcal{O}(\sigma^{(i)}) := I \setminus \mathcal{O}(\sigma^{(i)})$. Construimos la familia independiente utilizando como subíndice a $\sigma \in \mathcal{C}$ del siguiente modo

$$\forall \sigma \in \mathcal{C},\ M_\sigma = \mathcal{O}(\sigma),\ N_\sigma = I \setminus \mathcal{O}(\sigma).$$

■

Nota. En el anterior Lema 2.4, por comodidad, hemos utilizado un resultado anterior para deducir que en $\mathbb{N}$ existe una familia independiente con cardinal $\mathfrak{c}$. En realidad este resultado sale del Teorema de Balcar-Franěk (ver [5],[14, p. 120]), que asegura que si X es un espacio topológico compacto Hausdorff extremadamente disconexo con peso $\mathrm{w}(K) = \alpha$, entonces existe una aplicación continua sobreyectiva $f : X \to \{0,1\}^\alpha$. Como $\beta\mathbb{N}$ es extremadamente disconexo y $\mathrm{w}(\beta\mathbb{N}) = \mathfrak{c}$ (ver [54, p. 76]), existe una aplicación continua sobreyectiva $f : \beta\mathbb{N} \to \{0,1\}^\mathfrak{c}$. Sea $\pi_i : \{0,1\}^\mathfrak{c} \to \{0,1\}$, $i < \mathfrak{c}$, la i-ésima proyección y pongamos $A_i := (\pi_i \circ f)^{-1}(1) \cap \mathbb{N}$ y $B_i := (\pi_i \circ f)^{-1}(0) \cap \mathbb{N}$. Se comprueba inmediatamente que $\{(A_i, B_i) : i < \mathfrak{c}\}$ es una familia independiente en $\mathbb{N}$.

En la siguiente proposición establecemos la relación entre la clase $\mathcal{F}$ y las propiedades $uC(3)$ y fuertemente uKS.

Proposición 2.5. *Si Y es un espacio de Banach tal que $Y \in \mathcal{F}$, entonces Y tiene uC(3) y es fuertemente uKS.*

Demostración. Probemos, primeramente, que un espacio de Banach Y tiene $uC(3)$ cuando $Y \in \mathcal{F}$. Claramente, basta probar que, si X es un espacio de Banach y $Z \subset X^*$ es un subespacio cerrado, que no tiene 3-control en X^*, entonces Z contiene una copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$. Supongamos pues que existen un subconjunto w*-compacto $K \subset B_{X^*}$, un punto $z_0 \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$ y dos números positivos a, b tales que $d(z_0, Z) > b > 3a > a > d(K, Z)$. Observemos que el hecho $d(z_0, Z) > b > 3a > a > \hat{d}(K, Z)$ implica que $\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), \overline{\mathrm{co}}(K)) \geq d(z_0, \overline{\mathrm{co}}(K)) > b - a > 0$. Por el Lema 2.3, existen $r_0 \in \mathbb{R}$, una secuencia $\{x_n : n \geq 1\} \subset B_X$ y, para cada par de subconjuntos disjuntos M, N de $\mathbb{N}$, un punto $\eta_{M,N} \in K$ tales que

$$\eta_{M,N}(x_m) \geq r_0 + b - a,\ \forall m \in M, \quad \text{y } \eta_{M,N}(x_n) \leq r_0,\ \forall n \in N.$$

Puesto que $\hat{d}(K, Z) < a$, para todo par de subconjuntos disjuntos $M, N \subset \mathbb{N}$ existe $z_{M,N} \in Z$ tal que $\|z_{M,N} - \eta_{M,N}\| < a$, de donde obtenemos

$$z_{M,N}(x_m) > r_0 + b - 2a,\ \forall m \in M, \quad \text{y } z_{M,N}(x_n) < r_0 + a,\ \forall n \in N. \tag{2.4}$$

Puesto que $r_0 + a < r_0 + b - 2a$, si $(M_i, N_i)_{i<\mathfrak{c}}$ es una familia independiente de partes de $\mathbb{N}$ con cardinal $\mathfrak{c}$ (ver Lema 2.4), se prueba mediante un argumento bien conocido (ver [17, p. 209]) que la familia $\{z_{M_i,N_i} : i < \mathfrak{c}\}$ es equivalente a la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$.

Ahora supongamos que $Y \in \mathcal{F}$ y probemos que Y es fuertemente uKS. En caso contrario, existen un espacio de Banach X y un subespacio $Z \subset X^*$ isomorfo a Y tal que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(K)) > d > 0$ para algún subconjunto w*-compacto $K \subset B_Z$. Por el Lema 2.3, existen $r_0 \in \mathbb{R}$, una secuencia $\{x_n : n \geq 1\} \subset B_X$ y, para todo par de subconjuntos disjuntos M, N de $\mathbb{N}$, un punto $\eta_{M,N} \in K$ tales que

$$\eta_{M,N}(x_m) \geq r_0 + d, \ \forall m \in M, \quad \text{y } \eta_{M,N}(x_n) \leq r_0, \ \forall n \in N.$$

En consecuencia, si $(M_i, N_i)_{i<\mathfrak{c}}$ es una familia independiente de partes de $\mathbb{N}$ con cardinal $\mathfrak{c}$, del argumento de ([17, p. 209]) obtenemos que la familia $\{\eta_{M_i,N_i} : i < \mathfrak{c}\}$ es equivalente a la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$, lo que contradice que $Z \in \mathcal{F}$. ■

Corolario 2.6. *Si Y es un espacio de Banach con $Y \in \mathcal{F}$, entonces $(Y, \sigma(Y, Z))$ satisface el Teorema fuerte de Krein-Šmulian para todo subespacio normante $Z \subset X^*$.*

Demostración. La prueba sale directamente de la Proposición 2.5 y de la Proposición 2.2. ■

Para la clase particular de los espacios de Banach Y con bola dual unidad cerrada (B_{Y^*}, w^*) w*-angélica, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.7. *Si Y es un espacio de Banach con bola dual unidad cerrada (B_{Y^*}, w^*) w^*-angélica, entonces Y es fuertemente uKS y tiene $uC(1)$, esto es, si X es un espacio de Banach y $Z \subset X^*$ es un subespacio isomorfo a Y, entonces para todo subconjunto w^*-compacto $K \subset X^*$ se tiene que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z) = \hat{d}(K, Z)$; aún más, $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) = \overline{\text{co}}(K)$ si $K \subset Z$.*

Demostración. Sea Y un espacio de Banach con bola unidad dual cerrada B_{Y^*} w*-angélica. De la Proposición 2.5 obtenemos que Y tiene $uC(3)$ y es fuertemente uKS, porque un espacio de Banach pertenece a la clase $\mathcal{F}$ siempre que su bola unidad dual cerrada sea w*-angélica.

Supongamos que Y no tiene la propiedad $uC(1)$, es decir, existen un espacio de Banach X, un subespacio $Z \subset X^*$ isomorfo a Y, un subconjunto w*-compacto $K \subset B_{X^*}$ y dos números reales $a, b > 0$ tales que

$$\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Z) > b > a > \hat{d}(K, Z).$$

Cojamos $\epsilon > 0$, $w_0 \in S(X^{**}) \cap Z^{\perp}$ y $u_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ tales que $w_0(u_0) > b + \epsilon$. Denotemos

$$U := \{w \in B_{X^{**}} : \langle w, u_0 \rangle \geq b + \epsilon\} \text{ y } V := \{x \in B_X : \langle u_0, x \rangle \geq b + \epsilon\}.$$

Observemos que $w_0 \in U = \overline{V}^{w^*}$. Si $i : Z \to X^*$ es la inclusión canónica, entonces $i^* : X^{**} \to Z^*$ es una aplicación cociente tal que $i^*(w_0) = 0 \in i^*(U) \subset \overline{i^*(V)}^{w^*}$. Puesto que (B_{Z^*}, w^*) es angélica, existe una secuencia $\{x_n : n \geq 1\} \subset V$ tal que $i^*(x_n) \overset{w^*}{\to} 0$ en la w*-topología $\sigma(Z^*, Z)$. Por tanto, si $y \in B_{X^{**}}$ es un punto w*-límite de $\{x_n : n \geq 1\}$ en $B_{X^{**}}$, entonces $y \in B_{Z^\perp}$ e $y(u_0) \geq b + \epsilon$.

Sea el operador continuo $T : X^* \to \ell_\infty$ tal que $T(u) = (u(x_n))_{n \geq 1}$, $\forall u \in X^*$. Entonces:

(1) $T(Z) \subset c_0$, $\|T\| \leq 1$ y T es w*-w*-continuo sobre los subconjuntos acotados de X^*.

(2) $T(K) =: H \subset B_{\ell_\infty}$ es un subconjunto w*-compacto tal que

$$\hat{d}(H, c_0) \leq \hat{d}(K, Z) < a.$$

(3) Si $v_0 = T(u_0)$, claramente $v_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$, de donde $d(v_0, c_0) < a$ por Corolario 1.5.

Consideremos $\ell_\infty^* = \ell_1 \oplus_1 M_R(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$ (donde $M_R(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$ es el espacio de las medidas de Radon sobre $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$) y sea $\{e_n : n \geq 1\}$ la base canónica del subespacio ℓ_1 de la anterior suma directa. Claramente $T^*(e_n) = x_n$, $n \geq 1$. Sea e_0 un punto w*-límite de $\{e_n : n \geq 1\}$ in $B_{\ell_\infty^*}$. Entonces $y_0 := T^*(e_0)$ es un punto w*-límite de $\{x_n : n \geq 1\}$ en $B_{X^{**}}$ y, por tanto, $y_0 \in Z^\perp$ e $y_0(u_0) \geq b + \epsilon$. Aún más, $e_0 \in c_0^\perp$ y $e_0(v_0) = y_0(u_0) \geq b + \epsilon$, de donde obtenemos $d(v_0, c_0) \geq b + \epsilon > b > a$, una contradicción que prueba el enunciado. ■

NOTA. En la Proposición 3.17 se dan resultados más fuertes que los de Proposición 2.7 para espacios de Banach Y con bola dual unidad cerrada (B_{Y^*}, w^*) w*-angélica.

Corolario 2.8. *Todo espacio de Banach WLD es fuertemente uKS y tiene uC(1).*

Demostración. El enunciado sale de la Prop. 2.7 y del hecho de que todo espacio de Banach WLD tiene bola unidad dual cerrada angélica en la w*-topología (ver [1]). ■

En el siguiente lema vemos que $\ell_1(\mathfrak{c})$ no es uKS.

Lema 2.9. *$\ell_1(\mathfrak{c})$ no es uKS.*

Demostración. Consideremos el espacio de Banach $X = C([0,1])$ y la copia canónica isométrica $Z \subset C([0,1])^* =: M_R([0,1])$ de $\ell_1([0,1])$ dentro del espacio de Banach $M_R([0,1])$ de las medidas de Radon sobre el compacto $[0,1]$. Es bien conocido que existe una copia homeomorfa canónica $K \subset B_{X^*}$ del compacto $[0,1]$ en (B_{X^*}, w^*). Claramente $K \subset B_Z$ y $\overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ es el subconjunto $\mathcal{P}_1([0,1])$ de las probabilidades de Radon sobre $[0,1]$, que satisface $\mathcal{P}_1([0,1]) \nsubseteq Z$. ■

El siguiente resultado es el reverso de la Proposición 2.5.

Proposición 2.10. *Si X es un espacio de Banach universalmente Krein-Šmulian, entonces $X \in \mathcal{F}$.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach tal que $X \notin \mathcal{F}$ (es decir, existe un subespacio $Y \subset X$ isomorfo a $\ell_1([0,1])$) y probemos que X no es uKS. Sea $T : \ell_1([0,1]) \to X$ un isomorfismo sobre su imagen en X tal que $T(\ell_1([0,1])) = Y$. El espacio $C([0,1])$, considerado como un subespacio de $\ell_\infty([0,1]) = \ell_1([0,1])^*$ (esto es, $C([0,1]) = \{f \in \ell_\infty([0,1]) : f$ continua sobre $[0,1]\}$) es 1-normante sobre $\ell_1([0,1])$. Denotemos por τ a la $\sigma(\ell_1([0,1]), C([0,1]))$-topología de $\ell_1([0,1])$.

Sea $E_1 := T^{*-1}(C([0,1])) \subset X^*$. Es fácil ver que el subespacio E_1 es λ_0-normante sobre Y, para cierto $0 < \lambda_0 \leq 1$ dependiendo de T (de hecho, vale $\lambda_0 = \|T^{-1}\|^{-1} \cdot \|T\|^{-1}$), y que

$$T : (\ell_1([0,1]), \tau) \to (Y, \sigma(Y, E_1))$$

es un isomorfismo.

Sea $E_2 = Y^\perp = \{z \in X^* : z(y) = 0, \forall y \in Y\} \subset X^*$ y $E = E_1 + E_2$.

Aserto 1. E es $\frac{\lambda_0}{3}$-normante sobre X.

En efecto, cojamos $u \in S(X)$.

(a) Supongamos que $d(u, Y) < \frac{\lambda_0}{3}$. Sea $y_0 \in Y$ tal que $\|u - y_0\| < \frac{\lambda_0}{3}$. Entonces $\|y_0\| > 1 - \frac{\lambda_0}{3} \geq \frac{2}{3}$ y existe un elemento $e_1 \in S(E_1)$ tal que $e_1(y_0) > \frac{2}{3}\lambda_0$, de donde obtenemos $e_1(u) > \frac{1}{3}\lambda_0$.

(b) Supongamos que $d(u, Y) \geq \frac{\lambda_0}{3}$. Entonces

$$\sup\{e(u) : e \in B_E\} \geq \sup\{e(u) : e \in B_{E_2}\} =$$
$$= \sup\{z(u) : z \in B_{Y^\perp}\} = d(u, Y) \geq \frac{\lambda_0}{3}.$$

Por tanto, E es $\frac{\lambda_0}{3}$-normante sobre X.

Aserto 2. Y es $\sigma(X, E)$-cerrado en $(X, \sigma(X, E))$ y $\sigma(X, E)_{\restriction Y} = \sigma(Y, E_1)$.

En efecto, Y es $\sigma(X, E)$-cerrado porque $Y = \bigcap_{e \in E_2} Ker(e)$ y $\sigma(X, E)_{\restriction Y} = \sigma(Y, E_1)$ porque $E = E_1 + E_2$ y $E_2 = Y^\perp$.

Por el Lema 2.9 existe un subconjunto $K \subset B_{\ell_1([0,1])}$ tal que K es τ-compacto pero $\overline{\text{co}}^\tau(K)$ no es τ-compacto. Sea $H := T(K) \subset Y$. Por el Aserto 2, H es un subconjunto $\|\cdot\|$-acotado $\sigma(X, E)$-compacto de X. Aún más, por el Aserto 2, $\overline{\text{co}}^{\sigma(X,E)}(H) = \overline{\text{co}}^{\sigma(Y,E_1)}(H) \subset Y$ y, por tanto, $\overline{\text{co}}^{\sigma(X,E)}(H)$ no es $\sigma(X, E)$-compacto porque es homeomorfo a $\overline{\text{co}}^\tau(K)$, que no es τ-compacto. Por tanto X no es uKS por la Prop. 2.2. ■

Combinando los resultados anteriores obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.11. *Para un espacio de Banach Y los siguientes asertos son equivalentes:*

(0) Y es universalmente Krein-Šmulian.

(0') Para todo subespacio normante $Z \subset Y^*$, $(Y, \sigma(Y, Z))$ satisface el Teorema de Krein-Šmulian.

(1) Y es fuertemente universalmente Krein-Šmulian.

(1') Para todo subespacio normante $Z \subset Y^*$, $(Y, \sigma(Y, Z))$ satisface el Teorema fuerte de Krein-Šmulian.

(2) Y tiene universalmente 3-control, es decir, para todo espacio de Banach X y todo subespacio $Z \subset X^*$ isomorfo a Y tenemos que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w*}(K), Z) \leq 3\hat{d}(K, Z)$ para todo subconjunto w^*-compacto $K \subset X^*$.

(3) Y tiene universalmente control, es decir, si X es un espacio de Banach y $Z \subset X^*$ es un subespacio isomorfo a Y, existe una constante $1 \leq M < \infty$ tal que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w*}(K), Z) \leq M\hat{d}(K, Z)$, para todo subconjunto w^*-compacto $K \subset X^*$.

(4) Y no tiene una copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$.

Demostración. Por la Prop. 2.2 se verifica $(0) \Leftrightarrow (0')$ y $(1) \Leftrightarrow (1')$. Claramente $(1) \Rightarrow (0)$ y $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (0)$. De la Prop. 2.5 obtenemos $(4) \Rightarrow (1) + (2)$. Finalmente $(0) \Rightarrow (4)$ por Prop. 2.10. ∎

Si $Z \subset X^*$ es un subespacio cerrado del espacio de Banach dual X^*, entonces Z tiene la KSP en X^* siempre que Z tenga control en X^*. ¿Es el aserto inverso cierto? Esto es, ¿tiene Z control en X^* cuando Z verifica la KSP (incluso, la KSP fuerte) en X^*? Mostramos en las siguientes proposiciones que la respuesta es negativa.

Proposición 2.12. *Para todo espacio de Banach Y los siguientes asertos son equivalentes:*

(1) $Y \notin \mathcal{F}$.

(2) Existe un espacio de Banach X tal que para todo $1 \leq M < \infty$ existe un subespacio $Z_M \subset X^*$ isomorfo a Y verificando que Z_M tiene la KSP fuerte en X^* pero Z_M no tiene M-control en X^*.

Demostración. $(2) \Rightarrow (1)$. Esta implicación se sigue de la Prop. 2.5.

$(1) \Rightarrow (2)$. Sea $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach que posee una copia isomorfa de $\ell_1(\mathfrak{c})$. Por la Prop. 2.10 existen un espacio de Banach $(E, |||\cdot|||)$, un subespacio $F \subset E^*$ isomorfo a Y y un subconjunto w*-compacto $K \subset B_F$ tal que $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) \setminus F \neq \emptyset$, es decir, $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), F) > 0$. Sea $\varphi : (Y, \|\cdot\|) \to (F, |||\cdot|||)$ el anterior isomorfismo.

Sea $X_n := Y_n^* \oplus_1 E_n$, donde $Y_n^* := (Y^*, \|\cdot\|)$ y $E_n := (E, |||\cdot|||)$, $\forall n \geq 1$. Nuestro espacio X va a ser $X := \sum_{n\geq 1} \oplus_0 X_n$.

Consideremos el operador $T_n : Y \to X_n^* = Y_n^{**} \oplus_\infty E_n^*,\ n \geq 1$, tal que $T_n(y) = (\frac{1}{n+1}y, \frac{n}{n+1}\varphi(y))$ y pongamos $\tilde{K}_n := \{(0,k) \in X_n^* : k \in K\}$. Claramente T_n es un isomorfismo entre Y y $T_n(Y) =: Z_n$ tal que $\|T_n\| = (\frac{n}{n+1}\|\varphi\|) \vee \frac{1}{n+1}$ y $\tilde{K}_n$ es un subconjunto w*-compacto de X_n^*. Aún más, tenemos:

Aserto 1. $\hat{d}(\tilde{K}_n, Z_n) \leq \frac{1}{n}\|\varphi^{-1}\|$ pero

$$\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(\tilde{K}_n), Z_n) \geq \hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), F) > 0.$$

En efecto, como $K \subset B_F \subset \varphi(\|\varphi^{-1}\|B_Y)$, para todo $k \in K$ existe $y_k \in \|\varphi^{-1}\|B_Y$ con $\varphi(y_k) = k$. Así que

$$d((0,k), Z_n) \leq \|(0,k) - \frac{n+1}{n}T_n(y_k)\| =$$
$$= \|(0,k) - \frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{n+1}y_k, \frac{n}{n+1}\varphi(y_k)\right)\| = \|(-\frac{1}{n}y_k, 0)\| \leq \frac{1}{n}\|\varphi^{-1}\|.$$

Por tanto $\hat{d}(\tilde{K}_n, Z_n) \leq \frac{1}{n}\|\varphi^{-1}\|$.

Por otro lado, como $\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(\tilde{K}_n) = \{(0,h) : h \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)\}$ y $d((0,h), Z_n) \geq d(h, F)$, obtenemos que $\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(\tilde{K}_n), Z_n) \geq \hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), F) > 0$.

Así que, si $1 \leq M < \infty$, eligiendo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $\frac{\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K),F)}{\frac{1}{n}\|\varphi^{-1}\|} > M$, entonces $\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(\tilde{K}_n), Z_n) > M\hat{d}(\tilde{K}_n, Z_n)$, de donde obtenemos que Z_n no posee M-control en X_n^*.

Aserto 2. $\forall n \geq 1,\ \sigma(X_n^*, X_n)_{\restriction Z_n} = \sigma(X_n^*, X_n^{**})_{\restriction Z_n}$ =w-topología de Z_n y, por tanto, Z_n tiene la KSP fuerte en X_n^*.

Claramente, $\sigma(X_n^*, X_n)_{\restriction Z_n}$ es más débil que $\sigma(X_n^*, X_n^{**})_{\restriction Z_n}$ = w-topología de Z_n, $\forall n \geq 1$. Sea $\{T_n(y_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset Z_n$ una red tal que $T_n(y_\alpha) \underset{\alpha\in\mathcal{A}}{\to} T_n(y_o) \in Z_n$ en la $\sigma(X_n^*, X_n)$-topología. Puesto que la proyección canónica sobre la primera coordenada $\pi_1 : X_n^* \to Y_n^{**}$ es w*-w*-continua, obtenemos que $y_\alpha \underset{\alpha\in\mathcal{A}}{\to} y_o$ en la $\sigma(Y^{**}, Y^*)_{\restriction Y}$-topología=w-topología de Y, de donde, por la w-w-continuidad de T_n, obtenemos que $T_n(y_\alpha) \underset{\alpha\in\mathcal{A}}{\to} T_n(y_o)$ en la $\sigma(X_n^*, X_n^{**})_{\restriction Z_n}$-topología de Z_n. Así que $\sigma(X_n^*, X_n)_{\restriction Z_n} = \sigma(X_n^*, X_n^{**})_{\restriction Z_n}$, $\forall n \geq 1$, y, por tanto, Z_n tiene la KSP fuerte en X_n^* porque todo subespacio cerrado de un espacio de Banach satisface el Teorema fuerte de Krein-Šmulian con respecto de la w-topología. ■

Proposición 2.13. *Sean $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach tal que $Y \notin \mathcal{F}$ y $L := \sum_{n\geq 1} \oplus_p Y_n$, donde $Y_n = (Y, \|\cdot\|)$, $\forall n \geq 1$, y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces existen un espacio de Banach X y un subespacio $Z \subset X^*$ isomorfo a L tales que: (i) Z no tiene control en X^*; (ii) Z tiene la KSP en X^*; aún más, si $1 \leq p < \infty$, entonces Z tiene la KSP fuerte en X^*.*

Demostración. Puesto que Y tiene una copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$, podemos hacer la construcción de la prueba de la Prop. 2.12. Así que, con la notación de esta prueba, sean $(E, |||\cdot|||)$ un espacio de Banach con un subespacio $F \subset E^*$ isomorfo a Y, $\varphi : (Y, \|\cdot\|) \to (F, |||\cdot|||)$ un isomorfismo, $K \subset B_F$ un subconjunto a w*-compacto tal que $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) \setminus F \neq \emptyset$ (es decir, $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), F) > 0$), $X_n := Y_n^* \oplus_1 E_n$ con $Y_n^* := (Y^*, \|\cdot\|)$ y $E_n := (E, |||\cdot|||)$, $T_n : Y \to X_n^* = Y_n^{**} \oplus_\infty E_n^*$ un operador tal que $T_n(y) = (\frac{1}{n+1}y, \frac{n}{n+1}\varphi(y))$, $T_n(Y) =: Z_n$ y $\tilde{K}_n := \{(0,k) \in X_n^* : k \in K\}$, $\forall n \geq 1$.

Definamos el espacio de Banach X de la siguiente forma:

(i) Si $p = 1$, sea $X = \sum_{n\geq 1} \oplus_0 X_n$.

(ii) Si $1 < p < \infty$, sea $X = \sum_{n\geq 1} \oplus_q X_n$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(iii) Si $p = \infty$, sea $X = \sum_{n\geq 1} \oplus_1 X_n$.

Claramente $X^* = \sum_{n\geq 1} \oplus_p X_n^*$. Sea $Z := \sum_{n\geq 1} \oplus_p Z_n$. Es fácil ver que Z es isomorfo a $L = \sum_{n\geq 1} \oplus_p Y_n$ y que Z puede considerarse isométricamente inmerso en X^*.

Aserto 1. Z tiene la KSP en X^*.

Primeramente, observemos que si $H_n \subset B_{X_n^*}$, $\forall n \geq 1$, es un subconjunto w*-compacto y

$$H = \{(k_n)_{n\geq 1} : k_n \in H_n, \forall n \geq 1, \text{ y } (\|k_n\|)_{n\geq 1} \in B_{\ell_p}\},$$

entonces $H \subset B_{X^*}$ es un subconjunto w*-compacto de X^*. Aún más, H es convexo siempre que lo sea cada H_n.

Sea $D \subset B_Z$ un subconjunto w*-compacto de X^*. Como la proyección canónica $\pi_m : X^* \to X_m^*$ (tal que $\pi_m((u_n)_{n\geq 1}) = u_m$) es una función w*-w*-continua, se tiene que $D_m := \pi_m(D) \subset B_{X_m^*}$ es un subconjunto w*-compacto de X_m^* tal que $D_m \subset B_{Z_m}$. Como cada Z_m tiene la KSP en X_m^*, obtenemos que $\overline{\text{co}}^{w^*}(D_m) \subset B_{Z_m}$, $\forall m \geq 1$. Así que, si

$$H = \{(k_m)_{m\geq 1} : k_m \in \overline{\text{co}}^{w^*}(D_m), \forall m \geq 1, \text{ y } (\|k_m\|)_{m\geq 1} \in B_{\ell_p}\},$$

entonces $H \subset B_Z$ es un subconjunto convexo w*-compacto de X^* tal que $D \subset H$, de donde $\overline{\text{co}}^{w^*}(D) \subset H \subset Z$. En consecuencia Z tiene la KSP en X^*.

Aserto 2. Si $1 \leq p < \infty$, Z tiene la KSP fuerte en X^*.

En efecto, sea $D \subset B_Z$ un subconjunto w*-compacto y supongamos que $\overline{\text{co}}^{w^*}(D) \neq \overline{\text{co}}(D)$, esto es, existen un punto $z_0 = (z_{0n})_{n\geq 1} \in \overline{\text{co}}^{w^*}(D) \setminus \overline{\text{co}}(D)$, un vector $u \in S(X^{**})$ (donde $X^{**} = \sum_{n\geq 1} \oplus_q X_n^{**}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, si $1 < p < \infty$, y $q = \infty$, si $p = 1$) y un número real $d \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sum_{n\geq 1} \langle u_n, z_{0n}\rangle = \langle u, z_0\rangle > d > \sup\{\langle u, \eta\rangle : \eta \in \text{ co}(D)\}.$$

Sea $\psi : X^* \to \ell_1$ un operador continuo con $\|\psi\| \leq 1$ tal que

$$\forall x^* = (x_n^*)_{n\geq 1} \in X^*, \ \psi(x^*) = (\langle u_n, x_n^*\rangle)_{n\geq 1}.$$

Por el Aserto 2 de la prueba de la Prop. 2.12 se tiene que $\psi_{\restriction B_Z}$ es $\sigma(X^*,X)$- $\sigma(\ell_1,c_0)$-continuo. Así que, como $\overline{\text{co}}^{w^*}(D) \subset B_Z$ (por Aserto 1), obtenemos que $\psi(D) \subset B_{\ell_1}$ es un subconjunto w*-compacto y que $\overline{\text{co}}^{w^*}(\psi(D)) = \psi(\overline{\text{co}}^{w^*}(D)) \subset B_{\ell_1}$.

Sea $S : \ell_1 \to \mathbb{R}$ el operador suma, esto es, $S((y_n)_{n\geq 1}) = \sum_{n\geq 1} y_n$, $\forall (y_n)_{n\geq 1} \in \ell_1$. Claramente $S \circ \psi(x^*) = \langle u, x^* \rangle$, $\forall x^* \in X^*$, y

$$S(\psi(z_0)) = \langle u, z_0 \rangle > d > \sup\{\langle u, \eta \rangle : \eta \in \text{ co}(D)\} =$$
$$= \sup\{S(\psi(\eta)) : \eta \in \text{ co}(D)\} = \sup\{S(v) : v \in \text{ co}(\psi(D))\},$$

de donde concluimos que $\psi(z_0) \in \overline{\text{co}}^{w^*}(\psi(D)) \setminus \overline{\text{co}}(\psi(D))$. Por otra parte, como c_0 no posee copias de ℓ_1, se tiene que $\overline{\text{co}}(K) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ para todo subconjunto w*-compacto $K \subset \ell_1$, por un resultado de Haydon [30]. Por tanto llegamos a una contradicción, que prueba el Aserto 2.

Aserto 3. Z no tiene control en X^*.

En efecto, sea $K_n \subset B_{X^*}$, $\forall n \geq 1$, un subconjunto w*-compacto tal que ,$\forall m \geq 1$, $\pi_m(K_n) = \{0\}$, si $m \neq n$, y $\pi_n(K_n) = \tilde{K}_n = \{(0,k) \in X_n^* : k \in K\}$. Por el Aserto 1 de la prueba de la Prop. 2.12 se tiene que $\hat{d}(K_n, Z) = \hat{d}(\tilde{K}_n, Z_n) \leq \frac{1}{n}\|\varphi^{-1}\|$. Por otra parte

$$\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K_n), Z) = \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(\tilde{K}_n), Z_n) \geq \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), F) > 0.$$

Por tanto Z no tiene control en X^*. ■

Corolario 2.14. *(1) Si J es un conjunto con cardinal card$(J) \geq \aleph_0$, entonces existen un espacio de Banach X y un subespacio $Z \subset X^*$ isomorfo a $\ell_\infty(J)$ tales que Z tiene la KSP en X^* pero Z no tiene control en X^*.*

(2) Si J es un conjunto con cardinal card$(J) \geq \mathfrak{c}$, entonces existen un espacio de Banach X y un subespacio $Z \subset X^*$ isomorfo a $\ell_1(J)$ tales que Z tiene la KSP fuerte en X^* pero Z no tiene control en X^*.

Demostración. Basta aplicar la Prop. 2.13. ■

Capítulo 3

Aplicación a los conjuntos convexos

Hasta ahora hemos considerado dentro de un espacio de Banach dual X^* el control de los subespacios de X^*. El propósito de este capítulo es estudiar la relación entre las distancias $\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), C)$ y $\hat{d}(K, C)$ cuando C es un subconjunto convexo de un espacio de Banach dual X^* y K es un subconjunto w*-compacto de X^*. El comportamiento de la distancia $\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), C)$ con respecto a la distancia $\hat{d}(K, C)$ es variable. Si C es un subconjunto convexo w*-cerrado de X^*, ya sabemos (ver la Proposición 2.1) que $\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), C) = \hat{d}(K, C)$. Sin embargo, si $C \subset X^*$ no es w*-cerrado, todas las situaciones son posibles. En cualquier caso, como luego se verá, el control de C dentro de X^* y la existencia en C de una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$ están íntimamente relacionados.

3.1 El control de los subconjuntos convexos de X dentro de X^{**}

En vista de la extensión del Teorema de Krein-Šmulian para subespacios de X, parece natural preguntarse si existe alguna constante $1 \leq M < \infty$ tal que siempre se verifique $\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), C) \leq M\hat{d}(K, C)$ cuando $C \subset X^{**}$ es un subconjunto convexos de X^{**} y $K \subset X^{**}$ es un subconjunto w*-compacto de X^{**}. Las cosas están como sigue:

(a) Los subconjuntos convexos de un bidual X^{**} carecen, en general, de control dentro de X^{**}. Por ejemplo, si X es un espacio de Banach tal que X^* contiene una copia de ℓ_1, entonces existe un subconjunto w*-compacto H de X^{**} tal que $\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(H), \overline{\mathrm{co}}(H)) > 0$ (ver [30]) y, por tanto, $\overline{\mathrm{co}}(H)$ carece de cualquier tipo de control dentro de X^{**}.

(b) Sin embargo, para la categoría de los subconjuntos convexos C de X vamos a probar que $\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), C) \leq 5\hat{d}(K, C)$, para todo subconjunto w*-compacto $K \subset X^{**}$, y que, si $C \cap K$ es w*-denso en K, entonces $\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), C) \leq 2\hat{d}(K, C)$.

Lema 3.1. *Sea X un espacio de Banach, C un subconjunto convexo de X y $x \in X$. La distancia $d(x,C)$ desde x a C verifica*

$$d(x,C) = \sup_{\varphi \in S(X^*)} \inf\{|\varphi(x-c)| : c \in C\}.$$

Además, si $x \notin \overline{C}$, entonces $d(x,C) = \sup_{\varphi \in S(X^*)} \inf \varphi(x - C)$.

Demostración. Supongamos primeramente que $x \notin \overline{C}$ y que $d(x,C) > a > 0$, es decir, $B(x:a) \cap \overline{C} = \emptyset$. Por el teorema de Hahn-Banach existe $\varphi \in S(X^*)$ tal que $\varphi(x) - a = \inf \varphi(B(x;a)) \geq \sup \varphi(C)$, esto es, $\inf \varphi(x-C) \geq a$. Por otra parte, para todo $\psi \in S(X^*)$ se tiene

$$d(x,C) = \inf\{\|x-c\| : c \in C\} \geq \inf\{|\psi(x-c)| : c \in C\}.$$

Por tanto

$$d(x,C) \geq \sup_{\varphi \in S(X^*)} \inf\{|\varphi(x-c)| : c \in C\} \geq \sup_{\varphi \in S(X^*)} \inf \varphi(x-C) \geq d(x,C),$$

con lo que queda probado el enunciado en este caso.

Finalmente, si suponemos que $x \in \overline{C}$, entonces para todo $\varphi \in S(X^*)$ se verifica $\inf\{|\varphi(x-c)| : c \in C\} = 0$, de donde

$$d(x,C) = 0 = \sup_{\varphi \in S(X^*)} \inf\{|\varphi(x-c)| : c \in C\}.$$

■

En el siguiente lema damos una generalización del Lema 1.6.

Lema 3.2. *Sean X un espacio de Banach y $D \subset C \subset X$ dos subconjuntos convexos de X. Entonces para todo $z \in \overline{D}^{w^*} \subset X^{**}$ se tiene que:*

$$d(z,C) \leq d(z,D) \leq 2d(z,C).$$

Demostración. Claramente $d(z,C) \leq d(z,D)$. Probemos que $d(z,D) \leq 2d(z,X)$. En caso contrario,

(i) para cierto $a > 0$ se tiene que $d(z,D) > 2a > 2d(z,X)$ y que

(ii) existe $w \in X$ tal que $\|w - z\| < a$ y $d(w,D) > a$.

Puesto que $d(w,D) > a$, por el Lema 3.1 existe $x^* \in S(X^*)$ tal que $\inf\{x^*(w-d) : d \in D\} > a$. Cojamos una red $\{d_i\}_{i \in I} \subset D$ tal que $d_i \stackrel{w^*}{\to} z$. Entonces $w - d_i \stackrel{w^*}{\to} w - z$ y, por tanto, $x^*(w-d_i) \to x^*(w-z)$. Puesto que $x^*(w-z) < a$, existe $i_0 \in I$ tal que, $\forall i \geq i_0$, se tiene que $x^*(w-d_i) < a$. Como, por construcción $a < x^*(w-d_i)$, $\forall i \in I$, obtenemos una contradicción que prueba que $d(z,D) \leq 2d(z,X)$. Finalmente observemos que $d(z,X) \leq d(z,C)$. ■

El siguiente lema es una adaptación del Lema 1.7.

Lema 3.3. *Sean X un espacio de Banach, $C \subset X^*$ un subconjunto convexo y K un subconjunto w^*-compacto de X^* tal que existen $a, b > 0$ verificando:*

$$\hat{d}(K, C) < a < b < \hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), C).$$

Entonces existen $z_0 \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$ y $\psi \in S(X^{**})$ con $\inf \psi(z_0 - C) > b$ tales que, si μ es una probabilidad de Radon sobre K con baricentro $r(\mu) = z_0$, se verifica que: (a) μ no tiene átomos; (b) si $H = \mathrm{supp}(\mu)$, para todo subconjunto w^*-abierto V de X^* con $V \cap H \neq \emptyset$ existe $\xi \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(V \cap H)$ tal que $\inf \psi(\xi - C) > b$; y (c) H no está fragmentado por la norma de X^*.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $K \subset B(X^*)$. Elegimos $z \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$ tal que $d(z, C) > b$. Por Lema 3.1 existe $\psi \in S(X^{**})$ tal que $\inf \psi(z - C) > b + \epsilon$ para cierto $\epsilon > 0$, es decir, $\psi(z) > b + \epsilon + \sup \psi(C)$. Por el Teorema de Bishop-Phelps, existe $\phi \in S(X^{**})$ con $\|\psi - \phi\| \leq \epsilon/4$ tal que ϕ alcanza su máximo sobre $\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$ en cierto $z_0 \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$. Así que:

$$\phi(z_0) \geq \phi(z) = \psi(z) + (\phi - \psi)(z) > \sup \psi(C) + b + \epsilon - \tfrac{1}{4}\epsilon = \sup \psi(C) + b + \tfrac{3}{4}\epsilon, \quad (3.1)$$

de donde obtenemos que

$$\psi(z_0) = \phi(z_0) + (\psi - \phi)(z_0) > \sup \psi(C) + b + \tfrac{3}{4}\epsilon - \tfrac{1}{4}\epsilon = \sup \psi(C) + b + \tfrac{1}{2}\epsilon,$$

es decir,

$$\inf \psi(z_0 - C) > b + \tfrac{1}{2}\epsilon. \quad (3.2)$$

Así que $d(z_0, C) > b + \frac{1}{2}\epsilon$ y, por tanto, $z_0 \notin \overline{C}$ y $z_0 \notin K$ (porque $\hat{d}(K, C) < a < b$).

(a) Este apartado es igual que en Lema 1.7.

(b) Sea $H = \mathrm{supp}(\mu)$ y supongamos que existe un subconjunto w*-abierto V de X^* con $V \cap H \neq \emptyset$ tal que $\inf \psi(\xi - C) \leq b$ (es decir, $\psi(\xi) \leq b + \sup \psi(C)$) para todo $\xi \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(V \cap H)$. Denotemos por $\mu_1 = \mu_{\restriction V \cap H}$ a la restricción de μ a $V \cap H$, esto es, $\mu_1(B) = \mu(B \cap V \cap H)$ para todo subconjunto Borel $B \subset K$. Sea $\mu_2 := \mu - \mu_1$. Observemos que μ_1 y μ_2 son medidas positivas tales que

(i) $\mu_1 \neq 0$, porque $\emptyset \neq V \cap H = V \cap \mathrm{supp}(\mu)$, y

(ii) $\mu_2 \neq 0$ pues si $\mu_2 = 0$, esto es, $\mu = \mu_1 = \mu_{\restriction V \cap H}$, entonces $z_0 = r(\mu) \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(V \cap H)$ y $\inf \psi(z_0 - C) \leq b$, que contradice a (3.2).

Por tanto tenemos la descomposición $\mu = \mu_1 + \mu_2$ verificándose que $1 = \|\mu\| = \|\mu_1\| + \|\mu_2\|$ con $\|\mu_1\| \neq 0 \neq \|\mu_2\|$. Así que podemos escribir:

$$z_0 = r(\mu) = \|\mu_1\| \cdot r\left(\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|}\right) + \|\mu_2\| \cdot r\left(\frac{\mu_2}{\|\mu_2\|}\right).$$

Puesto que $r(\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|}) \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap H)$, entonces $\psi(r(\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|})) \leq b + \sup \psi(C)$, de donde $\phi(r(\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|})) \leq b + \frac{1}{4}\epsilon + \sup \psi(C)$ (porque $\|\psi - \phi\| \leq \epsilon/4$). Por tanto, teniendo en cuenta que $r(\frac{\mu_2}{\|\mu_2\|}) \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$, lo que implica que $\phi(r(\frac{\mu_2}{\|\mu_2\|})) \leq \phi(z_0)$, y (3.1) obtenemos

$$\phi(z_0) = \|\mu_1\|\phi(r(\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|})) + \|\mu_2\|\phi(r(\frac{\mu_2}{\|\mu_2\|})) \leq$$
$$\leq \|\mu_1\|(b + \tfrac{1}{4}\epsilon + \sup \psi(C)) + \|\mu_2\|\phi(z_0) < \|\mu_1\|\phi(z_0) + \|\mu_2\|\phi(z_0) = \phi(z_0),$$

una contradicción.

(c) Sea $\eta = b - a$ y supongamos que H está w*-fragmentado por la norma de X^*. Entonces existe un subconjunto w*-abierto V tal que $V \cap H \neq \emptyset$ y $\text{diam}(V \cap H) < \frac{\eta}{2}$. Por tanto, si $h_0 \in V \cap H$, se tiene que $\overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap H) \subset B(h_0; \eta/2)$ (=bola cerrada de centro h_0 y radio $\eta/2$). Observemos que

$$a > d(h_0; C) \geq \inf\{|\psi(h_0 - c)| : c \in C\} \geq \inf \psi(h_0 - C) = \psi(h_0) - \sup \psi(C),$$

de donde $\psi(h_0) < a + \sup \psi(C)$. Por tanto, para todo $\xi \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap H)$, se verifica

$$\psi(\xi) \leq \psi(h_0) + \frac{\eta}{2} < a + \sup \psi(C) + \frac{\eta}{2} < b + \sup \psi(C),$$

lo que contradice a (b). ■

Proposición 3.4. *Sean X un espacio de Banach, $C \subset X$ un subconjunto convexo de X y $K \subset X^{**}$ un subconjunto w*-compacto. Entonces*

$$\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) \leq 5\hat{d}(K, C).$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $0 \in C$. Aceptemos que el enunciado es falso. Entonces existirán un subconjunto w*-compacto K de X^{**} y dos números reales $a, b > 0$ tales que

$$\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) > b > 5a > 5\hat{d}(K, C).$$

Por el Lema 3.3 tenemos el siguiente Hecho:

Hecho. Existe un funcional $\psi \in S(X^{***})$ y un subconjunto w*-compacto $\emptyset \neq H \subset K$ tal que para todo subconjunto w*-abierto V con $V \cap H \neq \emptyset$ existe $\xi \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap H)$ con $\inf \psi(\xi - C) > b$.

Etapa 1. Sea $D_0 = \{0\}$. Aplicando el Hecho con $V = X^{**}$ elegimos $\xi_1 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$ tal que $\inf \psi(\xi_1 - C) > b$, es decir, $\psi(\xi_1) > b + \sup \psi(C)$. Como $B(X^*)$ es un subconjunto w*-denso en $B(X^{***})$, existe $x_1^* \in S(X^*)$ tal que $x_1^*(\xi_1) > b + \sup \psi(C)$. Sea $W_1 := \{u \in X^{**} : \langle u, x_1^* \rangle > b + \sup \psi(C)\}$. Es claro que W_1 es un semiespacio w*-abierto de X^{**} tal que $\xi_1 \in W_1 \cap \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$. Por tanto, como $W_1 \cap H \neq \emptyset$ podemos hallar $\eta_1 \in W_1 \cap H$. Puesto que $d(\eta_1, C) < a$, tenemos la descomposición $\eta_1 = \eta_{1i}^1 + \eta_1^2$ tal que $\eta_1^1 \in C$ y $\eta_1^2 \in aB_{X^{**}}$.

Etapa 2. Sean $D_1 = \{\eta_1^1\} \cup D_0 \subset C$ y $V_1 := W_1$. Como V_1 es un subconjunto w*-abierto tal que $V_1 \cap H \neq \emptyset$, aplicando el Hecho elegimos $\xi_2 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V_1 \cap H)$ tal que $\psi(\xi_2) > b + \sup \psi(C)$. Puesto que D_1 es finito y $\text{mín}\, \psi(\xi_2 - D_1) > b$, existe $x_2^* \in S(X^*)$ tal que $\text{mín}\, x_2^*(\xi_2 - D_1) > b$, es decir, $x_2^*(\xi_2) > b + \text{máx}\, x_2^*(D_1)$. Sea $W_2 := \{u \in X^{**} : \langle u, x_2^* \rangle > b + \sup \psi(C)\}$. Es claro que W_2 es un semiespacio w*-abierto de X^{**} tal que $\xi_2 \in W_2 \cap \overline{\text{co}}^{w^*}(V_1 \cap H)$. De aquí que $W_2 \cap V_1 \cap H \neq \emptyset$ y podemos hallar $\eta_2 \in W_2 \cap V_1 \cap H$. Por tanto, $x_2^*(\eta_2) > b + \text{máx}\, x_2^*(D_1)$, es decir, $\text{mín}\, x_2^*(\eta_2 - D_1) > b$. Además $\text{mín}\, x_1^*(\eta_2 - D_0) > b$ porque $\eta_2 \in V_1$. Puesto que $d(\eta_2, C) < a$, podemos hacer la descomposición $\eta_2 = \eta_2^1 + \eta_2^2$ tal que $\eta_2^1 \in C$ y $\eta_2^2 \in aB(X^{**})$.

Etapa 3. Sean $D_2 = \{\eta_2^1\} \cup D_1 \subset C$ y $V_2 = W_2 \cap V_1$, que es un subconjunto w*-abierto tal que $V_2 \cap H \neq \emptyset$. Aplicando el Hecho elegimos $\xi_3 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V_2 \cap H)$ tal que $\psi(\xi_3) > b + \sup \psi(C)$. Puesto que D_2 es finito y $\text{mín}\, \psi(\xi_3 - D_2) > b$, existe $x_3^* \in S(X^*)$ tal que $\text{mín}\, x_3^*(\xi_3 - D_2) > b$, es decir, $x_3^*(\xi_3) > b + \text{máx}\, x_3^*(D_2)$. Sea $W_3 := \{u \in X^{**} : \langle u, x_3^* \rangle > b + \sup \psi(C)\}$. Es claro que W_3 es un semiespacio w*-abierto de X^{**} tal que $\xi_3 \in W_2 \cap \overline{\text{co}}^{w^*}(V_2 \cap H)$. De aquí que $W_3 \cap V_2 \cap H \neq \emptyset$ y podemos hallar $\eta_3 \in W_3 \cap V_2 \cap H$. Por tanto, $x_3^*(\eta_3) > b + \text{máx}\, x_3^*(D_2)$, es decir, $\text{mín}\, x_3^*(\eta_3 - D_2) > b$ y, además, $\text{mín}\, x_i^*(\eta_3 - D_{i-1}) > b$ porque $\eta_3 \in V_i,\ i = 1, 2$. Puesto que $d(\eta_3, C) < a$, podemos hacer la descomposición $\eta_3 = \eta_3^1 + \eta_3^2$ tal que $\eta_3^1 \in C$ y $\eta_3^2 \in aB(X^{**})$.

Reiterando, obtenemos las secuencias $\{x_n^*\}_{n\geq 1} \subset S(X^*)$, $\{\eta_k : k \geq 1\} \subset H$, $D_k = \{\eta_k^1\} \cup D_{k-1}$, $\eta_k = \eta_k^1 + \eta_k^2$ con $\eta_k^1 \in C$ y $\eta_k^2 \in aB(X^{**})$, $k \geq 1$, tales que $\text{mín}\, x_i^*(\eta_k - D_{i-1}) > b$, para todo $k \geq i$.

Sean $D = \overline{\text{co}}(\cup_{k\geq 1} D_k) \subset \overline{C}$ y:

$$K_1 = \overline{\{\eta_i^1 : i \geq 1\}}^{w^*} \subset (K + aB(X^{**})) \cap \overline{D}^{w^*}.$$

Sea η_0 un punto w*-límite de $\{\eta_k\}_{k\geq 1}$.

Aserto 1. $d(\eta_0, D) < 5a$.

En efecto, claramente $\eta_0 \in H \cap (K_1 + aB(X^{**}))$. Observemos que:

(i) Puesto que $K_1 \subset K + aB(X^{**})$, obtenemos que $\hat{d}(K_1, C) \leq \hat{d}(K, C) + a < 2a$.

(ii) Puesto que $K_1 \subset \overline{D}^{w^*}$, por el Lema 3.2 obtenemos $\hat{d}(K_1, D) \leq 2\hat{d}(K_1, C) < 4a$.

Por tanto, como $\eta_0 \in K_1 + aB(X^{**})$, finalmente concluimos que $d(\eta_0, D) < 5a$.

Aserto 2. $d(\eta_0, D) \geq b$.

En efecto, sea $\phi \in B_{X^{***}}$ un punto w*-límite de $\{x_n^*\}_{n\geq 1}$. Puesto que $\text{mín}\, x_n^*(\eta_k - D_{n-1}) > b$ para $k \geq n$, entonces $\text{mín}\, x_n^*(\eta_0 - D_{n-1}) \geq b,\ \forall n \geq 1$. De aquí que $\inf \phi(\eta_0 - D) \geq b$ y, por tanto, $d(\eta_0, D) \geq b$.

Puesto que $b > 5a$ obtenemos una contradicción, que completa la prueba. ■

Proposición 3.5. *Sean X un espacio de Banach, $C \subset X$ un subconjunto convexo de X y $K \subset X^{**}$ un subconjunto w^*-compacto tal que $K \cap C$ es w^*-denso en K. Entonces $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) \leq 2\hat{d}(K, C)$.*

Demostración. Supongamos que existe un subconjunto w*-compacto $K \subset B(X^{**})$ con $C \cap K$ w*-denso en K tal que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) > b > 2a > 2\hat{d}(K, C)$ para ciertos números $a, b > 0$. A continuación razonamos como en Proposición 3.4 pero introduciendo los siguientes cambios. Como $C \cap K$ es w*-denso en K y $V_k \cap H \neq \emptyset$, también $V_k \cap C \cap K \neq \emptyset$, $\forall k \geq 0$. Así que elegimos $\eta_k \in V_k \cap K \cap C,\ k \geq 1$, y hacemos $\eta_k^1 = \eta_k$ y $\eta_k^2 = 0$. Ahora $K_1 = \overline{\{\eta_k^1 : k \geq 1\}}^{w^*} = \overline{\{\eta_k : k \geq 1\}}^{w^*} \subset K$ y, por tanto, $\hat{d}(K_1, C) \leq \hat{d}(K, C) < a$, de donde $\hat{d}(K_1, D) < 2a$. Finalmente todo punto w*-límite η_0 de $\{\eta_k : k \geq 1\}$ satisface $\eta_0 \in K_1,\ d(\eta_0, D) < 2a$ y $d(\eta_0, D) \geq b$, una contradicción. ■

3.2 La distancia a subconjuntos convexos de espacios de Banach duales

Sea X un espacio de Banach, $C \subset X^*$ un subconjunto convexo y $W \subset X^*$ un subconjunto w*-compacto. Nuestro propósito en esta sección es estudiar la relación entre la distancia $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(W), C)$ y la distancia $\hat{d}(W, C)$. Un resultado elemental aparece en la Proposición 2.1 .

Definición 3.6. *Si X es un espacio de Banach, un subconjunto $\mathcal{A} \subset X^*$ se dice que es una w^*-$\mathbb{N}$-familia de anchura $\delta > 0$ si $\mathcal{A}$ es acotado y tiene la forma*

$$\mathcal{A} := \{\eta_{M,N} : M, N \text{ subconjuntos disjuntos de } \mathbb{N}\},$$

de modo que existen dos secuencias $\{r_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{x_n : n \geq 1\} \subset B(X)$ tales que para todo par de subconjuntos disjuntos M, N de $\mathbb{N}$ se verifica

$$\eta_{M,N}(x_m) \geq r_m + \delta,\ \forall m \in M, \quad y \quad \eta_{M,N}(x_n) \leq r_n,\ \forall n \in N.$$

Si además $r_m = r_0,\ \forall m \geq 1$, entonces se dice que $\mathcal{A}$ es una w^*-$\mathbb{N}$-familia uniforme de anchura $\delta > 0$.

Nota 3.7. (1) Si $\mathcal{F} := \{\eta_{M,N} :\ M, N$ subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}\}$ es una w*-$\mathbb{N}$-familia en el espacio de Banach dual X^* y si $(M_i, N_i)_{i<\mathfrak{c}}$ es una familia independiente de partes de $\mathbb{N}$ con cardinal $\mathfrak{c}$, entonces se prueba mediante un argumento bien conocido (ver [17, p. 209]) que la familia $\{\eta_{M_i,N_i} : i < \mathfrak{c}\}$ es equivalente a la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$. Aún más, el mismo argumento de [17, p. 206] prueba que la secuencia $\{x_n : n \geq 1\} \subset B(X)$ asociada a $\mathcal{F}$ es equivalente a la base de ℓ_1.

(2) Por tanto, si un espacio de Banach dual X^* posee una w^*-$\mathbb{N}$-familia, entonces X posee una copia de ℓ_1. Y viceversa, si X posee una copia de ℓ_1, entonces X^* contiene una w^*-$\mathbb{N}$-familia. En efecto, sea $i : \ell_1 \to X$ un isomorfismo entre ℓ_1 e $i(\ell_1)$. Sea $i^* : X^* \to \ell_\infty$ su operador adjunto, que es un operador cociente tal que $B(\ell_\infty) \subset i^*(\|i^{-1}\| B(X^*))$. Por

cada par M, N de subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}$ elegimos $\eta_{M,N} \in \|i^{-1}\|B(X^*)$ tal que $i^*(\eta_{M,N}) = \mathbf{1}_M - \mathbf{1}_N$. Entonces $\{\eta_{M,N} : M, N$ subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}\}$ es una w^*-$\mathbb{N}$-familia en X^*.

(3) Por (1) si un subconjunto Y de un espacio de Banach dual X^* contiene una w*-$\mathbb{N}$-familia, cierto subconjunto de Y es equivalente a la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$. Al revés no es verdad, en general, pues si tomamos, por ejemplo, en el espacio dual $\ell_1(\mathfrak{c}) = c_0(\mathfrak{c})^*$ el conjunto $Y := B(\ell_1(\mathfrak{c}))$, entonces Y contiene una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$ y, sin embargo, Y no posee ninguna w*-$\mathbb{N}$-familia porque $c_0(\mathfrak{c})$ carece de copias de ℓ_1.

(4) Sea $\mathcal{A} = \{\eta_{M,N} : M, N$ subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}\}$ una w*-$\mathbb{N}$-familia de anchura $\delta > 0$ en el espacio de Banach dual X^*, asociada a las secuencias $\{r_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{x_m : m \geq 1\} \subset B(X)$. Afirmamos que para todo $0 < \eta < \delta$ existe un subconjunto infinito $\mathbb{N}_\eta \subset \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{A}_\eta := \{\eta_{M,N} : M, N$ subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}_\eta\}$ es una w*-$\mathbb{N}$-familia uniforme de anchura $\eta > 0$ asociada a la secuencia $\{x_m : m \in \mathbb{N}_\eta\} \subset B(X)$ y a cierto número $r_0 \in \mathbb{R}$. En efecto, como la secuencia $\{r_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ es acotada, existe cierto $r_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{N}_\eta := \{m \in \mathbb{N} : r_0 + \eta - \delta \leq r_m \leq r_0\}$ es un conjunto infinito. Ahora es fácil ver que $\mathcal{A}_\eta := \{\eta_{M,N} : M, N$ subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}_\eta\}$ es una w*-$\mathbb{N}$-familia uniforme de anchura $\eta > 0$ asociada a r_0 y a la secuencia $\{x_m : m \in \mathbb{N}_\eta\} \subset B(X)$.

(5) Si X es un espacio de Banach y $A \subset X^*$ es un subconjunto, entonces es fácil ver que A posee una w*-$\mathbb{N}$-familia sii la posee $\overline{A}$.

(6) Observemos que si A es un subconjunto de un espacio de Banach X, entonces A posee una copia de la base de $\ell_1(\tau)$, siendo τ un cierto cardinal, sii $\overline{A}$ posee una copia de la base de $\ell_1(\tau)$. En efecto, sea $\{u_i : i < \tau\} \subset \overline{A}$ una copia de la base de $\ell_1(\tau)$ verificando para cierto $0 < C < \infty$ que

$$C^{-1} \sum_{i<\tau} |\lambda_i| \leq \| \sum_{i<\tau} \lambda_i u_i \| \leq C \sum_{i<\tau} |\lambda_i|, \ \forall (\lambda_i)_{i<\tau} \in \ell_1(\tau).$$

Si $e_i \in A$ es tal que $\|e_i - u_i\| \leq \frac{C^{-1}}{2}$, $i < \tau$, entonces se ve fácilmente que $\{e_i : i < \tau\}$ es equivalente a la base de $\ell_1(\tau)$ ya que se verifica

$$\tfrac{1}{2} C^{-1} \sum_{i<\tau} |\lambda_i| \leq \| \sum_{i<\tau} \lambda_i e_i \| \leq (C + \tfrac{1}{2} C^{-1}) \sum_{i<\tau} |\lambda_i|.$$

Proposición 3.8. *(a) Sean X un espacio de Banach y K un subconjunto w*-compacto de X^* tal que no hay en K una w*-$\mathbb{N}$-familia (por ejemplo, si no hay en K una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$). Entonces $\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K) = \overline{\mathrm{co}}(K)$.*

(b) Sean X un espacio de Banach y C un subconjunto convexo de X^* tal que no hay en C una w*-$\mathbb{N}$-familia (por ejemplo, si no hay en C una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$). Entonces C tiene 3-control dentro de X^*.

Demostración. (a) En caso contrario existiría un subconjunto $K \subset B(X^*)$ w*-compacto tal que $\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), \overline{\mathrm{co}}(K)) > d > 0$. Del Lema 2.3 se sigue que existen $r_0 \in \mathbb{R}$, una secuencia $\{x_n : n \geq 1\} \subset B(X)$ y para todo par de subconjuntos disjuntos M, N de $\mathbb{N}$ un punto $\eta_{M,N} \in K$ tales que

$$\eta_{M,N}(x_m) \geq r_0 + d, \ \forall m \in M, \quad \text{y} \quad \eta_{M,N}(x_n) \leq r_0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, existe en K una w*-$\mathbb{N}$-familia, lo que contradice el enunciado.

(b) Supongamos que C no tiene 3-control dentro de X^*. Entonces existe un subconjunto w*-compacto K de X^* y dos números reales $a, b > 0$ tales que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) > b > 3a > 3\hat{d}(K, C)$. Como $\hat{d}(\overline{\text{co}}(K), C) = \hat{d}(K, C) < a$, obtenemos $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(K)) > b - a > 0$. Por el Lema 2.3 existen un número real $r_0 \in \mathbb{R}$, una secuencia $\{x_n : n \geq 1\} \subset B(X)$ y, para todo par de subconjuntos disjuntos M, N de $\mathbb{N}$, un vector $\eta_{M,N} \in K$ tales que

$$\eta_{M,N}(x_m) \geq r_0 + b - a, \ \forall m \in M, \quad \text{y} \quad \eta_{M,N}(x_n) \leq r_0, \ \forall n \in N.$$

Como $\hat{d}(K, C) < a$, por cada par de subconjuntos disjuntos M, N de $\mathbb{N}$, elegimos $z_{M,N} \in C$ tal que $\|z_{M,N} - \eta_{M,N}\| < a$. Por tanto, la familia

$$\mathcal{F} := \{z_{M,N} : M, N \text{ subconjuntos disjuntos de } \mathbb{N}\}$$

es acotada y satisface

$$z_{M,N}(x_m) \geq r_0 + b - 2a, \ \forall m \in M, \quad \text{y} \quad z_{M,N}(x_n) \leq r_0 + a, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puesto que $r_0 + b - 2a = r_0 + a + (b - 3a) > r_0 + a$, la familia $\mathcal{F}$ es una w*-$\mathbb{N}$-familia en C, lo que contradice el enunciado. ■

Nota 3.9. Para un conjunto convexo C, los asertos "C tiene 3-control dentro de X^*" y "C carece de una w*-$\mathbb{N}$-familia" no son equivalente, en general. Por ejemplo, si $C := B(\ell_\infty)$, C tiene una w*-$\mathbb{N}$-familia (esto es trivial) y, también, C tiene 1-control (y, por tanto, 3-control) dentro de ℓ_∞ porque C es w*-cerrado (ver Proposición 2.1). El aserto "C carece de una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$" se puede caracterizar como sigue.

Proposición 3.10. *Sea X un espacio de Banach y C un subconjunto convexo de X^*. Los siguientes asertos son equivalentes:*

(1) C carece de una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$.

(2) C tiene universalmente 3-control, esto es, si $\overline{[C]}$ es (isomorfo a) un subespacio de algún espacio de Banach dual Z^*, entonces C tiene 3-control dentro de Z^*.

(3) C tiene universalmente control, esto es, si $\overline{[C]}$ es (isomorfo a) un subespacio de algún espacio de Banach dual Z^*, entonces C tiene control dentro de Z^*.

Demostración. **1 ⇒ 2** se sigue de la Proposición 3.8 y **2 ⇒ 3** es obvio.

3 ⇒ 1. Supongamos que C posee una copia K de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$ y sea $Z := \overline{[C]}$. Del argumento de la prueba de la Proposición 2.10 se deduce que existe un subespacio cerrado V de Z^* normante respecto de Z tal que K es $\sigma(Z, V)$-compacto pero $\overline{K}^{\sigma(Z,V)}$ no es $\sigma(Z,V)$-compacto. Sea $i : Z \to V^*$ la inmersión canónica tal que $i(z)(v) = \langle v, z\rangle$, $\forall z \in Z$, $\forall v \in V$. Entonces $i(K)$ es un subconjunto w*-compacto de V^* tal que $i(K) \subset i(C)$, aunque $\overline{\text{co}}^{w^*}(i(K)) \setminus i(Z) \neq \emptyset$ y, por tanto, $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(i(K)), i(C)) > 0$. Así que $i(C)$ no tiene control dentro de V^*, lo que contradice (3). ■

A continuación vamos a utilizar el siguiente resultado debido a Talagrand [52].

Proposición 3.11. *(Talagrand [52]) Sean τ un cardinal con cofinalidad verificando cf$(\tau) > \aleph_0$, X un espacio de Banach y $A \subset X$ un subconjunto. Los siguientes enunciados son equivalentes*

(1) A posee una copia de la base de $\ell_1(\tau)$.

(2) $\overline{\text{co}}(A)$ posee una copia de la base de $\ell_1(\tau)$.

(3) En $\overline{[A]}$ hay una copia de $\ell_1(\tau)$.

Demostración. Las implicaciones (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) son obvias.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sean $E := \overline{[A]}$ y $T : \ell_1(\tau) \to E$ un isomorfismo entre $\ell_1(\tau)$ y su imagen. Su adjunto $T^* : E^* \to \ell_\infty(\tau)$ es un operador cociente que es w*-w*-continuo. Sean $0 < \eta$ tal que $\eta B(\ell_\infty(\tau)) \subset T^*(B(E^*))$ y $W := T^{*-1}(B(\ell_\infty(\tau))) \cap \frac{1}{\eta}B(E^*)$. Es inmediato que se puede tomar W como la bola unidad de E^* para una cierta norma dual $|||\cdot|||$ equivalente a la norma dada. Con esta nueva norma se tiene obviamente que $T^*(B((E^*, |||\cdot|||))) = T^*(W) = B(\ell_\infty(\tau)) = [-1,1]^\tau$. Por [52, Theorem 4] se concluye que A posee una copia de la base de $\ell_1(\tau)$. ■

Nota. El requisito cf$(\tau) > \aleph_0$ en la proposición anterior es necesario (y también suficiente). En efecto, sean τ un cardinal con cf$(\tau) = \aleph_0$ y τ_n, $n \geq 1$, ordinales verificando $\tau_n < \tau_{n+1} < \tau$ y $\bigcup_{n\geq 1} \tau_n = \tau$. Sea $\{e_i : i < \tau\}$ la base canónica de $\ell_1(\tau)$. Consideremos el subconjunto $A \subset \ell_1(\tau)$ tal que $A := \bigcup_{n\geq 1}\{\frac{1}{n}e_i : i < \tau_n\}$. Es inmediato que $\ell_1(\tau) = \overline{[A]}$ y, sin embargo, A no posee una copia de la base de $\ell_1(\tau)$.

Corolario 3.12. *Sean X un espacio de Banach y A un subconjunto de X^* que carece de una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$. Entonces:*

(1) Para todo subconjunto w-compacto K de $\overline{[A]}$ se verifica que $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) = \overline{\text{co}}(K)$.*

(2) Todo subconjunto convexo C de $\overline{[A]}$ tiene 3-control dentro de X^*.

Demostración. Primero, observemos que $\overline{[A]}$ carece de una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$, por la Proposición 3.11 y porque cf$(\mathfrak{c}) > \aleph_0$ ya que para todo cardinal infinito α se verifica cf$(2^\alpha) > \alpha$ (ver [31, p. 78]) y $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. Ahora basta aplicar la Proposición 3.8. ■

Corolario 3.13. *Sean X un espacio de Banach y W un subconjunto de X^*. Entonces*

(1) Supongamos que W es w-Lindelöf. Entonces: (i) C tiene 3-control dentro de X^* si C es un subconjunto convexo de $\overline{[W]}$; (ii) $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) = \overline{\text{co}}(K)$ si K es un subconjunto w-compacto de $\overline{[W]}$.*

(2) Supongamos que W es un subconjunto cerrado convexo con la propiedad (C) de Corson. Entonces: (i) C tiene 3-control dentro de X^* si C es un subconjunto convexo de $\overline{[W]}$; (ii) $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) = \overline{\text{co}}(K)$ si K es un subconjunto w^*-compacto de $\overline{[W]}$.

Demostración. (1) En primer término, W no puede tener una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$ porque una tal copia es un subconjunto w-cerrado pero no w-Lindelöf. Ahora basta aplicar el Corolario 3.12.

(2) Recordemos que un subconjunto cerrado convexo F de un espacio de Banach *tiene la propiedad* (C) *de Corson* si $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$ siendo $\{C_i : i \in I\}$ una familia de subconjuntos convexos cerrados de F con la propiedad de la intersección contable, esto es, $\bigcap_{i\in J} C_i \neq \emptyset$ para toda familia contable $J \subset I$. Observemos que, si un subconjunto cerrado convexo F tiene la propiedad (C), entonces F carece de una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$. En efecto, en caso contrario sea $\mathcal{F} := \{u_\sigma : \sigma < \mathfrak{c}\} \subset F$ una familia de vectores equivalente a la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$ y $C_\sigma := \overline{\text{co}}(\mathcal{F} \setminus \{u_\sigma\})$. Claramente, la familia $\{C_\sigma : \sigma < \mathfrak{c}\}$ tiene la propiedad de la intersección contable y sin embargo $\bigcap_{\sigma<\mathfrak{c}} C_\sigma = \emptyset$. Por tanto, en el caso que nos ocupa, W carece de una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$ y podemos aplicar el Corolario 3.12. ■

Nota 3.14. En [51, Problem 4.5] Talagrand pregunta si $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) = \overline{\text{co}}(K)$ siendo K un subconjunto w*-compacto w-Lindelöf de un espacio de Banach dual X^*. Cascales, Namioka y Vera probaron en [10, Corollary E] (ver también [9, Theorem 4.5]) que todo subconjunto w*-compacto w-Lindelöf de un espacio de Banach dual X^* está fragmentado por la norma de X^*. Por tanto, aplicando [40, Theorem 2.3], estos autores dan una respuesta afirmativa a la cuestión planteada por Talagrand. Como acabamos de ver, este resultado es un caso particular de la Proposición 3.8 porque un subconjunto w-Lindelöf carece de copias de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$.

3.3 Subconjuntos convexos de espacios de Banach con bola dual angélica

En esta Sección vamos a extender la Proposición 2.7 a los subconjuntos convexos de los espacios de Banach Y que tienen bola dual $B(Y^*)$ w*-angélica. Comenzaremos probando algunos lemas auxiliares.

Lema 3.15. *Sean K un espacio compacto Hausdorff con $|K| \geq 2$, $\mu \in M_R(K)$ una medida de Radon sobre K y $f \in C(K)$ una función real continua sobre K. Sea $\mu = \mu^+ - \mu^-$ la descomposición de μ en sus partes positiva y negativa. Existen puntos distintos $p_1, p_2 \in K$ tales que*

$$\|\mu^+\| f(p_1) - \|\mu^-\| f(p_2) \geq \mu(f).$$

Demostración. Sean p_1, p_2 dos puntos distintos de K tales que

$$f(p_1) = \text{máx}\{f(p) : p \in K\} \text{ y } f(p_2) = \text{mín}\{f(p) : p \in K\}.$$

Con esta elección se cumple el enunciado porque

$$\mu^+(f) = \int_K f(k)d(\mu^+) \leq \int_K f(p_1)d(\mu^+) = \|\mu^+\|f(p_1),$$
$$\mu^-(f) = \int_K f(k)d(\mu^-) \geq \int_K f(p_2)d(\mu^-) = \|\mu^-\|f(p_2),$$

de donde $\|\mu^+\|f(p_1) - \|\mu^-\|f(p_2) \geq \mu^+(f) - \mu^-(f) = \mu(f)$. ■

Si I es un conjunto infinito, denotaremos por $\mathbf{c}(I)$ al subespacio de $\ell_\infty(I)$ integrado por los elementos que son constantes sobre $I^* = \beta I \setminus I$.

Proposición 3.16. *Sea I un conjunto infinito y $C \subset \mathbf{c}(I) \subset \ell_\infty(I)$ un subconjunto convexo. Entonces para todo subconjunto w^*-compacto $K \subset \ell_\infty(I)$ se verifica que*

$$\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) = \hat{d}(K, C).$$

Demostración. Sea $K \subset X^*$ un subconjunto w*-compacto. Sin pérdida de generalidad (practicando una homotecia si fuera preciso), podemos suponer que $K \subset B(X^*)$.

Caso trivial. Supongamos que $K \subset c(I)$. Puesto que $\mathbf{c}(I)$ no posee copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$, de Proposición 3.8 se deduce que $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) = \overline{\text{co}}(K)$, por lo que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) = \hat{d}(K, C)$.

El caso no trivial. Supongamos que $K \setminus \mathbf{c}(I) \neq \emptyset$. Esto implica que $\hat{d}(K, C) > 0$. Supongamos que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) > \hat{d}(K, C)$. En tal caso para ciertos números reales $a, b > 0$ se verifica

$$\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) > b > a > \hat{d}(K, C).$$

De aquí que existen un vector $w_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K) \setminus \overline{C}$ y un funcional $\varphi_0 \in S(\ell_\infty^*(I))$ (ver el Lema 3.1) tales que $\inf \varphi_0(w_0 - C) > b$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $a + \epsilon < b$. Como $\ell_\infty^*(I) = \ell_1(I) \oplus_1 M_R(I^*)$ ($M_R(I^*)$ es el espacio de las medidas de Radon sobre I^*), se tiene la descomposición $\varphi_0 = \varphi_{01} + \varphi_{02}$ con $\varphi_{01} \in \ell_1(I)$, $\varphi_{02} \in M_R(I^*)$ y $1 = \|\varphi_{01}\| + \|\varphi_{02}\|$. Sea $\varphi_{02} = \varphi_{02}^+ - \varphi_{02}^-$ la descomposición de φ_{02} en sus partes positiva y negativa, y pongamos $\lambda_1 := \|\varphi_{02}^+\|$ y $\lambda_2 := \|\varphi_{02}^-\|$. Por el Lema 3.15 existen dos puntos distintos $p_1, p_2 \in I^*$ tales que

$$\lambda_1 \breve{w}_0(p_1) - \lambda_2 \breve{w}_0(p_2) \geq \varphi_{02}(\breve{w}_0).$$

Puesto que $\breve{w}_0$ es continuo sobre βI, existen dos subconjuntos disjuntos infinitos V_1, V_2 de I tales que

(i) $p_i \in \overline{V_i}^{\beta I}$, $i = 1, 2$.

(ii) para todo $v_i \in \overline{V_i}^{\beta I}$, $i = 1, 2$, se verifica

$$\lambda_1 \breve{w}_0(v_1) - \lambda_2 \breve{w}_0(v_2) > \varphi_{02}(\breve{w}_0) - \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Como V_1, V_2 son subconjuntos disjuntos infinitos de I, podemos elegir dos secuencias de puntos distintos dos a dos $\{d_n : n \geq 1\} \subset V_1$ y $\{e_n : n \geq 1\} \subset V_2$. Obviamente se verifica

$$\lambda_1 \breve{w}_0(d_n) - \lambda_2 \breve{w}_0(e_m) > \varphi_{02}(\breve{w}_0) - \tfrac{\epsilon}{2}, \ \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Sea μ la probabilidad de Radon sobre K tal que $r(\mu) = w_0$. Definamos la aplicación lineal $T_n : \ell_\infty(I) \to \mathbb{R}$ tal que $T_n(f) = \varphi_{01}(f) + \lambda_1 f(d_n) - \lambda_2 f(e_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y toda $f \in \ell_\infty(I)$. Claramente T_n es $\|\cdot\|$-continua y w^*-continua verificando $\|T_n\| \leq 1$. Aún más

$$\varphi_0(w_0) - \tfrac{\epsilon}{2} < T_n(w_0) = T_n(r(\mu)) = \int_K T_n(f) d\mu.$$

Sea $A_n := \{f \in K : T_n(f) > \varphi_0(w_0) - \epsilon\}$, $\forall n \geq 1$.

Aserto 1. $\mu(A_n) \geq \frac{\epsilon}{2}$, $\forall n \geq 1$.

En efecto, para todo $n \geq 1$ se verifica

$$\begin{aligned}\varphi_0(w_0) - \tfrac{\epsilon}{2} < T_n(w_0) = \int_K T_n(f) d\mu = \int_{A_n} T_n(f) d\mu + \int_{K \setminus A_n} T_n(f) d\mu \leq \\ \leq \mu(A_n) + \varphi_0(w_0) - \epsilon.\end{aligned}$$

Por tanto $\mu(A_n) \geq \epsilon/2$, $\forall n \geq 1$.

Sea $B_n := \bigcup_{m \geq n} A_m$ para todo $n \geq 1$. La secuencia $\{B_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente y satisface $\mu(B_n) \geq \frac{\epsilon}{2}$ para todo $n \geq 1$. De aquí que $\mu(\bigcap_{n\geq 1} B_n) \geq \frac{\epsilon}{2}$ y, por tanto, $\bigcap_{n\geq 1} B_n \neq \emptyset$. Elijamos $g \in \bigcap_{n\geq 1} B_n$ e, inductívamente, la secuencia $\{A_{n_i}\}_{i\geq 1}$, $n_i < n_{i+1}$, tal que $g \in A_{n_i}$ para todo $i \geq 1$. Entonces

$$\varphi_{01}(g) + \lambda_1 g(d_{n_i}) - \lambda_2 g(e_{n_i}) = T_{n_i}(g) > \varphi_0(w_0) - \epsilon, \ \forall i \geq 1.$$

Por un argumento de compacidad, podemos elegir dos puntos distintos $q_1 \in \overline{\{d_{n_i} : i \geq 1\}}^{\beta I} \setminus I \subset \overline{V_1}^{\beta I}$ y $q_2 \in \overline{\{e_{n_i} : i \geq 1\}}^{\beta I} \setminus I \subset \overline{V_2}^{\beta I}$ tales que

$$\varphi_{01}(g) + \lambda_1 \breve{g}(q_1) - \lambda_2 \breve{g}(q_2) \geq \varphi_0(w_0) - \epsilon. \tag{3.3}$$

Sea $\psi_0 := \varphi_{01} + (\lambda_1 \delta_{q_1} - \lambda_2 \delta_{q_2})$. Observemos que ψ_0 pertenece a $S(\ell_\infty^*(I))$.

Aserto 2. $\inf \psi_0(g - C) \geq b - \epsilon$.

En efecto, si $c \in C$ entonces $c \in \mathbf{c}(I)$ y, por tanto, $\check{c}$ es constante sobre I^*. Así que

$$\begin{aligned}\psi_0(c) = \varphi_{01}(c) + (\lambda_1 \delta_{q_1} - \lambda_2 \delta_{q_2})(\check{c}) = \varphi_{01}(c) + (\lambda_1 - \lambda_2)\check{c}(q_1) = \\ = \varphi_{01}(c) + \varphi_{02}(\check{c}) = \varphi_0(c).\end{aligned}$$

Por tanto teniendo en cuenta (3.3) y que $\inf \varphi_0(w_0 - C) > b$, para todo $c \in C$, deducimos que

$$\begin{aligned}\langle \psi_0, g - c\rangle = \varphi_{01}(g) + (\lambda_1 \breve{g}(q_1) - \lambda_2 \breve{g}(q_2)) - \varphi_0(c) \geq \\ \geq \varphi_0(w_0) - \epsilon - \varphi_0(c) = \langle \varphi_0, w_0 - c\rangle - \epsilon > b - \epsilon.\end{aligned}$$

En consecuencia, del Lema 3.1 obtenemos $d(g, C) \geq b - \epsilon$. Por otra parte, como $g \in K$, entonces $d(g, C) < a$ por hipótesis. Así que $b - \epsilon < a$ y esto contradice la elección de ϵ y completa la prueba. ■

Proposición 3.17. *Sean X un espacio de Banach, Y un subespacio cerrado de X^* con bola unidad dual cerrada $B(Y^*)$ w^*-angélica y $C \subset Y$ un subconjunto convexo. Entonces para todo subconjunto w^*-compacto $K \subset X^*$ se tiene que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) = \hat{d}(K, C)$. Aún más, $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) = \overline{\text{co}}(K)$ para todo subconjunto w^*-compacto $K \subset Y$.*

Demostración. Supongamos que existen un subconjunto w*-compacto $K \subset B(X^*)$ y dos números reales $0 < a, b < 1$ tales que

$$\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) > b > a > \hat{d}(K, C).$$

Sea $w_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ tal que $d(w_0, C) > b$. Por Lema 3.1 existe $\varphi_0 \in S(X^{**})$ tal que $\inf\{\langle \varphi_0, w_0 - c\rangle : c \in C\} > b$. Sea $0 < \epsilon$ tal que $b + \epsilon < \inf\{\langle \varphi_0, w_0 - c\rangle : c \in C\}$ y denotemos

$$U := \{\varphi \in B(X^{**}) : \langle \varphi, w_0\rangle \geq \langle \varphi_0, w_0\rangle - \epsilon\} \text{ y } V := \{x \in B_X : \langle w_0, x\rangle \geq \langle \varphi_0, w_0\rangle - \epsilon\}.$$

Observemos que $\varphi_0 \in U$ y que, al ser $\langle \varphi_0, w_0\rangle - \epsilon < 1$, también $U = \overline{V}^{w^*}$. Si $i : Y \to X^*$ es la inclusión canónica, entonces $i^* : X^{**} \to Y^*$ es una aplicación cociente tal que $i^*(\varphi_0) \in i^*(U) = \overline{i^*(V)}^{w^*} \subset B(Y^*)$. Puesto que (B_{Y^*}, w^*) es una bola angélica, existe una secuencia $\{x_n : n \geq 1\} \subset V$ tal que $i^*(x_n) \xrightarrow{w^*} i^*(\varphi_0)$ en la w*-topología $\sigma(Y^*, Y)$. Sea el operador continuo $T : X^* \to \ell_\infty$ tal que $T(u) = (u(x_n))_{n\geq 1},\ \forall u \in X^*$. Se tiene que:

(1) T es un operador $\|\cdot\|$-continuo con $\|T\| \leq 1$ y, además, T es w*-w*-continuo sobre los subconjuntos acotados de X^*.

(2) Como $i^*(x_n) \xrightarrow{w^*} i^*(\varphi_0)$, para todo $y \in Y$ se tiene que $y(x_n) = i^*(x_n)(y) \to i^*(\varphi_0)(y)$ por lo que $T(Y) \subset \mathbf{c} := \mathbf{c}(\mathbb{N})$.

Sean $\tilde{C} := T(C)$ y $T(K) =: H \subset B(\ell_\infty)$. Es claro que H es un subconjunto w*-compacto de $B(\ell_\infty)$ tal que $\hat{d}(H, \tilde{C}) \leq \hat{d}(K, C) < a$ por ser la norma $\|T\| \leq 1$. Sea $v_0 = T(w_0)$, que verifica claramente $v_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$. Consideremos $\ell_\infty^* = \ell_1 \oplus_1 M_R(\beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N})$ (donde $M_R(\beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N})$ es el espacio de las medidas de Radon sobre $\beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$) y sea $\{e_n : n \geq 1\}$ la base canónica del subespacio ℓ_1 que aparece en la anterior suma directa. Es inmediato que $T^*(e_n) = x_n,\ n \geq 1$. Sea η_0 un punto w*-límite de $\{e_n : n \geq 1\}$ en $B(\ell_\infty^*)$, que verifica claramente $\eta_0 \in S(\ell_\infty^*)$.

<u>Aserto.</u> $\inf\{\langle \eta_0, v_0 - \tilde{c}\rangle : \tilde{c} \in \tilde{C}\} \geq b$.

En efecto, en primer lugar $T^*(\eta_0)$ es un punto w*-límite de $\{x_n : n \geq 1\}$ en $B(X^{**})$. Por tanto

(i) $T^*(\eta_0) \in U$, de donde $\langle T^*(\eta_0), w_0\rangle \geq \langle \varphi_0, w_0\rangle - \epsilon$.

(ii) Si $c \in C$, para todo $n \geq 1$ se tiene

$$\langle e_n, Tc\rangle = \langle T^*(e_n), c\rangle = \langle x_n, c\rangle \to \langle \varphi_0, c\rangle,$$

por lo que $\langle \eta_0, Tc\rangle = \langle \varphi_0, c\rangle$. En consecuencia, para todo $c \in C$ se tiene

$$\begin{aligned}\langle \eta_0, v_0 - Tc\rangle = \langle \eta_0, Tw_0 - Tc\rangle = \langle T^*(\eta_0), w_0 - c\rangle \geq \langle \varphi_0, w_0\rangle - \epsilon - \langle \varphi_0, c\rangle = \\ = \langle \varphi_0, w_0 - c\rangle - \epsilon > b + \epsilon - \epsilon = b,\end{aligned}$$

y esto prueba el Aserto.

Por Lema 3.1 obtenemos que $d(v_0, \tilde{C}) \geq b$. Por otra parte, de la Proposición 3.16 se deduce que $d(v_0, \tilde{C}) < a$. Hemos llegado a una contradicción que prueba que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C) = \hat{d}(K, C)$. Finalmente, la última afirmación del enunciado es consecuencia de Proposición 3.8 y de que Y no posee una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$. ■

Capítulo 4

La w*-clausura convexa versus la $\|\cdot\|$-clausura convexa

En este Capítulo, dado un cierto subconjunto w*-compacto $K \subset X^*$ de un espacio de Banach dual X^*, nos dedicaremos a dar condiciones necesarias y suficientes, e intrínsecas respectos de K, para que se verifique $\overline{\text{co}}^{w^*}(H) = \overline{\text{co}}(H)$ para todo subconjunto w*-compacto $H \subset K$. En el Capítulo anterior se vio (Proposición 3.8) que si un subconjunto w*-compacto K de un espacio de Banach dual X^* no posee una w*-$\mathbb{N}$-familia, entonces goza de lo que denominaremos *propiedad* (P), que definimos de la siguiente manera:

Definición 4.1. *Un subconjunto $Y \subset X^*$ de un espacio de Banach dual X^** tiene la propiedad (P) *si todo subconjunto w*-compacto $H \subset Y$ verifica que $\overline{\text{co}}^{w^*}(H) = \overline{\text{co}}(H)$.*

Nota. Observemos que si $Y \subset X^*$ es un subespacio cerrado de un espacio de Banach dual X^*, entonces Y posee la propiedad (P) si y sólo si Y tiene la propiedad KSP fuerte (ver el Capítulo “Espacios de Banach universalmente Krein-Šmulian”)

Haydon [30] caracterizó la propiedad (P) en espacios de Banach duales X^*, considerados globalmente, de la siguiente forma: X^* tiene la propiedad (P) sii X no posee una copia de ℓ_1 sii todo elemento $z \in X^{**}$ es universalmente medible sobre (X^*, w^*). Ocurre, sin embargo, que aunque X posea una copia de ℓ_1, hay en X^* subconjuntos que poseen la propiedad (P), lo que indica que la propiedad (P) es una propiedad “local ”. En consecuencia, se puede pensar en dar una caracterización de la propiedad (P) de tipo “intrínseco”, que es lo que, entre otras cosas, hacemos en este Capítulo. Comenzaremos probando varios lemas técnicos y dando algunas definiciones.

Lema 4.2. *Sea $K = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \subset B(\ell_\infty)$ el compacto de Cantor $\mathcal{C}$ visto como un subconjunto w*-compacto de $(B(\ell_\infty), w^*)$. Existe un subconjunto w*-compacto $D \subset K$, homeomorfo a $\mathcal{C}$, tal que $\overline{\text{co}}(D) \subsetneq \overline{\text{co}}^{w^*}(D)$. Aún más, existe un vector $z_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(D)$ tal que $1 = d(z_0, \overline{\text{co}}(D)) = \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(D), \overline{\text{co}}(D))$.*

Demostración. Vamos a utilizar la construcción (y la notación) de la Proposición 1.12. En esta proposición, si $A \subset \{0,1\}^n$, se definía la función continua $f_A : \mathcal{C} \to \{0,1\}$ del siguiente modo

$$\forall \sigma \in \mathcal{C},\ f_A(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma\restriction_n \in A, \\ 0, & \text{si } \sigma\restriction_n \notin A. \end{cases}$$

Sea

$$I = \{f_A : A \subset \{0,1\}^n \text{ con } |A| = 2^n - n \text{ y } n \in \mathbb{N}\},$$

que satisface $|I| = \aleph_0$. Así que, en lugar de ℓ_∞, pondremos $\ell_\infty(I)$ y el subconjunto w*-compacto $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \subset B(\ell_\infty)$ será ahora $\{0,1\}^I \subset B(\ell_\infty(I))$. Consideremos la función $\psi : \mathcal{C} \to \{0,+1\}^I \subset B(\ell_\infty(I))$ tal que

$$\forall i = f_A \in I,\ \forall \sigma \in \mathcal{C},\ \psi(\sigma)(i) = f_A(\sigma).$$

que es a una función inyectiva y continua, cuando se considera en $\{0,+1\}^I$ la w*-topología de $\ell_\infty(I)$, que coincide con la topología producto de $\{0,+1\}^I$. Así que $D := \psi(\mathcal{C}) \subset \{0,+1\}^I$ es un compacto homeomorfo a $\mathcal{C}$ tal que $\check{d}\restriction_{\mathcal{O}} = 0$ para todo $d \in D$ (ver Proposición 1.12). Sean λ la probabilidad de Haar sobre $\mathcal{C}$, $\mu := \psi(\lambda)$ la probabilidad de Radon sobre D, imagen de λ por la función continua ψ, y $r(\mu) =: z_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(D)$ el baricentro de μ. Sabemos que $\check{z}_0(p) = +1$, para todo $p \in \overline{I}^{\beta I} \setminus I$. Sea $p \in \mathcal{O}$ y consideremos $\delta_p \in \ell_\infty(I)^*$. Se tiene que $\delta_p(z_0) = \check{z}_0(p) = +1$, pero $\delta_p(d) = \check{d}(p) = 0,\ \forall d \in D$. Por tanto $1 \le d(z_0, \overline{\text{co}}(D)) \le \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(D), \overline{\text{co}}(D))$. Como $\overline{\text{co}}^{w^*}(D) \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$ y $\text{diam}([0,1]^{\mathbb{N}}) \le 1$, finalmente obtenemos $1 = d(z_0, \overline{\text{co}}(D)) = \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(D), \overline{\text{co}}(D))$. ■

Definición 4.3. *Sea K un subconjunto w^*-compacto del espacio de Banach dual X^*.*

(1) Un subconjunto $\mathcal{A}$ de X^* es un esqueleto de Cantor de anchura $\delta > 0$ si y sólo si $\mathcal{A}$ es un subconjunto acotado de la forma $\mathcal{A} = \{k_\sigma : \sigma \in \mathcal{C}\}$ y existen una secuencia de números reales $\{a_n : n \ge 1\} \subset \mathbb{R}$ y una secuencia de vectores $\{x_m : m \ge 1\} \subset B(X)$ tales que, para todo $\sigma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ y todo $m \ge 1$, se tiene $\langle k_\sigma, x_m\rangle \le a_m$, si $\sigma(m) = 0$, y $\langle k_\sigma, x_m\rangle \ge a_m + \delta$, si $\sigma(m) = 1$. Aún más, si $a_n = a$, $\forall n \ge 1$, decimos que $\mathcal{A}$ es un esqueleto de Cantor uniforme. Un subconjunto $\mathcal{K}$ de K es un esqueleto de Cantor de K si $\mathcal{K}$ es esqueleto de Cantor y además $\overline{\mathcal{K}}^{w^*} = K$.

(2) Definimos el P-índice de K (abrev., $Pind(K)$) y la anchura de K (abrev., $Width(K)$) de la siguiente forma:

$$Pind(K) := \sup\{\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(H), \overline{\text{co}}(H)) : H \textit{ subconjunto } w^*\textit{-compacto de } K\}$$

y

$$Width(K) := \sup\{d \ge 0 : \textit{ existe un esqueleto de Cantor } \mathcal{A} \subset K \textit{ de anchura } \ge d\}.$$

Nota 4.4. Sea K un subconjunto w^*-compacto del espacio de Banach dual X^*. Claramente K tiene la propiedad P si y sólo si $Pind(K) = 0$. Supongamos que $\mathcal{A} = \{k_\sigma : \sigma \in$

$\mathcal{C}\}$ es un esqueleto de Cantor de K (por tanto $\overline{\mathcal{A}}^{w^*} = K$) de anchura $\delta > 0$ asociado a las secuencias $\{a_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{x_m : m \geq 1\} \subset B(X)$. Entonces

(1) Para todo $k \in K$ y todo $m \geq 1$ ó bien $\langle k, x_m \rangle \leq a_m$ ó bien $\langle k, x_m \rangle \geq a_m + \delta$. Aún más, si definimos la aplicación $\Phi : K \to \mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ como

$$\forall k \in K,\ \forall m \geq 1,\ \Phi(k)(m) = \begin{cases} 1, & \text{si } \langle k, x_m \rangle \geq a_m + \delta \\ 0, & \text{si } \langle k, x_m \rangle \leq a_m, \end{cases}$$

entonces Φ es una aplicación continua que verifica $\Phi(K) = \mathcal{C}$.

(2) En general, ni K es homeomorfo a $\mathcal{C}$ ni K contiene un subespacio homeomorfo a $\mathcal{C}$. En efecto, cojamos el compacto $\beta\mathbb{N}$ considerado homeomórficamente sumergido en $(B(C(\beta\mathbb{N})^*), w^*)$. Es claro que $\overline{\text{co}}(\beta\mathbb{N}) \subsetneq \overline{\text{co}}^{w^*}(\beta\mathbb{N})$ porque $\overline{\text{co}}(\beta\mathbb{N})$ es el conjunto de las probabilidades puramente atómicas sobre $\beta\mathbb{N}$ y $\overline{\text{co}}^{w^*}(\beta\mathbb{N})$ es el conjunto de las probabilidades de Radon sobre $\beta\mathbb{N}$. Este hecho implica (aplicando la siguiente Proposición 4.8) que existe un subconjunto w^*-compacto K de $\beta\mathbb{N}$ que posee un esqueleto de Cantor uniforme con respecto a $C(\beta\mathbb{N})^*$. Sin embargo K no contiene una copia homeomorfa a $\mathcal{C}$ porque $\beta\mathbb{N}$ carece de secuencias convergentes que no sean triviales.

(3) Para todo $0 < \eta < \delta$ existen un subconjunto infinito $\mathbb{N}_\eta \subset \mathbb{N}$, un número real a_η y un subconjunto $\mathcal{A}_\eta \subset \mathcal{A}$ tales que $\mathcal{A}_\eta$ es un esqueleto de Cantor uniforme de anchura η asociado al número a_η y a la secuencia $\{x_m : m \in \mathbb{N}_\eta\} \subset B(X)$. En efecto, puesto que la familia $\{a_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ es acotada, existe $a_\eta \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{N}_\eta := \{m \in \mathbb{N} : a_\eta + \eta - \delta \leq a_m \leq a_\eta\}$ es un conjunto infinito. Sea $\pi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}_\eta}$ la proyección canónica y para cada $\tau \in \{0,1\}^{\mathbb{N}_\eta}$ elegimos $\sigma(\tau) \in \pi^{-1}(\tau)$. Definimos $h_\tau := k_{\sigma(\tau)}$ por cada $\tau \in \{0,1\}^{\mathbb{N}_\eta}$. Es fácil ver que $\mathcal{A}_\eta := \{h_\tau : \tau \in \{0,1\}^{\mathbb{N}_\eta}\}$ es un esqueleto de Cantor uniforme de anchura $\eta > 0$ asociado a $a_\eta \in \mathbb{R}$ y a la secuencia $\{x_m : m \in \mathbb{N}_\eta\} \subset B(X)$.

(4) A pesar de que K tiene un esqueleto de Cantor $\mathcal{A} = \{k_\sigma : \sigma \in \mathcal{C}\}$, no es verdad, en general, que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(K)) > 0$. En efecto, consideremos en ℓ_∞ el subconjunto w*-compacto $K := \mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, que es esqueleto de Cantor de anchura 1 de sí mismo y satisface $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) = \overline{\text{co}}(K) = [0,1]^{\mathbb{N}}$. En el siguiente lema se describen algunas de las consecuencias de la existencia de un esqueleto de Cantor dentro de un subconjunto w*-compacto.

Lema 4.5. *Sea K un subconjunto w^*-compacto del espacio de Banach dual X^* tal que K contiene un esqueleto de Cantor de anchura $\delta > 0$. Entonces existe un subconjunto w^*-compacto H de K tal que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(H), \overline{\text{co}}(H)) \geq \delta$ y, por tanto, $Pind(K) \geq \delta$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} := \{k_\sigma : \sigma \in \mathcal{C}\}$ un esqueleto de Cantor de anchura $\delta > 0$ dentro de K. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $K = \overline{\mathcal{A}}^{w^*}$.

(A) Primeramente supongamos que K es un subconjunto w^*-compacto de ℓ_∞ y que $\mathcal{A} := \{k_\sigma : \sigma \in \mathcal{C}\}$ es un esqueleto de Cantor uniforme de anchura $\delta = 1$ de K de modo que, para cada $\sigma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ y para todo $m \geq 1$, se tiene que $\pi_m(k_\sigma) \leq 0$, si

$\sigma(m) = 0$, y $\pi_m(k_\sigma) \geq 1$, si $\sigma(m) = 1$. Consideremos la anterior aplicación continua $\Phi : K \to \mathcal{C}$ tal que ,$\forall k \in K$, $\Phi(k)(m) = 1$, si $k_m \geq 1$, y $\Phi(k)(m) = 0$, si $k_m \leq 0$. Claramente $\Phi(K) = \mathcal{C}$. Sea $i : C(\mathcal{C}) \to C(K)$ la inclusión isométrica canónica tal que ,$\forall f \in C(\mathcal{C})$, $i(f) = f \circ \Phi$ y $i^* : C(K)^* \to C(\mathcal{C})^*$ su operador adjunto. Claramente i^* es una aplicación cociente, que es $\|\cdot\|$-continua y también w^*-w^*-continua. Aún más, $i^*(B(C(K)^*)) = B(C(\mathcal{C})^*)$ y $i^*(P_R(K)) = P_R(\mathcal{C})$, donde $P_R(K)$ y $P_R(\mathcal{C})$ son los espacios de las probabilidades de Radon sobre K y $\mathcal{C}$, respectivamente. Por la prueba del Lema 4.2 existen un subconjunto w^*-compacto $D \subset \mathcal{C} \subset \ell_\infty$ y una probabilidad de Radon μ sobre D tal que, si $z_0 = r(\mu)$(= baricentro de μ), entonces $z_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(D) \setminus \overline{\text{co}}(D)$. Sea

$$D_1^m = \{d \in D : \pi_m(d) = 1\} \text{ y } D_0^m = \{d \in D : \pi_m(d) = 0\},\ m \geq 1.$$

Observemos que la probabilidad μ satisface $\mu(D_1^m) \to 1$ y, por tanto, $\mu(D_0^m) \to 0$ cuando $m \to \infty$, por Proposición 1.12. En efecto, en la Proposición 1.12 y en el Lema 4.2 hemos identificado $\mathbb{N}$ con el conjunto $I = \{f_A : A \subset \{0,1\}^n \text{ con } |A| = 2^n - n \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$. Por tanto, con la notación del Lema 4.2, si $f_{A_m} \in I$ es el elemento de I correspondiente a $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mu(D_1^m) = \lambda(\{\sigma \in \mathcal{C} : \pi_m \circ \psi(\sigma) = 1\}) = \lambda(\{\sigma \in \mathcal{C} : f_{A_m}(\sigma) = 1\}) = \int_{\mathcal{C}} f_{A_m} \cdot d\lambda.$$

A continuación aplicamos que $\lim_{m\to\infty} \int_{\mathcal{C}} f_{A_m} \cdot d\lambda = 1$ por Proposición 1.12.

Aserto. Si $\Phi^{-1}(D) =: H \subset K$, existe $u_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$ tal que $d(u_0, \overline{\text{co}}(H)) \geq 1$.

En efecto, puesto que $\Phi(H) = D$, entonces $i^*(P_R(H)) = P_R(D)$. Por tanto, existe una probabilidad de Radon $\nu \in P_R(H)$ tal que $i^*(\nu) = \mu$. Sea $u_0 := r(\nu)$ el baricentro de ν, que satisface $u_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$.

Sub-Aserto 1. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\int_H \pi_m(h) d\nu(h) \geq 1 - \epsilon$, $\forall m \geq n_\epsilon$ y, por tanto, $\check{u}_0(p) \geq 1$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$.

En efecto, sea $0 \leq M < \infty$ tal que $\|h\| \leq M$, $\forall h \in H$, y elijamos $\eta > 0$ con $\epsilon \geq \eta(1 + M)$. A continuación elegimos $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(D_1^m) \geq 1 - \eta, \forall m \geq n_\epsilon$, (y $\mu(D_0^m) \leq \eta$). Entonces para $m \geq n_\epsilon$ se tiene

$$\int_H \pi_m(h) d\nu(h) = \int_{\Phi^{-1}(D_1^m)} \pi_m(h) d\nu(h) + \int_{\Phi^{-1}(D_0^m)} \pi_m(h) d\nu(h) \geq$$
$$\geq \int_{\Phi^{-1}(D_1^m)} 1 d\nu(h) + \int_{\Phi^{-1}(D_0^m)} (-M) d\nu(h) = \nu(\Phi^{-1}(D_1^m)) - M\nu(\Phi^{-1}(D_0^m)) =$$
$$= \mu(D_1^m) - M\mu(D_0^m) \geq 1 - \eta - M\eta \geq 1 - \epsilon.$$

Por tanto, como $\pi_m(u_0) = \pi_m(r(\nu)) = \int_H \pi_m(h) d\nu(h)$, $\forall m \geq 1$, se tiene $\check{u}_0(p) \geq 1$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$.

Sub-Aserto 2. $\forall p \in \mathcal{O}$, $\forall h \in H$, se verifica $\check{h}(p) \leq 0$.

En efecto, sea $p \in \mathcal{O}$ (ver Proposición 1.12 para la definición de $\mathcal{O}$) y $h_0 \in H$. Sea $\Phi(h_0) = d_0 \in D \subset \mathcal{C}$. Puesto que $\check{d}_0(p) = 0$, existe un subconjunto infinito $N_0 \subset \mathbb{N}$ con

$p \in \overline{N_0}^{\beta\mathbb{N}}$ verificando que $d_0(n) < 1/2$, $\forall n \in N_0$, esto es, $d_0(n) = 0$, $\forall n \in N_0$ (porque ó bien $d_0(n) = 0$ ó bien $d_0(n) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$). Por tanto $h_0(n) \leq 0$, $\forall n \in N_0$, de donde obtenemos $\check{h}_0(p) \leq 0$.

Del Sub-Aserto 2 obtenemos $\check{h}(p) \leq 0$, $\forall p \in \mathcal{O}$, $\forall h \in \overline{\text{co}}(H)$. Como $\check{u}_0(p) \geq 1$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, deducimos que $d(u_0, \overline{\text{co}}(H)) \geq 1$, lo que prueba el Aserto y completa la prueba del enunciado en este caso (A).

(B) Supongamos que K es un subconjunto w^*-compacto de ℓ_∞, que contiene un esqueleto de Cantor de anchura $\delta > 0$ asociado a las secuencias $(a_n)_{n\geq 1} \in \ell_\infty$ y $\{\pi_m : m \geq 1\}$, donde $\pi_m(k) = k_m$, $\forall k \in \ell_\infty$. Sea $T : \ell_\infty \to \ell_\infty$ la transformación tal que $T(x)(n) = (x_n - a_n)/\delta$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Claramente T es una transformación afín que es w^*-w^*-continua y $\|\cdot\|$-continua. Si $L = T(K)$, entonces L es un subconjunto w^*-compacto con un esqueleto de Cantor uniforme, que satisface las condiciones del caso (A). Por tanto existen un subconjunto w^*-compacto $W \subset L$ y un punto $w_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(W)$ tales que $d(w_0, \overline{\text{co}}(W)) \geq 1$. Sea $H := T^{-1}(W)$. Claramente H es un subconjunto w^*-compacto de K tal que $T(H) = W$, $T(\overline{\text{co}}(H)) = \overline{\text{co}}(W)$ y $T(\overline{\text{co}}^{w^*}(H)) = \overline{\text{co}}^{w^*}(W)$. Por tanto, si $u_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$ satisface $T(u_0) = w_0$, entonces $d(u_0, \overline{\text{co}}(H)) \geq \delta$, por la forma de la transformación T.

(C) Supongamos que K es un subconjunto w^*-compacto de un espacio de Banach dual X^* tal que K contiene un esqueleto de Cantor $\mathcal{A} := \{k_\sigma : \sigma \in \mathcal{C}\}$ de anchura $\delta > 0$. Consideremos el operador continuo $T : \ell_1 \to X$ tal que, $\forall (\lambda_n)_{n\geq 1} \in \ell_1$, $T((\lambda_n)_{n\geq 1}) = \sum_{n\geq 1} \lambda_n x_n \in X$. Observemos que $\|T\| \leq 1$. Entonces, $T^*(K)$ es un subconjunto w^*-compacto de ℓ_∞ y $\{T^*(k_\sigma) : \sigma \in \mathcal{C}\}$ es un esqueleto de Cantor de $T^*(K)$ de anchura $\delta > 0$, que satisface las condiciones del caso (B). Por tanto existen un subconjunto w^*-compacto de $W \subset T^*(K)$ y un punto $w_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(W)$ tales que $d(w_0, \overline{\text{co}}(W)) \geq \delta$. Sea $H := T^{*-1}(W) \cap K$. Entonces H es un subconjunto w^*-compacto de K tal que $T^*(H) = W$ y $T^*(\overline{\text{co}}^{w^*}(H) = \overline{\text{co}}^{w^*}(W)$. Sea $u_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$ tal que $T^*(u_0) = w_0$. Teniendo en cuenta que $\|T^*\| \leq 1$ y que $\text{co}(W) \subset T^*(\overline{\text{co}}(H)) \subset \overline{\text{co}}(W)$, obtenemos $d(u_0, \overline{\text{co}}(H)) \geq d(T^*(u_0), T^*(\overline{\text{co}}(H))) = d(w_0, \overline{\text{co}}(W)) \geq \delta$, lo que completa la prueba. ■

Si K es un compacto Hausdorf y μ una medida de Radon sobre K, denotaremos por $\mathcal{B}_o(K)$ al σ-álgebra de los subconjuntos de Borel de K y por $(\mathcal{B}_o(K))_\mu$ a la *μ-compleción* de $\mathcal{B}_o(K)$. Una función $f : K \to \mathbb{R}$ se dice que es *μ-medible* si $f^{-1}(G) \in (\mathcal{B}_o(K))_\mu$ para todo subconjunto abierto G de $\mathbb{R}$. Recordemos que por el Teorema de Lusin $f : K \to \mathbb{R}$ es μ-medible sobre K si y sólo si por cada $\epsilon > 0$ existe un subconjunto compacto L de K tal que $|\mu|(K \setminus L) \leq \epsilon$ y la restricción $f_{\restriction L}$ es continua. La función $f : K \to \mathbb{R}$ se dice que es *universalmente medible sobre* K si y sólo si f es μ-medible sobre K para toda medida de Radon μ sobre K.

Lema 4.6. *Sea W un subconjunto w^*-compacto de ℓ_∞ que tiene un esqueleto de Cantor uniforme de anchura $\delta > 0$ asociado al número $r_0 \in \mathbb{R}$ y a la secuencia $\{\pi_n : n \geq 1\}$ de las proyecciones canónicas. Entonces existe una probabilidad de Radon μ sobre W tal que, si $p \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ y $\delta_p \in S(\ell_\infty^*)$ es el funcional tal que $\delta_p(x) = \check{x}(p)$, $\forall x \in \ell_\infty$, la* *aplicación δ_p no es μ-medible sobre W.*

Demostración. Por Nota 4.4 existe una aplicación w^*-continua $\Phi : W \to \mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tal que $\Phi(W) = \mathcal{C}$. Sea λ la probabilidad de Haar sobre $\mathcal{C}$ y μ una probabilidad de Radon sobre W tal que λ es la imagen de μ por la aplicación Φ. Observemos que un subconjunto $L \subset \mathcal{C}$ es λ-medible si y sólo si $\Phi^{-1}(L) \subset W$ es μ-medible. Por un conocido argumento de Sierpinski ([49],[48, 14.5.1]), si $p \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ y $\delta_p \in S(\ell_\infty^*)$ es el funcional tal que $\delta_p(x) = \check{x}(p)$, $\forall x \in \ell_\infty$, entonces δ_p no es λ-medible, esto es, el subconjunto $L := \{x \in \mathcal{C} : \delta_p(x) = 1\} = \{\mathbf{1}_A : A \subset \mathbb{N}, p \in \overline{A}^{\beta\mathbb{N}}\}$ no es λ-medible. Por tanto, $\Phi^{-1}(L) \subset W$ no es μ-medible. Sin embargo

$$\Phi^{-1}(L) = \{w \in W : \delta_p(w) \geq r_0 + \delta\},$$

y esto prueba que δ_p no es μ-medible sobre W. ■

Definición 4.7. *Sea X un espacio de Banach. Un subconjunto $Y \subset X^*$ se dice que es uniformemente no-fragmentable sii existe un número real $\epsilon_0 > 0$ tal que para toda familia finita $\mathcal{F}$ de w^*-abiertos de X^* con $V \cap Y \neq \emptyset$, $\forall V \in \mathcal{F}$, existen $x_{\mathcal{F}} \in B(X)$ y $r_{\mathcal{F}} \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\inf\langle V \cap Y, x_{\mathcal{F}}\rangle < r_{\mathcal{F}} < r_{\mathcal{F}} + \epsilon_0 < \sup\langle V \cap Y, x_{\mathcal{F}}\rangle, \ \forall V \in \mathcal{F}.$$

Proposición 4.8. *Sea X un espacio de Banach e Y un subconjunto de X^*. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) Y no posee la propiedad (P).

(2) Existen un subconjunto w^*-compacto H de Y y dos números reales $a < b$ tales que para toda familia finita $\mathcal{F}$ de subconjuntos w^*-abiertos de X^* con $V \cap H \neq \emptyset$, $\forall V \in \mathcal{F}$, existe $x_{\mathcal{F}} \in B(X)$ verificando que

$$\inf\langle V \cap H, x_{\mathcal{F}}\rangle < a < b < \sup\langle V \cap H, x_{\mathcal{F}}\rangle, \ \forall V \in \mathcal{F}.$$

(3) Existe un subconjunto w^*-compacto K de Y que tiene un esqueleto de Cantor uniforme.

(4) Existen un subconjunto w^*-compacto K de Y y un funcional $\psi \in X^{**}$ que no es universalmente medible sobre K.

(5) Existe un subconjunto w^*-compacto H de Y que es uniformemente no-fragmentable.

(6) Existe un subconjunto w^*-compacto H de Y que posee una w^*-$\mathbb{N}$-familia.

Demostración. $\underline{\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{2}}$. Puesto que Y carece de la propiedad (P), existe un subconjunto w^*-compacto $K \subset Y$ tal que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \overline{\text{co}}(K)) > d > 0$. Por el Lema 2.3 existen $r_0 \in \mathbb{R}$, $\psi \in S(X^{**})$ y un subconjunto w^*-compacto $H \subset K$ tales que: (i) $\psi(k) < r_0$, $\forall k \in K$; (ii) para todo subconjunto w^*-abierto V de X^* con $V \cap H \neq \emptyset$ existe $\xi \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap H)$ tal que $\psi(\xi) > r_0 + d$. Por tanto, si $\mathcal{F}$ es una familia finita de subconjuntos w^*-abiertos de X^* tal que $V \cap H \neq \emptyset$, $\forall V \in \mathcal{F}$, existen $k_V \in V \cap H$ y $\xi_V \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap H)$ de modo que $\psi(k_V) < r_0$ y $\psi(\xi_V) > r_0 + d$ para todo $V \in \mathcal{F}$. Así que, como $B(X)$ es w^*-denso en $B(X^{**})$, podemos hallar un vector $x_{\mathcal{F}} \in B(X)$ tal que

$$\inf\langle V \cap H, x_{\mathcal{F}}\rangle < r_0 < r_0 + d < \sup\langle \overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap H), x_{\mathcal{F}}\rangle, \ \forall V \in \mathcal{F}.$$

Puesto que $x_{\mathcal{F}} \in X$, entonces $\sup\langle \overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap H), x_{\mathcal{F}}\rangle = \sup\langle V \cap H, x_{\mathcal{F}}\rangle$ y, por tanto, se verifica (2).

$\underline{2 \Rightarrow 3}$. Sea H un subconjunto w^*-compacto de Y verificando (2). Vamos a construir una secuencia independiente $\{(A_m, B_m) : m \geq 1\}$ en H.

Etapa 1. Por (2) existe $x_1 \in B(X)$ tal que

$$\inf\langle H, x_1\rangle < a < b < \sup\langle H, x_1\rangle.$$

Definamos $V_{11} = \{h \in X^* : \langle h, x_1\rangle < a\}$ y $V_{12} = \{h \in X^* : \langle h, x_1\rangle > b\}$, que satisfacen $V_{1i} \cap H \neq \emptyset$, $i = 1, 2$.

Etapa 2. Por (2) existe $x_2 \in B(X)$ tal que

$$\inf\langle V_{1i} \cap H, x_2\rangle < a < b < \sup\langle V_{1i} \cap H, x_2\rangle, \ i = 1, 2.$$

Sea $V_{21} = \{h \in X^* : \langle h, x_2\rangle < a\}$ y $V_{22} = \{h \in X^* : \langle h, x_2\rangle > b\}$, que satisfacen $V_{1i} \cap V_{2j} \cap H \neq \emptyset$, $i, j = 1, 2$.

A continuación procedemos por iteración. Sea

$$A_m = \{h \in H : \langle h, x_m\rangle \geq b\} \text{ y } B_m = \{h \in H : \langle h, x_m\rangle \leq a\}, \ m \geq 1.$$

Es fácil ver que $\{(A_m, B_m) : m \geq 1\}$ es una secuencia independiente de subconjuntos w^*-cerrados de H. Ahora, por cada $\sigma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ y $n \in \mathbb{N}$, sea $C_{(\sigma,n)} = A_n$, si $\sigma(n) = 1$, y $C_{(\sigma,n)} = B_n$, si $\sigma(n) = 0$. Por compacidad, es claro que $\bigcap_{n\geq 1} C_{(\sigma,n)} \neq \emptyset$, $\forall \sigma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Por tanto podemos elegir $h_\sigma \in \bigcap_{n\geq 1} C_{(\sigma,n)}$, $\forall \sigma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Sea $K := \overline{\{h_\sigma : \sigma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}}^{w^*}$. Se ve fácilmente que $\{h_\sigma : \sigma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}$ es un esqueleto de Cantor uniforme de K de anchura $b - a$.

$\underline{3 \Rightarrow 4}$. Sea K un subconjunto w^*-compacto de Y con un esqueleto de Cantor uniforme $\{h_\sigma : \sigma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}$ de anchura $\delta > 0$ asociado al número $r_0 \in \mathbb{R}$ y a la secuencia $\{x_m : m \geq 1\} \subset B(X)$. Sea $T : \ell_1 \to X$ un operador continuo tal que $T(e_n) = x_n$, $\forall n \geq 1$, siendo $\{e_n : n \geq 1\}$ la base canónica de ℓ_1. Sea $T^* : X^* \to \ell_\infty$ el operador adjunto y $W := T^*(K) = \overline{\{T^*(h_\sigma) : \sigma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}}^{w^*} \subset \ell_\infty$. Se ve sin dificultad que $\{T^*(h_\sigma) : \sigma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}$ es un esqueleto de Cantor uniforme de W de anchura $\delta > 0$ asociado al número $r_0 \in \mathbb{R}$ y a la secuencia $\{e_m : m \geq 1\} \subset B(\ell_1)$. Por el Lema 4.6 existe una probabilidad de Radon ν sobre W de modo que, si $p \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, entonces $\delta_p \in S(\ell_\infty^*)$ es un funcional cuya restricción a W no es ν-medible. Sea μ una probabilidad de Radon sobre K tal que $\nu = T^*(\mu)$. Como δ_p no es ν-medible sobre W, es claro que $\psi := \delta_p \circ T^* \in X^{**}$ no es μ-medible sobre K.

4 ⇒ 5. Sean K un subconjunto w*-compacto de Y, μ una probabilidad de Radon sobre K y $\psi \in X^{**}$ un funcional que no es μ-medible sobre K. Si $\mathrm{supp}(\mu) =: H$, claramente ψ no es μ-medible sobre H. Por el Teorema de Lusin esto significa que existe $\rho > 0$ tal que la restricción $\psi_{\restriction L}$ no es continua para todo subconjunto w^*-compacto L de H con $\mu(H \setminus L) \leq \rho$. Por tanto $\psi_{\restriction W}$ no es continua para todo subconjunto convexo w^*-compacto W de $\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(H)$ con $\mu(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(H) \setminus W) \leq \rho$. Por [30, 4.1 Proposition] existen $r_0 \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ de modo que, si L es un subconjunto convexo w^*-compacto de $\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(H)$ con $\mu(L) > 0$, entonces L corta simultáneamente a los subconjuntos $\{\xi \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(H) : \psi(\xi) \leq r_0\}$ y $\{\xi \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(H) : \psi(\xi) \geq r_0 + \delta\}$. Por tanto, si V es un subconjunto w^*-abierto de X^* con $V \cap H \neq \emptyset$, entonces $\mu(V \cap H) > 0$ (porque H es el soporte de μ) y, también, $\mu(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(V \cap H) \geq \mu(V \cap H) > 0$. Así que existen $\xi, \eta \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(V \cap H)$ tales que $\psi(\eta) \leq r_0 < r_0 + \delta \leq \psi(\xi)$. Sea $\mathcal{F}$ una familia finita de subconjuntos w^*-abiertos de X^* tal que $V \cap H \neq \emptyset$, $\forall V \in \mathcal{F}$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $r_0 + \epsilon < r_0 + \delta - \epsilon$. Por cada $V \in \mathcal{F}$ elegimos vectores $\xi_V, \eta_V \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(V \cap H)$ de modo que

$$\psi(\eta_V) < r_0 + \epsilon < r_0 + \delta - \epsilon < \psi(\xi_V).$$

Puesto que $B(X)$ es w^*-denso en $B(X^{**})$, podemos hallar un vector $x_{\mathcal{F}} \in B(X)$ tal que

$$\langle \eta_V, x_{\mathcal{F}} \rangle < r_0 + \epsilon < r_0 + \delta - \epsilon < \langle \xi_V, x_{\mathcal{F}} \rangle, \ \forall V \in \mathcal{F}.$$

Finalmente observemos que $\inf\langle V \cap H, x_{\mathcal{F}} \rangle = \inf\langle \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(V \cap H), x_{\mathcal{F}} \rangle \leq \langle \eta_V, x_{\mathcal{F}} \rangle$ y $\langle \xi_V, x_{\mathcal{F}} \rangle \leq \sup\langle \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(V \cap H), x_{\mathcal{F}} \rangle = \sup\langle V \cap H, x_{\mathcal{F}} \rangle$.

5 ⇒ 6. Sea H un subconjunto w^*-compacto de Y, que es uniformemente no-fragmentable para cierto $\eta > 0$. Utilizando un argumento similar al de la implicación **2 ⇒ 3**, podemos hallar dos secuencias $\{r_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{x_m : m \geq 1\} \subset B(X)$ tales que, si

$$A_m = \{h \in H : \langle h, x_m \rangle \geq r_m + \eta\} \text{ y } B_m = \{h \in H : \langle h, x_m \rangle \leq r_m\}, \ m \geq 1,$$

entonces $\{(A_m, B_m) : m \geq 1\}$ es una secuencia independiente de subconjuntos w^*-cerrados de H. Por un argumento de compacidad, para todo par de subconjuntos disjuntos M, N de $\mathbb{N}$ se tiene que $(\bigcap_{m\in M} A_m) \cap (\bigcap_{n \in N} B_n) \neq \emptyset$. Por tanto, podemos elegir $\eta_{M,N} \in (\bigcap_{m\in M} A_m) \cap (\bigcap_{n\in N} B_n)$. Claramente, $\{\eta_{M,N} : M, N$ subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}\}$ es una w^*-$\mathbb{N}$-familia en H tal que

$$\eta_{M,N}(x_m) \geq r_m + \eta, \ \forall m \in M, \ \text{ y } \ \eta_{M,N}(x_n) \leq r_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

6 ⇒ 1. Sea $\{\eta_{M,N} : M, N$ subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}\}$ una w^*-$\mathbb{N}$-familia en cierto subconjunto w^*-compacto H de Y. Por cada $\sigma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, sea $M := \{n \in \mathbb{N} : \sigma(n) = 1\}$ y $N := \mathbb{N} \setminus M$, y definamos $h_\sigma := \eta_{M,N}$. Es fácil ver que $\{h_\sigma : \sigma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}$ es un esqueleto de Cantor del subconjunto w^*-compacto $\overline{\{h_\sigma : \sigma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}}^{w^*} =: K \subset H$. Ahora basta aplicar el Lema 4.5. ■

Proposición 4.9. *Si K es un subconjunto w^*-compacto del espacio de Banach dual X^*, se verifica $Pind(K) = Width(K)$.*

Demostración. Primeramente $Pind(K) \geq Width(K)$ por Lema 4.5. Por otra parte, de las pruebas de **<u>1 ⇒ 2</u>** y **<u>2 ⇒ 3</u>** de la Proposición 4.8 obtenemos $Pind(K) \leq Width(K)$. Por tanto $Pind(K) = Width(K)$. ■

Proposición 4.10. *Sea X un espacio de Banach e Y un subconjunto de X^* tal que $Y = \bigcup_{n\geq 1} K_n$, siendo K_n un subconjunto w^*-compacto de X^* para $n \geq 1$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) Y no posee la propiedad (P).

(2) Existe una w^*-$\mathbb{N}$-familia de anchura $\delta > 0$ dentro de Y.

(3) Existe un esqueleto de Cantor de anchura $\delta > 0$ dentro de Y.

(4) Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que K_p contiene un esqueleto de Cantor de anchura $\delta > 0$.

(5) Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que K_p no posee la propiedad (P).

Demostración. **<u>1 ⇒ 2</u>**. Esta implicación se sigue de la Proposición 4.8.

<u>2 ⇒ 3</u>. Sea $\{\eta_{M,N} : M, N$ subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}\}$ una w^*-$\mathbb{N}$-familia de anchura $\delta > 0$ dentro de Y. Por cada $\sigma \in \mathcal{C}$ sea $h_\sigma := \eta_{M,N}$, siendo $M := \{n \in \mathbb{N} : \sigma(n) = 1\}$ y $N := \{n \in \mathbb{N} : \sigma(n) = 0\}$. Claramente $\{h_\sigma : \sigma \in \mathcal{C}\}$ es un esqueleto de Cantor de anchura $\delta > 0$ dentro de Y.

<u>3 ⇒ 4</u>. Sea $\{h_\sigma : \sigma \in \mathcal{C}\}$ un esqueleto de Cantor de anchura $\delta > 0$ dentro de Y y $\{r_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{x_m : m \geq 1\} \subset B(X)$ las secuencias asociadas a dicho esqueleto. Definimos $\Phi : X^* \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $x^* \in X^*$

$$\pi_m \circ \Phi(x^*) := \big(\frac{\langle x^*, x_m\rangle - r_m}{\delta} \wedge 1\big) \vee 0.$$

Es inmediato que Φ es una aplicación continua cuando en X^* se considera la w*-topología y en $[0,1]^{\mathbb{N}}$ la topología producto. Aún más $\Phi(\{h_\sigma : \sigma \in \mathcal{C}\}) = \mathcal{C}$. Como $\mathcal{C} = \{\Phi(h_\sigma) : \sigma \in \mathcal{C}\} \subset \bigcup_{n\geq 1} \Phi(K_n)$, por el Teorema de Baire existen $p, q \in \mathbb{N}$ y $s \in \{0,1\}^p$ tales que $\{\Phi(h_\sigma) : \sigma \in \mathcal{C}, s \prec \sigma\} \subset \Phi(K_q)$ ($s \prec \sigma$ significa que $\sigma_{\restriction p} = s$). Así que por cada $\sigma \in \mathcal{C}$ podemos elegir un elemento $k_\sigma \in K_q$ tal que $\Phi(k_\sigma) = \Phi(h_{s\sigma})$, siendo $s\sigma$ la concatenación de s con σ.

<u>Aserto.</u> $\{k_\sigma : \sigma \in \mathcal{C}\}$ es un esqueleto de Cantor de anchura $\delta > 0$ dentro de K_q asociado a las secuencias $\{\tilde{r}_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{\tilde{x}_m : m \geq 1\} \subset B(X)$ tales que $\tilde{r}_m = r_{m+p}$ y $\tilde{x}_m = x_{m+p}$, $\forall m \geq 1$.

En efecto, si $\sigma \in \mathcal{C}$ y $\sigma(m) = 1$, entonces $s\sigma(m+p) = 1$ y, por tanto, $\langle h_{s\sigma}, x_{m+p}\rangle \geq r_{m+p} + \delta$, de donde $\pi_{m+p} \circ \Phi(h_{s\sigma}) = 1$. Como $\pi_{m+p} \circ \Phi(h_{s\sigma}) = \pi_{m+p} \circ \Phi(k_\sigma)$, entonces $\langle k_\sigma, x_{m+p}\rangle \geq r_{m+p} + \delta$, de donde $\langle k_\sigma, \tilde{x}_m\rangle = \langle k_\sigma, x_{m+p}\rangle \geq r_{m+p} + \delta = \tilde{r}_m + \delta$. Análogamente, $\langle k_\sigma, \tilde{x}_m\rangle \leq \tilde{r}_m$ if $\sigma(m) = 0$.

<u>4 ⇒ 5</u> se sigue de la Proposición 4.8 y **<u>5 ⇒ 1</u>** es obvio. ■

Consideremos a continuación el siguiente problema. Si Y es un subconjunto de X^* tal que $Y = \bigcup_{n\geq 1} K_n$, siendo K_n un subconjunto w^*-compacto de X^* verificando la propiedad (P) para todo $n \geq 1$, ¿ es verdad que el subespacio cerrado $\overline{[Y]}$ generado por Y posee la propiedad (P)? Vemos en lo que sigue que la respuesta es afirmativa.

Lema 4.11. *Sean X, Z espacios de Banach y $\varphi : X^* \to Z^*$ una aplicación afín w^*-w^*-continua. Si K es un subconjunto w^*-compacto de X^* verificando la propiedad (P), entonces el subconjunto $\varphi(K)$ posee la propiedad (P).*

Demostración. Sea $L \subset \varphi(K)$ un subconjunto w^*-compacto y $H := \varphi^{-1}(L) \cap K$. Claramente H es un subconjunto w^*-compacto de K verificando $\overline{\text{co}}^{w^*}(H) = \overline{\text{co}}(H)$ y $\varphi(H) = L$. Por tanto se tiene

$$\overline{\text{co}}^{w^*}(L) = \varphi(\overline{\text{co}}^{w^*}(H)) = \varphi(\overline{\text{co}}(H)) \subset \overline{\text{co}}(\varphi(H)) = \overline{\text{co}}(L),$$

de donde $\overline{\text{co}}^{w^*}(L) = \overline{\text{co}}(L)$ y, en consecuencia, $\varphi(K)$ posee la propiedad (P). ■

Lema 4.12. *Sean X_1, X_2 espacios de Banach, $X = X_1 \times X_2$ y $K_1 \subset X_1^*$ y $K_2 \subset X_2^*$ dos subconjuntos w^*-compactos verificando ambos la propiedad (P). Entonces $K := K_1 \times K_2 \subset X^*$ es un subconjunto w^*-compacto de X^* con la propiedad (P).*

Demostración. Suponemos que $X = X_1 \oplus_1 X_2$, es decir que, si $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, entonces $\|x\| = \|x_1\| + \|x_2\|$. Así que $X^* = X_1^* \oplus_\infty X_2^*$ y $X^{**} = X_1^{**} \oplus_1 X_2^{**}$. En lo que sigue se prueba que K verifica la propiedad (P) mostrando que todo funcional $\varphi \in X^{**}$ es universalmente medible sobre K (ver Proposición 4.8). Sea μ una probabilidad de Radon sobre K. Definimos las probabilidades μ_1, μ_2 sobre las σ-álgebras de Borel $\mathcal{B}_o(K_1), \mathcal{B}_o(K_2)$ de K_1 y K_2, respectivamente, de la siguiente manera: si $B_1 \in \mathcal{B}_o(K_1)$ y $B_2 \in \mathcal{B}_o(K_2)$, ponemos $\mu_1(B_1) = \mu(B_1 \times K_2)$ y $\mu_2(B_2) = \mu(K_1 \times B_2)$. Observemos que μ_1, μ_2 son probabilidades de Radon sobre K_1 y K_2, respectivamente. Sea $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \in X^{**}$ con $\varphi_1 \in X_1^{**}$ y $\varphi_2 \in X_2^{**}$. Puesto que μ_i es una probabilidad de Radon sobre K_i y K_i verificando la propiedad (P), φ_i es μ_i-medible sobre K_i, $i = 1, 2$, por la Proposición 4.8. Por tanto, dado $\epsilon > 0$, existe un subconjunto w^*-compacto $K_{i0} \subset K_i$ tal que φ_i es una aplicación w^*-continua sobre K_{i0} y $\mu_i(K_i \setminus K_{i0}) \leq \epsilon/2$, para $i = 1, 2$. Así que el funcional $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ es w^*-continua sobre el subconjunto w^*-compacto $K_0 := K_{10} \times K_{20} \subset K$ y este subconjunto satisface $K \setminus K_0 \subset (K_1 \times (K_2 \setminus K_{20})) \cup ((K_1 \setminus K_{10}) \times K_2)$, de donde

$$\begin{aligned} \mu(K \setminus K_0) &\leq \mu(K_1 \times (K_2 \setminus K_{20})) + \mu((K_1 \setminus K_{10}) \times K_2) = \\ &= \mu_2(K_2 \setminus K_{20}) + \mu_1(K_1 \setminus K_{10}) \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

En consecuencia φ es μ-medible y, por tanto, universalmente medible. ■

Lema 4.13. *Sea X un espacio de Banach, K un subconjunto w^*-compacto de X^* con la propiedad (P) y $\epsilon > 0$. Si $K_0 := K + \epsilon B(X^*)$, entonces K_0 es un subconjunto w^*-compacto de X^* tal que todo esqueleto de Cantor dentro de K_0 tiene anchura $\leq 2\epsilon$.*

Demostración. Supongamos que K_0 contiene un esqueleto de Cantor $\{h_\sigma : \sigma \in \mathcal{C}\}$ de anchura $\delta > 2\epsilon$ asociado a las secuencias $\{r_m : m \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y $\{x_m : m \geq 1\} \subset B(X)$.

Como $h_\sigma \in K_0 := K + \epsilon B(X^*)$, $\forall \sigma \in \mathcal{C}$, existe $k_\sigma \in K$ tal que $\|h_\sigma - k_\sigma\| \leq \epsilon$. Por tanto $\{k_\sigma : \sigma \in \mathcal{C}\}$ es un subconjunto acotado de K que satisface

$$\langle k_\sigma, x_m \rangle \geq r_m + \delta - \epsilon \text{ si } \sigma(m) = 1 \text{ and } \langle k_\sigma, x_m \rangle \leq r_m + \epsilon \text{ si } \sigma(m) = 0.$$

Así que $\{k_\sigma : \sigma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}$ es un esqueleto de Cantor dentro de K de achura $\delta - 2\epsilon > 0$. Teniendo en cuenta que K tiene la propiedad (P) y la Proposición 4.8, obtenemos una contradicción que prueba el Lema. ■

Proposición 4.14. *Sea X un espacio de Banach e Y un subconjunto de X^* tal que $Y = \bigcup_{n\geq 1} K_n$, siendo K_n un subconjunto w^*-compacto de X^* para cada $n \geq 1$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) Y posee la propiedad (P).

(2) $\overline{[Y]}$ no contiene ningún esqueleto de Cantor.

(3) $\overline{[Y]}$ no contiene ninguna w^*-$\mathbb{N}$-familia.

(4) $\overline{[Y]}$ posee la propiedad (P).

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que $\overline{[Y]}$ contiene un esqueleto de Cantor $\mathcal{K}$ de anchura $\delta > 0$. Por cada $n \geq 1$ sean $L_n = \cup_{i=1}^n K_i$ y $\mathcal{S}_n$ el subconjunto convexo compacto de $\mathbb{R}^n$ definido por $\mathcal{S}_n := [-n, n]^n$. Por el Lema 4.12 el subconjunto w^*-compacto $\mathcal{S}_n \times L_n^n$ de $\mathbb{R}^n \times X^{*n}$ posee la propiedad (P). Por el Lema 4.11 el subconjunto w^*-compacto $W_n := \{\sum_{i=1}^n t_i k_i : (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathcal{S}_n, k_i \in L_n, i = 1, 2, ..., n\}$ de X^* también posee la propiedad (P). Observemos que si $\epsilon > 0$ entonces

$$\overline{\bigcup_{n\geq 1} W_n} = \overline{[Y]} \subset \bigcup_{n\geq 1} (W_n + \epsilon B(X^*)).$$

Sea $0 < \epsilon_0 < \delta/2$. Como $\mathcal{K} \subset \overline{[Y]} \subset \bigcup_{n\geq 1}(W_n + \epsilon_0 B(X^*))$, por la Proposición 4.10 existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $W_q + \epsilon_0 B(X^*)$ contiene un esqueleto de Cantor de anchura $\delta > 2\epsilon_0$, lo que contradice el Lema 4.13.

(2) $\Rightarrow$ (3). Supongamos que existe una w^*-$\mathbb{N}$-familia $\{\eta_{M,N} : M, N$ subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}\}$ de anchura $\delta > 0$ dentro de $\overline{[Y]}$. Por cada $\sigma \in \mathcal{C}$, sea $h_\sigma = \eta_{M,N}$, donde $M := \{n \in \mathbb{N} : \sigma(n) = 1\}$ y $N := \{n \in \mathbb{N} : \sigma(n) = 0\}$. Claramente $\{h_\sigma : \sigma \in \mathcal{C}\}$ es un esqueleto de Cantor de anchura $\delta > 0$ dentro de $\overline{[Y]}$, lo que contradice a (2).

(3) $\Rightarrow$ (4) se sigue de la Proposición 4.8 y (4) $\Rightarrow$ (1) es obvio. ■

Corolario 4.15. *Sea X un espacio de Banach e Y un subconjunto de X^* tal que $Y = \bigcup_{n\geq 1} K_n$, siendo K_n un subconjunto w^*-compacto de X^* para cada $n \geq 1$. Entonces Y posee la propiedad (P) si y sólo si todo subconjunto convexo C de $\overline{[Y]}$ tiene 3-control dentro de X^*.*

Demostración. (a) Si Y verifica la propiedad (P), entonces $\overline{[Y]}$ no posee ninguna w^*-$\mathbb{N}$-familia por Proposición 4.14. Así que por Proposición 3.8 todo subconjunto convexo C de $\overline{[Y]}$ tiene 3-control dentro de X^*.

(b) Sea K un subconjunto w^*-compacto de Y. Entonces $\overline{\text{co}}(K)$ es un subconjunto convexo cerrado de $\overline{[Y]}$ y, por tanto, tiene 3-control dentro de X^*. Este hecho implica que $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) = \overline{\text{co}}(K)$. En consecuencia Y posee la propiedad (P). ■

Nota 4.16. Si C es un subconjunto convexo de X^* con M-control dentro de X^*, para cierto $1 \leq M < +\infty$, C podría carecer de la propiedad (P). Por ejemplo, $B(\ell_\infty)$ es un subconjunto convexo w^*-compacto de ℓ_∞ con 1-control dentro de ℓ_∞ (por la Proposición 2.1) pero no posee la propiedad (P). Y viceversa, un subconjunto convexo C de un espacio de Banach dual X^* puede tener la propiedad (P) y, sin embargo, carecer de control dentro de X^*. En la Proposición 2.13 se dan ejemplos de este tipo de comportamientos.

A continuación vamos a estudiar la relación entre la propiedad (P) y otras propiedades como:(1) la propiedad (Q); (2) tener 3-control; (3) ser fragmentable; (4) no contener una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$.

<u>**La propiedad** (Q)</u>

Si $K \subset X^*$ es un subconjunto w*-compacto del dual X^* de un espacio de Banach X, se define el conjunto $Ext(K)$ de los puntos extremos de K como $Ext(K) = Ext(\overline{\text{co}}^{w^*}(K))$, es decir, como el conjunto de los puntos extremos de $\overline{\text{co}}^{w^*}(K)$. Sabemos que $Ext(K) \neq \emptyset$, $Ext(K) \subset K$ y que $\overline{\text{co}}^{w^*}(Ext(K)) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ (ver [13]). Intentamos investigar cuándo ocurre que $\overline{\text{co}}(Ext(K)) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$. Puesto que $\overline{\text{co}}(Ext(K)) \subset \overline{\text{co}}(K) \subset \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$, si $\overline{\text{co}}(Ext(K)) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$, entonces $\overline{\text{co}}(K) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$, pero el recíproco puede ser falso. Si X es un espacio de Banach, decimos que un subconjunto $Y \subset X^*$ verifica *la propiedad* (Q) sii para todo subconjunto w*-compacto $K \subset Y$ se verifica que $\overline{\text{co}}(Ext(K)) = \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$.

Proposición 4.17. *Sean X un espacio de Banach e $Y \subset X^*$ un subconjunto de su dual X^*. Son equivalentes*

(1) Y posee la propiedad (P).

(2) Y posee la propiedad (Q).

Demostración. (2) $\Rightarrow$ (1). Esta implicación es obvia por lo que se acaba de decir en el párrafo anterior.

(1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que Y no verifica la propiedad (Q), es decir, que existe un subconjunto w*-compacto $K \subset Y$ tal que $\overline{\text{co}}(Ext(K))$ es distinto de $\overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ (aunque evidentemente $\overline{\text{co}}(Ext(K)) \subset \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$). Por la prueba de [30, 3.1.Proposition] sabemos que existen $\varphi \in S(X^{**})$, un subconjunto no-vacío $S \subset Ext(K)$ y dos números reales $r, \delta > 0$ tales que si V es un subconjunto w*-abierto de X^* con $V \cap S \neq \emptyset$, entonces se pueden hallar dos vectores $\xi, \eta \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap S)$ tales que $\varphi(\xi) > r + \delta$ y $\varphi(\eta) < r$. Por la

prueba de [30, 2.LEMMA] (ver Lema 2.3) existe una secuencia $\{x_n : n \geq 1\} \subset S(X)$ tal que para todo par de subconjuntos finitos disjuntos $M, N \subset \mathbb{N}$ se verifica

$$\emptyset \neq (\bigcap_{m\in M} \{\xi \in S : \xi(x_n) > r + \delta\}) \cap (\bigcap_{n\in N} \{\eta \in S : \eta(x_n) < r\}).$$

Por tanto si ponemos

$$A_n = \{\xi \in K : \xi(x_n) \geq r + \delta\},\ B_n = \{\eta \in K : \eta(x_n) \leq r\},\ \forall n \geq 1,$$

entonces para todo par de subconjuntos finitos disjuntos $M, N \subset \mathbb{N}$ el subconjunto w*-compacto $(\bigcap_{m\in M} A_m) \cap (\bigcap_{n\in N} B_n)$ de K es no vacío. Puesto que K es w*-compacto concluimos que para todo par de subconjuntos disjuntos (finitos ó infinitos) $M, N \subset \mathbb{N}$

$$\emptyset \neq (\bigcap_{m\in M} A_m) \cap (\bigcap_{n\in N} B_n) \subset K.$$

Finalmente por cada par de subconjuntos disjuntos (finitos ó infinitos) $M, N \subset \mathbb{N}$ elegimos $\eta_{M,N} \in (\bigcap_{m\in M} A_m) \cap (\bigcap_{n\in N} B_n)$. Obviamente se verifica

$$\eta_{M,N}(x_m) \geq r + \delta,\ \forall m \in M, \quad \text{y } \eta_{M,N}(x_n) \leq r,\ \forall n \in N,$$

es decir, que K posee una w*-$\mathbb{N}$-familia, lo que no es posible por Proposición 4.8 y porque Y tiene la propiedad (P). ■

Corolario 4.18. *Sea X un espacio de Banach e Y un subconjunto de X^* tal que $Y = \bigcup_{n\geq 1} K_n$, siendo K_n un subconjunto w*-compacto de X^* para cada $n \geq 1$. Entonces son equivalentes:*

(1) Y posee la propiedad (Q).

(2) $\overline{[Y]}$ posee la propiedad (Q).

Demostración. El enunciado es consecuencia de la Proposición 4.17 y de la Proposición 4.14. ■

La propiedad (P) versus "tener 3-control"

Si $C \subset X^*$ es un subconjunto convexo que tiene control en X^*, no por ello C ha de poseer la propiedad (P). En efecto, basta considerar los subconjuntos convexos w*-compactos de un espacio de Banach dual. Estos subconjuntos siempre tienen 1-control y, sin embargo, no siempre tienen la propiedad (P). Por ejemplo, $K = B(\ell_\infty)$ no tiene la propiedad (P) aunque tiene 1-control en ℓ_∞. También ocurre que si un subconjunto convexo $C \subset X^*$ tiene la propiedad (P) no por ello ha de poseer control en X^*. Basta considerar el ejemplo de Corolario 2.14 en donde se toma $C = \ell_1(J)$ con J incontable. Los siguiente corolarios nos dan una visión de la relación entre la propiedad (P) y la propiedad "tener 3-control".

Corolario 4.19. *Sean X un espacio de Banach y $K \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto de X^*. Son equivalentes*

(1) K posee la propiedad (P).

(2) Todo subconjunto convexo $C \subset \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ tiene 3-control dentro de X^*.

(3) Todo subconjunto convexo $C \subset \overline{\text{co}}(K)$ tiene 3-control dentro de X^*.

(4) Todo subconjunto convexo $C \subset co(K)$ tiene 3-control dentro de X^*.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Si algún subconjunto convexo $C \subset \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ no tuviera 3-control dentro de X^*, por Proposición 3.8 existiría en C, y por tanto en $\overline{\text{co}}^{w^*}(K)$, una w*-$\mathbb{N}$-familia, lo que contradice (1) por Proposición 4.14.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4). Obvio.

(4) $\Rightarrow$ (1). Sea $H \subset K$ un subconjunto w*-compacto. Como $\text{co}(H) \subset \text{co}(K)$, se tiene que $\text{co}(H)$ (y también $\overline{\text{co}}(H)$) tiene 3-control dentro de X^*, por lo que $\overline{\text{co}}^{w^*}(H) \subset \overline{\text{co}}(H)$, es decir, $co^{w^*}(H) = \overline{\text{co}}(H)$, y, por tanto, K tiene la propiedad (P). ∎

Corolario 4.20. *Sean X un espacio de Banach y $C \subset X^*$ un subconjunto convexo de X^*. Son equivalentes*

(1) C posee la propiedad (P).

(2) Para todo subconjunto w^*-compacto $H \subset C$ ocurre que todo subconjunto convexo $F \subset \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$ tiene 3-control en X^*.

(3) Para todo subconjunto w^*-compacto $H \subset C$ ocurre que todo subconjunto convexo $F \subset \overline{\text{co}}(H)$ tiene 3-control en X^*.

(3') Para todo subconjunto w^*-compacto $H \subset C$ ocurre que $\overline{\text{co}}(H)$ tiene 3-control en X^*.

(4) Para todo subconjunto w^*-compacto $H \subset C$ ocurre que todo subconjunto convexo $F \subset co(H)$ tiene 3-control en X^*.

(4') Para todo subconjunto w^*-compacto $H \subset C$ ocurre que $co(H)$ tiene 3-control en X^*.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Si $H \subset C$ es un subconjunto w*-compacto, entonces H tiene la propiedad (P) y por Corolario 4.19 todo subconjunto convexo $F \subset \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$ tiene 3-control dentro de X^*.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4). Obvio

(4) $\Rightarrow$ (1). Esta implicación sale de Corolario 4.19.

(3) $\Rightarrow$ (3$'$) $\Leftrightarrow$ (4$'$). Obvio.

(4$'$) $\Rightarrow$ (1). Si $H \subset C$ es un subconjunto w*-compacto, entonces, por (4'), $\text{co}(H)$ (y también $\overline{\text{co}}(H)$) tiene 3-control dentro de X^*, es decir, $\overline{\text{co}}^{w^*}(H) \subset \overline{\text{co}}(H)$, por lo que $\overline{\text{co}}^{w^*}(H) = \overline{\text{co}}(H)$. Esto prueba que $C \in (P)$. ∎

La propiedad (P) y la fragmentabilidad

Pasemos a tratar la fragmentabilidad. Aquí consideramos la fragmentabilidad en espacios de Banach duales X^*, que involucra a la w*-topología y a la norma de X^*.

Decimos que un subconjunto $Y \subset X^*$ de un espacio de Banach dual X^* *está fragmentado por la norma* si para todo subconjunto w*-compacto $K \subset Y$ y todo $\epsilon > 0$ existe un subconjunto w*-abierto V en X^* tal que $V \cap K \neq \emptyset$ y $\operatorname{diam}(V \cap K) \leq \epsilon$.

Si todos los subconjuntos w*-compactos de $Y \subset X^*$ están fragmentados por la norma, entonces Y posee la propiedad (P), pero no al revés. De modo que si Y tiene la propiedad (P) no todos los subconjuntos w*-compactos de Y deben estar fragmentados por la norma. En efecto, sea $X = JT_2$ el espacio árbol de James (ver [35]), que es separable, no contiene a ℓ_1 y su dual no es separable, es decir, X no es Asplund. Por los resultados de Haydon [30] ocurre que X^* posee la propiedad (P), aunque por no ser Asplund existe un subconjunto w*-compacto $K \subset X^*$ que no está fragmentado por la norma, sin llegar a ser uniformemente no-fragmentable porque X^* tiene la propiedad (P). La fragmentabilidad se parece a la propiedad (P) en que pasa de un subconjunto $Y = \bigcup_{n \geq 1} K_n$, siendo K_n un subconjunto w^*-compacto de X^* para cada $n \geq 1$, al subespacio cerrado $\overline{[Y]}$ generado por Y. Para comodidad del lector demostramos este resultado en la siguiente proposición.

Proposición 4.21. *Sean X un espacio de Banach e $Y = \bigcup_{n \geq 1} K_n$, siendo K_n un subconjunto w^*-compacto de X^* para cada $n \geq 1$. Son equivalentes*

(1) Y está fragmentado por la norma.

(2) $\overline{[Y]}$ está fragmentado por la norma.

Demostración. Como la implicación (2) $\Rightarrow$ (1) es obvia, pasamos a probar la implicación (1) $\Rightarrow$ (2) por reducción al absurdo. Así que suponemos que $\overline{[Y]}$ no está fragmentado por la norma, es decir, que existen un subconjunto w*-compacto $H \subset \overline{[Y]}$ y un número real $\delta > 0$ de modo que para todo subconjunto w*-abierto V de X^* con $V \cap H \neq \emptyset$ se verifica que $\operatorname{diam}(V \cap H) > \delta$. Por [40, 2.5 Theorem] se tiene que el subconjunto convexo simétrico w*-compacto $W_n := \overline{\text{co}}^{w^*}(\cup_{i=1}^n (K_i \cup (-K_i)) = \overline{\text{co}}(\cup_{i=1}^n (K_i \cup (-K_i))$ está fragmentado por la norma. Además, observemos que si $\epsilon > 0$, entonces

$$\overline{[Y]} \subset \bigcup_{n,m \geq 1} (mW_n + \epsilon B(X^*)).$$

Sea $0 < \epsilon_0 < \delta/2$ y observemos que $H \subset \overline{[Y]} \subset \bigcup_{n,m \geq 1} (mW_n + \epsilon_0 B(X^*))$. En consecuencia, por el Teorema de Baire existen $n, m \in \mathbb{N}$ y un subconjunto w*-abierto V_1 de X^* tal que

$$\emptyset \neq V_1 \cap H \subset H \cap (mW_n + \epsilon_0 B(X^*)).$$

Por [40, 2.4 Lemma] ocurre que $mW_n + \epsilon_0 B(X^*)$ está $\delta/2$-fragmentado por la norma, es decir, que existe un subconjunto w*-abierto V_2 en X^* tal que $\emptyset \neq V_2 \cap V_1 \cap H$ y $\operatorname{diam}(V_2 \cap V_1 \cap H) \leq \delta/2$. Hemos llegado a una contradicción, que prueba el enunciado. ■

La propiedad (P) versus "no contener una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$"

Pasemos a estudiar la propiedad *"no contener una copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$"*. Como hemos visto (Proposición 3.8 y Corolario 3.12), si un subconjunto $Y \subset X^*$ no posee copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$, entonces $\overline{[Y]}$ tiene la propiedad (P). El recíproco no es cierto. Basta considerar $Y = X^*$ con $X = c_0(\mathfrak{c})$.

Proposición 4.22. *Sea X un espacio de Banach e Y un subconjunto de X^*. Son equivalentes:*

(i) Y no posee copia de la base de $\ell_1(\mathfrak{c})$.

(ii) El espacio $\overline{[Y]}$ posee universalmente la propiedad (P), es decir, $\overline{[Y]}$ es universalmente Krein-Šmulian.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$. Por la Proposición 3.11 el espacio $\overline{[Y]}$ carece de una copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$. Ahora basta aplicar la Proposición 2.11.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Esta implicación sale aplicando la Proposición 2.11. ■

Capítulo 5

Sumas directas 1-incondicionales y la extensión del Teorema de Krein-Šmulian

En el Capítulo 1 vimos que hay muchos espacios de Banach X que tienen 1-control en su bidual X^{**}. Este es el caso de los espacios WLD, de $\ell_1(I)$, etc. En [24] se prueba que si I es un conjunto infinito y φ es una función de Orlicz, entonces el espacio de Orlicz $\ell_\varphi(I)$ tiene 1-control en su bidual si y solo si la función φ verifica la condición Δ_2 en 0, es decir, si $\ell_\varphi(I)$ tiene base 1-simétrica. A la vista de este resultado parece natural investigar qué tipo de control tiene un espacio de Banach X en su bidual cuando: (i) X tiene base 1-simétrica; (ii) X tiene base 1-incondicional; (iii) X es suma directa 1-incondicional de espacios con buenas propiedades (vg., espacios WCG); (iv) X es un retículo de Banach; etc.

En este Capítulo nos ocupamos de este tipo de cuestiones. Para ello comenzaremos estudiando el comportamiento de los espacios de Banach X, que son suma directa 1-incondicional de espacios con buenas propiedades (vg., espacios WCG). Vamos a probar que estos espacios de Banach X tienen siempre, al menos, 2-control en su bidual X^{**}, aunque hay numerosos casos (v.g., si X no tiene copias de $\ell_1(\aleph_1)$, si X tiene base 1-simétrica) en que X tiene 1-control. Entre estos espacios, que son suma directa 1-incondicional de "buenos" espacios, destacan los retículos de Banach orden-continuos (abrev. o-continuos). En todo lo relativo a las nociones de retículo de Banach y sus propiedades nos remitimos a [37] y [39].

Vamos a estudiar la estructura de X, X^* y X^{**} cuando X es una suma directa 1-incondicional de una familia de subespacios de Banach $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ de X.

Definición 5.1. *Un espacio de Banach X es suma directa 1-incondicional de una familia de subespacios de Banach $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ de X, abrev. $X = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \oplus X_\alpha$ 1-incondicional, cuando $X = \overline{[\cup_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha]}$ y, si $x_\alpha \in X_\alpha, \epsilon_\alpha = \pm 1$, $\alpha \in \mathcal{A}$, y A es un subconjunto finito de $\mathcal{A}$, entonces $\|\sum_{\alpha\in A} \epsilon_\alpha x_\alpha\| \leq \|\sum_{\alpha\in A} x_\alpha\|$.*

Si $X = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \oplus X_\alpha$ 1-incondicional, entonces

(i) Por cada subconjunto $A \subset \mathcal{A}$ existe una proyección $P_A : X \to X$ tal que $\|P_A\| = 1$ y $P_A(X) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \oplus X_\alpha$.

(ii) Cada $x \in X$ admite una única representación de la forma $x = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x_\alpha$ con $x_\alpha \in X_\alpha$ y sólo un número contable de coordenadas x_α no nulas, de modo que la serie anterior converge incondicionalmente y $\| \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \epsilon_\alpha x_\alpha\| = \|x\|$ siendo $\epsilon_\alpha = \pm 1,\ \forall \alpha \in \mathcal{A}$.

(iii) Si $u \in X^*$, a la restricción $u_\alpha := u \restriction X_\alpha \in X_\alpha^*$ la denominaremos la coordenada α-ésima de u. Identificaremos u con el conjunto $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de sus coordenadas.

Cada dual X_α^* se considera sumergido canónica e isométricamente en X^* de la siguiente forma. Si $P_\alpha : X \to X_\alpha$ es la proyección canónica con norma $\|P_\alpha\| = 1$, entonces $P_\alpha^*(X_\alpha^*)$ es un subespacio de X^* isométrico a X_α^*. Pues bien, consideraremos a X_α^* sumergido en X^* ocupando la posición de $P_\alpha^*(X_\alpha^*)$. Dentro de X^* disponemos del subespacio cerrado $Y_0 := \overline{[\cup_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha^*]}$, que, en realidad, es la suma directa 1-incondicional de los subespacios cerrados $\{X_\alpha^* : \alpha \in \mathcal{A}\}$, es decir, $Y_0 = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \oplus X_\alpha^*$ 1-incondicional. Sea Y_0^* el dual de Y_0.

Aserto 1. Y_0^* se sumerge canónica e isométricamente en X^{**}.

En efecto, si $z \in Y_0^*$, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ definimos $z_\alpha := z \restriction X_\alpha^*$, que verifica $z_\alpha \in X_\alpha^{**}$, e identificamos z con el conjunto de sus coordenadas $(z_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Para sumergir Y_0^* en X^{**}, definimos la aplicación $h : Y_0^* \to X^{**}$ del siguiente modo

$$\forall z \in Y_0^*,\ \forall u \in X^*,\ h(z)(u) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} z_\alpha(u_\alpha).$$

La definición de h precisa de varias aclaraciones y comprobaciones, a saber:

(A) En primer término hay que cerciorarse de que el anterior sumatorio es convergente. Si $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ es un subconjunto finito, entonces $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_0} u_\alpha \in Y_0$ y además si $\epsilon_\alpha = \pm 1,\ \forall \alpha \in \mathcal{A}$

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_0} z_\alpha(\epsilon_\alpha u_\alpha) = z(\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_0} \epsilon_\alpha u_\alpha) \leq \|z\| \cdot \| \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_0} \epsilon_\alpha u_\alpha\| \leq \|z\| \cdot \|u\|.$$

De aquí deducimos que: (i) $|\{\alpha \in \mathcal{A} : z_\alpha(u_\alpha) \neq 0\}| \leq \aleph_0$; (ii) la serie $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} z_\alpha(u_\alpha)$ converge absolutamente y, además, $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} z_\alpha(u_\alpha) \leq \|z\| \cdot \|u\|$. En consecuencia, $h(z) \in X^{**}$ con $\|h(z)\| \leq \|z\|,\ \forall z \in Y_0^*$, y h es una aplicación lineal y continua que verifica $\|h\| \leq 1$.

(B) Veamos que h es una isometría. En efecto, como $h(z) \restriction Y_0 = z,\ \forall z \in Y_0^*$, se tiene que

$$\|h(z)\| = \sup\{\langle h(z), u\rangle : u \in B(X^*)\} \geq \sup\{\langle z, u\rangle : u \in B(Y_0)\} = \|z\|.$$

Por otra parte $\|h(z)\| \leq \|z\|$. En consecuencia, h es una isometría.

Sabemos que el subespacio $Y_0^\perp := \{z \in X^{**} : \langle z, y\rangle = 0,\ \forall y \in Y_0\}$ de X^{**} es isométricamente isomorfo al dual $(\frac{X^*}{Y_0})^*$.

Aserto 2. $X^{**} = h(Y_0^*)\overset{m}{\oplus} Y_0^{\perp}$, es decir, X^{**} es la suma directa monótona de $h(Y_0^*)$ y de $Y_0^{\perp}$, lo que quiere decir que todo $z \in X^{**}$ admite una única descomposición $z = z_1 + z_2$ con $z_1 \in h(Y_0^*)$ y $z_2 \in Y_0^{\perp}$ de modo que $\|z\| \geq \|z_1\| \bigvee \|z_2\|$.

En efecto, es inmediato que $h(Y_0^*) \cap Y_0^{\perp} = \{0\}$. Sea $z \in X^{**}$ y denotemos $w_1 := z \restriction Y_0$. Veamos que $z - h(w_1) \in Y_0^{\perp}$. Para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ y todo $v \in X_\alpha^*$ se tiene

$$\langle z - h(w_1), v\rangle = \langle z, v\rangle - \langle h(w_1), v\rangle =$$
$$= \langle z \restriction X_\alpha^*, v\rangle - \langle w_{1\alpha}, v\rangle = \langle z \restriction X_\alpha^*, v\rangle - \langle z \restriction X_\alpha^*, v\rangle = 0.$$

En consecuencia, $X^{**} = h(Y_0^*) \oplus Y_0^{\perp}$. Además la anterior suma directa es monótona, pues si $z = z_1 + z_2 \in X^{**}$ con $z_1 \in h(Y_0^*)$ y $z_2 \in Y_0^{\perp}$, se tiene, por una parte, que

$$\|z\| \geq \sup\{\langle z_1 + z_2, u\rangle : u \in B(Y_0)\} = \sup\{\langle z_1, u\rangle : u \in B(Y_0)\} = \|z_1\|.$$

Por otra parte, dado $\epsilon > 0$, elijamos $v \in B(X^*)$ tal que $\|z_2\| - \frac{\epsilon}{2} \leq \langle z_2, v\rangle$. Sabemos que $\langle z_1, v\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} z_{1\alpha}(v_\alpha)$ (donde $z_{1\alpha} := z \restriction X_\alpha^*$) de modo que existe un subconjunto finito $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ tal que $|\sum_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{A}_0} z_{1\alpha}(v_\alpha)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Por tanto, si $u = v - \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_0} v_\alpha$, se tiene que $u \in B(X^*)$, $\langle z_2, u\rangle = \langle z_2, v\rangle$ y

$$|\langle z_1, u\rangle| = |\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} z_{1\alpha}(u_\alpha)| = |\sum_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{A}_0} z_{1\alpha}(v_\alpha)| \leq \tfrac{\epsilon}{2},$$

de donde

$$\|z_2\| - \tfrac{\epsilon}{2} \leq \langle z_2, v\rangle = \langle z_2, u\rangle \leq \langle z_1 + z_2, u\rangle + \tfrac{\epsilon}{2} = \langle z, u\rangle + \tfrac{\epsilon}{2} \leq \|z\| + \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, obtenemos que $\|z_2\| \leq \|z\|$. Así que la suma directa $X^{**} = h(Y_0^*) \overset{m}{\oplus} Y_0^{\perp}$ es monótona.

Por último, observemos que la copia canónica $J(X)$ de X en X^{**} está dentro de $h(Y_0^*)$ aunque, en general, $J(X) \neq h(Y_0^*)$.

Lema 5.2. *Sea X un espacio de Banach y $K \subset X^*$ un subconjunto w-compacto. Dados $z \in B(X^{**})$ y $\epsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $\|x\| \leq 1 + \epsilon$ y*

$$\forall k \in K,\ z(k) - \epsilon \leq x(k) \leq z(k) + \epsilon.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que K es convexo y simétrico respecto del origen (tomando $\overline{\mathrm{co}}(K \cup -K)$ en lugar de K). Consideremos el espacio de Banach $Z = X \oplus_1 \mathbb{R}$. Entonces $Z^* = X^* \oplus_\infty \mathbb{R}$ y $Z^{**} = X^{**} \oplus_1 \mathbb{R}$. Sean $H_1 := \{(k, z(k) - \frac{\epsilon}{2}) : k \in K\}$ y $H_2 := \{(k, z(k) + \frac{\epsilon}{2}) : k \in K\}$ dos subconjuntos disjuntos convexos w-compactos de Z^* tales que, si $H = H_2 - H_1$, entonces $H \subset Z^*$ es un subconjunto convexo w-compacto, y por tanto w*-compacto, de Z^* verificando que $H \cap \overset{\circ}{B}(0; \frac{\epsilon}{2}) = \emptyset$. Por tanto, si cogemos $\frac{2}{2+\epsilon} \leq \rho < 1$, entonces $H \cap B(0; \frac{\rho\epsilon}{2}) = \emptyset$ y por el teorema de Hahn-Banach existe un vector $\varphi \in B(Z)$ tal que $\langle h, \varphi\rangle \geq \frac{\rho\epsilon}{2}$, $\forall h \in H$.

Si $\varphi = x_0 + t_0$, con $x_0 \in X$, $t_0 \in \mathbb{R}$ y $\|\varphi\| = \|x_0\| + |t_0| \leq 1$, resulta que para todo $(k_1, z(k_1) - \frac{\epsilon}{2}) \in H_1$ y todo $(k_2, z(k_2) + \frac{\epsilon}{2}) \in H_2$ se tiene que

$$\varphi((k_2, z(k_2) + \tfrac{\epsilon}{2})) - \varphi((k_1, z(k_1) - \tfrac{\epsilon}{2})) \geq \tfrac{\rho\epsilon}{2},$$

es decir

$$x_0(k_2) + t_0 z(k_2) + t_0 \tfrac{\epsilon}{2} \geq x_0(k_1) + t_0 z(k_1) - t_0 \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\rho\epsilon}{2}, \tag{5.1}$$

de donde, tomando $k_1 = k_2$ en (5.1), obtenemos $t_0\epsilon \geq \frac{\rho\epsilon}{2}$, es decir, $\frac{\rho}{2} \leq t_0 \leq 1$, por lo que $\|x_0\| \leq 1 - \frac{\rho}{2}$. Haciendo $k_1 = 0$ en (5.1) obtenemos

$$\forall k \in K,\ x_0(k) + t_0 z(k) + t_0 \tfrac{\epsilon}{2} \geq -t_0 \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\rho\epsilon}{2},$$

es decir

$$\forall k \in K,\ -\tfrac{1}{t_0} x_0(k) \leq z(k) + \tfrac{\epsilon}{2} \tfrac{2t_0 - \rho}{t_0} \leq z(k) + \epsilon.$$

Por otra parte, haciendo $k_2 = 0$ en (5.1) obtenemos

$$\forall k \in K,\ \tfrac{t_0}{2}\epsilon \geq x_0(k) + t_0 z(k) - t_0 \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\rho\epsilon}{2},$$

es decir

$$\forall k \in K,\ z(k) - \epsilon \leq z(k) - \tfrac{\epsilon}{2} \tfrac{2t_0 - \rho}{t_0} \leq -\tfrac{1}{t_0} x_0(k).$$

Por tanto, tomando $x = -\frac{1}{t_0} x_0$, que verifica $\|x\| \leq 1 + \epsilon$, se satisface el enunciado del Lema. ■

Proposición 5.3. *Sea X un espacio de Banach, que es suma directa 1-incondicional de una familia $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ de espacios de Banach WCG, digamos, $X = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \oplus X_\alpha$. Entonces*

(A) X tiene 2-control en su bidual X^{**}.

(B) Si los espacios X_α son reflexivos y $X := \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \oplus_{\ell_1} X_\alpha$ (es decir, X es la ℓ_1-suma directa de la familia $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$), entonces X tiene 1-control en su bidual X^{**}.

Demostración. Adoptamos la notación de los párrafos precedentes. Así que sean $Y_0 = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \oplus X_\alpha^*$, $X^{**} = h(Y_0^*) \overset{m}{\oplus} Y_0^\perp$, etc. Observemos que en el caso (B) se verifica que $Y_0 = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \oplus_{c_0} X_\alpha^*$, es decir, Y_0 es la c_0-suma directa de los subespacios $\{X_\alpha^* : \alpha \in \mathcal{A}\}$. Sea K_α un subconjunto w-compacto de X_α tal que $0 \in K_\alpha$ y $X_\alpha = \overline{[K_\alpha]}$, $\alpha \in \mathcal{A}$. En el caso (B) cogemos $K_\alpha := B(X_\alpha)$. Supongamos que existe un subconjunto w*-compacto $K \subset B(X^{**})$ tal que para ciertos $a, b > 0$ se verifica

(1) $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X) > b > 2a > 2\hat{d}(K, X) > 0$ en el caso (A).

(2) $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X) > b > a > \hat{d}(K, X) > 0$ en el caso (B).

Por el Lema 1.7 se tiene:

Hecho. Existen $\psi \in S(X^{***}) \cap X^{\perp}$ y un subconjunto w*-compacto $\emptyset \neq H \subset K$ tales que para todo subconjunto w*-abierto V con $V \cap H \neq \emptyset$ existe $\xi \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap H)$ con $\langle \psi, \xi \rangle > b$.

Etapa 1. Por el Hecho existe un vector $\xi_1 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$ tal que $\langle \psi, \xi_1 \rangle > b$. Puesto que $B(X^*)$ es w*-denso en $B(X^{***})$, podemos hallar un vector $x_1^* \in B(X^*)$ tal que $\langle \xi_1, x_1^* \rangle > b$, así como otro vector $\eta_1 \in H$ de modo que $\langle \eta_1, x_1^* \rangle > b$. Sea $\eta_1 = v_1 + w_1$ con $v_1 \in h(Y_0^*)$ y $w_1 \in Y_0^{\perp}$. Entonces $a > d(\eta_1, X) \geq d(\eta_1, h(Y_0^*)) = \|w_1\|$, de donde

$$\langle v_1, x_1^* \rangle = \langle \eta_1, x_1^* \rangle - \langle w_1, x_1^* \rangle > b - a.$$

Como $\langle v_1, x_1^* \rangle = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} v_{1\alpha}(x_{1\alpha}^*) > b - a$, podemos hallar un subconjunto finito $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ tal que, si y_1 es la restricción de x_1^* a $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_1} \oplus X_\alpha$ (por lo tanto $y_1 = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_1} x_{1\alpha}^* \in B(\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_1} \oplus X_\alpha^*) \subset B(Y_0)$), entonces $\langle \eta_1, y_1 \rangle = \langle v_1, y_1 \rangle > b - a$.

Etapa 2. Sea $V_1 = \{u \in X^{**} : \langle u, y_1 \rangle > b - a\}$, que es un subconjunto w*-abierto de X^{**} con $V_1 \cap H \neq \emptyset$, porque $\eta_1 \in V_1 \cap H$. Por el Hecho existe $\xi_2 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V_1 \cap H)$ con $\langle \psi, \xi_2 \rangle > b$. Sea $0 < 2\epsilon_1 < 2^{-1} \wedge (\langle \psi, \xi_2 \rangle - b) \wedge (a(\hat{d}(K, X))^{-1} - 1)$. Consideremos en X^{**} el subconjunto $L_1 := \{\xi_2\} \cup \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_1} K_\alpha \right)$. Observemos que L_1 es un subconjunto w-compacto de X^{**} y que, en el caso (B), se tiene $B(\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_1} \oplus_1 X_\alpha) \subset L_1$. Por el Lema 5.2 existe un vector $x_2^* \in X^*$ tal que $\|x_2^*\| \leq 1 + \epsilon_1$ y

$$\forall k \in L_1, \ \langle \psi, k \rangle - \epsilon_1 < \langle k, x_2^* \rangle < \langle \psi, k \rangle + \epsilon_1.$$

En particular, $\langle \xi_2, x_2^* \rangle > b + \epsilon_1$ y $|\langle x_2^*, k \rangle| \leq \epsilon_1 \leq 2^{-2}$, $\forall k \in \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_1} K_\alpha$. Puesto que $\langle \xi_2, x_2^* \rangle > b + \epsilon_1$, podemos elegir $\eta_2 \in V_1 \cap H$ tal que $\langle \eta_2, x_2^* \rangle > b + \epsilon_1$ y también $\langle \eta_2, y_1 \rangle > b - a$ porque $\eta_2 \in V_1$. Sea $\eta_2 = v_2 + w_2$ con $v_2 \in h(Y_0^*)$ y $w_2 \in Y_0^{\perp}$. Observemos que $\|w_2\| = d(\eta_2, h(Y_0^*)) \leq d(\eta_2, X) \leq \hat{d}(K, X) < a$ y $|\langle w_2, x_2^* \rangle| \leq (1 + \epsilon_1)\hat{d}(K, X) \leq a$. A continuación procedemos en los casos (A) y (B) a la elección de y_2 y $\mathcal{A}_2$:

__**Caso A.**__ Se tiene que

$$\langle v_2, x_2^* \rangle = \langle \eta_2, x_2^* \rangle - \langle w_2, x_2^* \rangle \geq \langle \eta_2, x_2^* \rangle - |\langle w_2, x_2^* \rangle| > b - a.$$

Por lo tanto como $\langle v_2, x_2^* \rangle = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle v_{2\alpha}, x_{2\alpha}^* \rangle > b - a$, podemos hallar un subconjunto finito $\mathcal{A}_2$ de $\mathcal{A}$ verificando $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ tal que, si y_2 es la restricción de x_2^* a $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_2} \oplus X_\alpha$ (por lo tanto $y_2 = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_2} x_{2\alpha}^* \in \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_2} \oplus X_\alpha^* \subset Y_0$ con $\|y_2\| \leq 1 + \epsilon_1$), entonces $\langle \eta_2, y_2 \rangle = \langle v_2, y_2 \rangle > b - a$. Observemos que para todo $k \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_1} K_\alpha$ ocurre que $\psi(k) = 0$ por lo que

$$|\langle y_2, k \rangle| = |\langle x_2^*, k \rangle| \leq \epsilon_1 \leq 2^{-2}.$$

__**Caso B.**__ Sean $\gamma_{21} := x_2^* \upharpoonright \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_1} \oplus_1 X_\alpha = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_1} x_{2\alpha}^*$ y $\gamma_{22} = x_2^* - \gamma_{21}$. Puesto que $|\langle x_2^*, k \rangle| \leq \epsilon_1$, $\forall k \in \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_1} K_\alpha$, y $B(\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_1} \oplus_1 X_\alpha) \subset \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_1} K_\alpha$, se tiene que $\|\gamma_{21}\| \leq \epsilon_1$. Por tanto

$$\langle v_2, \gamma_{22} \rangle = \langle \eta_2, x_2^* \rangle - \langle w_2, x_2^* \rangle - \langle v_2, \gamma_{21} \rangle \geq \langle \eta_2, x_2^* \rangle - \epsilon_1 - a > b - a.$$

Puesto que $\langle v_2, \gamma_{22}\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{A}_1}\langle v_{2\alpha}, x^*_{2\alpha}\rangle > b-a$, podemos hallar un subconjunto finito $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}\setminus\mathcal{A}_1$ tal que, si y_2 es la restricción de x^*_2 a $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_2}\oplus X_\alpha$ (por lo tanto $y_2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_2} x^*_{2\alpha} \in \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_2}\oplus X^*_\alpha \subset Y_0$ con $\|y_2\| \leq 1+\epsilon_1$), entonces $\langle \eta_2, y_2\rangle = \langle v_2, y_2\rangle > b-a$.

Etapa 3. Sea $V_2 = \{u \in X^{**} : \langle u, y_j\rangle > b-a, j = 1,2\}$, que es un subconjunto w*-abierto de X^{**} tal que $V_2 \cap H \neq \emptyset$, porque $\eta_2 \in V_2 \cap H$. Por el Hecho existe $\xi_3 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V_2 \cap H)$ con $\langle \psi, \xi_3\rangle > b$. Sea $0 < 2\epsilon_2 < 2^{-2} \wedge (\langle \psi, \xi_3\rangle - b) \wedge (a(\hat{d}(K,X))^{-1} - 1)$ y consideremos en X^{**} el subconjunto w-compacto $L_2 := \{\xi_3\} \cup \left(\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2} K_\alpha\right)$. Por el Lema 5.2 existe un vector $x^*_3 \in X^*$ tal que $\|x^*_3\| \leq 1+\epsilon_2$ y

$$\forall k \in L_3,\ \langle \psi, k\rangle - \epsilon_2 < \langle k, x^*_3\rangle < \langle \psi, k\rangle + \epsilon_2.$$

En particular, $\langle \xi_3, x^*_3\rangle > b+\epsilon_2$ y $|\langle x^*_3, k\rangle| \leq \epsilon_2 \leq 2^{-3}$, $\forall k \in \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2} K_\alpha$. Puesto que $\langle \xi_3, x^*_3\rangle > b+\epsilon_2$, podemos elegir $\eta_3 \in V_2 \cap H$ tal que $\langle \eta_3, x^*_3\rangle > b+\epsilon_2$ y también $\langle \eta_3, y_j\rangle > b-a$, $j = 1,2$, porque $\eta_3 \in V_2$. Sea $\eta_3 = v_3 + w_3$ con $v_3 \in h(Y^*_0)$ y $w_3 \in Y_0^\perp$. Observemos que $\|w_3\| = d(\eta_3, h(Y^*_0)) \leq d(\eta_3, X) \leq \hat{d}(K,X) < a$ y $|\langle w_3, x^*_3\rangle| \leq (1+\epsilon_2)\hat{d}(K,X) \leq a$. A continuación procedemos en los casos (A) y (B) a la elección de y_3 y $\mathcal{A}_3$:

<u>**Caso A.**</u> Se tiene que

$$\langle v_3, x^*_3\rangle = \langle \eta_3, x^*_3\rangle - \langle w_3, x^*_3\rangle \geq \langle \eta_3, x^*_3\rangle - |\langle w_3, x^*_3\rangle| > b-a.$$

Por lo tanto como $\langle v_3, x^*_3\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}}\langle v_{3\alpha}, x^*_{3\alpha}\rangle > b-a$, podemos hallar un subconjunto finito $\mathcal{A}_3$ de $\mathcal{A}$ verificando $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_3 \subset \mathcal{A}$ tal que, si y_3 es la restricción de x^*_3 a $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_3}\oplus X_\alpha$ (por lo tanto $y_3 = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_3} x^*_{3\alpha} \in \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_3}\oplus X^*_\alpha \subset Y_0$ con $\|y_3\| \leq 1+\epsilon_2$), entonces $\langle \eta_3, y_3\rangle = \langle v_3, y_3\rangle > b-a$. Observemos que para todo $k \in \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_2} K_\alpha$ ocurre que $\psi(k) = 0$ por lo que

$$|\langle y_3, k\rangle| = |\langle x^*_3, k\rangle| \leq \epsilon_2 \leq 2^{-3}.$$

<u>**Caso B.**</u> Sean $\gamma_{31} := x^*_3 \restriction \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2}\oplus_1 X_\alpha = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2} x^*_{3\alpha}$ y $\gamma_{32} = x^*_3 - \gamma_{31}$. Puesto que $|\langle x^*_3, k\rangle| \leq \epsilon_2$, $\forall k \in \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2} K_\alpha$, y $B(\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2}\oplus_1 X_\alpha) \subset \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2} K_\alpha$, se tiene que $\|\gamma_{31}\| \leq \epsilon_2$. Por tanto

$$\langle v_3, \gamma_{32}\rangle = \langle \eta_3, x^*_3\rangle - \langle w_3, x^*_3\rangle - \langle v_3, \gamma_{31}\rangle \geq \langle \eta_3, x^*_3\rangle - \epsilon_2 - a > b-a.$$

Puesto que $\langle v_3, \gamma_{32}\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus(\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2)}\langle v_{3\alpha}, x^*_{3\alpha}\rangle > b-a$, podemos hallar un subconjunto finito $\mathcal{A}_3 \subset \mathcal{A}\setminus(\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2)$ tal que, si y_3 es la restricción de x^*_3 a $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_3}\oplus X_\alpha$ (por lo tanto $y_3 = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_3} x^*_{3\alpha} \in \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_3}\oplus X^*_\alpha \subset Y_0$ con $\|y_3\| \leq 1+\epsilon_2$), entonces $\langle \eta_3, y_3\rangle = \langle v_3, y_3\rangle > b-a$.

A continuación reiteramos hasta el infinito. Obtenemos de este modo las secuencias $\{y_k : k \geq 1\} \subset Y_0$, $\{\eta_k : k \geq 1\} \subset K$ y $\{\mathcal{A}_k : k \geq 1\}$, $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}$, verificando las siguientes condiciones

<u>**Caso A.**</u> En este caso se tiene que:

(i) Los $\mathcal{A}_k$ son subconjuntos finitos de $\mathcal{A}$ con $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_{k+1}$ para $k \geq 1$.

(ii) $y_k \in \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_k} \oplus X_\alpha^* \subset Y_0,\ \|y_k\| \leq 1+\epsilon_{k-1},\ k\geq 2$, y $\langle \eta_j, y_k\rangle > b-a$ para $j \geq k$ con $j,k \in \mathbb{N}$.

(iii) Para todo $h \in \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_k} K_\alpha$ ocurre que $|\langle y_{k+1}, h\rangle| \leq 2^{-k-1},\ \forall k \geq 1$.

Sean $\mathcal{A}_0 := \cup_{n\geq 1}\mathcal{A}_n$, $X_0 := \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_0} \oplus X_\alpha$ y $P_0 : X \to X_0$ la proyección canónica sobre X_0, cuya norma es $\|P_0\| = 1$. El espacio X admite la descomposición monótona

$$X = X_0 \overset{m}{\oplus} X_1 \text{ siendo } X_1 := \sum_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{A}_0} X_\alpha.$$

De aquí se obtienen las descomposiciones monótonas

$$X^* = X_0^* \overset{m}{\oplus} X_1^*,\ X^{**} = X_0^{**} \overset{m}{\oplus} X_1^{**},\ X^{***} = X_0^{***} \overset{m}{\oplus} X_1^{***}, \text{ etc,}$$

con proyecciones $P_0 : X \to X_0$, $P_0^* : X^* \to X_0^*$, $P_0^{**} : X^{**} \to X_0^{**}$, $P_0^{***} : X^{***} \to X_0^{***}$, etc. Observemos que $P_0^*(y_k) = y_k,\ \forall k \geq 1$, es decir, $y_k \in X_0^* = P_0^*(X^*),\ \forall k\geq 1$. Sea η_0 un punto w*-límite de la secuencia $\{\eta_k : k \geq 1\}$ en X^{**}. Obviamente $\eta_0 \in K$. Además, puesto que $\langle \eta_j, y_k\rangle > b-a,\ \forall j \geq k$, obtenemos que $\langle \eta_0, y_k\rangle \geq b-a,\ \forall k \geq 1$. Sea φ_0 un punto w*-límite de $\{y_k : k \geq 1\}$ en X^{***}. Entonces

(i) $\varphi_0 \in B(X^{***})$. En realidad φ_0 está en $P_0^{***}(X^{***}) = X_0^{***}$, es decir, $P_0^{***}(\varphi_0) = \varphi_0$.

(ii) Por construcción $\varphi_{0\restriction K_\alpha} = 0,\ \forall \alpha \in \mathcal{A}_0$, por lo que $\varphi_0 \in X_0^\perp$, ya que el conjunto $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_0} K_\alpha$ genera X_0.

(iii) $\langle \varphi_0, \eta_0\rangle \geq b-a$ porque $\langle \eta_0, y_k\rangle \geq b-a,\ \forall k \geq 1$.

Sean $W := P_0^{**}(K) \subset B(X_0^{**})$, que es un subconjunto w*-compacto de X_0^{**}, y $w_0 = P_0^{**}(\eta_0)$. Obviamente $w_0 \in W$.

<u>Aserto 1.</u> $d(w_0, X_0) < a$.

En efecto, sea $x \in X$ arbitrario. Entonces

$$d(w_0, X_0) \leq \|w_0 - P_0^{**}x\| = \|P_0^{**}(\eta_0) - P_0^{**}x\| \leq \|\eta_0 - x\|.$$

Es decir, $d(w_0, X_0) \leq d(\eta_0, X) \leq \hat{d}(K, X) < a$.

<u>Aserto 2.</u> $d(w_0, X_0) \geq b-a$.

En efecto, como $\varphi_0 \in B(X^{***}) \cap X_0^\perp$ y

$$\langle \varphi_0, w_o\rangle = \langle \varphi_0, P_0^{**}\eta_0\rangle = \langle P_0^{***}\varphi_0, \eta_0\rangle = \langle \varphi_0, \eta_0\rangle \geq b-a,$$

concluimos que $d(w_0, X_0) \geq b-a$.

Como $a < b-a$ llegamos a una contradicción que prueba el enunciado (A).

<u>Caso B.</u> En este caso se tiene que:

(i) Los $\mathcal{A}_k$ son subconjuntos finitos disjuntos de $\mathcal{A}$ para $k \geq 1$.

(ii) $y_k \in \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_k} \oplus_0 X_\alpha^* \subset Y_0$, $\|y_k\| \leq 1 + \epsilon_{k-1}$, $k \geq 2$, y $\langle \eta_j, y_k\rangle > b - a$ para $j \geq k$ con $j, k \in \mathbb{N}$.

(iii) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\| \sum_{i=1}^n y_i\| \leq 2$.

Sea η_0 un punto w*-límite de la secuencia $\{\eta_k : k \geq 1\}$ en X^{**}. Obviamente $\eta_0 \in K$. Además, puesto que $\langle \eta_j, y_k\rangle > b-a$, $\forall j \geq k$, obtenemos que $\langle \eta_0, y_k\rangle \geq b-a > 0$, $\forall k \geq 1$. Por tanto $\langle \eta_0, \sum_{i=1}^n y_i\rangle \geq n(b-a)$, $\forall n \geq 1$. Puesto que $\| \sum_{i=1}^n y_i\| \leq 2$, $\forall n \geq 1$, hemos llegado a una contradicción que prueba el enunciado (B). ■

<u>**Nota.**</u> Observemos que la Proposición 5.3 generaliza a la Proposición 1.11.

Proposición 5.4. *Sea X un espacio de Banach, que es suma directa $X = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \oplus X_\alpha$ 1-incondicional de una familia $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ de espacios de Banach WCG. Si $K \subset X^{**}$ es un subconjunto w*-compacto tal que $K \cap X$ es w*-denso en K, se tiene que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X) = \hat{d}(K, X)$.*

Demostración. La prueba es análoga a la de la Proposición 5.3. Por razones de claridad y para comodidad del lector damos todos los detalles de la demostración. Comenzamos suponiendo que existe un subconjunto w*-compacto $K \subset B(X^{**})$ tal que

$$\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X) > b > a > \hat{d}(K, X) > 0.$$

Por el Lema 1.7 se tiene:

Hecho. Existen $\psi \in S(X^{***}) \cap X^\perp$ y un subconjunto w*-compacto $\emptyset \neq H \subset K$ tales que para todo subconjunto w*-abierto V con $V \cap H \neq \emptyset$ existe $\xi \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap H)$ con $\langle \psi, \xi\rangle > b$.

Etapa 1. Por el Hecho existe un vector $\xi_1 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$ tal que $\langle \psi, \xi_1\rangle > b$. Puesto que $B(X^*)$ es w*-denso en $B(X^{***})$, podemos hallar un vector $x_1^* \in B(X^*)$ tal que $\langle \xi_1, x_1^*\rangle > b$. Sea $V_1 = \{u \in X^{**} : \langle u, x_1^*\rangle > b\}$, que es un subconjunto w*-abierto de X^{**}, que verifica $V_1 \cap H \neq \emptyset$ y, también por razones de densidad, $V_1 \cap K \cap X \neq \emptyset$. Así que existe un vector $\eta_1 \in K \cap X$ de modo que $\langle \eta_1, x_1^*\rangle > b$. Puesto que $\eta_1 \in X$, el soporte $\mathcal{A}_1$:=supp$(\eta_1) = \{\alpha \in \mathcal{A} : \eta_{1\alpha} \neq 0\}$ de η_1 es contable, digamos $\mathcal{A}_1 = \{\alpha_{1n} : n \geq 1\}$.

Etapa 2. Como $V_1 \cap H \neq \emptyset$, por el Hecho existe un vector $\xi_2 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V_1 \cap H)$ tal que $\langle \psi, \xi_2\rangle > b$. Sean $L_1 := \bigcup_{i,j=1}^1 K_{\alpha_{ij}}$ y $\epsilon_1 := 2^{-1} \wedge (\psi(\xi_2) - b)$. Como $L_1 \cup \{\xi_2\}$ es un subconjunto w-compacto de X^{**}, por el Lema 5.2 existe un vector $x_2^* \in X^*$ tal que $\|x_2^*\| \leq 1 + \epsilon_1$ y

$$\forall k \in L_1 \cup \{\xi_2\},\ \langle \psi, k\rangle - \epsilon_1 < \langle k, x_2^*\rangle < \langle \psi, k\rangle + \epsilon_1.$$

En particular $\langle \xi_2, x_2^*\rangle > b$ y $|\langle x_2^*, k\rangle| \leq 2^{-1}$, $\forall k \in L_1$. Como $\langle \xi_2, x_2^*\rangle > b$ y $\xi_2 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V_1 \cap H)$, si ponemos $W_2 := \{u \in X^{**} | \langle u, x_2^*\rangle > b\}$, entonces $W_2 \cap V_1 \cap H \neq \emptyset$ y, también por razones de densidad, $W_2 \cap V_1 \cap K \cap X \neq \emptyset$. Denotamos $V_2 := W_2 \cap V_1$ y elegimos

$\eta_2 \in V_2 \cap K \cap X$, que verifica $x_i^*(\eta_2) > b$, $i = 1, 2$. Puesto que $\eta_2 \in X$, el soporte $\mathcal{A}_2 :=$supp$(\eta_2) = \{\alpha \in \mathcal{A} : \eta_{2\alpha} \neq 0\}$ de η_2 es contable, digamos $\mathcal{A}_2 = \{\alpha_{2n} : n \geq 1\}$.

El proceso se reitera hasta el infinito. Obtenemos de este modo las secuencias $\{x_k^* : k \geq 1\} \subset X^*$, $\{\eta_k : k \geq 1\} \subset K \cap X$, $\{L_k : k \geq 1\}$ y $\{\mathcal{A}_k : k \geq 1\}$, tales que

(a) $\mathcal{A}_k :=$supp$(\eta_k) = \{\alpha \in \mathcal{A} : \eta_{k\alpha} \neq 0\}$ es el soporte de η_k y es contable, digamos $\mathcal{A}_k = \{\alpha_{kn} : n \geq 1\}$, $\forall k \geq 1$.

(b) Los $L_k = \bigcup_{i,j=1}^k K_{\alpha_{ij}}$ son subconjuntos w-compactos de $B(X)$, $\forall k \geq 1$.

(c) $\|x_{k+1}^*\| \leq 1 + \epsilon_k$, $\langle \eta_j, x_k^* \rangle > b$, $j \geq k \geq 1$, y para todo $h \in L_k$ ocurre que $|\langle x_{k+1}^*, h \rangle| \leq 2^{-k}$, $\forall k \geq 1$.

Sean $\mathcal{A}_0 := \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{A}_n$, $X_0 := \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_0} \oplus X_\alpha$ y $P_0 : X \to X_0$ la proyección canónica, cuya norma es $\|P_0\| = 1$. Observemos que X_0 es WCG porque es suma contable de espacios WCG. El espacio X admite la descomposición monótona

$$X = X_0 \overset{m}{\oplus} X_1 \text{ siendo } X_1 := \sum_{\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0} X_\alpha.$$

De aquí se obtienen las descomposiciones monótonas

$$X^* = X_0^* \overset{m}{\oplus} X_1^*, \; X^{**} = X_0^{**} \overset{m}{\oplus} X_1^{**}, \; X^{***} = X_0^{***} \overset{m}{\oplus} X_1^{***}, \text{ etc,}$$

con proyecciones $P_0 : X \to X_0$, $P_0^* : X^* \to X_0^*$, $P_0^{**} : X^{**} \to X_0^{**}$, $P_0^{***} : X^{***} \to X_0^{***}$, etc. Observemos que $P_0(\eta_k) = \eta_k \in X_0$, $\forall k \geq 1$. Sea η_0 un punto w*-límite de la secuencia $\{\eta_k : k \geq 1\}$ en X^{**}. Obviamente $\eta_0 \in X_0^{**} \cap K$ porque X_0^{**} es w*-cerrado en X^{**} (de hecho $X_0^{**} = \overline{X_0}^{w^*}$) y $\{\eta_k : k \geq 1\} \subset X_0 \cap K$. Puesto que $\langle x_i^*, \eta_k \rangle > b$, $\forall i \leq k$, obtenemos que $\langle \eta_0, x_i^* \rangle \geq b$, $\forall i \geq 1$, y también $\langle \eta_0, P_0^* x_i^* \rangle \geq b$, $\forall i \geq 1$, pues $\langle \eta_0, P_0^* x_i^* \rangle = \langle P_0^{**} \eta_0, x_i^* \rangle = \langle \eta_0, x_i^* \rangle \geq b$. Sea φ_0 un punto w*-límite de $\{P_0^* x_k^* : k \geq 1\}$ en X^{***}. Entonces

(i) $\varphi \in B(X^{***})$. De hecho φ_0 está en $P_0^{***}(X^{***}) = X_0^{***}$, (es decir, $P_0^{***}(\varphi_0) = \varphi_0$) porque X_0^{***} es w*-cerrado en X^{***} y $\{P_0^* x_k^* : k \geq 1\} \subset X_0^* \subset X_0^{***}$.

(ii) Puesto que para todo $k \geq 1$ y todo $h \in L_k$ se verifica que

$$|\langle P_0^*(x_{k+1}^*), h \rangle| = |\langle x_{k+1}^*, P_0(h) \rangle| = |\langle x_{k+1}^*, h \rangle| \leq 2^{-k},$$

obtenemos que $\varphi_0 \in X_0^\perp$.

(iii) $\langle \varphi_0, \eta_0 \rangle \geq b$ porque $\langle \eta_0, P_0^*(x_k^*) \rangle \geq b$, $\forall k \geq 1$.

Sea $W := P_0^{**}(K) \subset B(X_0^{**})$. W es claramente un subconjunto w*-compacto de X_0^{**}. Sea $w_0 = P_0^{**}(\eta_0)$. Obviamente $w_0 \in W$.

Aserto 1. $d(w_0, X_0) < a$.

En efecto, en primer término, como $W = P_0^{**}(K)$, $X_0 = P_0^{**}(X)$ y $\|P_0^{**}\| = 1$, se tiene que $\hat{d}(W, X_0) \leq \|P_0^{**}\| \hat{d}(K, X) < a$. Ahora basta observar que $w_0 \in W$.

<u>**Aserto 2.**</u> $d(w_0, X_0) \geq b$.

En efecto, puesto que $\varphi_0 \in B(X^{***}) \cap X_0^{\perp}$ y

$$\langle \varphi_0, w_0 \rangle = \langle \varphi_0, P_0^{**} \eta_0 \rangle = \langle P_0^{***} \varphi_0, \eta_0 \rangle = \langle \varphi_0, \eta_0 \rangle \geq b,$$

concluimos que $d(w_0, X_0) \geq b$.

Como $a < b$ llegamos a una contradicción que prueba el enunciado. ■

A continuación mostramos que, si X es un retículo de Banach o-continuo, entonces X es una suma directa 1-incondicional de subretículos que son WCG.

Lema 5.5. *Sea X un retículo de Banach o-continuo con unidad débil $e > 0$. Entonces X es WCG.*

Demostración. Sabemos (ver [36, p. 28]) que el intervalo $[0, e] := \{x \in X : 0 \leq x \leq e\}$ es un subconjunto w-compacto de X. Queremos probar que $X = \overline{[[0, e]]}$, es decir, que X es el cierre del subespacio generado por $[0, e]$. Cojamos un elemento positivo $x \in X^+$. Entonces $ne \wedge x \uparrow x$ para $n \to \infty$, por lo que, al ser X o-continuo, se tiene que $\|x - ne \wedge x\| \downarrow 0$. Así que $\bigcup_{n \geq 1} [0, ne] = \bigcup_{n \geq 1} n[0, e]$ es denso en el cono positivo X^+. Como $X = X^+ - X^+$, concluimos que X es el cierre del subespacio generado por $[0, e]$. ■

Lema 5.6. *Si X es un retículo de Banach o-continuo entonces X es la suma directa 1-incondicional $X = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \oplus X_\alpha$ de una familia de ideales $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ mutuamente disjuntos, cada uno de ellos con unidad débil y, por tanto, WCG.*

Demostración. Por [37, 1.a.9] X admite la expresión $X = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \oplus X_\alpha$ como suma directa de los ideales cerrados mutuamente disjuntos $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ (por tanto como suma directa 1-incondicional), de modo que cada ideal X_α tiene unidad débil. Aplicando el Lema 5.5 se concluye el resultado. ■

Corolario 5.7. *Sea X un retículo de Banach o-continuo. Si $K \subset X^{**}$ es un subconjunto w^*-compacto, entonces $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X) \leq 2\hat{d}(K, X)$ y, si $K \cap X$ es w^*-denso en K, entonces $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X) = \hat{d}(K, X)$.*

Demostración. El resultado es consecuencia del Lema 5.6, la Proposición 5.3 y la Proposición 5.4.

■

<u>**NOTA.**</u> Observemos que si X es un retículo de Banach que no es o-continuo, el control de X en su bidual X^{**} puede ser peor que el 2-control del Corolario 5.7. El ejemplo nos lo ofrece la Proposición 1.12, en donde se construyen contraejemplos, que son retículos de Banach no o-continuos, que tienen 3-control como mucho.

Sea X un espacio de Banach que admite una descomposición $X = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \oplus X_\alpha$ como suma directa 1-incondicional de subespacios cerrados X_α. Decimos que la descomposición $X = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \oplus X_\alpha$ es de *tipo contable* si para todo $u \in X^*$ el conjunto soporte $\mathrm{supp}(u) := \{\alpha \in \mathcal{A} : u_\alpha \neq 0\}$ es contable, siendo $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ el conjunto de las coordenadas de u, es decir, $u_\alpha := u_{\restriction X_\alpha} = u \circ P_\alpha$, donde $P_\alpha : X \to X_\alpha$ es la proyección canónica. Por ejemplo, si I es un conjunto infinito, $M : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ una función de Orlicz tal que su complementaria M^* (ver [36, Chapter 4]) verifica $M^*(t) > 0$ para $t > 0$, entonces el espacio de Orlicz $h_M(I) := \{f \in \mathbb{R}^I : \sum_{i \in I} M(f_i/\lambda) < \infty, \forall \lambda > 0\}$ tiene descomposición contable respecto de su base canónica, porque todo elemento de su dual (que es $h_M(I)^* := \ell_{M^*}(I)$) tiene soporte contable.

Lema 5.8. *Sea X un espacio de Banach que admite una descomposición $X = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \oplus X_\alpha$ como suma directa 1-incondicional de subespacios cerrados X_α. Son equivalentes*

(1) La descomposición $X = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \oplus X_\alpha$ no es de tipo contable.

(2) Existe en X una copia de $\ell_1(\aleph_1)$ dispuesta disjuntamente respecto de la descomposición $X = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \oplus X_\alpha$, es decir, existe un subconjunto $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ con cardinal $|\mathcal{A}_1| = \aleph_1$ y por cada $\alpha \in \mathcal{A}_1$ un elemento $v_\alpha \in X_\alpha$ de modo que la familia $\{v_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_1\}$ es equivalente a la base canónica de $\ell_1(\aleph_1)$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Si la descomposición no es de tipo contable, existe un cierto $u \in X^*$ tal que el conjunto $\mathcal{A}_0 := \{\alpha \in \mathcal{A} : u_\alpha \neq 0\}$ verifica $|\mathcal{A}_0| \geq \aleph_1$, siendo $u_\alpha := u_{\restriction X_\alpha} = u \circ P_\alpha$, donde $P_\alpha : X \to X_\alpha$ es la proyección canónica. Pasando a un subconjunto si es preciso, se puede encontrar un número real $\epsilon > 0$, un subconjunto $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_0$ con $|\mathcal{A}_1| = \aleph_1$ y una familia $\{v_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_1\}$ con $v_\alpha \in B(X_\alpha)$ de modo que $\langle u, v_\alpha \rangle = \langle u_\alpha, v_\alpha \rangle > \epsilon$. En estas condiciones, es inmediato probar que la familia $\{v_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_1\}$ es equivalente a la base canónica de $\ell_1(\aleph_1)$ y genera una copia de $\ell_1(\aleph_1)$ que está disjuntamente dispuesta respecto de la descomposición $X = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \oplus X_\alpha$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Sea $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ un subconjunto con cardinal $|\mathcal{A}_1| = \aleph_1$ y por cada $\alpha \in \mathcal{A}_1$ sea v_α un elemento de X_α de modo que la familia $\{v_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_1\}$ sea equivalente a la base canónica $\{e_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_1\}$ de $\ell_1(\mathcal{A}_1)$. Sea $T : \ell_1(\mathcal{A}_1) \to X$ el isomorfismo entre $\ell_1(\mathcal{A}_1)$ y el espacio cerrado generado por $\{v_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_1\}$ de modo que $T(e_\alpha) = v_\alpha$. Puesto que $T^* : X^* \to \ell_\infty(\mathcal{A}_1)$ es un cociente y, por tanto, $T^*(X^*) = \ell_\infty(\mathcal{A}_1)$, si $w_0 \in \ell_\infty(\mathcal{A}_1)$ es tal que $w_0(\alpha) = 1$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}_1$, existe un vector $u \in X^*$ tal que $T^*(u) = w_0$. Entonces para todo $\alpha \in \mathcal{A}_1$ se tiene

$$\langle u, v_\alpha \rangle = \langle u, Te_\alpha \rangle = \langle T^* u, e_\alpha \rangle = \langle w_0, e_\alpha \rangle = 1,$$

lo que prueba que u es un elemento de X^* que no tiene soporte contable respecto de la descomposición $X = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \oplus X_\alpha$. ∎

NOTA. Es claro que si X es un retículo de Banach o-continuo que no contiene copias de $\ell_1(\aleph_1)$, entonces X admite una descomposición de tipo contable $X = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \oplus X_\alpha$ como suma directa disjunta 1-incondicional de ideales cerrados X_α que poseen unidad débil cada uno.

Proposición 5.9. *Sea X un espacio de Banach que admite una descomposición de tipo contable $X = \sum_{i\in I} \oplus X_i$ como suma directa 1-incondicional de subespacios cerrados $\{X_i : i \in I\}$ que son WCG. Entonces X tiene 1-control en su bidual X^{**}.*

Demostración. Si I es un conjunto contable, el enunciado es cierto porque X sería WCG (por ser suma contable de espacios WCG) y sabemos que los espacios WCG tienen 1-control en su bidual (ver Corolario 1.5). Así que supondremos en lo que sigue que I es incontable. Supongamos que el enunciado es falso e intentemos deducir de aquí una contradicción. Admitamos que existen un subconjunto w*-compacto $K \subset X^{**}$ y un vector $z_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ tales que $d(z_0, X) > b > a > \hat{d}(K, X)$. Elegimos un vector $\psi \in B(X^{***}) \cap X^{\perp}$ tal que $\langle \psi, z_0\rangle > b$. Adoptamos la siguiente notación. Por cada $i \in I$ sea $K_i \subset X_i$ un subconjunto w-compacto que genera X_i. Si $J \subset I$ es un subconjunto, denotamos por $X(J)$ al subespacio $X(J) := \sum_{i\in J} \oplus X_i$ (así que $X = X(I)$) y por P_J a la proyección canónica $P_J : X \to X(J)$ de norma $\|P_J\| = 1$. En el dual X^* identificaremos el subespacio $P_J^*(X^*)$ con $X(J)^*$.

<u>**Etapa 1.**</u> Puesto que $\langle \psi, z_0\rangle > b$, existe $x_1^* \in B(X^*)$ tal que $\langle z_0, x_1^*\rangle > b$ (porque $B(X^*)$ es w*-denso en $B(X^{***})$). Por hipótesis el conjunto soporte $\text{supp}(x_1^*) = \{\alpha \in I : 0 \neq x_{1\alpha}^*\} := J_1$ de x_1^* es contable. Denotemos $J_1 = \{\alpha_{1j} : j \geq 1\}$ y pongamos $I_1 := J_1$. Por tanto, si $P_{I_1} : X \to \sum_{i\in I_1} \oplus X_i$ es la correspondiente proyección canónica, se tiene que $P_{I_1}^*(x_1^*) = x_1^*$ (esto es, $x_1^* \in X(I_1)^*$) y además

$$\langle P_{I_1}^{**}(z_0), x_1^*\rangle = \langle z_0, P_{I_1}^*(x_1^*)\rangle = \langle z_0, x_1^*\rangle > b.$$

<u>**Etapa 2.**</u> Sea $K_{\alpha_{11}}$ el subconjunto w-compacto que genera $X_{\alpha_{11}}$ y pongamos $L_2 := \{z_0\} \cup K_{\alpha_{11}}$, que es un subconjunto w-compacto de X^{**}. Sea $\epsilon_2 = 2^{-2} \wedge (\langle \psi, z_0\rangle - b)$. Por el Lema 5.2 existe un vector $x_2^* \in X^*$ tal que $\|x_2^*\| \leq 1 + \epsilon_2$ y

$$\forall k \in L_2,\ \langle \psi, k\rangle - \epsilon_2 < \langle k, x_2^*\rangle < \langle \psi, k\rangle + \epsilon_2.$$

En particular, $\langle z_0, x_2^*\rangle > b$ y $|\langle k, x_2^*\rangle| \leq 2^{-2},\ \forall k \in K_{\alpha_{11}}$. Sea $J_2 :=\text{supp}(x_2^*)$ el soporte de x_2^*, que por hipótesis es contable. Denotemos $J_2 := \{\alpha_{2j} : j \geq 1\}$ e $I_2 := J_1 \cup J_2$. Entonces $P_{I_2}^*(x_i^*) = x_i^* \in X(I_2)^*,\ i = 1, 2$, y además

$$\langle P_{I_2}^{**}(z_0), x_i^*\rangle = \langle z_0, P_{I_2}^*(x_i^*)\rangle = \langle z_0, x_i^*\rangle > b,\ i = 1, 2.$$

<u>**Etapa 3.**</u> Sea $L_3 := \{z_0\} \cup \left(\bigcup\{K_{\alpha_{ij}} : 1 \leq i, j \leq 2\}\right)$, que es un subconjunto w-compacto de X^{**}. Sea $\epsilon_3 = 2^{-3} \wedge (\langle \psi, z_0\rangle - b)$. Por el Lema 5.2 existe un vector $x_3^* \in X^*$ tal que $\|x_3^*\| \leq 1 + \epsilon_3$ y

$$\forall k \in L_3,\ \langle \psi, k\rangle - \epsilon_3 < \langle k, x_3^*\rangle < \langle \psi, k\rangle + \epsilon_3.$$

En particular, $\langle z_0, x_3^*\rangle > b$ y $|\langle k, x_3^*\rangle| \leq 2^{-3},\ \forall k \in K_{\alpha_{ij}},\ 1 \leq i, j \leq 2$. Sea $J_3 :=\text{supp}(x_3^*)$ el soporte de x_3^*, que por hipótesis es contable, y denotemos $J_3 := \{\alpha_{3j} : j \geq 1\}$ e $I_3 := J_1 \cup J_2 \cup J_3$. Entonces $P_{I_3}^*(x_i^*) = x_i^* \in X(I_3)^*,\ i = 1, 2, 3$, y además

$$\langle P_{I_3}^{**}(z_0), x_i^*\rangle = \langle z_0, P_{I_3}^*(x_i^*)\rangle = \langle z_0, x_i^*\rangle > b,\ i = 1, 2, 3.$$

A continuación reiteramos hasta el infinito. Sea $I_0 := \bigcup_{n\geq 1} I_n$. Observemos que I_0 es un subconjunto contable de I tal que $P^*_{I_0}(x^*_i) = x^*_i \in X(I_0)^*$, $i \geq 1$. Sea $\psi_0 \in B(X^{***})$ un punto w*-límite de la familia $\{x^*_n : n \geq 1\}$ en X^{***}. Entonces

(α) Puesto que $X(I_0)^{***}$ es un subconjunto w*-cerrado en X^{***} y $x^*_n \in B(X(I_0)^*) \subset B(X(I_0)^{***})$, $n \geq 1$, concluimos que $\psi_0 \in B(X(I_0)^{***})$ y, por tanto, $P^{***}_{I_0}(\psi_0) = \psi_0$.

(β) Puesto que $|\langle u, x^*_{n+1}\rangle| \leq 2^{-n-1}$, $\forall u \in K_{\alpha_{ij}}$, $1 \leq i,j \leq n$, y el conjunto $\bigcup_{i,j\geq 1} K_{\alpha_{ij}}$ genera el espacio $X(I_0)$, concluimos que $\psi_{0\restriction X(I_0)} \equiv 0$, esto es, $\psi_0 \in B(X(I_0)^{\perp})$.

(γ) Puesto que $\langle z_0, x^*_k\rangle > b$, $\forall k \geq 1$, deducimos que $\langle \psi_0, z_0\rangle \geq b$.

Sea $H := P^{**}_{I_0}(K)$ y $w_0 := P^{**}_{I_0}(z_0)$. Es claro que H es un subconjunto w*-compacto de $X(I_0)^{**}$ (con respecto a la topología $\sigma(X(I_0)^{**}, X(I_0)^*)$ y que $w_0 \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(H)$.

__Aserto 1.__ $\hat{d}(H, X(I_0)) < a$ y $d(w_0, X(I_0)) < a$.

En efecto

$$\hat{d}(H, X(I_0)) = \hat{d}(P^{**}_{I_0}(K), P^{**}_{I_0}(X)) \leq \|P^{**}_{I_0}\|\hat{d}(K, X) < a.$$

De aquí por Corolario 1.5 deducimos que $d(w_0, X(I_0)) < a$, porque $X(I_0)$ es WCG (por ser suma contable de espacios WCG).

__Aserto 2.__ $d(w_0, X(I_0)) \geq b$.

En efecto, aplicando (γ) (ver más arriba) se tiene que

$$\langle \psi_0, w_0\rangle = \langle \psi_0, P^{**}_{I_0}(z_0)\rangle = \langle P^{***}_{I_0}(\psi_0), z_0\rangle = \langle \psi_0, z_0\rangle \geq b.$$

Como $\psi_0 \in X(I_0)^{\perp}$ y $\|\psi_0\| \leq 1$, obtenemos que $d(w_0, X(I_0)) \geq b$.

Puesto que $b > a$, hemos llegado a una contradicción, que prueba la proposición. ■

Corolario 5.10. *Sea X un retículo de Banach o-continuo que no contiene una copia de $\ell_1(\aleph_1)$. Entonces X tiene 1-control en su bidual.*

Demostración. El resultado sale de Proposición 5.9, Lema 5.8 y Lema 5.6. ■

Proposición 5.11. *Sea X un espacio de Banach que posee una base transfinita $\{e_\alpha : 1 \leq \alpha < \omega_1\}$ de constante 1 (es decir, si $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{n+m} < \omega_1$ y $(\lambda_i)_{i=1}^{n+m} \in \mathbb{R}^{n+m}$, se tiene $\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_{\alpha_i}\| \leq \|\sum_{i=1}^{n+m} \lambda_i e_{\alpha_i}\|$) de modo que todo $z \in X^*$ tiene soporte contable. Entonces X tiene 1-control en su bidual X^{**}.*

Demostración. La prueba es totalmente análoga a la de la Proposición 5.9. Supongamos que el enunciado es falso e intentemos deducir de aquí una contradicción. Admitamos que existen un subconjunto w*-compacto $K \subset X^{**}$ y un vector $z_0 \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K)$ tales que $d(z_0, X) > b > a > \hat{d}(K, X)$. Elegimos un vector $\psi \in B(X^{***}) \cap X^{\perp}$ tal que $\langle \psi, z_0\rangle > b$. Adoptamos la siguiente notación: si $\beta < \omega_1$, denotamos por $X(\beta)$ al subespacio $X(\beta) :=$

$\sum_{i<\beta} \oplus[e_i]$ (así que $X = X(\omega_1)$) y por P_β a la proyección canónica $P_\beta : X \to X(\beta)$ de norma $\|P_\beta\| = 1$. En el dual X^* identificaremos el subespacio $P_\beta^*(X^*)$ con $X(\beta)^*$.

Etapa 1. Puesto que $\langle \psi, z_0 \rangle > b$, existe $x_1^* \in B(X^*)$ tal que $\langle z_0, x_1^* \rangle > b$ (porque $B(X^*)$ es w*-denso en $B(X^{***})$). Por hipótesis el conjunto soporte de x_1^* es contable, por lo que existe $\beta_1 < \omega_1$ tal que $\operatorname{supp}(x_1^*) \subset [1, \beta_1)$. Por tanto, $P_{\beta_1}^*(x_1^*) = x_1^*$ (esto es, $x_1^* \in X(\beta_1)^*$) y además

$$\langle P_{\beta_1}^{**}(z_0), x_1^* \rangle = \langle z_0, P_{\beta_1}^*(x_1^*) \rangle = \langle z_0, x_1^* \rangle > b.$$

Etapa 2. Sea $[1, \beta_1) = \{\alpha_{1j} : j \geq 1\}$. Puesto que $\langle \psi, z_0 \rangle > b$ y $\langle \psi, e_{\alpha_{11}} \rangle = 0$, existe $x_2^* \in B(X^*)$ tal que $\langle z_0, x_2^* \rangle > b$ y $\langle x_2^*, e_{\alpha_{11}} \rangle = 0$. Por hipótesis el conjunto soporte de x_2^* es contable, por lo que existe $\beta_1 < \beta_2 < \omega_1$ tal que $\operatorname{supp}(x_2^*) \subset [1, \beta_2)$. Por tanto, para $i = 1, 2$, se tiene $P_{\beta_2}^*(x_i^*) = x_i^*$ (esto es, $x_i^* \in X(\beta_2)^*$) y además

$$\langle P_{\beta_2}^{**}(z_0), x_i^* \rangle = \langle z_0, P_{\beta_2}^*(x_i^*) \rangle = \langle z_0, x_i^* \rangle > b.$$

Etapa 3. Sea $[1, \beta_2) = \{\alpha_{2j} : j \geq 1\}$. Puesto que $\langle \psi, z_0 \rangle > b$ y $\langle \psi, e_{\alpha_{ij}} \rangle = 0,\ i, j = 1, 2$, existe $x_3^* \in B(X^*)$ tal que $\langle z_0, x_3^* \rangle > b$ y $\langle x_3^*, e_{\alpha_{ij}} \rangle = 0,\ i, j = 1, 2$. Por hipótesis el conjunto soporte de x_3^* es contable, por lo que existe $\beta_2 < \beta_3 < \omega_1$ tal que $\operatorname{supp}(x_3^*) \subset [1, \beta_3)$. Por tanto, para $i = 1, 2, 3$, se tiene $P_{\beta_3}^*(x_i^*) = x_i^*$ (esto es, $x_i^* \in X(\beta_3)^*$) y además

$$\langle P_{\beta_3}^{**}(z_0), x_i^* \rangle = \langle z_0, P_{\beta_3}^*(x_i^*) \rangle = \langle z_0, x_i^* \rangle > b.$$

A continuación reiteramos hasta el infinito. Sea $\beta_0 := \sup\{\beta_n : n \geq 1\}$, que verifica $\beta_0 < \omega_1$ y $P_{\beta_0}^*(x_i^*) = x_i^*$ y, por tanto, $x_i^* \in X(\beta_0)^*,\ i \geq 1$. Sea $\psi_0 \in B(X^{***})$ un punto w*-límite de la familia $\{x_n^* : n \geq 1\}$ en X^{***}. Entonces

(α) Puesto que $X(\beta_0)^{***}$ es un subconjunto w*-cerrado en X^{***} y $x_n^* \in B(X(\beta_0)^*) \subset B(X(\beta_0)^{***}),\ n \geq 1$, concluimos que $\psi_0 \in B(X(\beta_0)^{***})$ y, por tanto, $P_{\beta_0}^{***}(\psi_0) = \psi_0$.

(β) Puesto que $\langle x_{n+1}^*, e_{\alpha_{ij}} \rangle = 0,\ \forall 1 \leq i, j \leq n$, y el conjunto $\{e_{\alpha_{ij}} : 1 \leq i, j\}$ genera el espacio $X(\beta_0)$, concluimos que $\psi_0{}_{\upharpoonright X(\beta_0)} \equiv 0$, esto es, $\psi_0 \in B(X(\beta_0)^\perp)$.

(γ) Puesto que $\langle z_0, x_k^* \rangle > b,\ \forall k \geq 1$, deducimos que $\langle \psi_0, z_0 \rangle \geq b$.

Sea $H := P_{\beta_0}^{**}(K)$ y $w_0 := P_{\beta_0}^{**}(z_0)$. Es claro que H es un subconjunto w*-compacto de $X(\beta_0)^{**}$ y que $w_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$.

Aserto 1. $\hat{d}(H, X(\beta_0)) < a$ y $d(w_0, X(\beta_0)) < a$.

En efecto

$$\hat{d}(H, X(\beta_0)) = \hat{d}(P_{\beta_0}^{**}(K), P_{\beta_0}^{**}(X)) \leq \|P_{\beta_0}^{**}\| \hat{d}(K, X) < a.$$

De aquí por Corolario 1.5 deducimos que $d(w_0, X(\beta_0)) < a$, porque $X(\beta_0)$ es WCG ya que es separable.

<u>Aserto 2.</u> $d(w_0, X(\beta_0)) \geq b$.

En efecto, aplicando (γ) (ver más arriba) se tiene que

$$\langle \psi_0, w_0 \rangle = \langle \psi_0, P_{\beta_0}^{**}(z_0) \rangle = \langle P_{\beta_0}^{***}(\psi_0), z_0 \rangle = \langle \psi_0, z_0 \rangle \geq b.$$

Como $\psi_0 \in X(\beta_0)^{\perp}$ y $\|\psi_0\| \leq 1$, obtenemos que $d(w_0, X(\beta_0)) \geq b$.

Puesto que $b > a$, hemos llegado a una contradicción, que prueba la proposición. ■

Proposición 5.12. *Sea X un espacio de Banach que es suma directa transfinita de una familia $\{X_\alpha : 1 \leq \alpha < \omega_1\}$ de subespacios WCG de X, digamos $X = \sum_{\alpha<\omega_1} \oplus X_\alpha$, de constante 1 (es decir, si $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{n+m} < \omega_1$, $x_{\alpha_i} \in X_{\alpha_i}$ y $(\lambda_i)_{i=1}^{n+m} \in \mathbb{R}^{n+m}$, se tiene $\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\alpha_i} \| \leq \| \sum_{i=1}^{n+m} \lambda_i x_{\alpha_i} \|$) de modo que todo $z \in X^*$ tiene soporte contable. Entonces X tiene 1-control en su bidual X^{**}.*

Demostración. La prueba es totalmente análoga a la de la Proposición 5.11 utilizando adecuadamente los subconjuntos w-compactos $K_\alpha \subset X_\alpha$ que generan X_α, $\alpha < \omega_1$, y el Lema 5.2, como en la Proposición 5.9. ■

Proposición 5.13. *Sea X un espacio de Banach con una base 1-incondicional $\{e_i : i \in I\}$ equivalente a la base canónica de $\ell_1(I)$. Entonces X tiene 1-control en su bidual X^{**}.*

Demostración. La demostración es análoga a la de la parte (B) de la Proposición 5.3, haciendo $X_i = [e_i]$, $i \in I$, y teniendo en cuenta que X^* y el subespacio Y_0 de X^* (ver notación de Proposición 5.3) son canónicamente isomorfos a $\ell_\infty(I)$ y $c_0(I)$, respectivamente. ■

Se dice que $\{e_i : i \in I\}$ es base 1-simétrica del espacio de Bnach X (ver [50, p. 811]) si $\{e_i : i \in I\}$ es base 1-incondicional de X (por tanto X es suma directa 1-incondicional de los subespacios $\{[e_i] : i \in I\}$) y además $\{e_i : i \in I\}$ es base simétrica, es decir, para cualquier par de sucesiones $\{i_n : n \geq 1\}$ y $\{j_n : n \geq 1\}$ de I, las secuencias básicas $\{e_{i_n} : n \geq 1\}$ y $\{e_{j_n} : n \geq 1\}$ son equivalentes. Naturalmente, las bases canónicas de los espacios de Orlicz $\ell_\varphi(I)$, Lorentz, Lorentz-Orlicz, etc., son bases 1-simétricas.

Proposición 5.14. *Sea X un espacio de Banach con base 1-simétrica. Entonces X tiene 1-control en su bidual X^{**}.*

Demostración. **<u>Caso 1.</u>** Supongamos que todo elemento del dual X^* tiene soporte contable. En este caso el resultado sale aplicando la Proposición 5.9.

<u>Caso 2.</u> Supongamos que existe un vector $u \in B(X^*)$ con soporte incontable. Por la Proposición 5.13 basta probar el siguiente Aserto.

<u>Aserto.</u> Si existe un vector $u \in B(X^*)$ con soporte incontable, la base 1-simétrica $\{e_i : i \in I\}$ de X es equivalente a la base canónica de $\ell_1(I)$.

En efecto, puesto que $\mathrm{supp}(u) := \{i \in I : u(e_i) \neq 0\}$ es incontable, podemos hallar un número positivo $\epsilon > 0$ y un subconjunto incontable $J \subset \mathrm{supp}(u)$ tal que $|u(e_i)| > \epsilon,\ \forall i \in J$. Probemos que en estas condiciones la familia $\{e_i : i \in J\}$ es equivalente a la base de $\ell_1(J)$. Supongamos que la base $\{e_i : i \in J\}$ está normalizada y cojamos un vector de la forma $\sum_{1\le k\le n} \lambda_k e_{i_k},\ i_k \in J$. Sea $\epsilon_k = \pm 1$ de modo que $u(\lambda_k \epsilon_k e_{i_k}) = |\lambda_k u(e_{i_k})| \geq \epsilon |\lambda_k|,\ 1 \leq k \leq n$. Entonces

$$\sum_{1\le k\le n} |\lambda_k| \geq \| \sum_{1\le k\le n} \lambda_k e_{i_k} \| = \| \sum_{1\le k\le n} \lambda_k \epsilon_k e_{i_k} \| \geq |u(\sum_{1\le k\le n} \lambda_k \epsilon_k e_{i_k})| \geq \epsilon \sum_{1\le k\le n} |\lambda_k|,$$

de donde obtenemos que la familia $\{e_i : i \in J\}$ es equivalente a la base de $\ell_1(J)$. Como la base de X es simétrica, finalmente deducimos que dicha base es equivalente a la base canónica de $\ell_1(I)$, lo que prueba el Aserto y completa la demostración de la proposición. ■

A continuación consideramos el problema del control de $X = (\ell_\infty(I), \|\cdot\|_\infty)$ en su bidual. En [25] se pregunta si $\ell_\infty(I)$ tiene 1-control en su bidual. La respuesta es negativa y aparece en [24], en donde se construye un subconjunto w*-compacto $K \subset B(X^{**})$ tal que $\hat{d}(K, X) \leq \frac{1}{3}$ pero $\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), X) \geq \frac{2}{3}$. Basándonos en la Proposición 1.12, hacemos a continuación otra construcción más asequible y sencilla que la de [24].

Proposición 5.15. *Sean Γ un conjunto infinito y $X = (\ell_\infty(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$. Entonces existe un subconjunto w^*-compacto $K \subset B(X^{**})$ tal que $\hat{d}(K, X) \leq \frac{1}{3}$ pero $\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), X) \geq \frac{2}{3}$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $\Gamma = \mathbb{N}$. Vamos a utilizar la construcción efectuada en la Proposición 1.12. En esta proposición se construye un conjunto contable infinito I, un compacto

$$\mathcal{O} = \bigcap_{\sigma\in\mathcal{C}} \overline{\mathcal{O}(\sigma)}^{\beta I}$$

tal que $\emptyset \neq \mathcal{O} \subset \beta I \setminus I := I^*$ y una aplicación $\psi : \mathcal{C} \to \{0, +1\}^I \subset B(\ell_\infty(I))$ inyectiva y continua, cuando se considera en $\{0, +1\}^I$ la w*-topología de $\ell_\infty(I)$, que coincide con la topología producto de $\{0, +1\}^I$. Sea $D := \psi(\mathcal{C}) \subset \{0, +1\}^I \subset B(\ell_\infty(I))$ un compacto homeomorfo a $\mathcal{C}$ tal que $\check{d}_{\restriction\mathcal{O}} = 0,\ \forall d \in D$. Sean $\mu := \psi(\lambda)$ la probabilidad de Radon sobre D, imagen de la probabilidad de Haar λ sobre $\mathcal{C} = \{0, +1\}^I$ por la función continua ψ y $r(\mu) =: z_0 \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(D)$ el baricentro de μ, que verifica $\check{z}_0(p) = +1$, para todo $p \in I^* := \overline{I}^{\beta I} \setminus I$. En particular, $\check{z}_0 \restriction \mathcal{O} = +1$. Recordemos que si $f \in \ell_\infty(I)$, denotamos por $\check{f} \in C(\beta I)$ a la extensión continua de Stone-Čech de f a todo βI.

El dual X^* de $X := \ell_\infty(I)$ es $X^* = \ell_1(I) \oplus_1 M_R(I^*)$ y su bidual $X^{**} = \ell_\infty(I) \oplus_\infty M_R(I^*)^*$, donde $M_R(I^*)$ es el espacio de las medidas de Radon sobre I^*. Denotemos por $\pi_1 : X^{**} \to \ell_\infty(I)$ y $\pi_2 : X^{**} \to M_R(I^*)^*$ las correspondientes proyecciones canónicas de modo que, si $u \in X^{**}$, entonces $u = (u_1, u_2)$ con $u_1 = \pi_1(u)$ y $u_2 = \pi_2(u)$. Por tanto, si $J : X \to X^{**}$ es la inmersión canónica y $f \in X$, se tiene $J(f) = (f_1, f_2)$ con

$f_1 = \pi_1 \circ J(f) = f$ y $f_2 = \pi_2 \circ J(f) = \check{f}_{|I^*}$, donde $\check{f}_{|I^*}$ se considera como un elemento de $M_R(I^*)^*$. Sea $\phi : \ell_\infty(I) \to X^{**}$ tal que, $\forall f \in \ell_\infty(I)$, $\phi(f) = (f, 0)$, que es una aplicación lineal w*-w*-continua y $\|\cdot\|$-continua. Considerando $\frac{1}{3}\mathbb{1}_{I^*\setminus\mathcal{O}}$ y $\frac{1}{3}\mathbb{1}_{\mathcal{O}}$ como elementos de $M_R(I^*)^*$, sea

$$K = \phi(D) + (0, \tfrac{1}{3}\mathbb{1}_{I^*\setminus\mathcal{O}} - \tfrac{1}{3}\mathbb{1}_{\mathcal{O}}) = \{(d, \tfrac{1}{3}\mathbb{1}_{I^*\setminus\mathcal{O}} - \tfrac{1}{3}\mathbb{1}_{\mathcal{O}}) : d \in D\} \subset B(X^{**}),$$

que es un subconjunto w*-compacto de X^{**} afínmente homeomorfo a D. Notemos que $(z_0, \frac{1}{3}\mathbb{1}_{I^*\setminus\mathcal{O}} - \frac{1}{3}\mathbb{1}_{\mathcal{O}}) \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$.

Aserto 1. $\hat{d}(K, J(X)) \leq \frac{1}{3}$.

En efecto, sea $(d, \frac{1}{3}\mathbb{1}_{I^*\setminus\mathcal{O}} - \frac{1}{3}\mathbb{1}_{\mathcal{O}}) \in K$ con $d \in D$. Puesto que $\check{d}_{|\mathcal{O}} = 0$ se tiene :

$$\|(d, \tfrac{1}{3}\mathbb{1}_{I^*\setminus\mathcal{O}} - \tfrac{1}{3}\mathbb{1}_{\mathcal{O}}) - \tfrac{2}{3}J(d)\| = \sup\{\|\tfrac{1}{3}d\|, \|(\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{3}\check{d}) \cdot \mathbb{1}_{I^*\setminus\mathcal{O}}\|, \tfrac{1}{3}\} = \tfrac{1}{3}.$$

Aserto 2. $d((z_0, \frac{1}{3}\mathbb{1}_{I^*\setminus\mathcal{O}} - \frac{1}{3}\mathbb{1}_{\mathcal{O}}), J(X)) = \frac{2}{3}$.

En efecto, sabemos que $\check{z}_0 = 1$ sobre I^*, de donde

$$\|(z_0, \tfrac{1}{3}\mathbb{1}_{I^*\setminus\mathcal{O}} - \tfrac{1}{3}\mathbb{1}_{\mathcal{O}}) - \tfrac{1}{3}J(z_0)\| = \|(\tfrac{2}{3}z_0, -\tfrac{2}{3}\mathbb{1}_{\mathcal{O}})\| = \tfrac{2}{3}.$$

Por otra parte, si $p \in \mathcal{O}$ y $f \in \ell_\infty(I)$, entonces

$$\begin{gathered}\|(z_0, \tfrac{1}{3}\mathbb{1}_{I^*\setminus\mathcal{O}} - \tfrac{1}{3}\mathbb{1}_{\mathcal{O}}) - J(f)\| = \|(z_0 - f, \tfrac{1}{3}\mathbb{1}_{I^*\setminus\mathcal{O}} - \tfrac{1}{3}\mathbb{1}_{\mathcal{O}} - \check{f}_{\restriction I^*})\| = \\ = \|z_0 - f\| \vee \|\tfrac{1}{3}\mathbb{1}_{I^*\setminus\mathcal{O}} - \tfrac{1}{3}\mathbb{1}_{\mathcal{O}} - \check{f}_{\restriction I^*}\| \geq |(z_0 - f)\check{}\,(p)| \vee |(\tfrac{1}{3}\mathbb{1}_{I^*\setminus\mathcal{O}} - \tfrac{1}{3}\mathbb{1}_{\mathcal{O}} - \check{f}_{\restriction I^*})(p)| = \\ = |1 - \check{f}(p)| \vee |\tfrac{1}{3} + \check{f}(p)| \geq \tfrac{2}{3}.\end{gathered}$$

■

La proposición anterior nos permite obtener los siguientes resultados.

Corolario 5.16. *Sea X un espacio de Banach que posee una copia de ℓ_∞. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un subconjunto w*-compacto $K_\epsilon \subset X^{**}$ tal que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K_\epsilon), X) \geq (2 - \epsilon)\hat{d}(K_\epsilon, X) > 0$.*

Demostración. En [43] se prueba que todo espacio de Banach isomorfo a ℓ_∞ contiene subespacios arbitrariamente próximos a $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ en la distancia de Banach-Mazur. Por tanto, en este caso, para todo $\delta > 0$ existe en X un subespacio Y_δ que es $(1+\delta)$-isométrico a $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$. Así que existe un isomorfismo $i : \ell_\infty \to Y_\delta$ tal que $\|i\| = 1$ y $\|i^{-1}\| \leq 1 + \delta$ y además Y_δ es complementado en X con proyección $P_\delta : X \to Y_\delta$ tal que $\|P_\delta\| \leq 1 + \delta$. Sea $K \subset \ell_\infty^*$ el compacto construido en Proposición 5.15, que verifica $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), \ell_\infty) \geq 2\hat{d}(K, \ell_\infty) > 0$. Sea $i^{**}(K) =: W \subset Y_\delta^{**} \subset X^{**}$. Claramente W es un subconjunto w*-compacto de X^{**}, que tras un pequeño cálculo se comprueba que verifica $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(W), X) \geq \frac{2}{(1+\delta)^2}\hat{d}(W, X) > 0$. ■

El corolario siguiente se refiere a espacios de Orlicz secuenciales (ver [12],[34],[36]). Si φ es una función de Orlicz, entonces

(i) La expresión $\varphi \in \Delta_2^o$ indica que φ verifica la propiedad Δ_2 en 0.

(ii) Si I es un conjunto, definimos el espacio secuencial de Orlicz $\ell_\varphi(I)$ como

$$\ell_\varphi(I) := \{f \in \mathbb{R}^I : \sum_{i \in I} \varphi(\lambda f_i) < +\infty \text{ para algún } \lambda > 0\}.$$

(iii) Consideraremos en $\ell_\varphi(I)$ la norma de Luxemburg $\|\cdot\|_L$ definida por

$$\forall f \in \ell_\varphi(I),\ \|f\|_L := \inf\{\lambda > 0 : \sum_{i \in I} \varphi(f_i/\lambda) \leq 1\}$$

y la norma Amemiya-Orlicz $\|\cdot\|_o$ definida por

$$\forall f \in \ell_\varphi(I),\ \|f\|_o := \inf_{\lambda > 0}\{\tfrac{1}{\lambda}(1 + \sum_{i \in I} \varphi(\lambda f_i))\}.$$

Por $\ell_\varphi^L(I)$ y $\ell_\varphi^o(I)$ se denota al espacio de Orlicz $\ell_\varphi(I)$ dotado de la norma Luxemburg $\|\cdot\|_L$ y de la norma Amemiya-Orlicz $\|\cdot\|_o$, respectivamente.

Corolario 5.17 ([24]). *Sean I un conjunto infinito y φ una función de Orlicz. Entonces*

(1) Si $\varphi \in \Delta_2^o$ y ó bien $X = \ell_\varphi^L(I)$ ó bien $X = \ell_\varphi^o(I)$, se tiene que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X) = \hat{d}(K, X)$, para todo subconjunto w^*-compacto $K \subset X^{**}$.

(2) Si $\varphi \notin \Delta_2^o$ y $X = \ell_\varphi^L(I)$, existe un subconjunto w^*-compacto $K \subset B(X^{**})$ tal que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X) \geq 2\hat{d}(K, X) > 0$.

(3) Si $\varphi \notin \Delta_2^o$ y $X = \ell_\varphi^o(I)$, se tiene que para todo $\epsilon > 0$ existe un subconjunto w^*-compacto $K_\epsilon \subset B(X^{**})$ tal que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K_\epsilon), X) \geq (2 - \epsilon)\hat{d}(K_\epsilon, X) > 0$.

Demostración. (1) Basta aplicar la Proposición 5.14 porque si $\varphi \in \Delta_2^o$ entonces $\ell_\varphi(I)$ tiene base 1-simétrica.

(2) En este caso es conocido que existe en X un subespacio Y isométrico a ℓ_∞, que está complementado en X, con proyección $P : X \to Y$ tal que $\|P\| = 1$. Por tanto, si se considera a $Y^{**} = \overline{Y}^{w^*}$ como subespacio de X^{**} y $K \subset Y^{**}$ es el subconjunto w*-compacto construido en la Proposición 5.15, entonces $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), X) \geq 2\hat{d}(K, X) > 0$, porque para todo $u \in Y^{**}$ se tiene que $d(u, Y) = d(u, X)$.

(3) Puesto que $\varphi \notin \Delta_2^o$, es bien conocido que existe en $\ell_\varphi^o(I)$ una copia isomórfica de ℓ_∞. Ahora basta aplicar el Corolario 5.16. Notemos que si la función de Orlicz φ es estrictamente convexa y $(\varphi(t)/t) \to 0$ para $t \to 0$, entonces la norma de Orlicz de $\ell_\varphi^o(I)$ es estrictamente convexa (ver [12, p. 55]) y $\ell_\varphi^o(I)$ no puede contener una copia isométrica de $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$, aunque sí contiene copias isomórficas de ℓ_∞, si $\varphi \notin \Delta_2^o$. ∎

Capítulo 6

Distancias y oscilación

Comenzaremos este Capítulo con ciertos hechos auxiliares, que se utilizarán más tarde. Sean I un conjunto, (H, T_H) un espacio topológico y $\varphi : I \to H$ una aplicación tal que $\overline{\varphi(I)} = H$. En todo este capítulo supondremos que los espacios topológicos son **Hausdorf y completamente regulares**. Adoptamos la siguiente notación:

$$C(H) = \{f : H \to \mathbb{R} : f \text{ continua}\},\ C(H)_\varphi = \{f \circ \varphi : f \in C(H)\},$$
$$C^*(H) = \{f : H \to \mathbb{R} : f \text{ continua y acotada}\} \text{ y}$$
$$C^*(H)_\varphi = \{f \circ \varphi : f \in C^*(H)\}.$$

Nuestro propósito es estudiar el control de $C^*(H)_\varphi$ dentro de $\ell_\infty(I)$ y para ello vamos a relacionar la distancia $d(f, C^*(H)_\varphi)$, $f \in \ell_\infty(I)$, con la oscilación de f en H.

Denotemos por $\mathcal{V}^k$ a la familia de los entornos abiertos de $k \in H$. Para $f \in \mathbb{R}^I$ y $k \in H$, definamos:

$$f_1(k) = \inf\{\sup(f(\varphi^{-1}(V))) : V \in \mathcal{V}^k\} \text{ y}$$
$$f_2(k) = \sup\{\inf(f(\varphi^{-1}(V))) : V \in \mathcal{V}^k\}.$$

Obviamente $-\infty \leq f_2(k) \leq f_1(k) \leq +\infty$, $\forall k \in H$. Definimos la φ-oscilación $Osc_\varphi(f, k)$ de f en $k \in H$ como:

$$Osc_\varphi(f, k) = \lim_{V \in \mathcal{V}^k} \sup\{f(i) - f(j) : f(i), f(j) \in V\} =$$
$$= \lim_{V \in \mathcal{V}^k} \big(\sup f(\varphi^{-1}(V)) - \inf f(\varphi^{-1}(V))\big) = \lim_{V \in \mathcal{V}^k} \operatorname{diam}(f(\varphi^{-1}(V))).$$

Observemos que
(i) $Osc_\varphi(f, k) = +\infty$ sii $f_1(k) = \pm\infty$ ó $f_2(k) = \pm\infty$ y
(ii) si $f_1(k), f_2(k)$ son finitos, entonces $Osc_\varphi(f, k) = f_1(k) - f_2(k)$.

Definimos la φ-oscilación $Osc_\varphi(f)$ de f en H como:

$$Osc_\varphi(f) = \sup\{Osc_\varphi(f, k) : k \in H\}.$$

Si $I = H$ y φ es la identidad entre I y H, en lugar de $Osc_\varphi(f,k)$ y $Osc_\varphi(f)$ ponemos $Osc(f,k)$ y $Osc(f)$, respectivamente.

Lema 6.1. *Con la anterior notación, se tiene que f_1 es semicontinua superiormente (abrev., usc) y f_2 es semicontinua inferiormente (abrev., lsc) sobre H.*

Demostración. Veamos que f_1 es usc sobre H. Supongamos que $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ y probemos que $U_a = \{k \in H : f_1(k) < a\}$ es abierto en H. Si $a = -\infty$, entonces $U_a = \emptyset$ y hemos terminado. Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y cojamos $k \in U_a$. Entonces existe un entorno abierto $W \in \mathcal{V}^k$ tal que $\sup f(\varphi^{-1}(W)) < a$. Así que para $h \in W$ tenemos que $W \in \mathcal{V}^h$, de donde obtenemos que $f_1(h) < a$ y, por tanto, $W \subset U_a$. En consecuencia U_a es abierto.

De modo análogo se prueba que f_2 es lsc. ∎

Si I es un conjunto y $f, g \in \mathbb{R}^I$, definimos la "distancia" $d(f,g)$ de f a g como $\sup\{|f(i) - g(i)| : i \in I\}$, en el entendimiento de que puede ser $+\infty$. En la siguiente proposición se maneja esta es "distancia".

Proposición 6.2. *Sean (H, T_H) un espacio topológico normal, I un conjunto y $\varphi : I \to H$ una aplicación tal que $\overline{\varphi(I)} = H$. Entonces, si $C(H)_\varphi = \{g \circ \varphi : g \in C(H)\} \subset \mathbb{R}^I$ y $f \in \mathbb{R}^I$, se tiene que:*

$$d(f, C(H)_\varphi) = \frac{1}{2} Osc_\varphi(f).$$

Demostración. (A) Veamos que $d(f, C(H)_\varphi) \geq \frac{1}{2} Osc_\varphi(f)$. Si $d(f, C(H)_\varphi) = +\infty$, lo anterior es obvio. En caso contrario, sean $0 < \epsilon < +\infty$ y $h \in C(H)$ tales que $d(f, C(H)_\varphi) < \epsilon$ y $\sup\{|f(x) - h \circ \varphi(x)| : x \in I\} < \epsilon$. Entonces para todo $k \in H$ se verifica que $f_1(k), f_2(k)$ (ver más arriba la definición de f_1, f_2) son finitos y $f_1(k) - f_2(k) < 2\epsilon$, es decir, $\frac{1}{2} Osc_\varphi(f) < \epsilon$. De aquí concluimos que $d(f, C(H)_\varphi) \geq \frac{1}{2} Osc_\varphi(f)$.

(B) Veamos que $d(f, C(H)_\varphi) \leq \frac{1}{2} Osc_\varphi(f)$. Si $\frac{1}{2} Osc_\varphi(f) = +\infty$, la anterior desigualdad es obvia. Supongamos que $\frac{1}{2} Osc_\varphi(f) = \delta < +\infty$. Sean $f_1, f_2 : H \to \mathbb{R}$ las funciones usc y lsc, respectivamente, definidas más arriba a partir de f. Se tiene que f_1, f_2 son finitas y $f_1 - \delta \leq f_2 + \delta$ sobre H. Así que por [18, Ex. 1.7.15 (b), p.88] existe $h \in C(H)$ tal que $f_1 - \delta \leq h \leq f_2 + \delta$ sobre H. Puesto que $f(i) \in [f_2(\varphi(i)), f_1(\varphi(i))]$, $\forall i \in I$, concluimos que:

$$f(i) - \delta \leq f_1 \circ \varphi(i) - \delta \leq h \circ \varphi(i) \leq f_2 \circ \varphi(i) + \delta \leq f(i) + \delta,$$

es decir, $\sup\{|f(i) - h \circ \varphi(i)| : i \in I\} \leq \delta$, lo que implica que

$$d(f, C(H)_\varphi) \leq \frac{1}{2} Osc_\varphi(f).$$

∎

Proposición 6.3. *Sean (H, T_H) un espacio topológico normal, I un conjunto y $\varphi : I \to H$ una aplicación tal que $\overline{\varphi(I)} = H$. Entonces, si $C^*(H)_\varphi = \{g \circ \varphi : g \in C^*(H)\} \subset \ell_\infty(I)$ y $f \in \ell_\infty(I)$, se tiene que:*

$$d(f, C(H)_\varphi) = d(f, C^*(H)_\varphi) = \frac{1}{2} Osc_\varphi(f).$$

Demostración. Como f es acotada se verifica que $d(f, C(H)_\varphi) = d(f, C^*(H)_\varphi)$. Ahora basta aplicar la Proposición 6.2. ■

Sea (X, d) un espacio métrico. Para $f, g \in X^I$ (esto es, $f, g : I \to X$) consideramos la "distancia" $d(f, g) = \sup\{d((i), g(i)) : i \in I\}$, que puede ser $+\infty$. Denotemos por $C(H, X)_\varphi$ al subconjunto de X^I definido por

$$C(H, X)_\varphi = \{g \circ \varphi : g \in C(H, X)\}.$$

Si $f \in X^I$, definimos las oscilaciones:

$$\forall k_0 \in H, \; Osc_\varphi(f, k_0) = \lim_{V \in \mathcal{V}^{k_0}} diam(f(\varphi^{-1}(V))) \text{ y } Osc_\varphi(f) = \sup_{k \in H} Osc_\varphi(f, k).$$

Observemos que estas definiciones coinciden con las anteriores definiciones para $X = \mathbb{R}$.

Proposición 6.4. *Sean I un conjunto, H un espacio topológico, $\varphi : I \to H$ una aplicación tal que $\overline{\varphi(I)} = H$, $(Z, \|\cdot\|)$ un espacio normado, $X \subset Z$ un subconjunto convexo de Z y d la distancia asociada a la norma $\|\cdot\|$. Entonces*

(1) Para todo $f \in X^I$ se tiene que $Osc_\varphi(f) \leq 2d(f, C(H, X)_\varphi)$.

(2) Si además H es paracompacto, para todo $f \in X^I$ se verifica:

$$d(f, C(H, X)_\varphi) \leq Osc_\varphi(f).$$

Demostración. (1) Para probar que $Osc_\varphi(f) \leq 2d(f, C(H, X)_\varphi)$, supongamos que $d(f, C(H, X)_\varphi) < b < +\infty$ y cojamos $g \in C(H, X)$ tal que para cierto $0 < \epsilon < b$ se verifique $d(f, g \circ \varphi) < b - \epsilon$. Fijemos $k_0 \in H$ y cojamos $V \in \mathcal{V}^{k_0}$ tal que $diam(g(V)) < \epsilon$. Entonces para todo $i, j \in \varphi^{-1}(V)$ se tiene que:

$$d(f(i), f(j)) \leq d(f(i), g \circ \varphi(i)) + d(g \circ \varphi(i), g \circ \varphi(j)) + d(g \circ \varphi(j), f(j)) < 2b.$$

De aquí que $diam(f(\varphi^{-1}(V))) \leq 2b$ y, por tanto, $Osc_\varphi(f, k_0) \leq 2b$. En consecuencia $Osc_\varphi(f) \leq 2b$ y $Osc_\varphi(f) \leq 2d(f, C(H, X)_\varphi)$.

(2) Sea $f \in X^I$. Si $Osc_\varphi(f) = +\infty$, hemos terminado. Supongamos que $Osc_\varphi(f) < b < +\infty$. Entonces por cada $k \in H$ podemos elegir un entorno abierto V_k de k tal que $diam(f(\varphi^{-1}(V_k))) < b$. Sea $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ un refinamiento abierto localmente finito de $\{V_k : k \in H\}$ y $\{p_\alpha : \alpha \in A\}$ una partición continua de la identidad subordinada a

$\{V_\alpha : \alpha \in A\}$. Por cada $\alpha \in A$ elegimos un punto $i_\alpha \in \varphi^{-1}(V_\alpha)$. Si $y_\alpha = f(i_\alpha)$, sea $g \in C(H,X)$ tal que

$$g(x) = \sum_{\alpha \in A} p_\alpha(x) y_\alpha, \ \forall x \in H.$$

Fijemos $j \in I$ y sea $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} = \{\alpha \in A : \varphi(j) \in V_\alpha\}$. Puesto que

$$f(j) \in f(\varphi^{-1}(V_{\alpha_r})), \ y_{\alpha_r} \in f(\varphi^{-1}(V_{\alpha_r})) \text{ y } diam(f(\varphi^{-1}(V_{\alpha_r}))) < b, \ r = 1, 2, \cdots, n,$$

tenemos que

$$d(y_{\alpha_r}, f(j)) \leq diam(f(\varphi^{-1}(V_{\alpha_r}))) < b, \ r = 1, \cdots, n.$$

Así que

$$d(g \circ \varphi(j), f(j)) = d(\sum_{r=1}^{n} p_{\alpha_r}(\varphi(j)) y_{\alpha_r}, \sum_{r=1}^{n} p_{\alpha_r}(\varphi(j)) f(j)) \leq$$
$$\leq \sum_{r=1}^{n} p_{\alpha_r}(\varphi(j)) d(y_{\alpha_r}, f(j)) < b.$$

En consecuencia $d(f, g \circ \varphi) \leq b$, lo que prueba que $d(f, C(H,X)_\varphi) \leq Osc_\varphi(f)$. ■

Sea X un espacio normado y denotemos por $\ell_\infty(I,X)$ al espacio normado de las funciones $f : I \to X$ tales que $(\|f(i)\|)_{i \in I} \in \ell_\infty(I)$ con la norma $\|f\| = \sup\{\|f(i)\|; i \in I\}$. Sean K, K_0 dos espacios topológicos, $\varphi : I \to K$ una aplicación tal que $\overline{\varphi(I)} = K$, $q : K \to K_0$ una aplicación continua sobreyectiva y $\psi = q \circ \varphi$. Los espacios

$$C(K_0, X)_\psi = \{f \circ \psi : f \in C(K_0)\} \text{ y } C(K,X)_\varphi = \{f \circ \varphi : f \in C(K)\}$$

son subespacios de $\ell_\infty(I,X)$ de modo que:

$$C(K_0, X)_\psi \subset C(K,X)_\varphi \subset \ell_\infty(I,X) \subset X^I.$$

Si $X = \mathbb{R}$, ponemos $\ell_\infty(I)$, $C(K)$, $C(K)_\varphi$, etc., en lugar de $\ell_\infty(I,\mathbb{R})$, $C(K,\mathbb{R})$,$C(K,\mathbb{R})_\varphi$, etc. Observemos que en los subconjuntos acotados de $\ell_\infty(I)$ la topología de la convergencia puntual sobre I coincide con la w*-topología $\sigma(\ell_\infty(I), \ell_1(I))$.

Lema 6.5. *Sean I un conjunto, K un espacio topológico numerablemente compacto, $\varphi : I \to K$ una aplicación tal que $\overline{\varphi(I)} = K$, K_0 un espacio métrico, $q : K \to K_0$ una aplicación continua con $q(K) = K_0$, $\varphi_1 = q \circ \varphi : I \to K_0$ y X un espacio normado. Consideremos a los espacios $C(K,X)_\varphi$ y $C(K_0,X)_{\varphi_1}$ como subespacios del espacio $\ell_\infty(I,X)$ de modo que $C(K_0,X)_{\varphi_1} \subset C(K,X)_\varphi \subset \ell_\infty(I,X)$. Si τ es la topología en $\ell_\infty(I,X)$ de la convergencia puntual sobre I y la convergencia sobre cierto subconjunto $F \subset X^*$, que separa puntos en X, para toda $f \in \overline{C(K_0,X)_{\varphi_1}}^{\tau}$ se tiene que*

$$Osc_\varphi(f) \leq Osc_{\varphi_1}(f) \leq 2 Osc_\varphi(f).$$

Demostración. Fijemos la función $f \in \overline{C(K_0, X)_{\varphi_1}}^{\tau}$ y observemos que f es constante en cada subconjunto $\varphi_1^{-1}(k) \subset I$, $\forall k \in K_0$, esto es, existe $h : K_0 \to X$ tal que $f = h \circ \varphi_1$. Puesto que $q^{-1}(\mathcal{V}^{q(k)}) \subset \mathcal{V}^k$, $\forall k \in K$, se tiene que $Osc_\varphi(f, k) \leq Osc_{\varphi_1}(f, q(k))$, de donde obtenemos que $Osc_\varphi(f) \leq Osc_{\varphi_1}(f)$.

Probemos que $Osc_{\varphi_1}(f) \leq 2Osc_\varphi(f)$. Si $Osc_{\varphi_1}(f) = 0$, claramente $Osc_{\varphi_1}(f) \leq 2Osc_\varphi(f)$. Supongamos que $Osc_{\varphi_1}(f) > \delta > 0$. Entonces podemos hallar un punto $k_0 \in K_0$ y dos secuencias $i_n, j_n \in I$, $n \geq 1$, tales que $\varphi_1(i_n) \to k_0, \varphi_1(j_n) \to k_0$, para $n \to \infty$, y $\|f(i_n) - f(j_n)\| > \delta$, para todo $n \geq 1$. Puesto que K es numerablemente compacto, podemos hallar puntos $x_0, y_0 \in K$ tales que

$$x_0 \in q^{-1}(k_0) \cap \overline{\{\varphi(i_n) : n \geq 1\}} \text{ y } y_0 \in q^{-1}(k_0) \cap \overline{\{\varphi(j_n) : n \geq 1\}}.$$

Aserto. O bien $Osc_\varphi(f, x_0) \geq \frac{\delta}{2}$ ó bien $Osc_\varphi(f, y_0) \geq \frac{\delta}{2}$.

En efecto, sean $i_0, j_0 \in I$ tales que $\varphi(i_0) = x_0$ y $\varphi(j_0) = y_0$. Puesto que f es constante sobre $\varphi_1^{-1}(k_0)$ e $i_0, j_0 \in \varphi_1^{-1}(k_0)$, tenemos que $f(i_0) = f(j_0)$. Así que

$$\begin{aligned}\delta < \|f(i_n) - f(j_n)\| &= \|f(i_n) - f(i_0) + f(j_0) - f(j_n)\| \leq \\ &\leq \|f(i_n) - f(i_0)\| + \|f(j_0) - f(j_n)\|.\end{aligned}$$

Por tanto ó bien $\|f(i_n) - f(i_0)\| > \frac{\delta}{2}$ ó bien $\|f(j_0) - f(j_n)\| > \frac{\delta}{2}$. Así que existe un subconjunto infinito $N \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\text{ó bien } \|f(i_n) - f(i_0)\| > \frac{\delta}{2},\ \forall n \in N, \text{ ó bien } \|f(j_0) - f(j_n)\| > \frac{\delta}{2},\ \forall n \in N,$$

y esto prueba el Aserto.

Finalmente, del Aserto concluimos que $Osc_\varphi(f) \geq \delta/2$ y de aquí obtenemos que $Osc_{\varphi_1}(f) \leq 2Osc_\varphi(f)$. ■

Corolario 6.6. *Sean I un conjunto, K un espacio numerablemente compacto , $\varphi : I \to K$ una aplicación tal que $\varphi(I) = K$, K_0 un espacio métrico, $q : K \to K_0$ una aplicación continua con $q(K) = K_0$ y $\varphi_1 = q \circ \varphi : I \to K_0$. Consideremos a los espacios $C(K)_\varphi$ y $C(K_0)_{\varphi_1}$ como subespacios del espacio $\ell_\infty(I)$ de modo que $C(K_0)_{\varphi_1} \subset C(K)_\varphi \subset \ell_\infty(I)$. Entonces, si $f \in \overline{C(K_0)_{\varphi_1}}^{w^*}$, tenemos que:*

$$d(f, C(K)_\varphi) \leq d(f, C(K_0)_{\varphi_1}) \leq 2d(f, C(K)_\varphi).$$

Demostración. En primer término es obvio que $d(f, C(K)_\varphi) \leq d(f, C(K_0)_{\varphi_1})$ porque $C(K_0)_{\varphi_1}$ es un subespacio de $C(K)_\varphi$ dentro de $\ell_\infty(I)$. Veamos que $d(f, C(K_0)_{\varphi_1}) \leq 2d(f, C(K)_\varphi)$. Puesto que K_0 es un espacio métrico, de Proposición 6.3 obtenemos que $d(f, C(K_0)_{\varphi_1}) = \frac{1}{2}Osc_{\varphi_1}(f)$ y del Lema 6.5 que $\frac{1}{2}Osc_{\varphi_1}(f) \leq Osc_\varphi(f)$. Finalmente por Proposición 6.4 se tiene $Osc_\varphi(f) \leq 2d(f, C(K)_\varphi)$. ■

Lema 6.7. *Sean K, K_0 dos espacios compactos Hausdorff, I un conjunto, $\varphi : I \to K$ una aplicación tal que $\varphi(I) = K$, $q : K \to K_0$ una aplicación continua sobreyectiva, $\psi = q \circ \varphi$ y X un espacio normado. Consideremos a los espacios $C(K,X)_\varphi$ y $C(K_0,X)_\psi$ como subespacios del espacio $\ell_\infty(I,X)$ de modo que $C(K_0,X)_\psi \subset C(K,X)_\varphi \subset \ell_\infty(I,X)$. Entonces, si τ es la topología en $\ell_\infty(I,X)$ de la convergencia puntual sobre I y la convergencia sobre un subconjunto $F \subset X^*$, que separa puntos de X, para todo $f \in \overline{C(K_0,X)_\psi}^\tau$ tenemos que*

$$Osc_\varphi(f) \leq Osc_\psi(f) \leq 2Osc_\varphi(f).$$

Demostración. La demostración es análoga a la del Lema 6.5, con una pequeña diferencia, que consiste en que ahora trabajamos con redes en lugar de sucesiones.

Sea $f \in \overline{C(K_0,X)_\psi}^\tau$. Entonces f es constante sobre cada subconjunto $\psi^{-1}(k)$, $\forall k \in K_0$, por lo que existe $h : K_0 \to X$ tal que $f = h \circ \psi$. Como en Lema 6.5 se tiene que $Osc_\varphi(f,k) \leq Osc_\psi(f,q(k))$, para todo $k \in K$, y de aquí obtenemos que $Osc_\varphi(f) \leq Osc_\psi(f)$.

Probemos que $Osc_\psi(f) \leq 2Osc_\varphi(f)$. Si $Osc_\psi(f) = 0$, claramente $Osc_\psi(f) \leq 2Osc_\varphi(f)$. Supongamos que $Osc_\psi(f) > \delta > 0$. Entonces podemos hallar un punto $k_0 \in K_0$ y dos redes $i_\alpha, j_\alpha \in I$, $\alpha \in \mathcal{A}$, tales que $\psi(i_\alpha) \to k_0, \psi(j_\alpha) \to k_0$, para $\alpha \in \mathcal{A}$, y $\|f(i_\alpha) - f(j_\alpha)\| > \delta$, para todo $\alpha \in \mathcal{A}$. Puesto que K es compacto, existe una subred $\mathcal{A}_0$ y dos puntos $x_0, y_0 \in K$ tales que $\varphi(i_\alpha) \to x_0$ y $\varphi(j_\alpha) \to y_0$ cuando $\alpha \in \mathcal{A}_0$. Claramente, $x_0, y_0 \in q^{-1}(k_0)$.

Aserto. O bien $Osc_\varphi(f,x_0) \geq \frac{\delta}{2}$ ó bien $Osc_\varphi(f,y_0) \geq \frac{\delta}{2}$.

En efecto, sean $i_0, j_0 \in I$ tales que $\varphi(i_0) = x_0$ y $\varphi(j_0) = y_0$. Puesto que f es constante sobre $\psi^{-1}(k_0)$ e $i_0, j_0 \in \psi^{-1}(k_0)$, tenemos que $f(i_0) = f(j_0)$. Entonces, para todo $\alpha \in \mathcal{A}_0$ tenemos

$$\begin{aligned} \delta < \|f(i_\alpha) - f(j_\alpha)\| = \|f(i_\alpha) - f(i_0) + f(j_0) - f(j_\alpha)\| \leq \\ \leq \|f(i_\alpha) - f(i_0)\| + \|f(j_0) - f(j_\alpha)\|. \end{aligned}$$

Por tanto ó bien $\|f(i_\alpha) - f(i_0)\| > \frac{\delta}{2}$ ó bien $\|f(j_0) - f(j_\alpha)\| > \frac{\delta}{2}$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}_0$. Así que existe otra subred $\mathcal{A}_1$ tal que

$$\text{ó bien } \|f(i_\alpha) - f(i_0)\| > \frac{\delta}{2},\ \forall \alpha \in \mathcal{A}_1,\ \text{ó bien } \|f(j_0) - f(j_\alpha)\| > \frac{\delta}{2},\ \forall \alpha \in \mathcal{A}_1,$$

y esto prueba el Aserto.

Finalmente, concluimos que $Osc_\varphi(f) \geq \delta/2$, de donde obtenemos que $Osc_\psi(f) \leq 2Osc_\varphi(f)$. ■

Corolario 6.8. *Sean K, K_0 dos espacios compactos Hausdorff, I un conjunto, $\varphi : I \to K$ una función tal que $\varphi(I) = K$, $q : K \to K_0$ una aplicación continua suprayectiva y $\psi = q \circ \varphi$. Entonces, si $f \in \overline{C(K_0)_\psi}^{w^*}$, se tiene que:*

$$d(f, C(K)_\varphi) \leq d(f, C(K_0)_\psi) \leq 2d(f, C(K)_\varphi).$$

Demostración. La prueba sale del Lema 6.7 y de la Proposición 6.3. ∎

Corolario 6.9. *Sean K, K_0 dos espacios compactos Hausdorff, I un conjunto, $\varphi : I \to K$ una función tal que $\varphi(I) = K$, $q : K \to K_0$ una aplicación continua sobreyectiva, $\psi = q \circ \varphi$ y X un espacio normado. Consideremos a los espacios $C(K,X)_\varphi$ y $C(K_0,X)_\psi$ como subespacios del espacio $\ell_\infty(I,X)$ de modo que $C(K_0,X)_\psi \subset C(K,X)_\varphi \subset \ell_\infty(I,X)$. Entonces, si τ es la topología en $\ell_\infty(I,X)$ de la convergencia puntual sobre I y la convergencia sobre un subconjunto $F \subset X^*$, que separa puntos de X, para todo $f \in \overline{C(K_0,X)_\psi}^\tau$ se tiene que*

$$d(f, C(K,X)_\varphi) \leq d(f, C(K_0,X)_\psi) \leq 4d(f, C(K,X)_\varphi).$$

Demostración. Es obvio que $d(f, C(K,X)_\varphi) \leq d(f, C(K_0,X)_\psi)$, porque $C(K_0,X)_\psi \subset C(K,X)_\varphi$. La desigualdad

$$d(f, C(K_0,X)_\psi) \leq 4d(f, C(K,X)_\varphi)$$

sale del Lema 6.7 y de la Proposición 6.4. ∎

6.1 Espacios $C^*(H)_\varphi$ con 1-control dentro de $\ell_\infty(I)$

Vamos a estudiar en esta Sección una clase de espacios topológicos (H, T_H) tal que $C^*(H)_\varphi$ tiene 1-control dentro de $\ell_\infty(I)$, esto es, $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w*}(W), C^*(H)_\varphi) = \hat{d}(W, C^*(H)_\varphi)$, para todo subconjunto w*-compacto $W \subset \ell_\infty(I)$. Un espacio topológico (H, T_H) se dice que tiene *la propiedad* $\mathfrak{F}$ si para todo subconjunto $A \subset H \times H$ tal que $\overline{A} \cap \Delta \neq \emptyset$ ($\Delta := \{(h,h) : h \in H\}$ es la diagonal de $H \times H$) existen $d_0 \in \Delta$ y una secuencia $\alpha_n \in A$, $n \geq 1$, tales que $\alpha_n \to d_0$. Por tanto H tiene la propiedad $\mathfrak{F}$ cuando: (1) H es metrizable; (2) H es primer axioma; (3) $H \times H$ es un espacio de Frechet-Urysohn, etc.

Proposición 6.10. *Sean H un espacio topológico normal con $H \in \mathfrak{F}$, I un conjunto, $\varphi : I \to H$ una aplicación tal que $\overline{\varphi(I)} = H$ y $W \subset \ell_\infty(I)$ un subconjunto w^*-compacto. Entonces*

$$\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(W), C^*(H)_\varphi) = \hat{d}(W, C^*(H)_\varphi).$$

Demostración. Supongamos que existen un subconjunto w*-compacto $W \subset B(\ell_\infty(I))$ y dos números reales $a, b > 0$ tales que

$$\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(W), C^*(H)_\varphi) > b > a > \hat{d}(W, C^*(H)_\varphi).$$

Cojamos $f_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(W)$ con $d(f_0, C^*(H)_\varphi) > b$. Por la Proposición 6.3 existe $k_0 \in H$ tal que $\frac{1}{2}Osc_\varphi(f_0, k_0) > b$. De aquí deducimos que existen $\epsilon > 0$ y, por cada $V \in \mathcal{V}^{k_0}$, dos puntos $i_V, j_V \in \varphi^{-1}(V)$ tales que

$$f_0(i_V) - f_0(j_V) > 2b + \epsilon.$$

En particular, $(k_0, k_0) \in \Delta \cap \overline{\{(\varphi(i_V), \varphi(j_V)) : V \in \mathcal{V}^{k_0}\}}$. Puesto que $H \in \mathfrak{F}$ existe una secuencia $\{(i_n, j_n) : n \geq 1\} \subset \{(i_V, j_V) : V \in \mathcal{V}^{k_0}\}$ y un punto $(h_0, h_0) \in \Delta$ tales que

$(\varphi(i_n), \varphi(j_n)) \to (h_0, h_0)$. Sea μ una probabilidad de Radon sobre W tal que $f_0 = r(\mu)$(= baricentro de μ). Sea $T_n : \ell_\infty(I) \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, una aplicación tal que $T_n(f) = f(i_n) - f(j_n)$, $\forall f \in \ell_\infty(I)$. Claramente T_n es un operador lineal $\|\cdot\|$-continuo y w*-continuo. Por tanto se tiene que

$$2b + \epsilon < T_n(f_0) = T_n(r(\mu)) = \int_W T_n(f) d\mu.$$

Sea $A_n = \{f \in W : T_n(f) > 2b + \frac{\epsilon}{2}\}$, $\forall n \geq 1$.

Aserto. $\mu(A_n) \geq \frac{\epsilon}{4}$, $\forall n \geq 1$.

En efecto, tenemos que

$$2b + \epsilon < \int_W T_n(f) d\mu = \int_{A_n} T_n(f) d\mu + \int_{W \setminus A_n} T_n(f) d\mu \leq 2\mu(A_n) + (2b + \frac{\epsilon}{2}),$$

de donde obtenemos que $\mu(A_n) \geq \frac{\epsilon}{4}$.

Por Lema 1.1 existe una subsucesión $\{n_i : i \geq 1\} \subset \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{i \geq 1} A_{n_i} \neq \emptyset$. Sea $g \in \bigcap_{i \geq 1} A_{n_i}$. Entonces $g(i_{n_i}) - g(j_{n_i}) > 2b + \frac{\epsilon}{2}$, $\forall i \geq 1$, de donde obtenemos que $Osc_\varphi(g, h_0) \geq 2b + \frac{\epsilon}{2}$, es decir, $d(g, C^*(H)_\varphi) > b$, lo que contradice el hecho de que $g \in W$. ■

Corolario 6.11. *Sea K un espacio Hausdorf compacto disperso tal que $K^{(2)} = \emptyset$ y $\varphi : I \to K$ una aplicación tal que $\overline{\varphi(I)} = K$. Entonces se tiene $\hat{d}(W, C(K)_\varphi) = \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(W), C(K)_\varphi)$ para todo subconjunto w*-compacto W de $\ell_\infty(I)$.*

Demostración. Por la Proposición 6.10 basta probar que $K \in \mathfrak{F}$. Como $K^{(2)} = \emptyset$, entonces K es la suma topológica de un número finito de subconjuntos disjuntos "clopen", digamos $K = \oplus_{i=1}^n K_i$, siendo cada K_i la compactificación de Alexandroff $K_i = \alpha J_i$ de cierto conjunto discreto J_i. Por tanto, K tiene la propiedad $\mathfrak{F}$ sii cada αJ_i la tiene. Finalmente se prueba fácilmente que la compactificación de Alexandroff αJ de un conjunto discreto J tiene la propiedad $\mathfrak{F}$. ■

6.2 El control de $C(K)$ dentro de $\ell_\infty(K)$ cuando K es compacto

Cascales, Marciszewski y Raja prueban en [8] que, si H es un espacio topológico normal numerablemente compacto y $W \subset \ell_\infty(I)$ es un subconjunto w*-compacto, entonces $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(W), C(H)) \leq 5\hat{d}(W, C(H))$ y, si además $W \cap C(H)$ es w*-denso en W, se verifica que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(W), C(H)) \leq 2\hat{d}(W, C(H))$. En [8] se utiliza la técnica del intercambio de límites dobles. En lo que sigue llegamos a los resultados citados para un espacio topológico H numerablemente compacto (no precisamos que sea normal), pero utilizando la técnica del cálculo baricéntrico, el Teorema de Weierstrass y el Corolario 6.6.

Proposición 6.12. *Sean I un conjunto, H un espacio numerablemente compacto y $\varphi : I \to H$ una aplicación tal que $\varphi(I) = H$. Entonces toda sub-álgebra multiplicativa $Z \subset C(H)_\varphi$ con $\mathbf{1}_I \in Z$ tiene 5-control dentro de $\ell_\infty(I)$.*

Demostración. Supongamos que Z no tiene 5-control dentro de $\ell_\infty(I)$. Entonces existen un subconjunto w*-compacto $W \subset B(\ell_\infty(I))$ y dos números reales $a, b > 0$ tales que

$$\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(W), Z) > b > 5a > 5\hat{d}(W, Z).$$

Por el Lema 1.7 tenemos el siguiente Hecho:

Hecho. Existe un funcional $\psi \in S(Z^\perp)$ y un subconjunto w*-compacto $\emptyset \neq K \subset W$ tal que para todo subconjunto w*-abierto V con $V \cap K \neq \emptyset$ existe $\xi \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap K)$ con $\psi(\xi) > b$.

Etapa 1. Cogiendo $V_0 = \ell_\infty(I)$ y aplicando el Hecho, hallamos $\xi_1 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ tal que $\psi(\xi_1) > b$. Puesto que $B(\ell_1(I))$ es un conjunto w*-denso en $B(\ell_\infty(I)^*)$, existe $x_1^* \in S(\ell_1(I))$ tal que $x_1^*(\xi_1) > b$. Por tanto $\xi_1 \in \{u \in \ell_\infty(I) : u(x_1^*) > b\} \cap \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$, lo que implica que, si definimos $V_1 := \{u \in \ell_\infty(I) : u(x_1^*) > b\}$, entonces $V_1 \cap K \neq \emptyset$. Elegimos $\eta_1 \in V_1 \cap K$. Puesto que $d(\eta_1, Z) < a$, tenemos la descomposición $\eta_1 = \eta_1^1 + \eta_1^2$ con $\eta_1^1 = f_1 \circ \varphi \in Z$ (para cierto $f_1 \in C(H)$) y $\eta_1^2 \in aB(\ell_\infty(I))$. Sea $\mathcal{F}_1 = \{\mathbf{1}_H\} \cup \{f_1\}$ y $\mathcal{P}_1$ la familia de productos finitos de elementos de $\mathcal{F}_1$. Denotemos $\mathcal{P}_1 = \{g_{1n} : n \geq 1\}$.

Etapa 2. Sea $Y_1 = [\{f \circ \varphi : f \in \{g_{11}\}\}] \subset Z \subset C(H)_\varphi$. Como V_1 es un subconjunto w*-abierto de $\ell_\infty(I)$ tal que $V_1 \cap K \neq \emptyset$, por el Hecho existe $\xi_2 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V_1 \cap K)$ tal que $\psi(\xi_2) > b$. Puesto que $\dim(Y_1) < \infty$, $\psi(\xi_2) > b$ y $\psi \in Y_1^\perp$, existe $x_2^* \in S(\ell_1(I))$ tal que $x_2^*(\xi_2) > b$ y $x^*_{2\restriction Y_1} = 0$. Por tanto $\xi_2 \in \{u \in \ell_\infty(I) : u(x_2^*) > b\} \cap \overline{\text{co}}^{w^*}(V_1 \cap K)$, lo que implica que, si definimos $V_2 := \{u \in \ell_\infty(I) : u(x_i^*) > b, i = 1, 2\}$, entonces $V_2 \cap K \neq \emptyset$. Elegimos $\eta_2 \in V_2 \cap K$. Puesto que $d(\eta_2, Z) < a$, tenemos la descomposición $\eta_2 = \eta_2^1 + \eta_2^2$ con $\eta_2^1 = f_2 \circ \varphi \in Z$ (para cierto $f_2 \in C(H)$) y $\eta_2^2 \in aB(\ell_\infty(I))$. Sea $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 \cup \{f_2\}$ y $\mathcal{P}_2$ la familia de productos finitos de elementos de $\mathcal{F}_2$. Denotemos $\mathcal{P}_2 = \{g_{2n} : n \geq 1\}$.

Etapa 3. Sea $Y_2 = [\{f \circ \varphi : f \in \{g_{ij} : i, j \leq 2\}\}] \subset Z \subset C(H)_\varphi$. Como V_2 es un subconjunto w*-abierto de $\ell_\infty(I)$ tal que $V_2 \cap K \neq \emptyset$, por el Hecho existe $\xi_3 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V_2 \cap K)$ tal que $\psi(\xi_3) > b$. Puesto que $\dim(Y_2) < \infty$, $\psi(\xi_3) > b$ y $\psi \in Y_2^\perp$, existe $x_3^* \in S(\ell_1(I))$ tal que $x_3^*(\xi_3) > b$ y $x^*_{3\restriction Y_2} = 0$. Por tanto $\xi_3 \in \{u \in \ell_\infty(I) : u(x_3^*) > b\} \cap \overline{\text{co}}^{w^*}(V_2 \cap K)$, lo que implica que, si definimos $V_3 := \{u \in \ell_\infty(I) : u(x_i^*) > b, i = 1, 2, 3\}$, entonces $V_3 \cap K \neq \emptyset$. Elegimos $\eta_3 \in V_3 \cap K$. Puesto que $d(\eta_3, Z) < a$, tenemos la descomposición $\eta_3 = \eta_3^1 + \eta_3^2$ con $\eta_3^1 = f_3 \circ \varphi \in Z$ (para cierto $f_3 \in C(H)$) y $\eta_3^2 \in aB(\ell_\infty(I))$. Sean $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_2 \cup \{f_3\}$ y $\mathcal{P}_3$ la familia de productos finitos de elementos de $\mathcal{F}_3$. Denotemos $\mathcal{P}_3 = \{g_{3n} : n \geq 1\}$.

A continuación procedemos por reiteración.

Sean $Y = \overline{\bigcup_{k \geq 1} Y_k} \subset \ell_\infty(I)$ y $\mathcal{P}_0 = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{P}_n \subset C(H)$. Observemos que Y es un subespacio cerrado separable de $\ell_\infty(I)$ y $\mathcal{P}_0$ es un subconjunto contable de $C(H)$. Sea $H_0 = H/\mathcal{P}_0$ el conjunto de clases de equivalencias obtenido de H mediante la equivalencia $\sim$ tal que, si $h_1, h_2 \in H$, entonces $h_1 \sim h_2$ sii $f(h_1) = f(h_2)$, $\forall f \in \mathcal{P}_0$. Sean $q : H \to H_0$ la aplicación cociente y $\varphi_1 = q \circ \varphi$. En H_0 ponemos la topología final con respecto a q. Con esta topología H_0 es un espacio métrico compacto, porque $\mathcal{P}_0$ es contable y H es numerablemente compacto.

Aserto 1. $\overline{[\mathcal{P}_0]}$ es el subespacio de $C(H)$ tal que $\overline{[\mathcal{P}_0]} = \{g \circ q : g \in C(H_0)\} = C(H_0)_q$. Además se tiene que $Y = \left(\overline{[\mathcal{P}_0]}\right)_\varphi = C(H_0)_{\varphi_1}$.

En efecto, es claro que, si $f \in \mathcal{P}_0$, existe $g \in C(H_0)$ tal que $g \circ q = f$. Sea $\mathcal{Q}_0 = \{g \in C(H_0) : g \circ q \in \mathcal{P}_0\}$ y observemos que $\mathcal{P}_0 = \{g \circ q : g \in \mathcal{Q}_0\} =: (\mathcal{Q}_0)_q$ y $[\mathcal{P}_0] = ([\mathcal{Q}_0])_q$. Por otra parte, $[\mathcal{Q}_0]$ es un sub-álgebra multiplicativa de $C(H_0)$ con $\mathbf{1}_{H_0} \in \mathcal{Q}_0$ y $[\mathcal{Q}_0]$ separa puntos en H_0, de donde deducimos que $\overline{[\mathcal{Q}_0]} = C(H_0)$ por el teorema de Weierstrass. Por tanto

$$C(H_0)_q = \left(\overline{[\mathcal{Q}_0]}\right)_q = \overline{([\mathcal{Q}_0])_q} = \overline{[\mathcal{P}_0]}.$$

Finalmente, observemos que $Y = \overline{[\{f \circ \varphi : f \in \mathcal{P}_0\}]} = \left(\overline{[\mathcal{P}_0]}\right)_\varphi$, de donde obtenemos $Y = C(H_0)_{\varphi_1}$, porque $\varphi_1 = q \circ \varphi$ y $\overline{[\mathcal{P}_0]} = C(H_0)_q$.

Sea $K_1 = (K + aB(\ell_\infty(I))) \cap \overline{Y}^{w^*}$, que es un subconjunto w*-compacto de $\overline{Y}^{w^*}$. Observemos que $\{\eta_i^1 : i \geq 1\} \subset K_1$ y que $\hat{d}(K_1, Z) \leq 2a$.

Aserto 2. $\hat{d}(K_1, Y) \leq 4a$.

En efecto, se tiene que $\hat{d}(K_1, C(H)_\varphi) \leq \hat{d}(K_1, Z) \leq 2a$. Como $Y = C(H_0)_{\varphi_1}$ y $K_1 \subset \overline{Y}^{w^*}$, del Corolario 6.6 obtenemos $\hat{d}(K_1, Y) \leq 4a$.

Sea $\eta_0 \in B(\ell_\infty(I))$ un punto w*-límite de $\{\eta_k\}_{k\geq 1}$.

Aserto 3. $d(\eta_0, Y) \leq 5a$.

En efecto, es claro que $\eta_0 \in K \subset K_1 + aB(\ell_\infty(I))$, de donde $d(\eta_0, Y) \leq 5a$.

Aserto 4. $d(\eta_0, Y) \geq b$.

En efecto, sea $\phi \in B(\ell_\infty^*(I))$ un punto w*-límite de $\{x_n^*\}_{n\geq 1}$. Puesto que $x_n^*(\eta_k) > b$, si $k \geq n$, entonces $x_n^*(\eta_0) \geq b$, $\forall n \geq 1$, de donde $\phi(\eta_0) \geq b$. Aún más, $\phi \in Y^\perp$ porque $x^*_{n+1|Y_n} = 0$ e $Y_n \subset Y_{n+1}$. De aquí que $d(\eta_0, Y) \geq \phi(\eta_0) \geq b$.

Puesto que $b > 5a$ obtenemos una contradicción y esto completa la prueba. ∎

Proposición 6.13. *Sean I un conjunto, H un espacio numerablemente compacto y $\varphi : I \to H$ una aplicación tal que $\varphi(I) = H$. Entonces toda sub-álgebra multiplicativa $Z \subset C(H)_\varphi$ con $\mathbf{1}_I \in Z$ y todo subconjunto w*-compacto W de $\ell_\infty(I)$ tal que $\overline{W \cap Z}^{w^*} = W$ verifican $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(W), Z) \leq 2\hat{d}(W, Z)$.*

Demostración. En caso contrario existe un subconjunto w*-compacto $W \subset B(\ell_\infty(I))$ con $Z \cap W$ w*-denso en W tal que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(W), Z) > 2\hat{d}(W, Z)$. Por tanto podemos hallar $a, b > 0$ tales que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(W), Z) > b > 2a > 2\hat{d}(W, Z)$. Por el Hecho (ver prueba de Proposición 6.12) existe un funcional $\psi \in S(Z^\perp)$ y un subconjunto w*-compacto $\emptyset \neq K \subset W$ tal que, para todo subconjunto w*-abierto V de $\ell_\infty(I)$ con $V \cap K \neq \emptyset$, existe $\xi \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V \cap K)$ con $\psi(\xi) > b$. Ahora seguimos la argumentación de la Proposición 6.12 con los siguientes cambios:

(i) Como $\emptyset \neq V_k \cap K \subset \overline{V_k \cap Z \cap W}^{w^*}$, elegimos el vector η_k en $V_k \cap Z \cap W$. A continuación hacemos la descomposición $\eta_k = \eta_k^1 + \eta_k^2$ con $\eta_k^1 = \eta_k$ y $\eta_k^2 = 0$.

(ii) Definimos

$$K_1 = \text{w}^*\text{-cl}(\{\eta_i : i \geq 1\}) \subset \overline{Y}^{w^*} \cap W.$$

Claramente $\hat{d}(K_1, Z) \leq \hat{d}(W, Z) < a$, de donde $\hat{d}(K_1, Y) \leq 2\hat{d}(K_1, C(H)_\varphi) \leq 2\hat{d}(K_1, Z) \leq 2a$. Finalmente todo punto η_0 w*-límite de $\{\eta_k\}_{k\geq 1}$ en $\ell_\infty(I)$ satisface $\eta_0 \in K_1$, $d(\eta_0, Y) \leq 2a$ y $d(\eta_0, Y) \geq b$, una contradicción. ■

Contraejemplo. Si I es un conjunto infinito, (H, T_H) un espacio compacto Hausdorff y $\varphi : I \to H$ una aplicación tal que $\overline{\varphi(I)} = H$ pero $\varphi(I) \neq H$, puede ocurrir que $C(H)_\varphi$ no tenga control dentro de $\ell_\infty(I)$. A continuación construimos un contraejemplo.

Vamos a utilizar la construcción de la Proposición 1.12. Sean $\mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ el compacto de Cantor y λ la probabilidad de Haar sobre $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Si $A \subset \{0,1\}^n$, sea $f_A : \mathcal{C} \to \{0,1\}$ la función continua

$$\forall \sigma \in \mathcal{C},\ f_A(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma_{\restriction n} \in A, \\ 0, & \text{si } \sigma_{\restriction n} \notin A, \end{cases}$$

que verifica $0 \leq \int_{\mathcal{C}} f_A d\lambda \leq 1$. Sea

$$I_+ = \{(f_A, +) : A \subset \{0,1\}^n \text{ con } |A| = 2^n - n \text{ y } n \in \mathbb{N}\},$$
$$I_- = \{(f_A, -) : A \subset \{0,1\}^n \text{ con } |A| = 2^n - n \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$$

e $I = I_+ \uplus I_-$, que satisface $|I| = \aleph_0$. Observemos que

(1) La familia contable $\{f_A : (f_A, +) \in I_+\}$ separa puntos en $\mathcal{C}$.

(2) Para todo $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{i = (f_A, +) \in I_+ : \int_{\mathcal{C}} f_A d\lambda \leq 1 - \frac{1}{k}\}$ es finito.

(3) Sea $\mathcal{O}(\sigma) = \{i = (f_A, \pm) \in I : f_A(\sigma) = 0\}$ para $\sigma \in \mathcal{C}$. Dada una familia finita $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \dots \sigma^{(p)} \in \mathcal{C}$, es fácil ver que $|\bigcap_{i=1}^p \epsilon_i \mathcal{O}(\sigma^{(i)})| = \aleph_0$, donde $\epsilon_i = \pm 1$, $(+1)\mathcal{O}(\sigma^{(i)}) = \mathcal{O}(\sigma^{(i)})$ y $(-1)\mathcal{O}(\sigma^{(i)}) = I \setminus \mathcal{O}(\sigma^{(i)})$.

(4) Para todo $i = (f_A, \pm) \in I$ existe $\sigma \in \mathcal{C}$ tal que $f_A(\sigma) = 1$.

De (3) y (4) obtenemos que el compacto

$$D = \bigcap_{\sigma \in \mathcal{C}} \overline{\mathcal{O}(\sigma)}^{\beta I}$$

satisface $\emptyset \neq D \subset \beta I \setminus I$. Denotemos $D = D_+ \uplus D_-$, donde $\emptyset \neq D_+ = D \cap \overline{I_+}^{\beta I}$ y $\emptyset \neq D_- = D \cap \overline{I_-}^{\beta I}$. Sea H el compacto obtenido a partir de βI identificando el cerrado

D en un punto, digamos d_0, y sea $\varphi : I \to H$ la aplicación que es la identidad sobre I. Claramente $\overline{\varphi(I)} = H$ pero $\varphi(I) \neq H$. Vamos a ver que el subespacio $C(H)_\varphi$ de $\ell_\infty(I)$ no tiene control en $\ell_\infty(I)$. Consideremos la función $\psi : \mathcal{C} \to \{-1, 0, +1\}^I \subset B(\ell_\infty(I))$ tal que

$$\forall i \in I,\ \forall \sigma \in \mathcal{C},\ \psi(\sigma)(i) = \begin{cases} f_A(\sigma), & \text{si } i = (f_A, +), \\ -f_A(\sigma), & \text{si } i = (f_A, -). \end{cases}$$

Observemos que ψ es una función inyectiva continua, cuando se considera en $\{-1, 0, +1\}^I$ la w*-topología de $\ell_\infty(I)$, que coincide con la topología producto de $\{-1, 0, +1\}^I$. Sea $K := \psi(\mathcal{C}) \subset \{-1, 0, +1\}^I$, que es un subconjunto compacto homeomorfo a $\mathcal{C}$ tal que $\check{k}_{\restriction D} = 0$, $\forall k \in K$. Por tanto, podemos suponer que $K \subset C(H)_\varphi$. Sea $\mu := \psi(\lambda)$ la probabilidad de Radon sobre K, imagen de λ por la función continua ψ, y $r(\mu) =: z_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ el baricentro de μ. Por (2) se tiene que $\check{z}_0(p) = +1$, para todo $p \in \overline{I_+}^{\beta I} \setminus I$, y $\check{z}_0(p) = -1$, para todo $p \in \overline{I_-}^{\beta I} \setminus I$. Por tanto $\check{z}_0 \restriction D_+ = +1$ y $\check{z}_0 \restriction D_- = -1$, de donde $z_0 \notin C(H)_\varphi$.

6.3 Puntos y conjuntos de control en βI

Si I es un conjunto infinito y $D \subset \beta I$ un subconjunto cerrado de βI ponemos

$$C(\beta I, D) := \{f \in \ell_\infty(I) : \check{f} \text{ es constante en } D\},$$

y

$$C_0(\beta I, D) := \{f \in \ell_\infty(I) : \check{f}_{\restriction D} = 0\}.$$

Pretendemos estudiar el control de $C(\beta I, D)$ y $C_0(\beta I, D)$ dentro de $\ell_\infty(I)$. Vemos, en primer término, un hecho elemental concerniente a las distancias a $C(\beta I, D)$ y $C_0(\beta I, D)$.

Proposición 6.14. *Sean I un conjunto infinito, $D \subset \beta I$ un subconjunto cerrado no-vacío de βI y $z \in \ell_\infty(I)$. Las distancias $d(z, C_0(\beta I, D))$ y $d(z, C(\beta I, D))$ satisfacen*

(1) $d(z, C_0(\beta I, D)) = \|\check{z}_{\restriction D}\| := \sup\{|\check{z}(d)| : d \in D\}$;

(2) $d(z, C(\beta I, D)) = \frac{1}{2}\sup\{\check{z}(d) - \check{z}(d') : d, d' \in D\} = \frac{1}{2}(\check{z}(d_1) - \check{z}(d_2))$,

para ciertos puntos $d_1, d_2 \in D$ tales que $\check{z}(d_1) = \max\{\check{z}(d) : d \in D\}$ y $\check{z}(d_2) = \min\{\check{z}(d) : d \in D\}$.

Demostración. (1) Consideremos la restricción $r : C(\beta I) \to C(D)$ tal que $r(f) = f_{\restriction D}$, $\forall f \in C(\beta I)$. Observemos que r es una aplicación cociente tal que $r(B(C(\beta I))) = B(C(D))$ (por el teorema de extensión de Tietze) y $Ker(r) = C_0(\beta I, D)$. Así que para todo $f \in C(\beta I)$ se tiene

$$\|f_{\restriction D}\| = \|r(f)\| = d(f, C_0(\beta I, D)).$$

(2) Sea H el espacio topológico obtenido a partir de βI por identificación de D en un punto, digamos d_0. Por tanto $H = (\beta I \setminus D) \cup \{d_0\}$ como conjunto y $C(H)$ es

isométricamente isomorfo a $C(\beta I, D)$. Sea $\varphi : \beta I \to H$ la aplicación cociente correspondiente. Considerando a $C(H)_\varphi$ y $C(\beta I)$ como subespacios de $\ell_\infty(\beta I)$, ocurre que $C(H)_\varphi \subset C(\beta I) \subset \ell_\infty(\beta I)$. Aún más, $C(H)_\varphi$ como subespacio de $C(\beta I)$ es exactamente $C(\beta I, D)$. Por la Proposición 6.2, $d(f, C(H)_\varphi) = \frac{1}{2} Osc_\varphi(f)$ para todo $f \in \ell_\infty(\beta I)$. Tomemos $f \in C(\beta I)$. Es claro que $\mathrm{Osc}_\varphi(f, h) = 0$ para todo $h \in \beta I \setminus D$, porque f es continua sobre βI y $\beta I \setminus D$ es abierto en βI. Por tanto

$$\tfrac{1}{2} Osc_\varphi(f) = \tfrac{1}{2} Osc_\varphi(f, d_0) = \tfrac{1}{2} \lim_{V \in \mathcal{V}^{d_0}} \big(\sup\{f(i) - f(j) : i, j \in \varphi^{-1}(V)\}\big),$$

donde $\mathcal{V}^{d_0}$ denota la red de entornos abiertos de d_0 en H. Puesto que D es compacto y f es continua sobre βI, es fácil ver que

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2} \lim_{V \in \mathcal{V}^{d_0}} \big(\sup\{f(i) - f(j) : i, j \in \varphi^{-1}(V)\}\big) = \\ &= \tfrac{1}{2} \sup\{f(d) - f(d') : d, d' \in D\} = \tfrac{1}{2}(f(d_1) - f(d_2)), \end{aligned}$$

para ciertos $d_1, d_2 \in D$ tales que $f(d_1) = \max\{f(d) : d \in D\}$ y $f(d_2) = \min\{f(d) : d \in D\}$. ■

En la siguiente proposición mostramos una situación elemental en la que hay 1-control.

Proposición 6.15. *Si I es un conjunto infinito y $D \subset \beta I$ es un subconjunto cerrado tal que $D = \overline{A}^{\beta I}$ para cierto subconjunto $A \subset I$, entonces $C_0(\beta I, D)$ y $C(\beta I, D)$ tienen 1-control dentro de $\ell_\infty(I)$.*

Demostración. Como $D = \overline{A}^{\beta I}$ con $A \subset I$, entonces

$$\begin{aligned} C_0(\beta I, D) &= \{f \in \ell_\infty(I) : f(a) = 0,\ \forall a \in A\} \text{ y} \\ C(\beta I, D) &= \{f \in \ell_\infty(I) : f(a) = f(b),\ \forall a, b \in A\}. \end{aligned}$$

Por tanto, $C_0(\beta I, D)$ y $C(\beta I, D)$ son subespacios w*-cerrados de $\ell_\infty(I)$. Así que tienen 1-control porque todo subconjunto convexo w*-cerrado de un espacio de Banach dual X^* tiene 1-control dentro de X^* por Proposición 2.1. ■

Proposición 6.16. *Sean I un conjunto infinito y $D \subset \beta I$ un subconjunto cerrado de βI. Los siguientes asertos son equivalentes*

(a) Para todo subconjunto w-compacto K de $\ell_\infty(I)$ tal que $K \subset C_0(\beta I, D)$ se verifica que $\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K) \subset C_0(\beta I, D)$.*

(b) $C_0(\beta I, D)$ tiene 1-control dentro de $\ell_\infty(I)$.

(c) $C_0(\beta I, D)$ tiene control dentro de $\ell_\infty(I)$.

Demostración. (b)$\Rightarrow$ (c) es obvio.

(c)$\Rightarrow$ (a) es inmediato porque $C_0(\beta I, D)$ es un subespacio de $\ell_\infty(I)$ cerrado para la norma.

(a)$\Rightarrow$ (b). Supongamos que existen un subconjunto w*-compacto $K \subset B(\ell_\infty(I))$ y dos números reales $a, b > 0$ tales que:

$$\hat{d}(K, C_0(\beta I, D)) < a < b < \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C_0(\beta I, D)).$$

Consideremos la aplicación $B(\ell_\infty(I)) \ni f \to \phi(f) \in B(\ell_\infty(I))$ tal que $\phi(f) = (f-a) \bigvee 0$. Observemos que ϕ es una aplicación w*-w*-continua tal que $\phi(K)$ es un subconjunto w*-compacto de $B(\ell_\infty(I))$ y que $\phi(K) \subset B(C_0(\beta I, D))$. Sea $z_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ tal que $d(z_0, C_0(\beta I, D)) > b$. Entonces $|\check{z}_0(p)| > b$ para cierto $p \in D$. Supongamos, por ejemplo, que $\check{z}_0(p) > b$ (el caso $\check{z}_0(p) < -b$ es análogo). Cojamos una red $\{z_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset \text{co}(K),\ z_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_{\alpha i} f_{\alpha i},\ f_{\alpha i} \in K,\ \lambda_{\alpha i} \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_{\alpha i} = 1$, tal que $z_\alpha \underset{\alpha \in \mathcal{A}}{\overset{w^*}{\to}} z_0$. Claramente $\phi(z_\alpha) \underset{\alpha \in \mathcal{A}}{\overset{w^*}{\to}} \phi(z_0)$. Sea

$$w_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_{\alpha i} \phi(f_{\alpha i}) \in \text{co}(\phi(K))$$

y observemos que $\phi(z_\alpha) \leq w_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}$, en el orden parcial natural " $\leq$ " de $\ell_\infty(I)$. Por compacidad, existe una subred $\{w_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{B}}$ y un vector $w_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(\phi(K))$ tal que $w_\alpha \underset{\alpha \in \mathcal{B}}{\overset{w^*}{\to}} w_0$ y también $\phi(z_\alpha) \underset{\alpha \in \mathcal{B}}{\overset{w^*}{\to}} \phi(z_0)$.

Aserto. $\check{w}_0(p) \geq b - a > 0$.

En efecto, puesto que $(\phi(z_0))\check{}\,(p) > b - a$, existe un entorno V de p en βI tal que $(\phi(z_0))\check{}\,(q) > b - a,\ \forall q \in V$. De aquí que para todo $i \in V \cap I$ existe $\alpha_i \in \mathcal{B}$ tal que $\phi(z_\alpha)(i) > b - a,\ \forall \alpha \geq \alpha_i,\ \alpha \in \mathcal{B}$. Así que para todo $i \in V \cap I$ se tiene que $w_\alpha(i) > b - a,\ \forall \alpha \geq \alpha_i,\ \alpha \in \mathcal{B}$, de donde obtenemos que $w_0(i) \geq b - a,\ \forall i \in V \cap I$, y $\check{w}_0(p) \geq b - a$.

Finalmente como $p \in D$ y $\check{w}_0(p) \geq b - a > 0$ obtenemos $d(w_0, C_0(\beta I, D)) \geq b - a > 0$, una contradicción porque $w_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(\phi(K))$ y, ya que $\phi(K) \subset B(C_0(\beta I, D))$, entonces $\overline{\text{co}}^{w^*}(\phi(K)) \subset C_0(\beta I, D)$ por (a). ■

Un subconjunto cerrado $D \subset \beta I$ se dice que es un *conjunto de control en βI* si para todo subconjunto w*-compacto $K \subset \ell_\infty(I)$ tal que $K \subset C_0(\beta I, D)$ se tiene que $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) \subset C_0(\beta I, D)$. Por la Proposición 6.16 ello es equivalente a decir que $C_0(\beta I, D)$ tiene 1-control en $\ell_\infty(I)$ ó que, simplemente, $C_0(\beta I, D)$ tiene control en $\ell_\infty(I)$. Por la Proposición 6.15 todo subconjunto cerrado $D \subset \beta I$ tal que $D \cap I$ sea denso en D es un conjunto de control. En particular son conjuntos de control los subconjuntos finitos de I. El conjunto $I^* := \beta I \setminus I$ es también siempre un conjunto de control. De hecho tanto $C_0(\beta I, I^*) = c_0(I)$ como $C(\beta I, I^*)$ (que es isomorfo a $C_0(\beta I, I^*)$) tienen 1-control y gozan de la propiedad (P) (ver Capítulo 4) en $\ell_\infty(I)$ (y dentro de todo espacio de Banach dual X^*) porque son WCG (ver Proposición 3.17). ¿Hay en $I^* = \beta I \setminus I$ algún otro subconjunto ó punto de control? Vamos a ver a continuación algunos resultados en esta dirección.

Si (X,τ) es un espacio topológico, un subconjunto $K\subset X$ se dice que es *regular en* X sii $\mathrm{int}(K)$ es denso en K.

Proposición 6.17. *Si $D\subset \beta I\backslash I$ es un subconjunto compacto regular en $\beta I\backslash I$, entonces $C_0(\beta I,D)$ y $C(\beta I,D)$ tienen 1-control dentro de $\ell_\infty(I)$ y, por tanto, D es un conjunto de control.*

Demostración. (A) En primer lugar consideremos el subespacio $C(\beta I,D)$. Supongamos que $C(\beta I,D)$ no tiene 1-control en $\ell_\infty(I)$. Entonces existen un subconjunto w*-compacto $W\subset B(\ell_\infty(I))$ y dos números reales $a,b>0$ tales que:

$$\hat{d}(W,C(\beta I,D))<a<b<\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(W),C(\beta I,D))\le 1.$$

Elijamos $f_0\in\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(W)$ tal que $b<d(f_0,C(\beta I,D))$, es decir, que $\check{f}_0(d)-\check{f}_0(e)>2b+\epsilon$ para ciertos puntos $d,e\in D$ y cierto $\epsilon>0$. Puesto que D es regular, existen $d_0,e_0\in\mathrm{int}(D)$ (aquí el interior $\mathrm{int}(D)$ es el interior relativo a I^*) tales que $\check{f}_0(d_0)-\check{f}_0(e_0)>2b+\epsilon$. Así que podemos hallar puntos $d_n,e_n\in I,\ n\ge 1$, diferentes dos a dos tales que

(1) $\overline{\{d_n:n\ge 1\}}^{\beta I}\setminus I\subset D$ y $\overline{\{e_n:n\ge 1\}}^{\beta I}\setminus I\subset D$, y

(2) $f_0(d_n)-f_0(e_m)>2b+\epsilon$ para todo $n,m\ge 1$.

A continuación usamos un argumento parecido al de la Proposición 6.10. Fijemos una probabilidad de Radon μ sobre W tal que $f_0=r(\mu)(=$ baricentro de $\mu)$ y para todo $n\ge 1$ sea $T_n:\ell_\infty(I)\to\mathbb{R}$ la aplicación tal que $T_n(f)=f(d_n)-f(e_n)$ para todo $f\in\ell_\infty(I)$. Claramente T_n es a linear, $\|\cdot\|$-continua y w*-continua. Además

$$2b+\epsilon<T_n(f_0)=T_n(r(\mu))=\int_W T_n(f)d\mu.$$

Por tanto, si definimos $A_n=\{f\in W:T_n(f)>2b+\frac{\epsilon}{2}\}$, entonces $\mu(A_n)\ge\frac{\epsilon}{4}$ para todo $n\ge 1$, como en la Proposición 6.10. Sea $B_n:=\bigcup_{m\ge n}A_m$ para todo $n\ge 1$. La secuencia $\{B_n\}_{n\ge 1}$ es decreciente y verifica $\mu(B_n)\ge\frac{\epsilon}{4}$ para todo $n\ge 1$. De aquí que $\mu(\bigcap_{n\ge 1}B_n)\ge\frac{\epsilon}{4}$ y por tanto $\bigcap_{n\ge 1}B_n\neq\emptyset$. Elijamos $g\in\bigcap_{n\ge 1}B_n$ e, inductivamente, la secuencia $\{A_{n_i}\}_{i\ge 1},\ n_i<n_{i+1}$, tal que $g\in A_{n_i}$ para todo $i\ge 1$. Entonces $g(d_{n_i})-g(e_{n_i})>2b+\frac{\epsilon}{2},\ \forall i\ge 1$. Sea $(u,v)\in\beta I\times\beta I$ un punto de acumulación del subconjunto $\{(d_{n_i},e_{n_i}):i\ge 1\}$. Entonces $\check{g}(u)-\check{g}(v)\ge 2b+\frac{\epsilon}{2},\ u\in\overline{\{d_{n_i}:i\ge 1\}}^{\beta I}\setminus I$ y $v\in\overline{\{e_{n_i}:i\ge 1\}}^{\beta I}\setminus I$. Por tanto como $\overline{\{d_{n_i}:i\ge 1\}}^{\beta I}\setminus I\subset D$ y $\overline{\{e_{n_i}:i\ge 1\}}^{\beta I}\setminus I\subset D$, obtenemos $d(g,C(\beta I,D))>b$, lo que contradice que $g\in W$.

(B) La prueba para el subespacio $C_0(\beta I,D)$ es similar a la del caso (A): si el enunciado es falso, existen un subconjunto w*-compacto $W\subset B(\ell_\infty(I))$, dos números reales $a,b>0$ y un punto $f_0\in\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(W)$ tales que $\hat{d}(W,C_0(\beta I,D))<a<b<d(f_0,C_0(\beta I,D))$. Esto significa que $|\check{f}_0(d)|>b+\epsilon$ para algún $d\in D$ y cierto $\epsilon>0$. Supongamos, por ejemplo, que $\check{f}_0(d) > b+\epsilon$ (el caso $\check{f}_0(d) < -(b+\epsilon)$ es análogo). Como D es regular, existe $d_0 \in \mathrm{int}(D)$ (aquí el interior $\mathrm{int}(D)$ es relativo a I^*) tal que $\check{f}_0(d_0) > b+\epsilon$. Por tanto podemos hallar puntos $d_n \in I$, $n \geq 1$, diferentes dos a dos tales que $\overline{\{d_n : n \geq 1\}}^{\beta I} \setminus I \subset D$ y $f_0(d_n) > b + \epsilon$ para todo $n \geq 1$. Fijemos una probabilidad de Radon μ sobre W tal que $f_0 = r(\mu)(=$ baricentro de $\mu)$ y para todo $n \geq 1$ sea $T_n : \ell_\infty(I) \to \mathbb{R}$ la aplicación tal que $T_n(f) = f(d_n)$, para todo $f \in \ell_\infty(I)$. Claramente T_n es lineal $\|\cdot\|$-continua y w*-continua. Por tanto se tiene

$$b + \epsilon < T_n(f_0) = T_n(r(\mu)) = \int_W T_n(f)d\mu.$$

Si definimos $A_n = \{f \in W : T_n(f) > b + \frac{\epsilon}{2}\}$ para todo $n \geq 1$, entonces $\mu(A_n) \geq \frac{\epsilon}{2}$ para todo $n \geq 1$, como en el caso (A). Sea $B_n := \bigcup_{m \geq n} A_m$ para todo $n \geq 1$. La secuencia $\{B_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente y $\mu(B_n) \geq \frac{\epsilon}{2}$ para todo $n \geq 1$. De aquí que $\mu(\bigcap_{n\geq 1} B_n) \geq \frac{\epsilon}{2}$ y por tanto $\bigcap_{n\geq 1} B_n \neq \emptyset$. Elijamos $g \in \bigcap_{n\geq 1} B_n$ e, inductivamente, la secuencia $\{A_{n_i}\}_{i\geq 1}$, $n_i < n_{i+1}$, tal que $g \in A_{n_i}$ para todo $i \geq 1$. Entonces $g(d_{n_i}) > b + \frac{\epsilon}{2}$, de donde deducimos que $\check{g}(u) \geq b + \frac{\epsilon}{2}$, para todo $u \in \overline{\{d_{n_i} : i \geq 1\}}^{\beta I} \setminus I$. Puesto que $\emptyset \neq \overline{\{d_{n_i} : i \geq 1\}}^{\beta I} \setminus I \subset D$, obtenemos $d(g, C_0(\beta I, D)) > b$, lo que contradice que $g \in W$. ■

Corolario 6.18. *Si I es un conjunto infinito y $D \subset I^*$ es un subconjunto $\mathcal{G}_\delta$ cerrado, entonces $C(\beta I, D)$ y $C_0(\beta I, D)$ tienen 1-control en $\ell_\infty(I)$.*

Demostración. La prueba se sigue de la Proposición 6.17 y de que todo subconjunto $\mathcal{G}_\delta$ de I^* es regular en I^* (ver [54, p.78]). ■

Indicamos por CH la hipótesis del continuo, por $\neg CH$ la negación de la hipótesis del continuo y por MA el Axioma de Martin. Si K es un espacio compacto Hausdorff entonces

(a) Se dice que K es *un compacto de Corson* sii existe un conjunto I tal que K es homeomorfo a un subconjunto compacto de $\Sigma([-1,1]^I) := \{x \in [-1,1]^I :$ supp(x) es contable$\}$ (ver [2],[16],[19]).

(b) Se dice que K tiene *la propiedad* (M) si toda medida de Radon en K tiene soporte separable.

Si I es un conjunto infinito, sean

(i) $I^{*c} = \bigcup\{\overline{A}^{\beta I} : A \subset I, |A| = \aleph_0\} \setminus I$ e $I^{*u} = I^* \setminus I^{*c}$.

(ii) Si κ es un cardinal infinito, sea

$$I^*(\kappa) = I^* \setminus \bigcup\{\overline{A}^{\beta I} : A \subset I, |A| < \kappa\}.$$

Observemos que I^{*c} es denso y abierto en I^*, que $I^* = I^*(\aleph_0)$, $I^{*u} = I^*(\aleph_1)$ y que $I^*(\kappa)$ es un cerrado de I^* con interior vacío en I^*, para $\kappa \geq \aleph_1$. Denotemos $\ell^c_\infty(I) = \{f \in \ell_\infty(I) : |\,\mathrm{supp}(f)| \leq \aleph_0\}$ y recordemos que:

(1) Si $D = I^{*u}$, entonces $C_0(\beta I, D) = \ell_\infty^c(I)$ y

(2) $d(f, \ell_\infty^c(I)) = \|\check{f}_{\restriction I^{*u}}\| = \sup\{|\check{f}(p)| : p \in I^{*u}\}$, para todo $f \in \ell_\infty(I)$.

Vamos a examinar el control de $C_0(\beta I, D)$ y $C(\beta I, D)$ dentro de $\ell_\infty(I)$ cuando I es un conjunto incontable y $D = I^{*u}$. Mostramos que depende de la axiomática adoptada.

Proposición 6.19. *Si I es un conjunto incontable y $D = I^{*u}$, entonces $C_0(\beta I, D)$ y $C(\beta I, D)$ tienen 1-control dentro de $\ell_\infty(I)$, bajo $\neg CH + MA$.*

Demostración. (A) Consideremos, en primer lugar, el subespacio $C_0(\beta I, D)$. Sea $K \subset C_0(\beta I, D) = \ell_\infty^c(I)$ un subconjunto w*-compacto. Entonces K es un compacto de Corson y tiene la propiedad (M), pues estamos aceptando $\neg CH + MA$ (ver [2, p. 215], [14, p. 201 y p. 205]). Cojamos $z_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ y μ una probabilidad de Radon en K tal que $r(\mu) = z_0$. Puesto que K tiene la propiedad (M), existe un subconjunto contable $J \subset I$ tal que $\text{supp}(\mu) =: H \subset \ell_\infty^J(I) = \{x \in \ell_\infty(I) : \text{supp}(x) \subset J\}$. Claramente $z_0 = r(\mu) \in \overline{\text{co}}^{w^*}(H) \subset \ell_\infty^J(I) \subset \ell_\infty^c(I)$. Ahora basta aplicar la Proposición 6.16.

(B) Consideremos a continuación el subespacio $C(\beta I, D)$. Supongamos que $C(\beta I, D)$ no tiene 1-control en $\ell_\infty(I)$, esto es, que existen un subconjunto w*-compacto $K \subset B(\ell_\infty(I))$, un punto $z_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ y dos números reales $a, b > 0$ tales que:

$$\hat{d}(K, C(\beta I, D)) < a < b < d(z_0, C(\beta I, D)).$$

Como $b < d(z_0, C(\beta I, D))$, podemos elegir dos puntos $d_1, d_2 \in D$ tales que $\check{z}_0(d_1) - \check{z}_0(d_2) > 2b + \eta_0$ para cierto $\eta_0 > 0$. Como $d_1 \neq d_2$, existe en βI un entorno V_i de d_i, $i = 1, 2$, tal que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y $\check{z}_0(p) - \check{z}_0(q) > 2b + \eta_0$ para todo $p \in V_1$ y $q \in V_2$. Cojamos $\{i_\xi : \xi < \omega_1\} \subset V_1 \cap I$ y $\{j_\xi : \xi < \omega_1\} \subset V_2 \cap I$ tales que $i_\rho \neq i_\xi$ y $j_\rho \neq j_\xi$ para $\rho < \xi < \omega_1$. Observemos que estas elecciones pueden llevarse a cabo porque, como $d_i \in D = I^{*u}$, entonces $|V_i \cap I| \geq \aleph_1$, $i = 1, 2$.

Sea $J = \{(i_\xi, j_\xi) : \xi < \omega_1\}$ y consideremos la aplicación $T : \ell_\infty(I) \to \ell_\infty(J)$ tal que $T(f)(i_\xi, j_\xi) = f(i_\xi) - f(j_\xi)$. Claramente T es una aplicación lineal $\|\cdot\|$-continua tal que $\|T\| \leq 2$. Aún más, T es w*-w*-continua.

Aserto 1. $T(C(\beta I, D)) \subset \ell_\infty^c(J) = C_0(\beta J, J^{*u})$.

En efecto, sea $f \in C(\beta I, D)$ y $t_f = \check{f}_{\restriction D}$. Entonces existe un subconjunto contable $I_f \subset I$ tal que $f(i) = t_f$ para todo $i \in I \setminus I_f$. Por construcción existe $\alpha_0 < \omega_1$ tal que $i_\xi, j_\xi \in I \setminus I_f$ para todo $\alpha_0 < \xi < \omega_1$. Así que para todo $\alpha_0 < \xi < \omega_1$ obtenemos

$$T(f)(i_\xi, j_\xi) = f(i_\xi) - f(j_\xi) = t_f - t_f = 0,$$

es decir, $T(f) \in \ell_\infty^c(J)$.

Sean $W := T(K)$ y $w_0 := T(z_0)$. Claramente W es un subconjunto w*-compacto de $\ell_\infty(J)$ y $w_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(W)$.

Aserto 2. $\hat{d}(W, \ell_\infty^c(J)) < 2a$.

En efecto, sea $\epsilon > 0$ tal que $\hat{d}(K, C(\beta I, D)) < a - \epsilon$. Fijemos un punto $k \in K$ y cojamos $f \in C(\beta I, D)$ tal que $\|k - f\| < a - \epsilon$. Entonces $\|Tk - Tf\| < 2(a - \epsilon)$. Como $Tf \in \ell_\infty^c(J)$, obtenemos $d(Tk, \ell_\infty^c(J)) < 2(a-\epsilon)$, de donde $\hat{d}(W, \ell_\infty^c(J)) \leq 2(a-\epsilon) < 2a$.

Aserto 3. $d(w_0, \ell_\infty^c(J)) > 2b$.

En efecto, para todo $\xi < \omega_1$ tenemos

$$w_0(i_\xi, j_\xi) = z_0(i_\xi) - z_0(j_\xi) > 2b + \eta_0.$$

Por tanto $d(w_0, \ell_\infty^c(J)) \geq 2b + \eta_0$.

Así que teniendo en cuenta la parte (A), llegamos a una contradicción, que completa la prueba. ■

Proposición 6.20. *Sean I un conjunto incontable y $D = I^{*u}$. Entonces bajo CH ni $C_0(\beta I, D)$ ni $C(\beta I, D)$ tienen control dentro de $\ell_\infty(I)$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $I = \omega_1$. Vamos a usar como base de nuestra construcción el compacto de Corson sin la propiedad (M) descrito por Argyros, Mercourakis y Negrepontis en [2, p. 219]. Sea Ω el espacio de Erdös, esto es, el espacio de Stone del álgebra cociente M_λ/N_λ, donde λ es la medida de Lebesgue en $[0,1]$, M_λ es el álgebra de los subconjuntos λ-medibles de $[0,1]$ y N_λ es el ideal de los subconjuntos λ-nulos de $[0,1]$. Ω es un espacio compacto extremadamente disconexo (porque M_λ/N_λ es completo) tal que el álgebra de Boole de los subconjuntos clopen de Ω es isomorfa al álgebra cociente M_λ/N_λ. Además existe una probabilidad Borel regular estrictamente positiva normal $\tilde{\lambda}$ en Ω, definida por la condición $\tilde{\lambda}(V) = \lambda(U)$, siendo V cualquier subconjunto clopen de Ω y U un subconjunto λ-medible de $[0,1]$ con $\lambda(U) > 0$ tal que la clase $U + N_\lambda \in M_\lambda/N_\lambda$ es la imagen de V por el anterior isomorfismo.

Por la hipótesis CH podemos escribir $[0,1] = \{x_\xi : \xi < \omega_1\}$ y podemos enumerar como $\{F_\xi : \xi < \omega_1\}$ a la familia de los subconjuntos Borel de $[0,1]$ con medida de Lebesgue $\lambda(K) \geq 0,5$. Por cada $\xi < \omega_1$ elegimos un subconjunto compacto K_ξ tal que

(i) $K_\xi \subset F_\xi \cap \{x_\rho : \xi < \rho < \omega_1\}$ y $\lambda(K_\xi) > 0,4$.

(ii) si $\lambda(F_\xi) < 1$, entonces K_ξ satisface $\lambda(F_\xi \setminus K_\xi) < 1 - \lambda(F_\xi)$.

Puesto que $K_\xi \subset \{x_\rho : \xi < \rho < \omega_1\}$, la familia $\{K_\xi : \xi < \omega_1\}$ tiene calibre $\aleph_1$, esto es, $\bigcap_{\xi \in A} K_\xi = \emptyset$, si $A \subset \omega_1$ y $|A| = \aleph_1$. Sea V_ξ un subconjunto clopen de Ω correspondiente a la clase $K_\xi + N_\lambda \in M_\lambda/N_\lambda$ en el isomorfismo entre el álgebra cociente M_λ/N_λ y el álgebra de los subconjuntos clopen de Ω. Observemos que $\tilde{\lambda}(V_\xi) = \lambda(K_\xi) > 0,4$ para todo $\xi < \omega_1$.

Aserto. Se tiene que: (a) la familia $\{V_\xi : \xi < \omega_1\}$ tiene calibre $\aleph_1$, esto es, si $A \subset \omega_1$ y $|A| = \aleph_1$, entonces $\bigcap_{\xi \in A} V_\xi = \emptyset$; (b) por la elección de los K_ξ se verifica que $|\{\xi < \omega_1 : \tilde{\lambda}(V_\xi) \leq 0{,}5\}| = \aleph_1$ y $|\{\xi < \omega_1 : \tilde{\lambda}(V_\xi) > t\}| = \aleph_1$ para todo $0 < t < 1$.

En efecto: (a) Supongamos que $\bigcap_{\xi \in A} V_\xi \neq \emptyset$ para cierto subconjunto $A \subset \omega_1$ con $|A| = \aleph_1$. Entonces, para todo subconjunto finito $F \subset A$, $\bigcap_{\xi \in F} V_\xi$ es un subconjunto clopen no-vacío de Ω. Incluso $\tilde{\lambda}(\bigcap_{\xi\in F} V_\xi) > 0$ porque $\tilde{\lambda}$ es una probabilidad estrictamente positiva sobre Ω. Observemos que $\bigcap_{\xi\in F} K_\xi + N_\lambda \in M_\lambda/N_\lambda$ es la clase correspondiente a $\bigcap_{\xi\in F} V_\xi$ en el isomorfismo entre el álgebra cociente M_λ/N_λ y el álgebra de los subconjuntos clopen de Ω. Por tanto $\lambda(\bigcap_{\xi\in F} K_\xi) = \tilde{\lambda}(\bigcap_{\xi\in F} V_\xi) > 0$ para todo subconjunto finito de $F \subset A$. Puesto que los conjuntos K_ξ son compactos, obtenemos $\bigcap_{\xi\in A} K_\xi \neq \emptyset$, una contradicción porque la familia $\{K_\xi : \xi < \omega_1\}$ tiene calibre $\aleph_1$.

(b) Observemos que existe una familia incontable de subconjuntos Borel F_ξ de $[0,1]$ tales que $\lambda(F_\xi) = 0,5$. En consecuencia los correspondientes subconjuntos compactos K_ξ y los clopen V_ξ asociados verifican $0,4 < \lambda(K_\xi) = \tilde{\lambda}(V_\xi) \leq 0,5$. Por tanto $|\{\xi < \omega_1 : \tilde{\lambda}(V_\xi) \leq 0{,}5\}| = \aleph_1$. También, para todo $0 < t < 1$, se tiene que la familia $L_t := \{\xi < \omega_1 : 1 + t < 2\lambda(F_\xi) < 2\}$ es incontable. De aquí que, como $\lambda(K_\xi) = \tilde{\lambda}(V_\xi)$ y para $\xi \in L_t$ los K_ξ se eligen de modo que $\lambda(F_\xi \setminus K_\xi) < 1 - \lambda(F_\xi)$, un pequeño cálculo nos lleva a concluir que para todo $\xi \in L_t$ se verifica que $\tilde{\lambda}(V_\xi) > t$. Y esto completa la prueba del Aserto.

Consideremos $\mathcal{A} = \{A \subset \omega_1 : \bigcap_{\xi\in A} V_\xi \neq \emptyset\} \cup \{\emptyset\}$. Claramente cada elemento de $\mathcal{A}$ es un subconjunto contable de ω_1 y $\mathcal{A}$ es una familia *adecuada* (ver [41, p. 1116]), es decir:

(i) si $B \subset A$ y $A \in \mathcal{A}$, entonces $B \in \mathcal{A}$;

(ii) $A \in \mathcal{A}$ si $A \subset \omega_1$ y $B \in \mathcal{A}$ para todo subconjunto finito $B \subset A$, y

(iii) $\{\xi\} \in \mathcal{A}$ para todo $\xi < \omega_1$.

Como $\mathcal{A}$ es familia adecuada y sus elementos son contables, $K := \{\mathbf{1}_A : A \in \mathcal{A}\}$ es un subconjunto w*-compacto de $\ell_\infty^c(\omega_1)$. De aquí que K es un compacto de Corson (ver [41, p. 1116]) con respecto a la w*-topología $\sigma(\ell_\infty(\omega_1), \ell_1(\omega_1))$. En particular, todo elemento $k \in K \subset \ell_\infty(I)$ (recordemos que $I = \omega_1$) satisface $\check{k}_{\restriction I^{*u}} \equiv 0$, esto es, $K \subset C_0(\beta I, I^{*u})$. Si $x \in \Omega$ y $A_x = \{\xi \in \omega_1 : x \in V_\xi\}$, entonces $A_x \in \mathcal{A}$. Así que podemos definir la aplicación $T : \Omega \to K$ de modo que, para todo $x \in \Omega$, $T(x) = \mathbf{1}_{A_x}$. Se ve fácilmente que T es una aplicación continua. Sea $\mu := T(\tilde{\lambda})$ la imagen de $\tilde{\lambda}$ por T y $z_0 = r(\mu) \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ el baricentro de μ. Si $\xi \in I = \omega_1$ (esto es, $\xi < \omega_1$), definimos $\pi_\xi : \ell_\infty(I) \to \mathbb{R}$ como $\pi_\xi(f) = f(\xi)$, para todo $f \in \ell_\infty(I)$. Observemos que π_ξ es una aplicación lineal w*-continua sobre $\ell_\infty(I)$. Por tanto

$$1 \geq z_0(\xi) = \pi_\xi(z_0) = \pi_\xi(r(\mu)) = \int_K \pi_\xi(k)d\mu(k) = \int_{T(\Omega)} k(\xi)d(T(\tilde{\lambda}))(k) =$$
$$= \int_\Omega \mathbf{1}_{A_x}(\xi)d\tilde{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}(V_\xi) = \lambda(K_\xi) > 0,4.$$

Por el Aserto $|\{\xi < \omega_1 : \tilde{\lambda}(V_\xi) > t\}| = \aleph_1$, para todo $0 < t < 1$, y esto, junto a que $1 \geq z_0(\xi) = \tilde{\lambda}(V_\xi)$, implica que existe un punto $p \in I^{*u}$ tal que $\check{z}_0(p) = 1$ y, por tanto, $1 = d(z_0, \ell_\infty^c(I)) = d(z_0, C_0(\beta I, I^{*u}))$. Por otra parte, $|\{\xi < \omega_1 : \tilde{\lambda}(V_\xi) \leq 0{,}5\}| = \aleph_1$, lo que implica que existe otro punto $q \in I^{*u}$ tal que $\check{z}_0(q) \leq 0{,}5$. En consecuencia

$$d(z_0, C(\beta I, I^{*u})) \geq \tfrac{1}{2}(\check{z}_0(p) - \check{z}_0(q)) \geq \tfrac{1}{2}(1 - 0{,}5) = 0{,}25,$$

y esto completa la prueba. ■

Corolario 6.21. *Si I es un conjunto con $|I| = \aleph_1$, entonces bajo (CH) ningún punto de I^{*u} es punto de control en $\ell_\infty(I)$.*

Demostración. Hacemos uso de la construcción de la precedente Proposición. Observemos que el compacto K verifica $K \subset \ell_\infty^c(I)$ y que el punto $z_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ satisface, sin embargo, $z_0(\xi) > 0,4$ para todo $\xi < \omega_1$, de donde $\check{z}_0(u) \geq 0,4$ para todo $u \in I^{*u}$. Por tanto ningún punto de I^{*u} es punto de control en $\ell_\infty(I)$. ■

Si I es un conjunto infinito vamos a estudiar el control de los subconjuntos y puntos de $I^*(\kappa) = I^* \setminus \bigcup \{\overline{A}^{\beta I} : A \subset I, |A| < \kappa\}$, siendo κ un cardinal infinito. Las construcciones que vamos a efectuar a continuación no tienen requerimientos axiomáticos especiales. En la siguiente proposición mostramos que, si $|I| \geq \kappa$, existe un subconjunto compacto $D \subset I^*(\kappa)$ tal que los subespacios cerrados $C(\beta I, D)$ y $C_0(\beta I, D)$ carecen de control dentro de $\ell_\infty(I)$.

Proposición 6.22. *Si κ es un cardinal infinito e I es un conjunto tal que $|I| \geq \kappa$, existen un subconjunto cerrado $D \subset I^*(\kappa)$ y un subconjunto w^*-compacto $K \subset \ell_\infty(I)$ tales que $K \subset C_0(\beta I, D)$, pero $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) \nsubseteq C(\beta I, D)$. Por tanto $C(\beta I, D)$ y $C_0(\beta I, D)$ carecen de control dentro de $\ell_\infty(I)$.*

Demostración. Bastará probar el enunciado para un conjunto de cardinal infinito κ. Consideremos el espacio compacto $\{0,1\}^\kappa$ y denotemos por λ a la probabilidad de Haar en $\{0,1\}^\kappa$. Sea $\emptyset \neq F \subset \kappa$. Si $\sigma = (\sigma(k))_{k \in \kappa} \in \{0,1\}^\kappa$, ponemos $\sigma_{\restriction F} = (\sigma(k))_{k \in F} \in \{0,1\}^F$. Si $A \subset \{0,1\}^F$, sea $f_A : \{0,1\}^\kappa \to \{0,1\}$ la función

$$\forall \sigma \in \{0,1\}^\kappa, \;\; f_A(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma_{\restriction F} \in A, \\ 0, & \text{si } \sigma_{\restriction F} \notin A. \end{cases}$$

Claramente, si F es finito, f_A es una aplicación continua tal que $0 < \int_{\{0,1\}^\kappa} f_A d\lambda \leq 1$. Decimos que un conjunto no vacío A es *admisible* sii existe un subconjunto finito $\emptyset \neq F \subset \kappa$ con $|F| = n$ tal que $A \subset \{0,1\}^F$ y $|A| = 2^n - n$. Observemos que en estas condiciones $\int_{\{0,1\}^\kappa} f_A d\lambda = 1 - n2^{-n}$. Sean

$$I_+ = \{(f_A, +) : A \text{ admisible}\}, I_- = \{(f_A, -) : A \text{ admisible}\}$$

e $I = I_+ \uplus I_-$, que satisface $|I| = \kappa$. Observemos que:

(1) La familia $\{f_A : A \text{ admisible}\}$ separa puntos en $\{0,1\}^\kappa$.

(2) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$|\{i = (f_A, +) \in I_+ : \int_{\{0,1\}^\kappa} f_A d\lambda \geq 1 - \tfrac{1}{n}\}| = \kappa$$

y

$$|\{i = (f_A, -) \in I_+ : \int_{\{0,1\}^\kappa} f_A d\lambda \geq 1 - \tfrac{1}{n}\}| = \kappa.$$

Para cada $\sigma \in \{0,1\}^\kappa$ y $n \geq 1$ sea

$$\mathcal{O}(\sigma, n) = \{i = (f_A, \pm) \in I : f_A(\sigma) = 0 \text{ y } |A| \geq 2^n - n\}.$$

Observemos que si $(f_A, \pm) \in \mathcal{O}(\sigma, n)$, entonces $|A| = 2^m - m$ con $m \geq n$ por lo que $\int_{\{0,1\}^\kappa} f_A d\lambda = 1 - m2^{-m} \geq 1 - n2^{-n}$.

Aserto 1. $\bigcap\{\overline{\mathcal{O}(\sigma, n)}^{\beta I} : \sigma \in \{0,1\}^\kappa, n \geq 1\} \subset I^*$ y

$$I^*(\kappa) \cap \big(\bigcap\{\overline{\mathcal{O}(\sigma, n)}^{\beta I} : \sigma \in \{0,1\}^\kappa, n \geq 1\}\big) \neq \emptyset.$$

En efecto, para todo $i = (f_A, \pm) \in I$ existe $\sigma \in \{0,1\}^\kappa$ tal que $f_A(\sigma) = 1$, de donde $i \notin \overline{\mathcal{O}(\sigma, n)}^{\beta I}$, $\forall n \geq 1$, y de aquí que $\bigcap\{\overline{\mathcal{O}(\sigma, n)}^{\beta I} : \sigma \in \{0,1\}^\kappa, n \geq 1\} \subset I^*$. Por otra parte, dado un subconjunto finito $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \ldots \sigma^{(p)} \in \{0,1\}^\kappa$ y números naturales $n_1, \cdots, n_p$, es fácil ver que $|\bigcap_{i=1}^p \mathcal{O}(\sigma^{(i)}, n_i)| = \kappa$. De aquí que $I^*(\kappa) \cap \big(\bigcap\{\overline{\mathcal{O}(\sigma, n)}^{\beta I} : \sigma \in \{0,1\}^\kappa, n \geq 1\}\big) \neq \emptyset$.

Sea $D \subset I^*(\kappa)$ el compacto

$$D := I^*(\kappa) \cap \big(\bigcap\{\overline{\mathcal{O}(\sigma, n)}^{\beta I} : \sigma \in \{0,1\}^\kappa, n \geq 1\}\big)$$

y denotemos $D_+ = D \cap \overline{I_+}^{\beta I}$ y $D_- = D \cap \overline{I_-}^{\beta I}$, que son dos compactos no vacíos que verifican $D = D_+ \uplus D_-$. Consideremos la función $\psi : \{0,1\}^\kappa \to \{-1, 0, +1\}^I \subset B(\ell_\infty(I))$ tal que

$$\forall i \in I \ \ \forall \sigma \in \{0,1\}^\kappa, \ \psi(\sigma)(i) = \begin{cases} f_A(\sigma), & \text{si } i = (f_A, +), \\ -f_A(\sigma), & \text{si } i = (f_A, -). \end{cases}$$

Observemos que ψ es una función continua inyectiva, cuando se considera en $\{-1, 0, +1\}^I$ la w*-topología de $\ell_\infty(I)$, que coincide con la topología producto de $\{-1, 0, +1\}^I$. Así que $K := \psi(\{0,1\}^\kappa) \subset \{-1, 0, +1\}^I$ es un espacio compacto homeomorfo a $\{0,1\}^\kappa$ tal que $K \subset C_0(\beta I, D)$. Sea $\mu := \psi(\lambda)$ la probabilidad de Radon en K, imagen de λ por la función continua ψ, y $r(\mu) =: z_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ el baricentro de μ.

Aserto 2. Se tiene que $\check{z}_0(p) = +1$, para todo $p \in D_+$, y $\check{z}_0(p) = -1$, para todo $p \in D_-$.

En efecto, si $p \in D_+$, entonces $p \in \overline{I_+ \cap \mathcal{O}(\sigma, n)}^{\beta I}$ para todo $n \geq 1$ y $\sigma \in \{0,1\}^\kappa$. Por otra parte, para todo $j = (f_A, +) \in \mathcal{O}(\sigma, n)$ se tiene

$$\int_{\{0,1\}^\kappa} f_A d\lambda \geq 1 - n2^{-n},$$

de donde

$$z_0(j) = \pi_j(z_0) = \pi_j(r(\mu)) = \int_K \pi_j(k)d\mu = \int_{\{0,1\}^\kappa} f_A d\lambda \geq 1 - n2^{-n}.$$

Por tanto, $\check{z}_0(p) \geq 1 - n2^{-n}$, $\forall n \geq 1$, es decir, $\check{z}_0(p) = +1$. Análogamente se prueba que $\check{z}_0(p) = -1$, para todo $p \in D_-$. En consecuencia, $K \subset C_0(\beta I, D)$ pero $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) \nsubseteq C(\beta I, D)$.

La construcción que acabamos de efectuar prueba que todos y cada uno de los puntos del conjunto D (así como los subconjuntos D, D^+, D^-) no tienen control en βI. Esto quiere decir que, dado un conjunto infinito I con $|I| \geq \kappa$, los puntos de $I^*(\kappa)$ que no tienen control son densos en $I^*(\kappa)$. ■

Corolario 6.23. *En $\mathbb{N}^*$ son densos los puntos que carecen de control.*

Demostración. Basta aplicar la proposición precedente y que $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}^*(\aleph_0)$. ■

Cuestión. ¿Existe en $\mathbb{N}^*$ algún punto de control? En general, si I es un conjunto infinito y κ un cardinal tal que $|I| \geq \kappa \geq \aleph_0$, ¿existe en $I^*(\kappa)$ algún punto de control?

6.4 Distancias, compacidad y convexidad en $\ell_\infty(I, X)$

En las secciones precedentes hemos analizado el control de $C^*(H)_\varphi$ dentro de $\ell_\infty(I)$, cuando H es un espacio topológico, I un conjunto y $\varphi : I \to H$ una aplicación tal que $\overline{\varphi(I)} = H$. En esta sección en lugar de $\ell_\infty(I)$ consideraremos el espacio $\ell_\infty(I, X)$, siendo X un espacio de Banach. Recordemos que $\ell_\infty(I, X) = \sum_{i \in I} \oplus_\infty X_i$, donde $X_i = X$, $\forall i \in I$, y que si X es un espacio de Banach dual, v.g. $X = Y^*$, entonces $\ell_\infty(I, X) = (\sum_{i \in I} \oplus_1 Y_i)^*$, siendo $Y_i = Y$, $\forall i \in I$. Cuando $X := \ell_\infty(J)$, siendo J un conjunto, entonces $\ell_\infty(I, \ell_\infty(J)) = \ell_\infty(I \times J) = (\ell_1(I \times J))^*$ y la situación es particularmente asequible. Dentro de $\ell_\infty(I, \ell_\infty(J))$ resulta especialmente sencillo el estudio del control del subespacio $C^*(H, (\ell_\infty(J), w^*))_\varphi$ de las funciones $f \circ \varphi : I \to \ell_\infty(J)$, siendo $f : H \to \ell_\infty(J)$ una función acotada y w*-continua. Observemos que una función acotada $f : H \to \ell_\infty(J)$ es w*-continua si y sólo si $\pi_j \circ f : H \to \mathbb{R}$ es continua, $\forall j \in J$, siendo $\pi_j : \ell_\infty(J) \to \mathbb{R}$ la j-ésima proyección. El primer resultado (casi inmediato) que podemos enunciar es el siguiente.

Proposición 6.24. *Las Proposiciones 6.10,6.12 y 6.13 son ciertas si, en lugar del espacio $\ell_\infty(I, \mathbb{R})$, ponemos el espacio $\ell_\infty(I, \ell_\infty(J)) = \ell_\infty(I \times J) = (\ell_1(I \times J))^*$ y, en lugar del subespacio $C^*(H)_\varphi$, se considera el subespacio $C^*(H, (\ell_\infty(J), w^*))_\varphi$.*

Demostración. La prueba de este enunciado se basa en los siguientes hechos elementales. Sean (H, T_H) un espacio topológico, I y J conjuntos y $\varphi : I \to H$ una aplicación tal que $\overline{\varphi(I)} = H$. Sea $\pi_j : \ell_\infty(J) \to \mathbb{R}$, $j \in J$, la proyección j-ésima y $A_j = \pi_j(A)$, para

$A \subset \ell_\infty(J)$. Si $f \in \ell_\infty(I, \ell_\infty(J))$ escribimos $f_j := \pi_j \circ f \in \ell_\infty(I)$, $j \in J$. En estas condiciones se tiene

(1) Si $f \in \ell_\infty(I, \ell_\infty(J))$, entonces $d(f, C^*(H, (\ell_\infty(J), w^*))_\varphi) = \sup_{j\in J} d(f_j, C^*(H, \mathbb{R})_\varphi)$.

(2) Si $A \subset \ell_\infty(I, \ell_\infty(J))$, de (1) se obtiene que

$$\hat{d}(A, C^*(H, (\ell_\infty(J), w^*)_\varphi) = \sup_{j\in J} \hat{d}(A_j, C^*(H, \mathbb{R})_\varphi).$$

Además, $\operatorname{diam}(A) = \sup_{j\in J}\operatorname{diam}(A_j)$.

(3) Si $A \subset \ell_\infty(I, \ell_\infty(J)))$ es un subconjunto acotado (v.g., un subconjunto w*-compacto), entonces $\pi_j(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(A)) = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(A_j)$, $j \in J$. ■

Estudiemos el control dentro de $\ell_\infty(I,X)$, cuando X es un espacio de Banach genérico, del subespacio $C^*(H, (X, \|\cdot\|))_\varphi$ de las funciones $f \circ \varphi : I \to X$, siendo $f : H \to (X, \|\cdot\|)$ una función continua acotada. En $\ell_\infty(I,X)$ vamos a comparar, a la hora de hacer clausuras convexas cerradas, la topología de la norma y la topología τ_{pF} de la convergencia puntual sobre I y la convergencia sobre un cierto subconjunto $F \subset X^*$, elegido como se ve en lo que sigue:

(1) Si X es un espacio de Banach dual, digamos $X = Y^*$, podemos elegir $F = Y$. Entonces τ_{pF} es la topología τ_{pw^*} de la convergencia puntual sobre I y la w*-convergencia en X. De hecho, en este caso $\ell_\infty(I,X) = (\ell_1(I,Y))^*$. Como sobre los acotados de $\ell_\infty(I,X)$ coinciden la topología τ_{pw^*} y la w*-topología, se verifica el teorema de Krein-Šmulian para la topología τ_{pw^*}.

(2) Otra posibilidad es hacer $F = X^*$. En tal caso τ_{pF} es la topología τ_{pw} de la convergencia puntual sobre I y la w-convergencia en X. Es fácil ver que $\ell_\infty(I,X)$ satisface el Teorema de Krein-Šmulian para la topología τ_{pw}.

(3) Si X no posee una copia de $\ell_1(\mathfrak{c})$ y elegimos como F a un subespacio de X^* normante sobre X, entonces el espacio $\ell_\infty(I,X)$ satisface el Teorema de Krein-Šmulian para la topología τ_{pF}. Esto sale fácilmente de la Proposición 2.2 y la Proposición 2.5.

A continuación probamos una proposición análoga a la Proposición 6.10.

Proposición 6.25. *Sean I un conjunto, (H, T_H) un espacio topológico paracompacto con $H \in \mathfrak{F}$, $\varphi : I \to H$ una aplicación tal que $\overline{\varphi(I)} = H$, X un espacio de Banach, $F \subset X^*$ un subespacio 1-normante sobre X y $W \subset B(\ell_\infty(I,X))$ un subconjunto τ_{pF}-compacto. Entonces*

$$\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{\tau_{pF}}(W), C^*(H,X)_\varphi) \leq 2\hat{d}(W, C^*(H,X)_\varphi).$$

Demostración. Comencemos observando que $\overline{\mathrm{co}}^{\tau_{pF}}(W)$ puede no ser τ_{pF}-compacto, aunque esto no tiene transcendencia alguna a la hora de hacer la prueba, como vamos a ver. Si no se verifica el enunciado existirá una función $f_0 \in \overline{\mathrm{co}}^{\tau_{pF}}(W)$ y dos números reales $b > a > 0$ tales que

$$d(f_0, C^*(H,X)_\varphi) > 2b > 2a > 2\hat{d}(W, C^*(H,X)_\varphi).$$

Puesto que H es Hausdorf paracompacto, de Proposición 6.4 obtenemos que $\frac{1}{2}Osc_\varphi(f_0) \leq d(f_0, C^*(H,X)_\varphi) \leq Osc_\varphi(f_0)$. Por tanto, existen $\epsilon > 0$ y un punto $k_0 \in H$ tales que $Osc_\varphi(f_0, k_0) > 2b+\epsilon$. Esto quiere decir que

$$\forall V \in \mathcal{V}^{k_0},\ \exists i_V, j_V \in \varphi^{-1}(V) \text{ tales que } \|f_0(i_V) - f_0(j_V)\| > 2b+\epsilon.$$

Como $H \in \mathfrak{F}$, existen una secuencia $(i_n, j_n)_{n\geq 1} \subset \{(i_V, j_V) : V \in \mathcal{V}^{k_0}\}$ y un punto $h_0 \in H$ tales que $(\varphi(i_n), \varphi(j_n)) \to (h_0, h_0)$ en $H\times H$. Sea $J_F : \ell_\infty(I,X) \to \ell_\infty(I\times B(F))$ el isomorfismo isométrico sobre su imagen tal que

$$\forall f \in \ell_\infty(I,X),\ \forall (i,z) \in I\times B(F),\ J_F(f)(i,z) = \langle z, f(i)\rangle.$$

Observemos que J_F es un τ_{pF}-w*-homeomorfismo sobre los subconjuntos acotados. En particular, $J_F(W)$ es un subconjunto w*-compacto de $B(\ell_\infty(I\times B(F)))$. Como $J_F(f_0) \in \overline{\text{co}}^{w^*}(J_F(W))$, existe una probabilidad de Radon μ sobre $J_F(W)$ tal que $r(\mu) = J_F(f_0)$. Por cada $n \geq 1$ y $z \in B(F)$ definimos las aplicaciones $\eta_{(n,z)}$ y T_n de $\ell_\infty(I\times B(F))$ en $\mathbb{R}$ tales que

$$\forall f \in \ell_\infty(I\times B(F)),\ \eta_{(n,z)}(f) := f(i_n, z) - f(j_n, z),\ T_n(f) := \sup_{z\in B(F)} \eta(n,z)(f).$$

(1) Es claro que $\eta_{(n,z)}$ es una aplicación lineal $\|\cdot\|$-continua y w*-continua sobre $\ell_\infty(I\times B(F))$, mientras que T_n es una aplicación acotada convexa w*-lsc y, por tanto, w*-Borel medible.

(2) Se tiene que

$$T_n(r(\mu)) = \sup_{z\in B(F)} \eta_{(n,z)}(r(\mu)) = \sup_{z\in B(F)} \int_{J_F(W)} \eta_{(n,z)}(f)d\mu \leq$$
$$\leq \int_{J_F(W)} (\sup_{z\in B(F)} \eta_{(n,z)}(f))d\mu = \int_{J_F(W)} T_n(f)d\mu.$$

(3) Observemos que $\forall n \geq 1$ y $\forall f \in \ell_\infty(I,X)$:

$$T_n(J_F(f)) = \sup_{z\in B(F)} \langle z, f(i_n) - f(j_n)\rangle = \|f(i_n) - f(j_n)\|.$$

En particular $T_n(r(\mu)) = T_n(J_F(f_0)) = \|f_0(i_n) - f_0(j_n)\| > 2b+\epsilon,\ \forall n \geq 1$.

Sea $A_n := \{f \in J_F(W) : T_n(f) > 2b + \frac{\epsilon}{2}\},\ n \geq 1$, que es un subconjunto w*-abierto de $J_F(W)$.

<u>Aserto.</u> $\mu(A_n) \geq \frac{\epsilon}{4},\ \forall n \geq 1$.

En efecto, para todo $n \geq 1$ tenemos que

$$2b+\epsilon < T_n(r(\mu)) \leq \int_{J_F(W)} T_n(f)\cdot d\mu =$$
$$= \int_{A_n} T_n(f)\cdot d\mu + \int_{J_F(W)\setminus A_n} T_n(f)\cdot d\mu \leq 2\mu(A_n) + (2b+\tfrac{\epsilon}{2}),$$

de donde obtenemos $\mu(A_n) \geq \frac{\epsilon}{4}$, $\forall n \geq 1$.

Por el Lema 1.1 existe una subsucesión $\{n_r : r \geq 1\} \subset \mathbb{N}$ tal que existe un elemento $\tilde{g} \in \bigcap_{r\geq 1} A_{n_r} \subset J_F(W)$. Por tanto, si $g \in W$ es tal que $J_F(g) = \tilde{g}$, entonces

$$\|g(i_{n_r}) - g(j_{n_r})\| = T_{n_r}(J_F(g)) > 2b + \tfrac{\epsilon}{2},\ \forall r \geq 1,$$

lo que implica que $Osc_\varphi(g) \geq Osc_\varphi(g, h_0) \geq 2b + \frac{\epsilon}{2}$. Por Proposición 6.4 sabemos que $Osc_\varphi(g) \leq 2d(g, C^*(H,X)_\varphi)$. En consecuencia $d(g, C^*(H,X)_\varphi) \geq b > a$, lo que no puede ser pues $g \in W$ y $\hat{d}(W, C^*(H,X)_\varphi) < a$. ■

El espacio $\ell_\infty(I,X)$ puede sumergirse isomórfica e isométricamente en el espacio $\ell_\infty(I \times B(X^*))$ mediante el isomorfismo $j : \ell_\infty(I,X) \to \ell_\infty(I \times B(X^*))$ tal que $j(f)(i,x^*) = \langle x^*, f(i)\rangle$, para todo $f \in \ell_\infty(I,X)$ y todo $(i,x^*) \in I \times B(X^*)$. Observemos que $j(C^*(H,X)_\varphi) \subset C^*(H \times B(X^*))_\psi$, siendo $\psi : I \times B(X^*) \to H \times B(X^*)$ tal que $\psi(i,x^*) = (\varphi(i), x^*)$. Para obtener un resultado análogo a la Proposición 6.12 necesitamos probar el lema siguiente.

Lema 6.26. *Sean I un conjunto, (H,T_H) un espacio topológico, $\varphi : I \to H$ una aplicación tal que $\overline{\varphi(I)} = H$, X un espacio de Banach, $\psi : I \times B(X^*) \to H \times B(X^*)$ tal que $\psi(i,x^*) = (\varphi(i),x^*)$, $\forall (i,x^*) \in I \times B(X^*)$, y $j : \ell_\infty(I,X) \to \ell_\infty(I \times B(X^*))$ la inclusión canónica tal que $j(f)(i,x^*) = \langle x^*, f(i)\rangle$, para todo $f \in \ell_\infty(I,X)$ y todo $(i,x^*) \in I \times B(X^*)$. Si $f \in \ell_\infty(I,X)$, entonces*

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}Osc_\varphi(f) \leq \tfrac{1}{2}Osc_\psi(j(f)) \leq d(j(f), C^*(H \times B(X^*))_\psi) \leq \\ \leq d(j(f), j(C^*(H,X)_\varphi)) = d(f, C^*(H,X)_\varphi).\end{aligned}$$

Demostración. Ya sabemos (ver Proposición 6.4) que $\frac{1}{2}Osc_\psi(j(f)) \leq d(j(f), C^*(H \times B(X^*))_\psi)$. La desigualdad $d(j(f), C^*(H \times B(X^*))_\psi) \leq d(j(f), j(C^*(H,X)_\varphi))$ es inmediata pues $j(C^*(H,X)_\varphi)$ es subespacio de $C^*(H \times B(X^*))_\psi$. La igualdad

$$d(j(f), j(C^*(H,X)_\varphi)) = d(f, C^*(H,X)_\varphi)$$

es obvia porque j es un isomorfismo isométrico.

Probemos que $Osc_\varphi(f) \leq Osc_\psi(j(f))$. Si $Osc_\varphi(f) = 0$, hemos terminado. Supongamos que $Osc_\varphi(f) > b > 0$. Entonces existe $p \in H$ tal que $Osc_\varphi(f,p) > b$, de donde obtenemos que $\mathrm{diam}(f(\varphi^{-1}(V))) > b$ para todo $V \in \mathcal{V}^p$. Así que para todo $V \in \mathcal{V}^p$ existe $x_V^* \in B(X^*)$ de modo que $\mathrm{diam}\langle x_V^*, f(\varphi^{-1}(V))\rangle > b$. Puesto que $\{x_V^* : V \in \mathcal{V}^p\}$ es una red de $B(X^*)$, que es w*-compacto, existen $x_0^* \in B(X^*)$ y una cierta subred $\{x_\beta^* : \beta \in \mathcal{B}\}$ de $\{x_V^* : V \in \mathcal{V}^p\}$ tales que $x_\beta^* \xrightarrow{w^*} x_0^*$.

Aserto. Para todo $V_0 \in \mathcal{V}^p$ y todo $W_0 \in \mathcal{V}^{x_0^*}$ (es decir, W_0 es entorno w*-abierto de x_0^* en $B(X^*)$) se verifica $\mathrm{diam}\langle W_0, f(\varphi^{-1}(V_0))\rangle > b$.

En efecto, como $x_\beta^* \xrightarrow{w^*} x_0^* \in W_0$, existe $\beta_1 \in \mathcal{B}$ tal que si $\beta \in \mathcal{B}$ y $\beta \geq \beta_1$, se verifica que $x_\beta^* \in W_0$. Sea $x_{\beta_1}^* = x_{V_1}^*$ con $V_1 \in \mathcal{V}^p$ y $U := V_1 \cap V_0$, que verifica $U \in \mathcal{V}^p$. Puesto que $\{x^*_\beta : \beta \in \mathcal{B}\}$ es una subred de $\{x^*_V : V \in \mathcal{V}^p\}$, podemos hallar $\beta_2 \in \mathcal{B}, \beta_2 \geq \beta_1$, tal que si $x^*_{\beta_2} = x^*_{V_2}$, entonces $V_2 \in \mathcal{V}^p$ y $V_2 \subset U$. Por tanto se verifica

$$\operatorname{diam}\langle W_0, f(\varphi^{-1}(V_0))\rangle \geq \operatorname{diam}\langle x^*_{V_2}, f(\varphi^{-1}(V_2))\rangle > b.$$

Así que hemos probado que existe un punto $(p, x^*_0) \in H \times B(X^*)$ tal que para todo entorno abierto $G_0 = V_0 \times W_0$ de (p, x^*_0) se verifica que $\operatorname{diam}(j(f)(\psi^{-1}(G_0)) = \operatorname{diam}\langle W_0, f(\varphi^{-1}(V_0))\rangle > b$, es decir, $Osc_\psi(j(f),(p,x^*_0)) \geq b$. Por tanto $Osc_\varphi(f) \leq Osc_\psi(j(f))$. ■

Proposición 6.27. *Sean I un conjunto, (H, T_H) un espacio topológico Hausdorf compacto, $\varphi : I \to H$ una aplicación tal que $\varphi(I) = H$, X un espacio de Banach, $F = X^*$ y $W \subset B(\ell_\infty(I,X))$ un subconjunto acotado τ_{pF}-compacto. Entonces*

$$\hat{d}(\overline{\text{co}}^{\tau_{pF}}(W), C(H,X)_\varphi) \leq 10\hat{d}(W, C(H,X)_\varphi).$$

Además, si $W \cap C(H,X)_\varphi$ es τ_{pF}-denso en W, entonces

$$\hat{d}(\overline{\text{co}}^{\tau_{pF}}(W), C(H,X)_\varphi) \leq 4\hat{d}(W, C(H,X)_\varphi).$$

Demostración. Adoptamos la notación del Lema 6.26 y consideramos el isomorfismo isométrico $j : \ell_\infty(I,X) \to \ell_\infty(I \times B(X^*))$ tal que $j(f)(i,x^*) = \langle x^*, j(i)\rangle, \forall f \in \ell_\infty(I,X)$ y $\forall (i,x^*) \in I \times B(X^*)$. Observemos que sobre los subconjuntos acotados j es un homeomorfismo, cuando en $\ell_\infty(I,X)$ se considera la τ_{pX^*}-topología y en $\ell_\infty(I \times B(X^*))$ la w*-topología. Por tanto $j(W)$ es un subconjunto w*-compacto de $B(\ell_\infty(I \times B(X^*)))$. Teniendo en cuenta que $H \times B(X^*)$ es Hausdorf compacto, de Proposición 6.12 y Proposición 6.13 concluimos que

$$\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(j(W)), C(H \times B(X^*))_\psi) \leq 5\hat{d}(j(W), C(H \times B(X^*))_\psi),$$

y, si $j(W) \cap C(H \times B(X^*))_\psi$ es w^*-denso en $j(W)$, entonces

$$\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(j(W)), C(H \times B(X^*))_\psi) \leq 2\hat{d}(j(W), C(H \times B(X^*))_\psi).$$

Ahora basta aplicar el Lema 6.26 y la Proposición 6.4. ■

Capítulo 7

Funciones 1-Baire y distancias

Sea $B_{1b}(X)$ el espacio de las funciones reales acotadas $f : X \to \mathbb{R}$ de la primera clase de Baire sobre un espacio topológico (X, T_X) y consideremos a $B_{1b}(X)$ canónicamente sumergido en $\ell_\infty(X)$. En [6] se prueba que si X es un espacio métrico completo y K un subconjunto w*-compacto de $\ell_\infty(X)$ tal que $K \subset B_{1b}(X)$, entonces $\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K) \subset B_{1b}(X)$. Por tanto el subespacio $B_{1b}(X)$ es un buen candidato a disfrutar de control dentro de $\ell_\infty(X)$. En este Capítulo caracterizamos la distancia $d(f, B_{1b}(X)),\ f \in \ell_\infty(X)$, mediante un adecuado índice de fragmentación y, usando las técnicas de [6], probamos que $B_{1b}(X)$ tiene 2-control en $\ell_\infty(X)$.

Sean (X, τ) un espacio topológico, I un conjunto, $\varphi : I \to X$ una función tal que $\overline{\varphi(I)} = X$, $f : I \to \mathbb{R}$ una función real y $\epsilon \geq 0$. Decimos que (I, X, τ) está *ϵ-fragmentado* por f si para todo $\eta > \epsilon$ y todo subconjunto cerrado no vacío $F \subset X$ existe un abierto $V \subset X$ tal que $V \cap F \neq \emptyset$ y $\mathrm{diam}(f(\varphi^{-1}(V \cap F))) \leq \eta$, en el entendimiento de que $\mathrm{diam}(\emptyset) = 0$. Definimos el *índice de fragmentación* $Frag(f, I, X)$ de f con respecto a (I, X, τ) como

$$Frag(f, I, X) = \inf\{\epsilon \geq 0 : (I, X, \tau) \text{ está } \epsilon\text{-fragmentado por } f\}.$$

Denotemos por

$$B_1^{(\epsilon)}(I, X) := \{f : I \to \mathbb{R} : Frag(f, I, X) \leq \epsilon\} \text{ y } B_{1b}^{(\epsilon)}(I, X) := B_1^{(\epsilon)}(I, X) \cap \ell_\infty(I).$$

Cuando $I = X$ y φ es la identidad escribimos simplemente $B_1^{(\epsilon)}(X)$ y $B_{1b}^{(\epsilon)}(X)$. Observemos que

(a) Si $\epsilon_1, \epsilon_2 \geq 0$, entonces $B_1^{(\epsilon_1)}(I, X) + B_1^{(\epsilon_2)}(I, X) \subset B_1^{(\epsilon_1+\epsilon_2)}(I, X)$.

(b) Para todo $\lambda > 0$ y $\epsilon \geq 0$ se tiene $\lambda B_1^{(\epsilon)}(I, X) = B_1^{(\lambda\epsilon)}(I, X)$. Por tanto $B_1^{(\epsilon)}(I, X)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^I$ convexo y simétrico respecto del 0. En particular, $B_1^{(0)}(I, X)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^I$.

(c) $B_1^{(\epsilon)}(I, X)$ es un subconjunto τ_u-cerrado de $\mathbb{R}^I$, siendo τ_u la topología de la convergencia uniforme sobre I. En efecto, sean $f \in \overline{B_1^{(\epsilon)}(I, X)}^{\tau_u}$, $\epsilon < \eta < \infty$ y $F \subset X$ un subconjunto cerrado no vacío. Queremos ver que existe un subconjunto abierto $V \subset X$ tal que $V \cap F \neq \emptyset$ y $\text{diam}(f(\varphi^{-1}(V \cap F))) \leq \eta$. Sea $g \in B_1^{(\epsilon)}(I, X)$ tal que $\|f - g\|_\infty \leq \frac{\eta - \epsilon}{4}$. Puesto que $g \in B_1^{(\epsilon)}(I, X)$, existe un subconjunto abierto $V \subset X$ con $V \cap F \neq \emptyset$ y $\text{diam}(g(\varphi^{-1}(V \cap F))) \leq \epsilon + \frac{\eta - \epsilon}{2}$. De aquí que $\text{diam}(f(\varphi^{-1}(V \cap F))) \leq 2\|f - g\|_\infty +$ $\text{diam}(g(\varphi^{-1}(V \cap F))) \leq \eta$.

Un espacio topológico (X, τ) es *hereditariamente Baire* si todo subconjunto cerrado de X es Baire en su topología relativa. Denotemos por $B_1(X) \subset \mathbb{R}^X$ *al espacio de las funciones reales de clase Baire 1* sobre un cierto espacio topológico (X, τ), esto es, $B_1(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f^{-1}(T_\mathbb{R}) \subset \Sigma_2^0(X)\}$, donde $\Sigma_2^0(X)$ es la clase de los subconjuntos $\mathcal{F}_\sigma$ de X (ver [33, pg. 190],[6, 1A]) y $T_\mathbb{R}$ es la topología natural de $\mathbb{R}$. Es bien conocido que, si (X, τ) es hereditariamente Baire, entonces $B_1(X) \subset B_1^{(0)}(X)$ y que $B_1(X) = B_1^{(0)}(X)$, si X es un espacio métrico completo [6, 1E, 1C]. Sin embargo, aún cuando X sea un espacio métrico, puede ocurrir que $B_1(X)$ y $B_1^{(0)}(X)$ sean distintos. Veamos un contraejemplo sencillo de este hecho. Sea $X := X_1 \cup X_2$ siendo $X_1 = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ y X_2 un subconjunto contable de irracionales denso en $[0, 1]$. Definamos $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f \restriction X_1 = 0$ y $f \restriction X_2 = 1$. Entonces $f \in B_1(X)$, $f \in B_1^{(1)}(X)$ pero $f \notin B_1^{(\epsilon)}(X)$ para $0 \leq \epsilon < 1$.

Si $f \in \mathbb{R}^I$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, denotamos $\{f \leq \alpha\} = \{i \in I : f(i) \leq \alpha\}$, $\{f \geq \alpha\} = \{i \in I : f(i) \geq \alpha\}$, etc.

Proposición 7.1. *Sean I conjunto, (X, τ) un espacio hereditariamente Baire, $\varphi : I \to X$ aplicación tal que $\overline{\varphi(I)} = X$, $\epsilon \geq 0$ y $f \in \ell_\infty(I)$. Los siguientes asertos son equivalentes*

(1) $f \in B_1^{(\epsilon)}(I, X)$.

(2) Para todo subconjunto cerrado no vacío $F \subset X$ y todo par de números reales $s < t$ tales que $t - s > \epsilon$ se tiene ó bien $\overline{F \cap \varphi(\{f \leq s\})} \neq F$ ó bien $\overline{F \cap \varphi(\{f \geq t\})} \neq F$.

(3) Para todo subconjunto cerrado $F \subset X$ y todo par de números reales $s < t$ tales que $t - s > \epsilon$ se tiene que $int_F(\overline{F \cap \varphi(\{f \leq s\})}) \cap int_F(\overline{F \cap \varphi(\{f \geq t\})}) = \emptyset$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). En otro caso, para algún subconjunto cerrado no-vacío $F \subset X$ y ciertos números reales $s_0 < t_0$ con $t_0 - s_0 > \epsilon$ se tiene que $\overline{F \cap \varphi(\{f \leq s_0\})} = F = \overline{F \cap \varphi(\{f \geq t_0\})}$. Entonces todo subconjunto abierto $V \subset X$ tal que $V \cap F \neq \emptyset$ satisface $V \cap F \cap \varphi(\{f \leq s_0\}) \neq \emptyset \neq V \cap F \cap \varphi(\{f \geq t_0\})$, de donde $diam(f(\varphi^{-1}(V \cap F))) \geq t_0 - s_0 > \epsilon$, lo que contradice (1).

(2) $\Rightarrow$ (3). En otro caso, para algún subconjunto cerrado no-vacío $F \subset X$ y ciertos números reales $s_0 < t_0$ con $t_0 - s_0 > \epsilon$ se tiene que

$$int_F(\overline{F \cap \varphi(\{f \leq s_0\})}) \cap int_F(\overline{F \cap \varphi(\{f \geq t_0\})}) \neq \emptyset.$$

Si escribimos

$$U = int_F(\overline{F \cap \varphi(\{f \leq s_0\})}) \cap int_F(\overline{F \cap \varphi(\{f \geq t_0\})})$$

y $H = \overline{U}$, entonces se tiene $\overline{H \cap \varphi(\{f \leq s_0\})} = H = \overline{H \cap \varphi(\{f \geq t_0\})}$, lo que contradice (2).

(3) $\Rightarrow$ (1). Sean $F \subset X$ un subconjunto cerrado no-vacío de X y $\eta > \epsilon$. Intentamos hallar un abierto $V \subset X$ tal que $V \cap F \neq \emptyset$ y $diam(f(\varphi^{-1}(V \cap F))) \leq \eta$. Si $\overline{F \cap \varphi(I)} \neq F$, existe un abierto V de X tal que $V \cap F = F \setminus \overline{F \cap \varphi(I)} \neq \emptyset$ y $\mathrm{diam}(f(\varphi^{-1}(V \cap F))) = \mathrm{diam}(\emptyset) = 0$.

Supongamos en lo que sigue que $\overline{F \cap \varphi(I)} = F$. Como $f \in \ell_\infty(I)$ existe $0 \leq M < \infty$ tal que $-M < f(i) < M$, $\forall i \in I$. Por cada $t \in \mathbb{R}$ definimos

$$U_t := int_F(F \setminus F \cap \varphi(\{f \geq t\})) = ext_F(F \cap \varphi(\{f \geq t\})) = F \setminus \overline{F \cap \varphi(\{f \geq t\})},$$

y

$$V_t := int_F(F \setminus F \cap \varphi(\{f \leq t\})) = ext_F(F \cap \varphi(\{f \leq t\})) = F \setminus \overline{F \cap \varphi(\{f \leq t\})}.$$

Observemos que $U_s \subset U_t$ y $V_t \subset V_s$ para $s \leq t$. Además $U_M = F = V_{-M}$.

Aserto 1. Se verifica $U_t \cap V_t = \emptyset$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

En efecto

$$\begin{aligned} U_t \cap V_t &= \left[F \setminus \overline{F \cap \varphi(\{f \geq t\})}\right] \cap \left[F \setminus \overline{F \cap \varphi(\{f \leq t\})}\right] = \\ &= F \setminus \left[\overline{F \cap \varphi(\{f \geq t\})} \cup \overline{F \cap \varphi(\{f \leq t\})}\right] = F \setminus F = \emptyset. \end{aligned}$$

Para todo par $s < t$ de números reales sea $G_{st} := U_t \cup V_s$. Es inmediato comprobar que

$$\overline{G_{st}} = F \setminus [int_F(\overline{F \cap \varphi(\{f \leq s\})}) \cap int_F(\overline{F \cap \varphi(\{f \geq t\})})].$$

Por lo tanto, si $t - s > \epsilon$ entonces $\overline{G_{st}} = F$, porque debido a (3) se tiene que

$$int_F(\overline{F \cap \varphi(\{f \leq s\})}) \cap int_F(\overline{F \cap \varphi(\{f \geq t\})}) = \emptyset.$$

Sea $Y = \cap\{G_{st} : s, t \in \mathbb{Q}, s < t, t - s > \epsilon\}$. Entonces Y es denso en F, porque F es Baire. Para $y \in Y$ definimos

$$U(y) := \inf\{t \in \mathbb{R} : y \in U_t\} \text{ y } V(y) := \sup\{s \in \mathbb{R} : y \in V_s\}.$$

Aserto 2. Para todo $y \in Y$, se tiene $-M \leq V(y) \leq U(y) \leq M$ y, además, $U(y) - V(y) \leq \epsilon$.

En efecto, la desigualdad $-M \leq V(y) \leq U(y) \leq M$ sale inmediatamente aplicando Aserto 1, que $U_s \subset U_t$ y $V_t \subset V_s$ para $s \leq t$ y que $U_M = F = V_{-M}$. Probemos que $U(y) - V(y) \leq \epsilon$. Supongamos que $U(y) - V(y) > \epsilon$. Entonces podemos hallar $s, t \in \mathbb{Q}$ tales que $V(y) < s < t < U(y)$ y $t - s > \epsilon$. Como $y \in G_{st} = U_t \cup V_s$ tenemos que ó bien $y \in U_t$ ó bien $y \in V_s$. Sin embargo $y \notin U_t$ (porque $t < U(y)$) e $y \notin V_s$ (porque $V(y) < s$). Por tanto obtenemos una contradicción, que prueba que $U(y) - V(y) \leq \epsilon$.

Cojamos $x \in Y$, arbitrariamente, y $s, t \in \mathbb{Q}$ tales que $s < V(x) \leq U(x) < t$ y $\epsilon < t - s \leq \eta$. Entonces $x \in U_t \cap V_s$ por lo que $U_t \cap V_s$ es un abierto no vacío relativo de F. Sea $V \subset X$ un abierto tal que $V \cap F = U_t \cap V_s$. Afirmamos que $\operatorname{diam}(f(\varphi^{-1}(V \cap F))) \leq \eta$. En efecto, sea $i \in \varphi^{-1}(V \cap F)$. Entonces $\varphi(i) \in U_t = F \setminus \overline{F \cap \varphi(\{f \geq t\})}$, es decir, $f(i) < t$, y, además, $\varphi(i) \in V_s = F \setminus \overline{F \cap \varphi(\{f \leq s\})}$, es decir, $f(i) > s$. En consecuencia, para todo par $i, j \in \varphi^{-1}(V \cap F)$ se verifica $|f(i) - f(j)| < t - s \leq \eta$ y esto prueba que $\operatorname{diam}(f(\varphi^{-1}(V \cap F))) \leq \eta$ y completa la demostración. ■

Proposición 7.2. *Sean (X, d) un espacio métrico completo, I conjunto, $\varphi : I \to X$ aplicación tal que $\overline{\varphi(I)} = X$, $\epsilon \geq 0$ y $f \in \ell_\infty(I)$. Los siguientes asertos son equivalentes:*

(1) $f \in B_1^{(\epsilon)}(I, X)$.

(2) Para todo subconjunto compacto $K \subset X$ tal que $\overline{\varphi(I_K)} = K$, siendo $I_K := \varphi^{-1}(K)$, se tiene que $f_{\restriction I_K} \in B_1^{(\epsilon)}(I_K, K)$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Esto se sigue de la definición del espacio $B_1^{(\epsilon)}(I, X)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que $f \notin B_1^{(\epsilon)}(I, X)$. Por la Proposición 7.1 existen un subconjunto cerrado no vacío $F \subset X$ y dos números reales $s < t$ con $t - s > \epsilon$ tales que

$$\overline{F \cap \varphi(\{f \leq s\})} = F = \overline{F \cap \varphi(\{f \geq t\})}.$$

Vamos a construir una sucesión creciente de subconjuntos finitos $A_n \subset \varphi^{-1}(F) \cap (\{f \leq s\} \cup \{f \geq t\})$ no vacíos tal que: (i) si $i \in A_{n+1}$, existe un punto $j \in A_n$ tal que $d(\varphi(i), \varphi(j)) \leq 2^{-n}$; (ii) si $i \in A_n$, existe un punto $j \in A_{n+1}$ tal que $d(\varphi(i), \varphi(j)) \leq 2^{-n}$ y $|f(i) - f(j)| \geq t - s$. Para construir la secuencia $\{A_n : n \geq 1\}$ usaremos inducción:

Etapa 1. Elegimos $i_1, j_1 \in I$ tales que $\varphi(i_1), \varphi(j_1) \in F$, $f(i_1) \leq s$ y $f(j_1) \geq t$. Sea $A_1 := \{i_1, j_1\}$.

Etapa 2. Supongamos construida la secuencia $\{A_i : i = 1, 2, ..., n\}$ verificando las condiciones requeridas. Para cada $i \in A_n$ elegimos un elemento $z(i) \in I$ de la siguiente forma:

(1) Si $i \in \{f \leq s\} \cap \varphi^{-1}(F)$, cogemos $z(i) \in \{f \geq t\} \cap \varphi^{-1}(F)$ tal que $d(\varphi(i), \varphi(z(i))) \leq 2^{-n}$.

(2) Si $i \in \{f \geq t\} \cap \varphi^{-1}(F)$, elegimos $z(i) \in \{f \leq s\} \cap \varphi^{-1}(F)$ tal que $d(\varphi(i), \varphi(z(i))) \leq 2^{-n}$.

Hacemos $A_{n+1} := A_n \cup \{z(i) : i \in A_n\}$.

A continuación reiteramos infinitas veces. Es fácil ver ahora que, si $K = \overline{\bigcup_{n \geq 1} \varphi(A_n)}$, entonces K es totalmente acotado y por tanto compacto (porque (X, d) es completo). Además $\overline{\varphi(I_K)} = K$ y $\overline{K \cap \varphi(\{f \leq s\})} = K = \overline{K \cap \varphi(\{f \geq t\})}$, de modo que $f_{\restriction I_K} \notin B_1^{(\epsilon)}(I_K, K)$, lo que contradice a (2). ■

Si $f, g \in \mathbb{R}^I$ y $A \subset \mathbb{R}^I$ ponemos $\|f-g\|_\infty := \sup\{|f(i)-g(i)| : i \in I\}$ y $d(f,A) := \sup\{\|f-a\|_\infty : a \in A\}$ (ambos supremos pueden ser $+\infty$).

Proposición 7.3. *Sean (X, T_X) un espacio topológico, I conjunto, $\varphi : I \to X$ aplicación tal que $\overline{\varphi(I)} = X$, $0 \le \epsilon < \infty$ y $f \in \mathbb{R}^I$. Entonces*

$$d(f, B_1^{(\epsilon)}(I,X)) = \sup\{\tfrac{1}{2}(Frag(f,I,X) - \epsilon), 0\}.$$

En particular, si $f \in \ell_\infty(I)$, entonces $d(f, B_{1b}^{(\epsilon)}(I,X)) = \sup\{\frac{1}{2}(Frag(f,I,X)-\epsilon), 0\}$, y si $\epsilon = 0$ se tiene $d(f, B_{1b}^{(0)}(I,X)) = \frac{1}{2}Frag(f,I,X)$.

Demostración. (A) Probemos, en primer lugar, que

$$d(f, B_1^{(\epsilon)}(I,X)) \ge \sup\{\tfrac{1}{2}(Frag(f,I,X) - \epsilon), 0\}.$$

Bastará comprobar que $\frac{1}{2}(Frag(f,I,X) - \epsilon) \le d(f, B_1^{(\epsilon)}(I,X))$. Comencemos viendo el siguiente aserto.

Aserto 1. Para todo $g \in B_1^{(\epsilon)}(I,X)$ se verifica $\frac{1}{2}(Frag(f,I,X)-\epsilon) \le \|f-g\|_\infty$.

En efecto, si $\|f-g\|_\infty = \infty$, el Aserto es trivialmente cierto. Supongamos que $\|f-g\|_\infty < \infty$ y cojamos $\eta > 0$ tal que $\epsilon < \eta < \infty$. Puesto que $g \in B_1^{(\epsilon)}(I,X)$, para todo cerrado $F \subset X$ no vacío existe un abierto $V \subset X$ tal que $V \cap F \neq \emptyset$ y $\mathrm{diam}(g(\varphi^{-1}(V \cap F))) \le \eta$ ($\mathrm{diam}(\emptyset) = 0$). De aquí que $\mathrm{diam}(f(\varphi^{-1}(V \cap F))) \le 2\|f-g\|_\infty + \eta$ y también $Frag(f,I,X) \le 2\|f-g\|_\infty + \epsilon$, es decir, $\frac{1}{2}(Frag(f,I,X)-\epsilon) \le \|f-g\|_\infty$.

En consecuencia

$$\tfrac{1}{2}(Frag(f,I,X) - \epsilon) \le \inf\{\|f-g\|_\infty : g \in B_1^{(\epsilon)}(I,X)\} = d(f, B_1^{(\epsilon)}(I,X)).$$

(B) Veamos a continuación que $d(f, B_1^{(\epsilon)}(I,X)) \le \sup\{\frac{1}{2}(Frag(f,I,X)-\epsilon), 0\}$. Si $Frag(f,I,X) = \infty$ ó $0 \le Frag(f,I,X) \le \epsilon$, el resultado es obvio. Supongamos que $\epsilon < Frag(f,I,X) < \infty$. Cojamos $\eta > 0$ tal que $Frag(f,I,X) - \epsilon < \eta$. Como $Frag(f,I,X) < \eta + \epsilon$, existen un ordinal ξ y una familia de abiertos $\{U_\alpha : \alpha < \xi\}$ de X tales que:

(i) $U_\alpha \subset U_\beta$, para $\alpha \le \beta < \xi$, y $X = \bigcup_{\alpha<\xi} U_\alpha$.

(ii) Para todo $\beta < \xi$ se tiene que $\emptyset \neq G_\beta := U_\beta \setminus \bigcup_{\alpha<\beta} U_\beta$ y $\mathrm{diam}(f(\varphi^{-1}(G_\beta))) < \eta + \epsilon$.

Sean $s_\beta := \sup f(\varphi^{-1}(G_\beta))$ y $l_\beta := \inf f(\varphi^{-1}(G_\beta))$ para $\beta < \xi$ (si $\varphi^{-1}(G_\beta) = \emptyset$ no elegimos nada). Aprovechando que $X = \biguplus_{\beta<\xi} G_\beta$, definimos $g : I \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$\forall \beta < \xi,\ \forall i \in \varphi^{-1}(G_\beta) \neq \emptyset,\ g(i) = \left[f(i) \wedge (s_\beta - \tfrac{\eta}{2})\right] \vee \left[l_\beta + \tfrac{\eta}{2}\right].$$

Se comprueba fácilmente que $\|f-g\|_\infty \le \frac{\eta}{2}$. Además tenemos el siguiente aserto.

Aserto 2. $g \in B_1^{(\epsilon)}(I,X)$.

En efecto, por construcción de g necesariamente $\text{diam}(g(\varphi^{-1}(G_\beta))) \leq \epsilon$, $\forall \beta < \xi$. Sea $F \subset X$ un subconjunto cerrado no vacío y definamos

$$\beta_0 = \text{ primer elemento de } \{\beta < \xi : U_\beta \cap F \neq \emptyset\}.$$

Entonces $\emptyset \neq U_{\beta_0} \cap F \subset G_{\beta_0}$ por lo que $\text{diam}(g(\varphi^{-1}(U_{\beta_0} \cap F))) \leq \epsilon$ y esto prueba que $g \in B_1^{(\epsilon)}(I, X)$.

Por tanto $d(f, B_1^{(\epsilon)}(I, X)) \leq \frac{\eta}{2}$ y de aquí $d(f, B_1^{(\epsilon)}(I, X)) \leq \frac{1}{2}(Frag(f, I, X) - \epsilon)$. ■

Lema 7.4. *Sean (A, Σ, μ) un espacio de probabilidad completo, $\epsilon \geq 0$, (X, d) un espacio métrico completo, I conjunto, $\varphi : I \to X$ aplicación inyectiva tal que $\overline{\varphi(I)} = X$ y $f : A \times I \to \mathbb{R}$ una función acotada tal que:*

(1) Para todo $i \in I$, la aplicación $A \ni a \to f(a, i) \in \mathbb{R}$ es Σ-medible.

(2) Para todo $a \in A$, la aplicación $I \ni i \to f(a, i) \in \mathbb{R}$ pertenece al espacio $B_1^{(\epsilon)}(I, X)$.

Entonces, si $z(i) = \int_A f(a, i) d\mu(a)$, $\forall i \in I$, tenemos que $z \in B_1^{(2\epsilon)}(I, X)$.

Demostración. Por la Proposición 7.2 basta probar que si $K \subset X$ es un subconjunto compacto tal que $\overline{\varphi(I_K)} = K$, siendo $I_K = \varphi^{-1}(K)$, entonces $z_{\restriction I_K} \in B_1^{(2\epsilon)}(I_K, K)$. Por tanto, sin pérdida de generalidad, suponemos que X es compacto y, fijado un número $+\infty > \eta_0 > \epsilon$, tenemos que encontrar un abierto $V \subset X$ tal que $V \neq \emptyset$ y $diam(z(\varphi^{-1}(V))) \leq 2\eta_0$. Puesto que f es acotada, sumando una constante si es necesario, podemos suponer que $0 \leq f \leq M < \infty$ para algún $M < \infty$. Para $\alpha \in A$, $j \in I$ y $s \in \mathbb{R}$ denotamos

$$\{f(\alpha, \cdot) \leq s\} := \{i \in I : f(\alpha, i) \leq s\},$$
$$\{f(\cdot, j) \geq s\} := \{a \in A : f(a, j) \geq s\}, \quad \text{etc.}$$

Sean $\epsilon < \eta < \eta_0$, $m = [\frac{M}{\eta}]$ (donde $[s]$ indica la parte entera de $s \in \mathbb{R}$) y cojamos $\delta > 0$ tal que $2\eta + m\eta\delta \leq 2\eta_0$. Puesto que $f(a, \cdot) \in B_{1b}^{(\epsilon)}(I, X)$ para todo $a \in A$, se tiene por Proposición 7.1 que para todo subconjunto cerrado no vacío $F \subset X$ y para $r = 0, 1, \cdots, m$, ó bien $\overline{F \cap \varphi(\{f(a, \cdot) \leq r\eta\})} \neq F$ ó bien $\overline{F \cap \varphi(\{f(a, \cdot) \geq (r+1)\eta\})} \neq F$.

A continuación aplicamos el siguiente resultado de [6, 5C. Lemma]:

"*Sean (A, Σ, μ) un espacio de probabilidad completo y (X, ρ) un espacio métrico compacto. Sean S y T be dos subconjuntos de $A \times X$ tales que: (i) $\{a \in A : (a, x) \in S\}$ y $\{a \in A : (a, x) \in T\}$ pertenecen a Σ para todo $x \in X$; (ii) para todo $a \in A$ y todo subconjunto cerrado $F \subset X$, ó bien $\overline{F \cap \{x \in X : (a, x) \in S\}} \neq F$ ó bien $\overline{F \cap \{x \in X : (a, x) \in T\}} \neq F$. Entonces para todo $d > 0$ y para todo abierto no-vacío $U \subset X$, existe otro abierto no-vacío $V \subset U$ tal que*

$$\mu(\{a \in A : (a, x) \in S\}) + \mu(\{a \in A : (a, y) \in T\}) \leq 1 + 3d, \ \forall x, y \in V."$$

Usamos este resultado e inducción en varias etapas, haciendo $\delta = 3d$, a saber:

Etapa 1. Hacemos $U = X$, $S = \{(a, \varphi(i)) : a \in A, i \in I, f(a,i) \leq 0\}$ y $T = \{(a, \varphi(i)) : a \in A, i \in I, f(a,i) \geq \eta\}$. Por el resultado anterior existe un subconjunto abierto no vacío $V_1 \subset X$ tal que para todo $i, j \in \varphi^{-1}(V_1)$ se verifica

$$\begin{aligned} &\mu(\{f(\cdot,i) \leq 0\}) + \mu(\{f(\cdot,j) \geq \eta\}) = \\ = &\mu(\{a \in A : (a,\varphi(i)) \in S\}) + \mu(\{a \in A : (a,\varphi(j)) \in T\}) \leq 1 + \delta. \end{aligned}$$

Etapa 2. Hacemos $U = V_1$, $S = \{(a, \varphi(i)) : a \in A, i \in I, f(a,i) \leq \eta\}$ y $T = \{(a, \varphi(i)) : a \in A, i \in I, f(a,i) \geq 2\eta\}$. Por el resultado anterior existe un subconjunto abierto no vacío $V_2 \subset V_1$ tal que para todo $i, j \in \varphi^{-1}(V_2)$ se verifica

$$\begin{aligned} &\mu(\{f(\cdot,i) \leq \eta\}) + \mu(\{f(\cdot,j) \geq 2\eta\}) = \\ = &\mu(\{a \in A : (a,\varphi(i)) \in S\}) + \mu(\{a \in A : (a,\varphi(j)) \in T\}) \leq 1 + \delta. \end{aligned}$$

El proceso se repite hasta la etapa m. Obtenemos subconjuntos abiertos no vacíos

$$V_m \subset V_{m-1} \subset \cdots V_{r+1} \subset V_r \subset \cdots \subset V_1 \subset X,$$

tales que para $r = 0, 1, \cdots, m-1$ y para todo $i, j \in \varphi^{-1}(V_{r+1})$ se verifica

$$\mu(\{f(\cdot,i) \leq r\eta\}) + \mu(\{f(\cdot,j) \geq (r+1)\eta\}) \leq 1 + \delta.$$

Sean $V = V_m$ e $i, j \in \varphi^{-1}(V)$. Entonces

$$\begin{aligned} z(i) = \int_A f(a,i)d\mu(a) &\leq \sum_{r=0}^{m} \eta \cdot \mu(\{f(\cdot,i) > r\eta\}) \leq \\ &\leq \eta + \sum_{r=0}^{m-1} \eta \cdot \mu(\{f(\cdot,i) \geq (r+1)\eta\}), \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} z(j) = \int_A f(a,j)d\mu(a) &\geq \sum_{r=1}^{m} \eta \cdot \mu(\{f(\cdot,j) \geq r\eta\}) \geq \\ \geq \sum_{r=1}^{m} \eta \cdot \mu(\{f(\cdot,j) > r\eta\}) &= \sum_{r=1}^{m} \eta[1 - \mu(\{f(\cdot,j) \leq r\eta\})] \geq \\ &\geq \sum_{r=1}^{m} \eta\big[\mu(\{f(\cdot,i) \geq (r+1)\eta\}) - \delta\big] = \\ &= \sum_{r=1}^{m-1} \eta \cdot \mu(\{f(\cdot,i) \geq (r+1)\eta\}) - m\eta\delta, \end{aligned}$$

porque $\{f(\cdot,i) \geq (m+1)\eta\} = \emptyset$. Así que

$$z(i) - z(j) \leq \eta + \eta \cdot \mu(\{f(\cdot,i) \geq \eta\}) + m\eta\delta \leq 2\eta + m\eta\delta \leq 2\eta_0.$$

De aquí que $diam(z(\varphi^{-1}(V))) \leq 2\eta_0$ y por tanto $z \in B_1^{(2\epsilon)}(I,X)$. ■

Proposición 7.5. *Sean (X,d) un espacio métrico completo, I un conjunto, $\varphi : I \to X$ aplicación inyectiva tal que $\overline{\varphi(I)} = X$, $0 \leq \epsilon < \infty$ y $K \subset \ell_\infty(I)$ un subconjunto w^*-compacto. Entonces:*

(1) Si $K \subset B_{1b}^{(\epsilon)}(I,X)$ para algún $\epsilon \geq 0$, se tiene que $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) \subset B_{1b}^{(2\epsilon)}(I,X)$.

(2) En general se tiene:

$$\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), B_{1b}^{(\epsilon)}(I,X)) \leq 2\hat{d}(K, B_{1b}^{(\epsilon)}(I,X)) + \tfrac{\epsilon}{2}.$$

(3) $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), B_{1b}^{(0)}(I,X)) \leq 2\hat{d}(K, B_{1b}^{(0)}(I,X))$. En particular, si $K \subset B_{1b}^{(0)}(I,X)$, entonces $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) \subset B_{1b}^{(0)}(I,X)$.

Demostración. (1) Sea $z \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$. Como K es un subconjunto w*-compacto de $\ell_\infty(I)$, existe una probabilidad de Radon μ sobre K tal que $z = r(\mu)$, es decir, z es el baricentro de μ. Consideremos la función $f : K \times I \to \mathbb{R}$ dada por $f(a,i) = a(i)$, para todo $a \in K$ e $i \in I$, que satisface las condiciones del Lema 7.4. Para todo $i \in I$ se verifica que

$$z(i) = \pi_i(z) = \pi_i(r(\mu)) = \int_K \pi_i(a)d\mu(a) = \int_K a(i)d\mu(a) = \int_K f(a,i)d\mu(a).$$

Por Lema 7.4 se tiene que $z \in B_{1b}^{(2\epsilon)}(I,X)$.

(2) Sea $\eta := \sup\{Frag(a,I,X) : a \in K\}$. Distinguimos dos casos, a saber:

Caso 1: $\eta \leq \epsilon$**.** Ahora $K \subset B_{1b}^{(\epsilon)}(I,X)$, es decir, $\hat{d}(K, B_{1b}^{(\epsilon)}(I,X)) = 0$, y además $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) \subset B_{1b}^{(2\epsilon)}(I,X)$ por (1). Finalmente aplicamos que toda función $g \in B_{1b}^{(2\epsilon)}(I,X)$ verifica $d(g, B_{1b}^{(\epsilon)}(I,X)) \leq \frac{1}{2}\epsilon$ por Proposición 7.3.

Caso 2: $\eta > \epsilon$**.** Por Proposición 7.3 se verifica $\hat{d}(K, B_{1b}^{(\epsilon)}(I,X)) = \frac{1}{2}(\eta - \epsilon)$. Por (1) se tiene que $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) \subset B_{1b}^{(2\eta)}(I,X)$ y de Proposición 7.3 obtenemos

$$\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), B_{1b}^{(\epsilon)}(I,X)) \leq \tfrac{1}{2}(2\eta - \epsilon) = 2\tfrac{1}{2}(\eta - \epsilon) + \tfrac{\epsilon}{2} = 2\hat{d}(K, B_{1b}^{(\epsilon)}(I,X)) + \tfrac{\epsilon}{2}.$$

(3) Basta aplicar (2) con $\epsilon = 0$. ■

Corolario 7.6. *Sean (Z,d) un espacio métrico, $0 \leq \epsilon < \infty$ y $K \subset \ell_\infty(Z)$ un subconjunto w^*-compacto. Entonces:*

(1) Si $K \subset B_{1b}^{(\epsilon)}(Z)$ para algún $\epsilon \geq 0$, se tiene que $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) \subset B_{1b}^{(2\epsilon)}(Z)$.

(2) En general se tiene:

$$\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), B_{1b}^{(\epsilon)}(Z)) \leq 2\hat{d}(K, B_{1b}^{(\epsilon)}(Z)) + \tfrac{\epsilon}{2}.$$

(3) $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), B_{1b}^{(0)}(Z)) \leq 2\hat{d}(K, B_{1b}^{(0)}(Z))$. *En particular, si* $K \subset B_{1b}^{(0)}(Z)$*, entonces* $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) \subset B_{1b}^{(0)}(Z)$.

Demostración. Sea (X, d) el espacio métrico completado del espacio (Z, d) dado y, adoptando la notación de la Proposición 7.5, sean $I = Z$ y $\varphi : I \to X$ la inclusión canónica. Se ve sin dificultad que $B_1^{(\epsilon)}(Z) = B_1^{(\epsilon)}(I, X)$ para todo $\epsilon \geq 0$. Ahora basta aplicar la Proposición 7.5. ■

NOTA. En el Lema 7.4 la acotación de la función $f : A \times I \to \mathbb{R}$ es fundamental. Este hecho justifica que en la Proposición 7.5 tengamos que manejar subconjuntos w*-compactos K de $\ell_\infty(I)$, esto es, subconjuntos τ_p-compactos de $\mathbb{R}^I$ (τ_p = topología de la convergencia puntual sobre I) uniformemente acotados. Si K no fuera uniformemente acotado, la Proposición 7.5 podría fallar, como se ve en el siguiente contraejemplo, que aparece en [6, 5G. Example]. Tomemos $I = X = [0, 1]$, $\varphi : I \to X$ la identidad y $K := \{2^{n+1}\mathbf{1}_{\{q_n\}} : n \geq 1\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}^X$, donde $\{q_n : n \geq 1\} = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Claramente, K es un subconjunto τ_p-compacto de $B_1(X)$ no uniformemente acotado y se puede ver fácilmente que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \in \overline{\text{co}}^{\tau_p}(K)$ aunque $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \notin B_1(X)$. De hecho (ver [6, 5H. Proposition]), si X es un espacio polaco y $K \subset \mathbb{R}^X$ un subconjunto τ_p-compacto con $K \subset B_1(X)$, entonces $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) \subset B_2(X)$, donde $B_2(X)$ es el espacio de las funciones $f : X \to \mathbb{R}$ que son τ_p-límites de secuencias extraídas de $B_1(X)$.

Capítulo 8

Miscelánea

8.1 El control en espacios con generador proyectivo

Ya sabemos que todo espacio de Banach X tiene M-control en su bidual X^{**}, para cierta constante M tal que $3 \leq M \leq 5$. Nuestro propósito en esta sección es mostrar que para la clase de espacios de Banach con generador proyectivo la constante M verifica $1 \leq M \leq 3$.

Sea X un espacio de Banach y consideremos el juego con dos jugadores **A** y **B**, cuyas jugadas consisten en elegir subespacios cerrados separables de X de la siguiente manera: (1) primero juega **A** y elige un subespacio cerrado separable F_1 de X; (2) luego juega **B** y elige un nuevo subespacio cerrado separable E_1 tal que $F_1 \subset E_1 \subset X$; (3) vuelve a jugar **A** y elige un subespacio cerrado separable F_2 tal que $F_1 \subset E_1 \subset F_2 \subset X$; etc. Decimos que **B** gana la partida si existe una proyección $P : X \to Y := \overline{\bigcup_{n \geq 1} E_n}$ con $\|P\| = 1$. Decimos que el espacio de Banach X pertenece a la clase $\mathcal{Q}$ (abrev., $X \in \mathcal{Q}$) si el jugador **B** tiene una estrategia ganadora.

Proposición 8.1. *Sea X un espacio de Banach con $X \in \mathcal{Q}$. Entonces para todo subconjunto w^*-compacto $K \subset X^{**}$ se tiene que:*

(A) En general $\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), X) \leq 3\hat{d}(K, X)$.

(B) Si $X \cap K$ es w^*-denso en K, entonces $\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), X) = \hat{d}(K, X)$.

Demostración. (A) En caso contrario, existirán un subconjunto w*-compacto $K \subset B(X^{**})$ y dos números reales $a, b > 0$ tales que

$$\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), X) > b > 3a > 3\hat{d}(K, X).$$

Sea $f = (f_1, f_2, \dots)$ una estrategia ganadora para el jugador **B**. Por el Lema 1.7 se tiene:

Hecho. Existen $\psi \in S(X^{\perp})$ y un subconjunto a w*-compacto $\emptyset \neq H \subset K$ tales que para todo subconjunto w*-abierto V con $V \cap H \neq \emptyset$ existe $\xi \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(V \cap H)$ con $\langle \psi, \xi \rangle > b$.

Etapa 1. Por el Hecho existe $\xi_1 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$ tal que $\psi(\xi_1) > b$. Como $B(X^*)$ es un conjunto w*-denso en $B(X^{***})$, existe $x_1^* \in S(X^*)$ tal que $x_1^*(\xi_1) > b$. Sea $V_1 := \{u \in X^{**} : \langle u, x_1^* \rangle > b\}$, que es un subconjunto w*-abierto de X^{**} que verifica $V_1 \cap \overline{\text{co}}^{w^*}(H) \neq \emptyset$ pues $\xi_1 \in V_1 \cap \overline{\text{co}}^{w^*}(H)$. Por tanto, $V_1 \cap H \neq \emptyset$ y podemos hallar $\eta_1 \in V_1 \cap H$ tal que $x_1^*(\eta_1) > b$. Puesto que $d(\eta_1, X) < a$, podemos hacer la descomposición $\eta_1 = \eta_1^1 + \eta_1^2$ con $\eta_1^1 \in X$ y $\eta_1^2 \in aB(X^{**})$. El jugador **A** empieza la partida eligiendo el subespacio cerrado separable $F_1 = [\{\eta_1^1\}]$ y el jugador **B**, empleando su estrategia f, elige un subespacio cerrado separable $E_1 = f_1(F_1)$ tal que $F_1 \subset E_1$. Sea $\{e_{1n} : n \geq 1\} \subset E_1$ un subconjunto contable que genera E_1.

Etapa 2. Puesto que $V_1 \cap H \neq \emptyset$, por el Hecho existe $\xi_2 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V_1 \cap H)$ tal que $\psi(\xi_2) > b$. Sea $Y_1 = \{\eta_1^1\} \cup \{e_{ij} : i, j \leq 1\} \subset E_1$. Puesto que $\psi(\xi_2) > b$, $\psi \restriction Y_1 = 0$ y $|Y_1| < \aleph_0$, existe un vector $x_2^* \in B(X^*)$ tal que $\langle \xi_2, x_2^* \rangle > b$ y $\langle x_2^*, k \rangle = 0,\ \forall k \in Y_1$. Sea $W_2 := \{u \in X^{**} : \langle u, x_2^* \rangle > b\}$, que es un subconjunto w*-abierto de X^{**} que verifica $W_2 \cap \overline{\text{co}}^{w^*}(V_1 \cap H) \neq \emptyset$ porque $\xi_2 \in W_2 \cap \overline{\text{co}}^{w^*}(V_1 \cap H)$. Por tanto, $W_2 \cap V_1 \cap H \neq \emptyset$. Denotemos $V_2 := W_2 \cap V_1$ y elijamos $\eta_2 \in V_2 \cap H$, que obviamente verifica $x_2^*(\eta_2) > b$ y también $x_1^*(\eta_2) > b$. Puesto que $d(\eta_2, X) < a$, podemos hacer la descomposición $\eta_2 = \eta_2^1 + \eta_2^2$ con $\eta_2^1 \in X$ y $\eta_2^2 \in aB(X^{**})$. A continuación el jugador **A** elige el subespacio cerrado separable $F_2 = [E_1 \cup \{\eta_2^1\}]$ y el jugador **B** responde usando su estrategia f y elige el subespacio cerrado separable $E_2 = f_2(F_1, E_1, F_2)$ tal que $F_2 \subset E_2$. Sea $\{e_{2j} : j \geq 1\} \subset E_2$ un subconjunto contable que genera E_2.

Etapa 3. Puesto que $V_2 \cap H \neq \emptyset$, por el Hecho existe $\xi_3 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(V_2 \cap H)$ tal que $\psi(\xi_3) > b$. Sea $Y_2 = \{\eta_i^1 : i = 1, 2\} \cup \{e_{ij} : i, j \leq 2\} \subset E_2$. Puesto que $\psi(\xi_3) > b$, $\psi \restriction Y_2 = 0$ y $|Y_2| < \aleph_0$, existe un vector $x_3^* \in B(X^*)$ tal que $\langle \xi_3, x_3^* \rangle > b$ y $\langle x_3^*, k \rangle = 0,\ \forall k \in Y_2$. Sea $W_3 := \{u \in X^{**} : \langle u, x_3^* \rangle > b\}$, que es un subconjunto w*-abierto de X^{**} que verifica $W_3 \cap \overline{\text{co}}^{w^*}(V_2 \cap H) \neq \emptyset$ porque $\xi_3 \in W_3 \cap \overline{\text{co}}^{w^*}(V_2 \cap H)$. Por tanto, $W_3 \cap V_2 \cap H \neq \emptyset$. Denotemos $V_3 := W_3 \cap V_2$ y elijamos $\eta_3 \in V_3 \cap H$, que obviamente verifica $x_i^*(\eta_3) > b,\ i = 1, 2, 3$. Puesto que $d(\eta_3, X) < a$, podemos hacer la descomposición $\eta_3 = \eta_3^1 + \eta_3^2$ con $\eta_3^1 \in X$ y $\eta_3^2 \in aB(X^{**})$. A continuación el jugador **A** elige el subespacio cerrado $F_3 = [E_2 \cup \{\eta_3^1\}]$ y contesta el jugador **B** eligiendo un subespacio cerrado separable $E_3 = f_3(F_1, E_1, F_2, E_2, F_3)$ tal que $F_3 \subset E_3$. Sea $\{e_{3j} : j \geq 1\} \subset E_3$ un subconjunto contable que genera E_3.

El proceso se reitera una y otra vez. Sea $Y = \overline{[\bigcup_{k \geq 1} Y_k]} = \overline{\bigcup_{k \geq 1} E_k} = \overline{\bigcup_{k \geq 1} F_k} \subset X$. Puesto que la estrategia f del jugador **B** es ganadora, existe una proyección $P : X \to Y$ con $\|P\| = 1$. Sea $K_0 := \overline{\{\eta_i^1 : i \geq 1\}}^{w^*}$, que es un subconjunto w*-compacto tal que $K_0 \subset (K + aB(X^{**})) \cap Y^{**}$. Entonces $\hat{d}(K_0, X) \leq 2a$.

Aserto 1. $\forall z \in Y^{**}$ se tiene que $d(z, Y) = d(z, X)$ y, por tanto, $\hat{d}(K_0, Y) \leq 2a$.

En efecto, si $z \in Y^{**}$ y $u \in X$, entonces

$$\|z - Pu\| = \|P^{**}(z - u)\| \leq \|z - u\|,$$

de donde obtenemos $d(z, Y) \leq d(z, X)$. Por tanto, como siempre $d(z, Y) \geq d(z, X)$, finalmente obtenemos $d(z, Y) = d(z, X)$ y de aquí que $\hat{d}(K_0, Y) = \hat{d}(K_0, X) \leq 2a$.

Sea η_0 un punto w*-límite de $\{\eta_k\}_{k\geq 1}$ en X^{**}, que verifica $\eta_0 \in H$.

Aserto 2. $d(\eta_0, Y) \leq 3a$.
En efecto, en primer lugar $\eta_0 \in K_0 + aB(X^{**})$. Por otra parte, del Aserto 1 sale que $\hat{d}(K_0, Y) \leq 2a$. De aquí que $d(\eta_0, Y) \leq 3a$.

Aserto 3. $d(\eta_0, Y) \geq b$.

En efecto, sea $\phi \in B(X^{***})$ un punto w*-límite de $\{x_n^*\}_{n\geq 1}$. Puesto que $x_n^*(\eta_k) > b$ si $k \geq n$, se tiene que $x_n^*(\eta_0) \geq b$, $\forall n \geq 1$, de donde $\phi(\eta_0) \geq b$. Aún más, $\phi \in B(Y^{\perp}(X^{***}))$ porque $\langle x_{n+1}^*, k\rangle = 0$, $\forall k \in Y_n$. De aquí que $d(\eta_0, Y) \geq \phi(\eta_0) \geq b$.

Como $b > 3a$ obtenemos una contradicción que completa la prueba.

(B) En caso contrario, existirán un subconjunto w*-compacto $K \subset B(X^{**})$ con $K \cap X$ w*-denso en K y dos números reales $a, b > 0$ tales que

$$\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), X) > b > a > \hat{d}(K, X).$$

A continuación seguimos la argumentación de la parte (A), pero ahora, como $X \cap K$ es w*-denso en K, cogemos η_k en $V_k \cap K \cap X$, de modo que, como $\eta_k \in X$, la descomposición $\eta_k = \eta_k^1 + \eta_k^2$ verifica que $\eta_k^1 = \eta_k$ y $\eta_k^2 = 0$. En consecuencia el punto η_0 w*-límite de la secuencia $\{\eta_k\}_{k\geq 1}$ en X^{**} satisface $\eta_0 \in Y^{**} \cap K$, por lo que $d(\eta_0, Y) = d(\eta_0, X) < a$. Finalmente, $d(\eta_0, Y) \geq b$ por Aserto 3, lo que es una contradicción. ■

¿Qué espacios de Banach pertenecen a la clase $\mathcal{Q}$? Vamos a ver en la siguiente proposición que pertenecen a esta clase todos los espacios con un generador proyectivo. Se dice (ver [32, pg. 42],[19, pg. 106]) que un espacio de Banach V admite un *generador proyectivo* (W, Φ) si W es un subconjunto $W \subset V^*$, que es $\mathbb{Q}$-lineal (es decir, W es un espacio vectorial respecto de $\mathbb{Q}$) y 1-normante sobre V, y Φ es una aplicación $\Phi : W \to 2^V$ tal que $|\Phi(w)| \leq \aleph_0$, $\forall w \in W$, y para todo subconjunto $\mathbb{Q}$-lineal $B \subset W$ se verifica que $\Phi(B)^{\perp} \cap \overline{B}^{w^*} = \{0\}$.

Proposición 8.2. *Si un espacio de Banach V admite un generador proyectivo, entonces $V \in \mathcal{Q}$.*

Demostración. Supongamos pues que (W, Φ) es un generador proyectivo para V. Definimos $\Psi : V \to 2^V$ de modo que $\Psi(v) \subset W \cap B(X^*)$ sea un subconjunto contable verificando $\|v\| = \sup\langle \Psi(v), v\rangle$. Precisamos el siguiente resultado de [19, pg. 104].

Aserto. Sean V un espacio de Banach, W un subconjunto $\mathbb{Q}$-lineal de V^*, $\Phi : W \to 2^V$ y $\Psi : V \to 2^W$ dos aplicaciones tales que $\Phi(w)$ y $\Psi(v)$ son contables para todo $w \in W$ y $v \in V$, y $A \subset V$, $B \subset W$ dos subconjuntos contables. Entonces existen dos subconjuntos contables $\mathbb{Q}$-lineales $\mathfrak{G}(A) \subset V$ y $\mathfrak{G}(B) \subset W$ tales que $A \subset \mathfrak{G}(A)$, $B \subset \mathfrak{G}(B)$, $\Phi(\mathfrak{G}(B)) \subset \mathfrak{G}(A)$ y $\Psi(\mathfrak{G}(A)) \subset \mathfrak{G}(B)$.

Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ nuestros jugadores. Comencemos el juego.

Primera jugada. En primer lugar el jugador **A** elige un subespacio cerrado separable $F_1 \subset V$. Sean $A_1 \subset F_1$ un subconjunto contable denso de F_1 y $B_1 = \Psi(A_1) \subset W$. Por el Aserto existen sendos subconjuntos contables $\mathbb{Q}$-lineales $\mathfrak{G}(A_1)$, $\mathfrak{G}(B_1)$ tales que $A_1 \subset \mathfrak{G}(A_1) \subset V$, $B_1 \subset \mathfrak{G}(B_1) \subset W$, $\Phi(\mathfrak{G}(B_1)) \subset \mathfrak{G}(A_1)$ y $\Psi(\mathfrak{G}(A_1) \subset \mathfrak{G}(B_1)$. A continuación **B** elige un subespacio cerrado separable E_1 cogiendo $E_1 = \overline{\mathfrak{G}(A_1)}$.

Segunda jugada. El jugador **A** elige un nuevo subespacio cerrado separable F_2 tal que $E_1 \subset F_2 \subset V$. Sean A_2 un subconjunto contable denso de F_2 de modo que $\mathfrak{G}(A_1) \subset A_2$ y $B_2 = \Psi(A_2) \cup \mathfrak{G}(B_1)$, que es un subconjunto contable de W. Por el Aserto existen sendos subconjuntos contables $\mathbb{Q}$-lineales $A_2 \subset \mathfrak{G}(A_2) \subset V$ y $B_2 \subset \mathfrak{G}(B_2) \subset W$ tales que $\Phi(\mathfrak{G}(B_2)) \subset \mathfrak{G}(A_2)$ y $\Psi(\mathfrak{G}(A_2)) \subset \mathfrak{G}(B_2)$. A continuación elige **B** un subespacio cerrado separable E_2 cogiendo $E_2 = \overline{\mathfrak{G}(A_2)}$.

La partida prosigue hasta el infinito.

Sean $Y = \overline{\bigcup_{n \geq 1} F_n}$, $A_0 = \bigcup_{n \geq 1} A_n \subset V$ y $B_0 = \bigcup_{n \geq 1} B_n \subset W$, que verifican

(a) A_0 y B_0 son subconjuntos contables $\mathbb{Q}$-lineales.

(b) $Y = \overline{A_0}$.

(c) $\Psi(A_0) \subset B_0$ y $\Phi(B_0) \subset A_0$. Además, puesto que (W, Φ) es un generador proyectivo y $B_0 \subset W$ es un subconjunto $\mathbb{Q}$-lineal, se tiene $A_0^{\perp} \cap \overline{B_0}^{w^*} \subset \Phi(B_0)^{\perp} \cap \overline{B_0}^{w^*} = \{0\}$.

(d) $\forall a \in A_0, \ \|a\| = \sup\langle B_0 \cap B(V^*), a\rangle$.

Por tanto, de [19, Lemma 6.1.1] se sigue que existe una proyección $P : V \to V$ de norma 1 tal que $P(V) = Y$. ■

Si I es un conjunto, se denota por $\Sigma(I)$ al subconjunto de $\mathbb{R}^I$ consistente en los elementos con soporte contable. Al espacio $\mathbb{R}^I$ se le dota de la topología producto, que es la topología de la convergencia sobre I. Si (K, T_K) es un compacto Hausdorff, decimos que un subconjunto A de K es un Σ-subconjunto (ver [32]) de K si existe un homeomorfismo inyectivo $h : K \to \mathbb{R}^I$, para algún conjunto I, tal que $h(A) = h(K) \cap \Sigma(I)$. Se dice que un compacto Hausdorff K es un *compacto de Valdivia* si K tiene algún Σ-subconjunto denso.

Consideremos las siguientes clases de espacios de Banach:

(A) **La clase $\mathcal{A}$.** Un espacio de Banach X pertenece a la clase $\mathcal{A}$ sii existe un compacto de Valdivia K tal que X es (isométricamente isomorfo a) un subespacio de $C(K)$ y además X es τ_A-cerrado en $C(K)$ para algún Σ-subconjunto denso A de K, siendo τ_A la topología de la convergencia sobre A.

(B) **La clase $\mathcal{V}$.** Un espacio de Banach X pertenece a la clase $\mathcal{V}$ sii existen un subespacio 1-normante $F \subset X^*$, un conjunto I y una aplicación continua inyectiva $j : (B_{X^*}, w^*) \to \mathbb{R}^I$ tal que $F \cap B_{X^*} \subset j^{-1}(\Sigma(I))$ (en particular (B_{X^*}, w^*) es compacto de Valdivia).

(C) **Espacios 1-Plichko.** Un espacio de Banach X se dice que es 1-Plichko si X

tiene una base de Markuševič $(e_i, f_i)_{i\in I}$ que es contablemente 1-normante sobre X, es decir, que el subespacio de X^*

$$\{x^* \in X^* : \{i \in I : x^*(e_i) \neq 0\} \text{ es contable}\}$$

es 1-normante sobre X.

Ocurre que estas tres clases de espacios de Banach coinciden entre sí (ver [53],[42],[32]).

Corolario 8.3. *Se tiene que $\mathcal{V} \subset \mathcal{Q}$, es decir, todo espacio de Banach de la clase $\mathcal{V}$ pertenece a la clase $\mathcal{Q}$.*

Demostración. Basta aplicar que todo espacio de Banach de la clase $\mathcal{V}$ tiene un generador proyectivo (ver [42]) y la Proposición 8.2. ■

NOTAS. Como consecuencia del Corolario 8.3 los siguientes espacios de Banach están en la clase $\mathcal{Q}$:

(a) Los espacios de Banach que son WLD. Para estos espacios, que tienen bola dual unidad cerrada w*-angélica, hemos dado resultados más fuertes en el Corolario 1.5, que se potencian en el Corolario 2.7 y la Proposición 3.17.

(b) Los espacios $C(K)$ con K compacto de Valdivia. En particular todos los espacios $C([0,1]^I)$ y $C(\{0,1\}^I)$.

(c) Los espacios de Banach V que admiten una PRI y verifican $\mathrm{dens}(V) \leq \aleph_1$. Estos espacios son 1-Plichko (ver [32, pg. 48]) y es muy fácil construirles directamente un generador proyectivo.

(d) Los espacios de Banach V que admiten base 1-incondicional $(e_i)_{i\in I}$. Estos espacios son 1-Plichko, pues el propio sistema biortogonal $(e_i, f_i)_{i\in I}$, donde f_i es el funcional asociado a e_i, es un sistema de Markuševič contablemente 1-normante. Para estos espacios se han obtenido mejores resultados en el Capítulo 5.

8.2 El control y las copias de ℓ_1

Si X es un espacio de Banach, X carece de copias de ℓ_1 sii $\hat{d}(K,Z) = \hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), Z)$ para todo subconjunto convexo $Z \subset X^*$ y todo subconjunto w*-compacto $K \subset X^*$ (ver [30]). Nos podemos hacer varias preguntas, a saber:

(1) ¿Es equivalente no contener una copia de ℓ_1 a que $\hat{d}(K,Z) = \hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), Z)$ para todo subespacio $Z \subset X^*$ y todo subconjunto w*-compacto $K \subset X^*$?

(2) Si X tiene una copia de ℓ_1, ¿existe alguna constante $1 < M < \infty$ tal que se verifique que $\hat{d}(K,Z) \leq M\hat{d}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K), Z)$ para todo subespacio $Z \subset X^*$ y todo subconjunto w*-compacto $K \subset X^*$?

(3) Si X tiene una copia de ℓ_1, ¿hay en X^* algún subespacio cerrado $Z \subset X^*$ y algún subconjunto w*-compacto $K \subset Z$ tal que $\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K) \setminus Z \neq \emptyset$?

Vamos a probar que las preguntas (1) y (3) tienen respuesta afirmativa y la (2) negativa. Usaremos la siguiente terminología:

(a) Un espacio de Banach X pertenece a la clase $\mathcal{C}_M$ (abrev., $X \in \mathcal{C}_M$) para cierto $1 \leq M < \infty$, si para todo subespacio $Y \subset X^*$ y todo subconjunto w*-compacto $K \subset X^*$ se tiene que $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Y) \leq M\hat{d}(K, Y)$.

(b) Se dice que X pertenece a la clase $\mathcal{C}_\infty$ (abrev., $X \in \mathcal{C}_\infty$) si $X \notin \mathcal{C}_M$ para toda $1 \leq M < \infty$.

Vamos a ver que, de hecho,

(1) la clase $\mathcal{C}_1$ verifica $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_M,\ 1 \leq M < \infty$, y además coincide con la clase de los espacios de Banach que carecen de copias de ℓ_1.

(2) la clase $\mathcal{C}_\infty$ es la clase de los espacios de Banach conteniendo copias de ℓ_1. De hecho, un espacio de Banach X satisface $X \in \mathcal{C}_\infty$ sii existen un subconjunto w*-compacto $K \subset X^*$ y un subespacio cerrado $Y \subset X^*$ tal que $K \subset Y$ pero $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) \nsubseteq Y$.

Proposición 8.4. *Sea X un espacio de Banach y fijemos un subconjunto w^*-compacto $K \subset X^*$. Los siguientes asertos son equivalentes:*

(1) $\hat{d}(K, Y) = \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Y)$ para todo subespacio (afín) $Y \subset X^*$.

(2) $\hat{d}(K, Y) = \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Y)$ para todo semi-espacio (afín) cerrado $Y \subset X^*$.

(3) $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) \subset Y$ para todo semi-espacio (afín) cerrado $Y \subset X^*$ tal que $K \subset Y$.

(4) $\hat{d}(K, C) = \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C)$ para todo subconjunto convexo cerrado $C \subset X^*$.

(5) $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) \subset C$ para todo subconjunto convexo cerrado $C \subset X^*$ tal que $K \subset C$.

(6) $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) = \overline{\text{co}}(K)$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que existan un semi-espacio afín cerrado $Y \subset X^*$ y dos números reales $a, b > 0$ tales que

$$\hat{d}(K, Y) < a < b < \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Y).$$

Sea H el hiperplano cerrado asociado a Y y elijamos $\psi \in S(H^\perp(X^{**}))$ tal que $|\langle \psi, u\rangle| = d(u, H)$ para todo $u \in X^*$. Supongamos que

$$Y = \{u \in X^* : \langle \psi, u\rangle \leq c\}$$

para cierto $c \in \mathbb{R}$. Por tanto $\langle \psi, u\rangle < c + a$, para todo $u \in K$. Sin embargo existe $z_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ tal que $\langle \psi, z_0\rangle > c + b$. Sea $d = \inf\{\langle \psi, u\rangle : u \in K\}$ y consideremos el subespacio afín cerrado $H_0 = \{u \in X^* : \langle \psi, u\rangle = d\}$. Entonces $\hat{d}(K, H_0) \leq c + a - d$ pero $\hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), H_0) \geq d(z_0, H_0) > c + b - d$, lo que contradice (1).

(2) $\Rightarrow$ (3). Esto es obvio.

(3) $\Rightarrow$ (4). Supongamos que existan un subconjunto convexo cerrado $C \subset X^*$ y dos números reales $a, b > 0$ tal que

$$\hat{d}(K, C) < a < b < \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C).$$

Cojamos $z_0 \in \overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ tal que $d(z_0, C) > b$. Sea $C_0 = \overline{C + aB_{X^*}}$. Observemos que C_0 es un subconjunto convexo cerrado de X^* tal que $K \subset C_0$ pero $z_0 \notin C_0$. Así que podemos hallar $\psi \in X^{**}$ tal que

$$\sup\{\langle \psi, u \rangle : u \in C_0\} < \eta_0 < \langle \psi, z_0 \rangle$$

para cierto $\eta_0 \in \mathbb{R}$. Por tanto, si $Y = \{u \in X^* : \langle \psi, u \rangle \leq \eta_0\}$, entonces Y es un semi-espacio afín cerrado de X^* verificando $K \subset Y$ pero $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) \not\subseteq Y$ (porque $z_0 \notin Y$), lo que contradice (3).

(4) $\Rightarrow$ (5), (5) $\Rightarrow$ (6) y (6) $\Rightarrow$ (1) son obvios. ■

Si X es un espacio de Banach y $K \subset X^*$ es un subconjunto w*-compacto, es bien conocido que $\emptyset \neq Ext(\overline{\text{co}}^{w^*}(K)) \subset K$. Definimos el conjunto $Ext(K)$ de los puntos extremos de K de modo que $Ext(K) := Ext(\overline{\text{co}}^{w^*}(K))$.

Proposición 8.5. *Para un espacio de Banach X, los siguientes asertos son equivalentes:*

(1) X carece de copias de ℓ_1.

(2) $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) = \overline{\text{co}}(Ext(K))$ para todo subconjunto w*-compacto $K \subset X^*$.

(3) $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) = \overline{\text{co}}(K)$ para todo subconjunto w*-compacto $K \subset X^*$.

(4) $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) \subset C$ para todo subconjunto convexo cerrado $C \subset X^*$ y todo subconjunto w*-compacto $K \subset C$.

(5) $\hat{d}(K, C) = \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), C)$ para todo subconjunto convexo cerrado $C \subset X^*$ y todo subconjunto w*-compacto $K \subset X^*$.

(6) $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) \subset Y$ para todo semi-espacio (afín) cerrado $Y \subset X^*$ y todo subconjunto w*-compacto $K \subset Y$.

(7) $\hat{d}(K, Y) = \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Y)$ para todo semi-espacio (afín) cerrado $Y \subset X^*$ y todo subconjunto w*-compacto $K \subset X^*$.

(8) $\hat{d}(K, Y) = \hat{d}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K), Y)$ para todo subespacio (afín) $Y \subset X^*$ y todo subconjunto w*-compacto $K \subset X^*$, es decir, $X \in \mathcal{C}_1$.

(9) $X \in \mathcal{C}_M$ para algún $1 \leq M < \infty$.

(10) $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) \subset Y$ para todo subespacio (afín) cerrado $Y \subset X^*$ y todo subconjunto w*-compacto $K \subset Y$.

Demostración. (1) $\Leftrightarrow$ (2). Esto es el clásico resultado de Haydon [30].

(2) $\Rightarrow$ (3). Esto es obvio.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) $\Leftrightarrow$ (6) $\Leftrightarrow$ (7) $\Leftrightarrow$ (8). Esto es la Proposición 8.4.

(8) $\Rightarrow$ (9) y (9) $\Rightarrow$ (10) son obvios.

(10) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que X contiene una copia $Y \subset X$ de ℓ_1. Sea $T : \ell_1 \to X$ el correspondiente isomorfismo tal que $T(\ell_1) = Y$. Entonces $T^* : X^* \to \ell_\infty$ es un operador sobreyectivo. Es fácil construir en ℓ_∞ un subespacio cerrado Z y un subconjunto $K \subset Z$ w*-compacto tales que $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) \setminus Z \neq \emptyset$. Por ejemplo, si $q : \ell_1 \to C([0,1])$ es un cociente, entonces $q^* : (C([0,1]))^* = M_R([0,1]) \to \ell_\infty$ es un isomorfismo entre el espacio $M_R([0,1])$ de las medidas de Radon sobre $[0,1]$ y su imagen $q^*(M_R([0,1]))$. Basta coger $Z := q^*(\ell_1([0,1]))$ (siendo $\ell_1([0,1])$ el subespacio de $M_R([0,1])$ formado por las medidas puramente atómicas) y $K := q^*(H)$ siendo $H := \{\delta_t : t \in [0,1]\}$ y δ_t la probabilidad delta de Dirac que tiene masa 1 sobre el punto t. Observemos que $\overline{\text{co}}^{w^*}(K) \setminus Z \neq \emptyset$ porque en $M_R([0,1]) = (C([0,1]))^*$ se tiene que $\overline{\text{co}}^{w^*}(H)$ es el conjunto $\mathcal{P}_1([0,1])$ de todas las probabilidades Borel sobre $[0,1]$, que verifica $\mathcal{P}_1([0,1]) \setminus \ell_1([0,1]) \neq \emptyset$.

Sea $W = (T^*)^{-1}(K) \cap (\|T^{-1}\| \cdot B_{X^*})$, que es un subconjunto w*-compacto de X^* tal que $T^*(W) = K$ (observemos que $(T^*)^{-1}(k) \cap (\|T^{-1}\| \cdot B_{X^*}) \neq \emptyset$, para todo $k \in K$), y denotemos $E := (T^*)^{-1}(Z) \subset X^*$. Claramente $W \subset E$ pero $\overline{\text{co}}^{w^*}(W) \not\subset E$ porque, si $\overline{\text{co}}^{w^*}(W) \subset E$, entonces

$$\overline{\text{co}}^{w^*}(K) = T^*(\overline{\text{co}}^{w^*}(W)) \subset T^*(E) = Z,$$

lo que no es cierto. ■

8.3 Clausura y distancia en $\mathbb{R}^I$

Todos los espacios topológicos en esta sección serán **Hausdorf y completamente regulares**. Sea (H, T_H) un espacio topológico, I un conjunto y $\varphi : I \to H$ una aplicación tal que $\overline{\varphi(I)} = H$. En esta sección abandonamos la convexidad y estudiamos en $\mathbb{R}^I$ ciertas situaciones en las que la distancia $\hat{d}(\overline{W}^{\tau_p}, C(H)_\varphi)$ está controlada por la distancia $\hat{d}(W, C(H)_\varphi)$, siendo $W \subset \mathbb{R}^I$ un subconjunto de $\mathbb{R}^I$ y τ_p la topología de convergencia puntual sobre I. La "distancia" en $\mathbb{R}^I$ a que nos referimos se define como $d(f,g) := \sup\{|f(i) - g(i)| : i \in I\}$, $\forall f, g \in \mathbb{R}^I$, y puede ser $+\infty$. El siguiente resultado se debe a Asanov y Velichko (ver [3, pg. 106]).

Proposición 8.6. *(Asanov y Velichko). Sean X un espacio topológico numerablemente compacto y $F \subset C(X)$ un subconjunto τ_p-acotado en $C(X)$ (es decir, toda aplicación τ_p-continua $f : C(X) \to \mathbb{R}$ está acotada en F). Entonces la τ_p-clausura $\overline{F}^{\tau_p}$ de F en $\mathbb{R}^I$ es un τ_p-compacto que verifica $\overline{F}^{\tau_p} \subset C(X)$.*

Este resultado tiene numerosas consecuencias, entre ellas el siguiente clásico teorema de Grothendieck.

Proposición 8.7. *(Teorema de Grothendieck) Sean X un espacio topológico numerablemente compacto y $F \subset C(X)$ un subconjunto numerablemente compacto en $C(X)$ para la topología τ_p. Entonces la τ_p-clausura $\overline{F}^{\tau_p}$ de F en $C(X)$ es un τ_p-compacto.*

En lo que sigue damos una generalización cuantitativa del resultado de Asanov y Velichko. Recordemos que

(1) H es *numerablemente compacto* si de todo recubrimiento abierto contable $\{U_n : n \geq 1\}$ de H se puede extraer un subrecubrimiento finito de H. Esto es equivalente a cualquiera de los siguientes asertos: (i) toda familia $A \subset H$ con $|A| \geq \aleph_0$ tiene en H un punto de acumulación; (ii) toda secuencia $\{h_n : n \geq 1\} \subset H$ tiene en H un punto límite o de aglomeración.

(2) Si τ es un cardinal infinito, se dice que H es τ-*compacto* si de todo τ-recubrimiento abierto $\{U_i : i < \tau\}$ de H se puede extraer un subrecubrimiento finito de H. Esto es equivalente a decir que toda familia $A \subset H$ con $|A| \geq \tau$ tiene en H un punto de acumulación. Así que H es numerablemente compacto sii es $\aleph_0$-compacto.

(3) La *tensión (tightness)* $t(H)$ de H es el menor cardinal infinito τ tal que para todo subconjunto $A \subset H$ y todo punto $x \in \overline{A}$, existe un subconjunto $B \subset A$ verificando $|B| \leq \tau$ y $x \in \overline{B}$.

Proposición 8.8. *Sean I un conjunto, H un espacio topológico normal y numerablemente compacto, $\varphi : I \to H$ una aplicación tal que $\varphi(I) = H$ y $W \subset \mathbb{R}^I$ un subconjunto numerablemente compacto con respecto a la topología de la convergencia puntual τ_p en I. Entonces*

$$\hat{d}(\overline{W}^{\tau_p}, C(H)_\varphi) \leq 4\hat{d}(W, C(H)_\varphi).$$

Demostración. En caso contrario, podemos hallar algún $f_0 \in \overline{W}^{\tau_p}$ tal que

$$d(f_0, C(H)_\varphi) > b > 4a > 4\hat{d}(W, C(H)_\varphi).$$

Puesto que $d(f_0, C(H)_\varphi) > b$, por Proposición 6.2 existe $h_0 \in H$ tal que para todo $V \in \mathcal{V}^{h_0}$ existen $i_V, j_V \in \varphi^{-1}(V)$ con $f_0(i_V) - f_0(j_V) > 2b$. Por tanto, si $i_0 \in I$ satisface $\varphi(i_0) = h_0$, para todo $V \in \mathcal{V}^{h_0}$ ó bien $f_0(i_V) - f_0(i_0) > b$ ó bien $f_0(i_0) - f_0(j_V) > b$, de donde obtenemos que para alguna base $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}^{h_0}$ de entornos de h_0 ó bien $f_0(i_V) - f_0(i_0) > b$, $\forall V \in \mathcal{V}_1$, ó bien $f_0(i_0) - f_0(j_V) > b$, $\forall V \in \mathcal{V}_1$. Supongamos que $f_0(i_V) - f_0(i_0) > b$, $\forall V \in \mathcal{V}_1$ (el otro caso es análogo). Cojamos $\epsilon > 0$ tal que $b > 4a + 3\epsilon$ y denotemos $A := \{i_V : V \in \mathcal{V}_1\}$ y sean U, G los subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos como

$$U = \overset{\circ}{B}(f_0(i_0); 2a + \epsilon), \; G = \mathbb{R} \setminus B(f_0(i_0); 4a + 2\epsilon).$$

Claramente $\overline{U} \cap \overline{G} = \emptyset$, $f_0(i_0) \in U$ y $\overline{f_0(A)} \subset G$.

Etapa 1. Elegimos $f_1 \in W$ tal que $|f_1(i_0) - f_0(i_0)| < \epsilon$. Como $d(f_1, C(H)_\varphi) < a$, podemos hallar $g_1 \in C(H)$ tal que $\sup\{|f_1(i) - g_1 \circ \varphi(i)| : i \in I\} < a$. Puesto que g_1 es continua y $|f_1(i_0) - g_1 \circ \varphi(i_0)| < a$, existe $V_1 \in \mathcal{V}_1$ tal que $g_1(V_1) \subset \overset{\circ}{B}(f_0(i_0); a + \epsilon)$, de donde obtenemos que $f_1(\varphi^{-1}(V_1)) \subset U$.

Etapa 2. Elegimos $i_1 \in \varphi^{-1}(V_1) \cap A$ (por ejemplo, $i_1 = i_{V_1}$) tal que $f_0(i_1) - f_0(i_0) > b$, de donde $f_0(i_1) \in G$. Sea $f_2 \in W$ tal que $|f_2(i) - f_0(i)| < \epsilon$ para $i = i_0, i_1$. Entonces $f_2(i_1) - f_0(i_0) > 4a + 2\epsilon$ y, por tanto, $f_2(i_1) \in G$. Sea $g_2 \in C(H)$ tal que $\sup\{|f_2(i) -$

$g_2 \circ \varphi(i)| : i \in I\} < a$. Entonces $|f_0(i_0) - g_2 \circ \varphi(i_0)| < a + \epsilon$ y por continuidad podemos hallar $V_2 \in \mathcal{V}_1$ tal que $\overline{V_2} \subset V_1$ y $g_2(V_2) \subset \overset{\circ}{B}(f_0(i_0), a + \epsilon)$, de donde obtenemos que $f_2(\varphi^{-1}(V_2)) \subset U$.

Etapa 3. Elegimos $i_2 \in \varphi^{-1}(V_2) \cap A$ (por ejemplo, $i_2 = i_{V_2}$) tal que $f_0(i_2) - f_0(i_0) > b$, de donde $f_0(i_2) \in G$. Sea $f_3 \in W$ tal que $|f_3(i) - f_0(i)| < \epsilon$ para $i = i_0, i_1, i_2$. Entonces $f_3(j) - f_0(i_0) > 4a + 2\epsilon$ y, por tanto, $f_2(j) \in G$ para $j = i_1, i_2$. Sea $g_3 \in C(H)$ tal que $\sup\{|f_3(i) - g_3 \circ \varphi(i)| : i \in I\} < a$. Entonces $|f_0(i_0) - g_3 \circ \varphi(i_0)| < a + \epsilon$ y por continuidad podemos hallar $V_3 \in \mathcal{V}_1$ tal que $\overline{V_3} \subset V_2$ y $g_3(V_3) \subset \overset{\circ}{B}(f_0(i_0), a + \epsilon)$, de donde obtenemos que $f_3(\varphi^{-1}(V_3)) \subset U$.

Ahora procedemos por reiteración. Sea $z_0 \in H$ un punto límite de la familia $\{\varphi(i_n) : n \geq 1\} \subset H$ y sea $j_0 \in I$ tal que $\varphi(j_0) = z_0$ (aquí usamos que H es numerablemente compacto). Como $\varphi(i_n) \in V_n \subset \overline{V_n} \subset V_{n-1}$, obtenemos que $z_0 \in \bigcap_{n \geq 1} V_n = \bigcap_{n \geq 1} \overline{V_n}$. Puesto que W es numerablemente compacto, existe un punto límite $w \in W$ de la familia $\{f_n : n \geq 1\}$.

Aserto. $Osc_\varphi(w, z_0) \geq 2a + \epsilon$.

En efecto, sea $V \in \mathcal{V}^{z_0}$. Entonces:

(I) Puesto que $f_n(\varphi^{-1}(V_n)) \subset U$, tenemos que $f_n(\varphi^{-1}(\bigcap_{k \geq 1} V_k)) \subset U$, $\forall n \geq 1$. Así que $f_n(j_0) \in U$, $\forall n \geq 1$, (porque $\varphi(j_0) = z_0 \in \bigcap_{k \geq 1} V_k$, esto es, $j_0 \in \varphi^{-1}(\bigcap_{k \geq 1} V_k)$) de donde obtenemos que $w(j_0) \in \overline{U}$.

(II) Del hecho $f_n(i_k) \in G$ para $1 \leq k < n$, obtenemos que $w(i_k) \in \overline{G}$, $\forall k \geq 1$.

Como $z_0 \in \overline{\{\varphi(i_k) : k \geq 1\}}$ y $V \in \mathcal{V}^{z_0}$, se tiene que $\varphi(i_m) \in V$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Así que $w(i_m) - w(j_0) \geq 2a + \epsilon$ y esto implica que $Osc_\varphi(w, z_0) \geq 2a + \epsilon$.

Por tanto $d(w, C(H)_\varphi) \geq \frac{1}{2} Osc_\varphi(w, z_0) \geq a + \frac{\epsilon}{2}$. Como $w \in W$ y $\hat{d}(W, C(H)_\varphi) < a$, llegamos a una contradicción que completa la prueba. ■

Proposición 8.9. *Sean I un conjunto, H un espacio topológico normal y numerablemente compacto, $\varphi : I \to H$ una aplicación tal que $\varphi(I) = H$ y $W \subset \mathbb{R}^I$ un subconjunto numerablemente compacto con respecto a la topología τ_p de la convergencia puntual en I. Entonces, si $W \cap C(H)_\varphi$ es τ_p-denso en W, tenemos que*

$$\hat{d}(\overline{W}^{\tau_p}, C(H)_\varphi) \leq 2\hat{d}(W, C(H)_\varphi).$$

Demostración. En otro caso, podemos hallar algún $f_0 \in \overline{W}^{\tau_p}$ tal que

$$d(f_0, C(H)_\varphi) > b > 2a > 2\hat{d}(W, C(H)_\varphi).$$

Puesto que $d(f_0, C(H)_\varphi) > b$, existe $h_0 \in H$ tal que para todo $V \in \mathcal{V}^{h_0}$ existen $i_V, j_V \in \varphi^{-1}(V)$ con $f_0(i_V) - f_0(j_V) > 2b$. Por tanto, si $i_0 \in I$ satisface $\varphi(i_0) = h_0$, entonces para todo $V \in \mathcal{V}^{h_0}$ ó bien $f_0(i_V) - f_0(i_0) > b$ ó bien $f_0(i_0) - f_0(j_V) > b$, de donde obtenemos que para alguna base $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}^{h_0}$ de entornos de h_0 ó bien $f_0(i_V) - f_0(i_0) > b, \ \forall V \in \mathcal{V}_1$, ó bien $f_0(i_0) - f_0(j_V) > b, \ \forall V \in \mathcal{V}_1$. Supongamos que $f_0(i_V) - f_0(i_0) > b, \ \forall V \in \mathcal{V}_1$ (el otro caso es análogo). Cojamos $\epsilon > 0$ tal que $b > 2a + 3\epsilon$ y denotemos

$$A = \{i_V : V \in \mathcal{V}_1\}, \ U = \overset{\circ}{B}(f_0(i_0), \epsilon), \ G = {}^cB(f_0(i_0), 2a + 2\epsilon).$$

Claramente $\overline{U} \cap \overline{G} = \emptyset, \ f_0(i_0) \in U$ y $\overline{f_0(A)} \subset G$.

Etapa 1. Elegimos $g_1 \in C(H)$ tal que $g_1 \circ \varphi \in W$ y $|g_1 \circ \varphi(i_0) - f_0(i_0)| < \epsilon$. Puesto que g_1 es continua y $|g_1 \circ \varphi(i_0) - f_0(i_0)| < \epsilon$, existe $V_1 \in \mathcal{V}_1$ tal que $g_1(V_1) \subset U$.

Etapa 2. Elegimos $i_1 \in \varphi^{-1}(V_1) \cap A$ (por ejemplo, $i_1 = i_{V_1}$) tal que $f_0(i_1) - f_0(i_0) > b$, de donde $f_0(i_1) \in G$. Sea $g_2 \in C(H)$ tal que $g_2 \circ \varphi \in W$ y $|g_2 \circ \varphi(i) - f_0(i)| < \epsilon$ para $i = i_0, i_1$. Entonces $g_2 \circ \varphi(i_1) - f_0(i_0) > b - \epsilon > 2a + 2\epsilon$ y, por tanto, $g_2 \circ \varphi(i_1) \in G$ y $g_2 \circ \varphi(i_0) \in U$. Por continuidad podemos hallar $V_2 \in \mathcal{V}_1$ tal que $\overline{V_2} \subset V_1$ y $g_2(V_2) \subset U$.

Etapa 3. Elegimos $i_2 \in \varphi^{-1}(V_2) \cap A$ (por ejemplo, $i_2 = i_{V_2}$) tal que $f_0(i_2) - f_0(i_0) > b$, de donde $f_0(i_2) \in G$. Sea $g_3 \in C(H)$ tal que $g_3 \circ \varphi \in W$ y $|g_3 \circ \varphi(i) - f_0(i)| < \epsilon$ para $i = i_0, i_1, i_2$. Entonces $g_3 \circ \varphi(j) - f_0(i_0) > b - \epsilon > 2a + 2\epsilon, \ g_3 \circ \varphi(j) \in G, \ j = i_1, i_2$, y $g_3 \circ \varphi(i_0) \in U$. Por continuidad podemos hallar $V_3 \in \mathcal{V}_1$ tal que $\overline{V_3} \subset V_2$ y $g_3(V_3) \subset U$.

Ahora procedemos por reiteración. Sea $z_0 \in H$ un punto límite de la familia $\{\varphi(i_n) : n \geq 1\} \subset H$ y sea $j_0 \in I$ tal que $\varphi(j_0) = z_0$. Como $\varphi(i_n) \in V_n \subset \overline{V_n} \subset V_{n-1}$, obtenemos que $z_0 \in \bigcap_{n\geq 1} V_n = \bigcap_{n \geq 1} \overline{V_n}$. Puesto que W es numerablemente compacto, existe un punto límite $w \in W$ de la familia $\{g_n \circ \varphi : n \geq 1\}$.

Aserto. $Osc_\varphi(w, z_0) \geq 2a + \epsilon$.

En efecto, sea $V \in \mathcal{V}^{z_0}$. Entonces:

(I) Puesto que $g_n(V_n) \subset U$, se tiene que $g_n(\bigcap_{k\geq 1} V_k) \subset U, \ \forall n \geq 1$. Así que $g_n \circ \varphi(j_0) \in U, \ \forall n \geq 1$, (porque $\varphi(j_0) = z_0 \in \bigcap_{k \geq 1} V_k$, esto es, $j_0 \in \varphi^{-1}(\bigcap_{k\geq 1} V_k)$), de donde obtenemos que $w(j_0) \in \overline{U}$.

(II) Del hecho $g_n \circ \varphi(i_k) \in G$ para $1 \leq k < n$, obtenemos que $w(i_k) \in \overline{G}, \ \forall k \geq 1$.

Como $z_0 \in \overline{\{\varphi(i_k) : k \geq 1\}}$ y $V \in \mathcal{V}^{z_0}$, se tiene que $\varphi(i_m) \in V$ para cierto $m \in \mathbb{N}$. Así que $w(i_m) - w(j_0) \geq 2a + \epsilon$ y esto implica que $Osc_\varphi(w, z_0) \geq 2a + \epsilon$.

Por tanto $d(w, C(H)_\varphi) \geq \frac{1}{2} Osc_\varphi(w, z_0) \geq a + \frac{\epsilon}{2}$. Como $w \in W$ y $\hat{d}(W, C(H)_\varphi) < a$, obtenemos una contradicción lo que completa la prueba. ■

Proposición 8.10. *Sean I un conjunto, H un espacio topológico normal con $t(H) \leq \aleph_0$, $\varphi : I \to H$ una aplicación tal que $\overline{\varphi(I)} = H$ y $W \subset \mathbb{R}^I$ un subconjunto numerablemente compacto con respecto a la topología de la convergencia puntual τ_p en I. Entonces se tiene*

$$\hat{d}(\overline{W}^{\tau_p}, C(H)_\varphi) = \hat{d}(W, C(H)_\varphi).$$

Demostración. En otro caso existen un subconjunto numerablemente compacto $W \subset \mathbb{R}^I$, dos números reales $a, b > 0$ y un punto $f_0 \in \overline{W}^{\tau_p}$ tales que

$$\hat{d}(W, C(H)_\varphi) < a < b < d(f_0, C(H)_\varphi).$$

Como $b < d(f_0, C(H)_\varphi) = Osc_\varphi(f_0)$ (por ser H normal), existe $k_0 \in H$ tal que $\frac{1}{2}Osc_\varphi(f_0, k_0) > b$. Sean $f_1(k_0), f_2(k_0)$ como en Capítulo 6, esto es

$$f_1(k_0) = \inf\{\sup(f_0(\varphi^{-1}(V))) : V \in \mathcal{V}^{k_0}\} \text{ y}$$
$$f_2(k_0) = \sup\{\inf(f_0(\varphi^{-1}(V))) : V \in \mathcal{V}^{k_0}\}.$$

Observemos que para todo $V_1, V_2 \in \mathcal{V}^{k_0}$ se tiene

$$\sup(f_0(\varphi^{-1}(V_1))) \geq f_1(k_0) \geq f_2(k_0) \geq \inf(f_0(\varphi^{-1}(V_2))).$$

Hay tres casos a considerar

(I) Supongamos que $-\infty \leq f_2(k_0) < f_1(k_0) \leq +\infty$. Entonces $f_1(k_0) - f_2(k_0) > 2b$ y para todo $V \in \mathcal{V}^{k_0}$, podemos elegir $i_V, j_V \in \varphi^{-1}(V)$ tal que $f_0(i_{V_1}) - f_0(j_{V_2}) > 2b$ para todo $V_1, V_2 \in \mathcal{V}^{k_0}$. Puesto que $k_0 \in \overline{\{\varphi(i_V) : V \in \mathcal{V}^{k_0}\}} \cap \overline{\{\varphi(j_V) : V \in \mathcal{V}^{k_0}\}}$ y $t(H) \leq \aleph_0$, existen $\{i_n : n \geq 1\} \subset \{i_V : V \in \mathcal{V}^{k_0}\}$ y $\{j_n : n \geq 1\} \subset \{j_V : V \in \mathcal{V}^{k_0}\}$ tales que $k_0 \in \overline{\{\varphi(i_n) : n \geq 1\}} \cap \overline{\{\varphi(j_n) : n \geq 1\}}$. En particular, observemos que para todo $V \in \mathcal{V}^{k_0}$ existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $i_m, j_n \in \varphi^{-1}(V)$ y $f_0(i_m) - f_0(j_n) > 2b$. Denotemos $I_0 = \{i_n, j_n : n \geq 1\}$ y consideremos la restricción canónica $R : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}^{I_0}$. Puesto que $|I_0| \leq \aleph_0$ y W es numerablemente compacto, $R(W)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{I_0}$. Así que existe $g \in W$ tal que $R(g) = R(f_0)$. Por tanto para todo $V \in \mathcal{V}^{k_0}$ e $i_m, j_n \in \varphi^{-1}(V)$ se tiene

$$\begin{aligned}\sup g(\varphi^{-1}(V)) - \inf g(\varphi^{-1}(V)) \geq g(i_m) - g(j_n) = \\ = f_0(i_m) - f_0(j_n) > 2b,\end{aligned}$$

de donde obtenemos que $\frac{1}{2}Osc_\varphi(g) \geq b$. Por otra parte, puesto que $g \in W$, se tiene $\frac{1}{2}Osc_\varphi(g) = d(g, C(H)_\varphi) < a < b$. Así que obtenemos una contradicción en este caso.

(II) Supongamos que $f_1(k_0) = +\infty = f_2(k_0)$. En este caso la expresión $f_1(k_0) - f_2(k_0)$ no tiene sentido y se requiere un argumento diferente al del caso (I).

Para cada $V \in \mathcal{V}^{k_0}$ elegimos arbitrariamente $i_V \in \varphi^{-1}(V)$ y observamos que $f_0(i_V) \to +\infty$ cuando $V \in \mathcal{V}^{k_0}$. Ya que $k_0 \in \overline{\{\varphi(i_V) : V \in \mathcal{V}^{k_0}\}}$ y $t(H) \leq \aleph_0$, existe una familia $\{i_n : n \geq 1\} \subset \{i_V : V \in \mathcal{V}^{k_0}\}$ tal que $k_0 \in \overline{\{\varphi(i_n) : n \geq 1\}}$. Observemos que para todo $V \in \mathcal{V}^{k_0}$ y $M < +\infty$ existe $n \in \mathbb{N}$ con $i_n \in \varphi^{-1}(V)$ y $f_0(i_n) > M$. Denotemos $I_0 = \{i_n : n \geq 1\}$ y sea $R : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}^{I_0}$ la restricción canónica tal que $R(W)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{I_0}$. Cojamos $g \in W$ tal que $R(g) = R(f_0)$. Puesto que $g \in W$ y $\hat{d}(W, C(H)_\varphi) < a$, existe $h \in C(H)$ tal que $\sup\{|g(i) - h \circ \varphi(i)| : i \in I\} < a$. Así que para todo $V \in \mathcal{V}^{k_0}$ y $M < +\infty$ existe $n \in \mathbb{N}$ con $i_n \in \varphi^{-1}(V)$ y $h \circ \varphi(i_n) > M$, lo que es falso porque h es continuo y, por tanto, localmente acotado.

(III) Sea $f_1(k_0) = -\infty = f_2(k_0)$. Este caso es análogo al caso (II). ■

Proposición 8.11. *Sean τ un cardinal infinito, I un conjunto, H un espacio topológico normal con $t(H) \leq \tau$, $\varphi : I \to H$ una aplicación tal que $\overline{\varphi(I)} = H$ y $W \subset \mathbb{R}^I$ un subconjunto τ-compacto con respecto a la topología de la convergencia puntual τ_p en I. Entonces se tiene*

$$\hat{d}(\overline{W}^{\tau_p}, C(H)_\varphi) = \hat{d}(W, C(H)_\varphi).$$

Demostración. Esta prueba es análoga a la de la Proposición 8.10. ■

Bibliografía

[1] S. ARGYROS AND S. MERCOURAKIS, *On weakly Lindelöf Banach spaces*, Rocky Mountain J. Math., 23(1993), 395-446.

[2] S. ARGYROS, S. MERCOURAKIS AND S. NEGREPONTIS, *Functional-analytic properties of Corson-compact spaces*, Studia Math., 89 (1988), 197-229.

[3] A. V. ARKHANGEL'SKII, *Topological Function Spaces*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1992.

[4] J. BOURGAIN,*New Classes of $\mathcal{L}^p$-spaces*, Springer-Verlag,

[5] B. BALCAR AND F. FRANĚK, *Independent families in complete Boolean algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., 274 (2) (1982), 607-618.

[6] J. BOURGAIN, D. H. FREMLIN AND M. TALAGRAND, *Pointwise compact sets of Baire-measurable functions*, Amer. J. of Math., 100 (1978), 845-886.

[7] B. CASCALES, G. MANJABACAS AND G. VERA, *A Krein-Šmulian type result in Banach spaces*, Quart.J. Math. Oxford Ser.(2), 48 (1997), 161-167.

[8] B. CASCALES, W. MARCISZEWSKI AND M. RAJA, *Distance to spaces of continuous functions*, to appear.

[9] B. CASCALES, I. NAMIOKA AND J. ORIHUELA,*The Lindelöf property in Banach spaces*, Studia Math., 154 (2003), 165-192.

[10] B. CASCALES, I. NAMIOKA AND G. VERA, *The Lindelöf property and fragmentability*, Proc. Amer. Math. Soc., 128 (2000), 3301-3309.

[11] B. CASCALES AND R. SHVYDKOY,*On the Krein-Šmulian Theorem for weaker topologies*, Illinois J. Math., 47 (2003), 957-976.

[12] S. CHEN, *Geometry of Orlicz spaces*, Dissert. Math., Vol. 356, Warszawa, 1996.

[13] G.CHOQUET,*Lectures on Analysis*, W.A. Benjamin, Inc., New York, 1969.

[14] W. W. COMFORT AND S. NEGREPONTIS, *Chain Conditions in Topology*, Cambridge Tracts in Math. 79, Cambridge Univ. Press, 1982.

[15] W. W. Comfort and S. Negrepontis, *The theory of ultrafilters*, Springer-Verlag, 1974.

[16] R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Longman Scientific and Technical, 1993.

[17] J. Diestel and J. J. Uhl, *Vector measures*, Am. Math. Soc., 1977.

[18] R. Engelking, *General Topology*, 1972.

[19] M. Fabian, *Gâteaux differentiability of convex functions and topology. Weak Asplund Spaces*, John Wiley and Sons, New-York, 1997.

[20] M. Fabian, P. Habala, p. Hăcek, J. Pelant, V. Montesinos and V. Zizler, *Functional analysis and infinite dimensional geometry*, Canad. Math. Soc. Books in Mathematics, n^{o} 8, Springer-Verlag, New-York, 2001.

[21] M. Fabian, P. Hájek, V. Montesinos and W. Zizler, *A quantitative version of Krein's Theorem*, Rev. Mat. Iberoam., 21(1) (2005), 237-248.

[22] V. Farmaki, *The structure of Eberlein, uniformy Eberlein and Talagrand compact spaces in* $\sum(\mathbb{R}^\Gamma)$, Fundamenta Math. 128 (1987), 15-28.

[23] A. S. Granero, *An extension of the Krein-Šmulian Theorem*, Rev. Mat. Iberoam., 22(1) (2006), 93-110.

[24] A. S. Granero, *The extension of the Krein-Šmulian Theorem for Orlicz sequence spaces and convex sets*, aparecerá en J. Math. Anal. Appl.

[25] A. S. Granero, P. Hájek and V. Montesinos, *Convexity and w^*-compactness in Banach spaces*, Math. Ann., 328 (2004), 625-631.

[26] A. S. Granero and H. Hudzik,*The classical Banach spaces $\ell_\varphi(I)/h_\varphi(I)$*, Proc. Amer. Math. Soc., 124 (1996), 3777-3787.

[27] A. S. Granero and M. Sánchez, *The class of universally Krein-Šmulian Banach spaces*, aparecerá en Bull. London Math. Soc., disponible en http://www.mat.ucm.es/~nfaas/members/suareza/suareza.htm.

[28] A. S. Granero and M. Sánchez, *Convexity, compactness and distances*, Methods in Banach spaces, Ed. Jesús M.F. Castillo and William B. Johnson, Proceed. of the 3th Conference in Cáceres, Lecture Notes Series of the London Mat. Soc., Vol. 337, (2006)

[29] A. S. Granero and M. Sánchez, *Distances to convex sets: convex w^*-closures versus convex norm-closures*, aparecerá.

[30] R. Haydon,*Some more characterizations of Banach spaces containing ℓ_1*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 80 (1976), 269-276.

[31] I. Juhàsz, *Cardinal Functions in Topology*, Math. Centrum Tract. N. 34, Amsterdam, 1971.

[32] O. Kalenda, *Valdivia Compact Spaces in Topology and Banach Spaces Theory*, Extracta Math., 15 (2000), 1-85.

[33] A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer-Verlag, 1995.

[34] M. A. Krasnosel'skiĭ and Ya. B. Rutickiĭ, *Convex functions and Orlicz spaces*, Noordhoff, Groningen, 1961.

[35] J. Lindenstrauss and C. Stegall, *Examples of Banach spaces which do not contain ℓ_1 and whose duals are non-separable*, Studia Math., 54 (1975), 81-105.

[36] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[37] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II*, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[38] J. Margalef, E. Outerelo y J.L. Pinilla, *Topología IV*, Ed. Alhambra, Madrid, 1980.

[39] P. Meyer-Nieberg, *Banach Lattices*, Springer-Verlag, 1992.

[40] I. Namioka, *Radon-Nikodym compacts spaces and fragmentability*, Mathematika 34 (1989), no. 2, 258-281.

[41] S. Negrepontis, Banach spaces and topology, *Handbook of Set-Theoretic Topology*, K. Kunen and J. Vaughan (eds.), North-Holland, Amsterdam, 1984, 1045-1142.

[42] J. Orihuela, *On weakly Lindelöf Banach spaces*, in "Progress in Functioanl Analysis", eds. K.D. Bierstedt, J. Bonet, J. Horváth, M. Maestre, Elsevier Sci. Publ. B.V., (1992), 279-291.

[43] J.R. Partington, *Subspaces of certain Banach sequence spaces*, Bull. London Math. Soc., 13 (1981), 162-166.

[44] R.R. Phelps, *Convex functions, monotone operators and differentiability*, Springer-Verlag, 1993.

[45] R. Pol, *A function space C(K) which is weakly Lindelöf but not weakly compactly generated*, Studia Math., 64 (1979), 279-285.

[46] H. P. Rosenthal, *The heredity problem for weakly compactly generated Banach spaces*, Compositio Math., 28 (1974), 83-111.

[47] H. H. Schaefer, *Espacios vectoriales topológicos*, Ed. Teide, Barcelona, 1974.

[48] Z. SEMADENI, *Banach spaces of continuous functions*, Monografie Mat. 55 (PWN), Warsaw, 1971.

[49] W. SIERPINSKI,*Sur une suite infinie de fonctions de clase 1 dont toute fonction d'accumulation est non mesurable*, Fund. Math., 33 (1945), 104-105.

[50] I. SINGER, *Bases in Banach Spaces II*, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[51] M. TALAGRAND, *Deux generalisations d'un théorème de I. Namioka*, Pacific J. Math., 81(1) (1979), 239-251.

[52] M. TALAGRAND, *Sur les espaces de Banach contenant* $\ell_1(\tau)$, Israel J. Math., 40 (1981), 324-330.

[53] M. VALDIVIA,*Simultaneous resolutions of the identity operators in normed spaces*, Collect. Math., 42 (2) (1991), 265-284.

[54] R. C. WALKER,*The Stone-Čech compactification*, Springer-Verlag, Berlín, 1974.