ANÁLISIS FUNCIONAL. HOJA N. 1

1.- Sea X un en. Prueba que:
1. Si $A \subset X$ es convexo, $\overline{A}$ es convexo.
2. Si $A \subset X$ es finito, $co(A)$ es compacto.
3. Si $A, B \subset X$ son compactos, $A + B$ es compacto.
4. Si $A, B \subset X$ verifican que A es compacto y B cerrado, $A + B$ es cerrado.
5. Si $A \subset X$, entonces A es precompacto y completo sii A es compacto.

2.- Sea X eB. Prueba que si $A \subset X$ es compacto, $\overline{co}(A)$ es compacto.

3.- Sean X en y $A, B \subset X$. Prueba que: (a) $\overline{A} = \cap_{n\geq 1}(A + \frac{1}{n}B_X)$; (b) $co(A+B) = co(A) + co(B)$; (c) A, B convexos $\Rightarrow$ $A+B$ convexo; (d) $\overline{co}(A) + \overline{co}(B) \subset \overline{co}(A + B)$.

4.- Sean X en, $a \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Probar que : (i) $\varphi : X \to X$ tq $\varphi(x) = x + a$ es un homeomorfismo; (ii) $\varphi : X \to X$ tq $\varphi(x) = \lambda x$ es un isomorfismo; (iii) X es homeomorfo a $\overset{\circ}{B}(0; 1)$.

5.- Sean X eB y $A = \{x_n\}_{n\geq 0}$ tq $x_n \to x_0 = 0$. Prueba que A es compacto y que $\overline{co}(A) = \{\sum_{n\geq 0} \lambda_n x_n : 0 \leq \lambda_n \leq 1, \sum_{n\geq 0} \lambda_n = 1\}$.

6.- Dibuja la bola unidad de $\ell_3^{(2)}$, $\ell_1^{(2)}$, $\ell_2^{(2)}$, $\ell_\infty^{(2)}$, $\ell_{1/2}^{(2)}$.

7.- Prueba que $(C([0, 1]), \|.\|_1)$, donde $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$, $\forall f \in C([0, 1])$, es un en no completo. Deduce de aquí que las normas $\|.\|_1$ y $\|.\|_\infty$ no son equivalentes

8.- Comprueba que $\psi(x, y) = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$, $0 < p < 1$, no es una norma en $\mathbb{K}^2$.

9.- Prueba que c_{00} (=ev de las sucesiones de escalares eventualmente nulas) es denso en c_0 y ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, pero no en ℓ_∞.

10.- Sean X ev y $\{y_i\}_{i=0}^n \subset X'$. Probar que $\cap_{i=1}^n Ker(y_i) \subset Ker(y_0)$ sii y_0 es combinación lineal de $\{y_i\}_{i=1}^n$.

11.- (Recíproco de la desigualdad de Hŏlder). Sean $p, q > 0$, $c \geq 0$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Prueba que si $f \in L_p(\mu)$ y $|\int fgd\mu| \leq c$, $\forall g \in L_q(\mu)$ con $\|g\|_q \leq 1$, entonces $\|f\|_p \leq c$.

12.- Muestra que $\{n \cdot \mathbf{1}_{[0,1/n]}\}_{n\geq 1}$ converge puntualmente a 0 ctp, pero no converge en norma en $L_p([0,1]),\ 1 \leq p \leq \infty$.

13.- Sea $\{f_n\}_{n\geq 0} \subset L_p(\mu)$ tq $\sum_{n\geq 1} \|f_n - f_0\|_p < \infty$. Probar que $f_n \to f_0$ en la norma $\|\cdot\|_p$ y que $f_n \to f_0$ puntualmente ctp.

14.- Sea $L_p(\mathbb{R}) := L_p(\mathbb{R}, \Sigma, \mu),\ 1 \leq p \leq \infty$, donde μ es la medida de Lebesgue. Probar que:

(a) El subespacio de $L_p(\mathbb{R})$ generado por las funciones características $\mathbf{1}_J,\ J \subset \mathbb{R}$ intervalo finito, es denso en $L_p(\mathbb{R}),\ 1 \leq p < \infty$.

(b) El subespacio $C_0(\mathbb{R}) \subset L_p(\mathbb{R})$ de las funciones continuas con soporte compacto es denso en $L_p(\mathbb{R}),\ 1 \leq p < \infty$.

15.- (a) Sean μ medida finita y $1 \leq p_1 \leq p_2$. Prueba que la inclusión canónica $i : L_{p_2}(\mu) \to L_{p_1}(\mu)$ es continua.

(b) Sean μ medida arbitraria y $1 \leq p_1 \leq p \leq p_2$. Prueba que $L_{p_2}(\mu) \cap L_{p_1}(\mu) \subset L_p(\mu)$.

16.- (a) Sean $Y = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ y $f : Y \to \mathbb{R}$ tq $f(x,0) = x$. Halla extensiones lineales de f a $\mathbb{R}^2$ que conserven la norma $\|.\|_1,\ \|.\|_2$ y $\|.\|_\infty$.

(b) Idem para $Y = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ y $f(x,x) = x$.

(c) Idem para $Y = \{(x,-x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ y $f(x,-x) = x$.

17.- Sean X, Y en y $f : X \to Y$ aplicación lineal. Prueba que f es continua sii f transforma sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy.

18.- Sea E un ev de dimensión infinita y $\{e_i\}_{i\in I}$ una base algebraica de E.

(a) Para cada $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$ (nótese que sólo hay un número finito de términos no nulos) se define $\|x\|_1 = \sum_{i\in I} |x_i|,\ \|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i \in I\}$. Prueba que son normas no equivalentes para las que E no es completo.

(b) Si $\|.\|$ es una norma arbitraria sobre E, probar que existe siempre una aplicación lineal no continua de $(E, \|.\|)$ en $\mathbb{K}$.

19.- (a) Sea $f : c_{00} \to \mathbb{K}$ tq $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} x_n$. Estudia si f es continua y calcula $\|f\|$, si procede, con las normas $\|.\|_1,\ \|.\|_2$ y $\|.\|_\infty$.

(b) Idem para $f : c_{00} \to \ell_2$ tq $f(x) = (\frac{1}{2^n} x_n)_{n\geq 1}$.

ANÁLISIS FUNCIONAL. HOJA N. 2

1.- Sean $x = \{x_n\}_{n\geq 0}$, $y = \{y_n\}_{n\geq 0} \in \ell_1$ y definamos $x \cdot y = z$ tq $z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$. Prueba que $(\ell_1, \|.\|_1)$ es un álgebra unitaria y conmutativa.

2.- Sea K métrico compacto y $F \subset C(K)$ equicontinuo. Prueba que dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq si $d(t,s) \leq \delta$, $t, s \in K$, entonces $|f(t) - f(s)| \leq \epsilon$, $\forall f \in F$.

3.- Sea $(1+x)^{1/2} = \sum_{n\geq 0} c_n \cdot x^n$ con $c_n = \binom{1/2}{n}$. Prueba que: (a) $\sum_{n\geq 0} |c_n| < +\infty$; (b) Si $p_n(x) = \sum_{r=0}^{n} c_r \cdot (x^2-1)^r$, entonces $p_n(x)$ converge uniformemente a $|x|$ en $[-1,1]$.

4.- Sea $f(t) = e^{2\pi i t} \in C([0,1])$. Prueba que si $\mathcal{A} = \overline{\mathfrak{A}\{1, f\}}$ (= álgebra cerrada generada por $1, f$) entonces $e^{-2\pi i t} \notin \mathcal{A}$.

5.- Sea $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ función continua periódica de período 2π y par. Prueba que f puede aproximarse uniformemente por polinomios trigonométricos conteniendo sólo cosenos.

6.- Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ con matriz (a_{ij}) y $1 \leq p, r \leq \infty$. Prueba que la norma de T, considerado como elemento de $\mathcal{L}(\ell_p^{(n)}, \ell_r^{(m)})$, verifica $\|T\| \leq \sum_{i,j} |a_{ij}|$.

7.- Sean M, N subespacios cerrados de un en X con dim$M < \aleph_0$. Prueba que $M + N$ es subespacio cerrado de X.

8.- Sean X, Y en y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(a) Si $\inf\{\|Tx\| : \|x\| = 1, x \in X\} > 0$, prueba que T es un isomorfismo topológico entre X y $T(X)$.

(b) Sean $M = Ker(T)$ y $q : X \to X/M$ la aplicación cociente. Prueba que existe un único operador inyectivo $S \in \mathcal{L}(X/M, Y)$ tq $T = S \circ q$ y $\|S\| = \|T\|$.

9.- Sea K compacto. Un funcional $\phi \in C(K)'$ se dice que es positivo sii $\phi(f) \geq 0$, $\forall f \in C(K)^+$. Prueba que (1) ϕ positivo $\Rightarrow \phi$ continuo; (2) Dos cualesquiera de las siguientes condiciones implica la tercera: (i) $\|\phi\| = 1$; (ii) $\phi(1) = 1$; (iii) ϕ es positivo.

10.- (T. de Jensen) Sean (Ω, Σ, μ) espacio de probabilidad, $f \in L_1(\mu, \mathbb{R})$ y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa ($\Rightarrow$ continua). Prueba que $\phi(\int_\Omega f d\mu) \leq \int_\Omega \phi \circ f d\mu$.

11.- Sean $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, $a \in \mathbb{R}$. Definamos $f_a(t) = f(t-a)$, $t \in \mathbb{R}$. Prueba que $f_a \in L_p(\mathbb{R})$, $\|f_a\|_p = \|f\|_p$ y que si $a_n \to a$, entonces $f_{a_n} \to f_a$ en la norma $\|.\|_p$.

12.- Sean $f \in L_1(\mathbb{R})$, $\delta > 0$ y definamos $f^\delta(t) = \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} f(t+u)du$. Prueba que: (a) f^δ es continua en $\mathbb{R}$, $f^\delta \in L_1(\mathbb{R})$ y $\|f^\delta\|_1 \leq \|f\|_1$; (b) $f^\delta \underset{\delta\to 0}{\to} f$ en la norma $\|.\|_1$.

13.- Sean $c \in [0,1]$ y, $\forall f \in L_1([0,1])$, $\phi_c(f) = \int_0^c f(t)dt$. Prueba que $\{\phi_c : c \in [0,1]\}$ es total en $L_1([0,1])$.

14.- Sea T et y denotemos por $C_0(T) = \{f \in C(T,\mathbb{R}) : \forall\epsilon > 0, \{t \in T : |f(t)| \geq \epsilon\}$ es compacto$\}$. Prueba que:

(a) $C_0(T)$ es un álgebra de Banach conmutativa tq, si $\mathcal{A} \subset C_0(T)$ es un subálgebra que separa puntos de T y no se anula en T, entonces $\overline{\mathcal{A}} = C_0(T)$.

(b) El subespacio generado por las funciones $p(t)e^{-nt}$, $n \in \mathbb{N}$, p polinomio, es denso en $C_0([0,+\infty))$.

(c) Idem para el subespacio generado por las funciones $p(t)e^{-nt^2}$, $n \in \mathbb{N}$, p polinomio, en $C_0(\mathbb{R})$.

15.- (a) Prueba que el ev $\{p(t)e^{-t} : p$ polinomio$\}$ es denso en $C_0([0,\infty])$.

(b) Prueba que el ev $\{p(t)e^{-t^2} : p$ polinomio$\}$ es denso en $C_0(\mathbb{R})$.

16.- Sea $\Psi : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ tq $\Psi(f) = \int_{0^+}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t}}dt$. Estudia si Ψ es lineal y continuo cuando se consideran en $C([0,1])$ las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$.

17.- Sea B la bola unidad cerrada de $C([0,1])$. Demostrar que: (a) B es cerrado en $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$; (b) $C([0,1]) = \cup_{n=1}^\infty nB$; (c) $\overset{\circ}{B} = \emptyset$ (el interior en $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$.

18.- Sean E un en y $T : E \to \mathbb{K}$ aplicación lineal no constante. Probar que T es sobre y abierta.

19.- Demostrar que si $1 \leq r \leq s \leq \infty$, entonces la inclusión canónica $i : \ell_r \to \ell_s$ es lineal y continua tq $\|x\|_s \leq \|x\|_r$. ¿Es i sobre? Mostrar que $\cap_{s>r}\ell_s \setminus \ell_r \neq \emptyset$, $1 \leq r < \infty$.

ANÁLISIS FUNCIONAL. HOJA N. 3

1.- Los momentos de $f \in L_1([0,1])$ son los números $y_n = \int_0^1 t^n \cdot f(t)dt$. Prueba que si $f, g \in L_1([0,1])$ tienen los mismos momentos, entonces $f = g$ ctp.

2.- Sea X un en tq X^* es separable. Prueba que X es separable.

3.- Sean $1 \leq p < \infty$ y $\mathcal{P}$ el conjunto de los polinomios de una variable. Prueba que:
(a) $\mathcal{P}$ es denso en $L_p(I)$, siendo $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo finito.
(b) El ev $\{p(t) \cdot e^{-t} : p(t) \in \mathcal{P}\}$ es denso en $L_p([0,\infty))$.
(c) El ev $\{p(t) \cdot e^{-t^2} : p(t) \in \mathcal{P}\}$ es denso en $L_p(\mathbb{R})$.

4.- Prueba que $\mathbb{Q}$ no puede expresarse como intersección de una familia contable de abiertos de $\mathbb{R}$.

5.- Sea X em completo tq $X = \cup_{n\geq 1} A_n$, $A_n \in \mathcal{C}_X$. Probar que $\cup_{n\geq 1} \overset{\circ}{A}_n$ es denso en X.

6.- Sea $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ una secuencia de escalares tq $\sum_{n\geq 1} \lambda_n \cdot x_n$ converge $\forall \ \{x_n\}_{n\geq 1} \in c_0$. Probar que $\{\lambda_n\}_{n\geq 1} \in \ell_1$.

7.- Sean X, Y en y $T : X \to Y$ aplicación lineal. Prueba que T es continua sii $y^* \circ T \in X^*$, $\forall y^* \in Y^*$.

8.- Halla $\mathcal{F} \subset (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)^*$ tq $\mathcal{F}$ no es acotada pero sí puntualmente acotada.

9.- Utiliza el T. de la aplicación abierta para probar que si $(a_n)_{n\geq 1}, a_n > 0$, verifica $\sum_{n\geq 1} a_n < +\infty$, entonces $\exists (y_n)_{n\geq 1}, y_n \geq 0$, con $\limsup_{n\geq 1} y_n = +\infty$ tq $\sum_{n\geq 1} a_n y_n < +\infty$.

10.- Sea $X = \{c_{00}, \|\cdot\|_1\}$ y consideremos los subespacios:

$$N = \{x \in X : x_1 = x_3 = x_5 = ... = 0\};$$
$$M = \{x \in X : x_1 = x_2, 2x_3 = x_4, 3x_5 = x_6, ...\}$$

Prueba que $X = M \oplus N$ (suma directa) pero que la proyección sobre M, a lo largo de N, no es acotada.

11.- Sea $(c_n)_{n\geq 1}, c_n > 0$, secuencia de números. Prueba que la condición necesaria y suficiente para la existencia de números $b_n \geq 0$ tq $\sum_{n\geq 1} b_n^2 \cdot c_n < +\infty$ pero $\sum_{n\geq 1} b_n = +\infty$, es que $\sum_{n\geq 1} c_n^{-1} = +\infty$.

12.- (a) Prueba que: $\{x_i\}_{i\in I}$ es sumable $\Rightarrow \{x_i\}_{i\in J}$ es sumable, $\forall J \subset I$; (b) Prueba que: $\sum_{i\in I} x_i = x$ y $T : X \to Y$ es lineal y continuo $\Rightarrow \sum_{i\in I} Tx_i = Tx$.

13.- (a) Sea X un en tq dim$X < \aleph_0$. Entonces $\sum_{i\in I} x_i$ es sumable $\Leftrightarrow \sum_{i\in I} \|x_i\|$ es sumable.
(b) Si $\sum_{i\in I} x_i$ es sumable, el conjunto $\{i \in I : \|x_i\| > \epsilon\}$ es finito para todo $\epsilon > 0$.

14.- Prueba que en $C([0,1])$: (i) $< f, g >= \sum_{n\geq 1} n^{-2}.f(t_n).\overline{g(t_n)}$, $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{Q} \cap [0,1]$; (ii) $< f, g >= \int_0^1 f(t).\overline{g(t)}.dt$ son productos escalares, para los que $C([0,1])$ no es completo.

15.- Sea $\mathcal{P}_n$ el espacio de los polinomios reales de grado $\leq n$. Prueba que hay un único $p \in \mathcal{P}_n$ tq, $\forall f \in \mathcal{P}_n$, $\int_{-1}^0 f(t).dt = \int_0^1 f(t).p(t).dt$.

16.- (T. de Jordan) Prueba que la norma de un en X verifica la identidad del paralelogramo sii deriva de un producto escalar.

17.- Prueba la fórmula $\sum_{n\geq 1} 1/n^2 = \frac{\pi^2}{6}$. [Sugerencia: usa que $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es ortogonal maximal en $L_2([0,2\pi])$ y la función $u(t) = t$].

18.- Sea X un en. Prueba que X es complementado en X^{***}.

19.- Sea c el espacio de las sucesiones de escalares que tienen límite, con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Prueba que $c^* = \ell_1$.

20.- Sea K un compacto. Prueba que son equivalentes : (i) K es metrizable ; (ii) $C(K)$ es separable.

21.- Sea $x_n(t) = sen(nt)$, $t \in [0,1]$. Prueba que $x_n \xrightarrow{w} 0$ en $L_2([0,1])$, pero que $x_n \not\to 0$ en norma.

22.- Sean X, Y en y $T : X \to Y$ lineal. Prueba que son equivalentes: (1) $x_n \to 0$ en norma en $X \Rightarrow Tx_n \to 0$ en norma en Y; (2) T es continuo en las w-topologías; (3) T es acotado.

23.- Si X es e.B., prueba que X es separable sii $(B(X^*), w^*)$ es metrizable.

24.- Deduce de la ecuación de Parseval que $\frac{\pi}{s} coth(\pi s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{s^2+n^2}$.

ANÁLISIS FUNCIONAL. HOJA N. 4

1.- Sean $S, T \in \mathcal{B}(X)$ tq $I - ST$ es invertible con inversa U. Prueba que $I - TS$ es invertible con inversa $I + TUS$.

2.- (a) Sea H eH sobre $\mathbb{C}$ y $T \in \mathcal{B}(H)$ tq $< Tx, x >= 0$, $\forall x \in H$. Prueba que $T = 0$; (b) Mostrar con un ejemplo que (a) puede ser falso si H es eH real.

3.- Sea X un eB y $T \in \mathcal{B}(X)$. (a) Probar que, $\forall x \in X, \forall x^* \in X^*$, la función $f(z) = x^*((T - zI)^{-1}x)$, $\forall z \in \rho(T)$, es analítica en $\rho(T)$ y que $f(z) \underset{z\to\infty}{\to} 0$; (b) Deduce de aquí que $\sigma(T) \neq \emptyset$, cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

4.- Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Prueba que $|\lambda| > \|T\| \to \|(\lambda I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}$.

5.- Sean $T \in \mathcal{B}(E)$ y $\{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subset \rho(T)$ tq $\lambda_n \to \lambda$. Prueba que si la secuencia $\{R(\lambda_n, T)\}_{n\geq 1}$ es acotada, entonces $\lambda \in \rho(T)$ (aquí $R(\lambda_n, T) = (\lambda_n I - T)^{-1}$).

6.- Sean $\{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ y $p \in [1, \infty)$. Definimos un (candidato a ser) operador T en ℓ_p poniendo $T(u)(n) = \lambda_n u(n)$, $\forall n \geq 1$. Probar que:

(1) T es operador lineal y continuo en ℓ_p sii la secuencia $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ es acotada.

(2) Halla $ev(T)$ y $\sigma(T)$ cuando T es continuo.

7.- Sea $p \in [1, \infty]$ y definamos $S : \ell_p \to \ell_p$ tq $Su(n) = u(n+1)$, $\forall n \geq 1$.

(1) Probar que $ev(S) = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| < 1\}$, si $p < \infty$, y $ev(S) = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq 1\}$, si $p = \infty$.

(2) Deducir que $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq 1\}$ en ambos casos.

8.- Sean H un e.H., $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset H$ una familia ortonormal y $\{\mu_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ tq $\mu_n \to 0$. Definimos, $\forall x \in H$:

$$Tx = \sum_{n\geq 0} \mu_n < x, f_n > f_n.$$

Prueba que T es un operador compacto autoadjunto en H.

9.- (A) Sea $T : \ell_p \to \ell_p$, $1 \leq p \leq \infty$, tq $Tu(n) = \lambda_n u(n)$ (operador definido en Ej. 6). Probar que: (1) T es compacto $\Leftrightarrow \lambda_n \to 0$; (b) Si $p = 2$, T es Hilbert-Schmidt sii $\sum_{n\geq 1} |\lambda_n|^2 < \infty$.

(B) Sea $S : \ell_p \to \ell_p$, $1 \leq p \leq \infty$, tq $Su(n) = u(n+1)$ (operador definido en Ej. 7.) ¿Es S compacto?

(C) Sea $\lambda_n \to 0$. Hallar $ev(TS)$ y $\sigma(TS)$.

10.- Sean H eH y $T \in \mathcal{L}(H)$. Prueba que T es compacto sii $T^\bullet$ es compacto.

11.- Sean X, Y eB, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tq X es reflexivo. Prueba que son equivalentes: (i) T es compacto; (ii) Toda sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0} \subset X$ tq $x_n \stackrel{w}{\to} x_0$ verifica que $Tx_n \stackrel{\|\cdot\|}{\to} Tx_0$.

12.- (a) Prueba que ℓ_1 tiene la propiedad de Schur, e.d. que toda sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0} \subset \ell_1$ tq $x_n \stackrel{w}{\to} x_0$ verifica que $x_n \stackrel{\|\cdot\|}{\to} x_0$.
(b) Prueba que ℓ_1 no verifica la equivalencia de Ej. 11.

13.- Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $K \in C([a,b]^2)$ y $\alpha, \beta : [a,b] \to [a,b]$ continuas. Si $f \in C([a,b])$, $x \in [a,b]$, definimos:

$$Tf(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,y) f(y) dy.$$

Prueba que $T : C([a,b]) \to C([a,b])$ es lineal y compacto.

14.- Definimos $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ del siguiente modo:

$$Tf(x) = \int_0^{1-x} f(y)dy, \ \forall f \in C([0,1]), \ \forall x \in [0,1].$$

Prueba que T es compacto y calcula $\sigma(T)$.

15.- Sea X un eB que posee una secuencia de operadores de rango finito $\{P_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{L}(X)$ tq $\|P_n\| \leq 1$ y $P_n x \stackrel{\|\cdot\|}{\to} x$, $\forall x \in X$. Prueba que : (i) X es separable; (ii) Si Y es un eB y $T \in \mathcal{L}(Y,X)$ es compacto, entonces T es límite en $\mathcal{L}(X,Y)$ de una sucesión de operadores de rango finito.

16.- Definimos $T : L_p([0,1]) \to L_p([0,1])$, $1 \leq p \leq \infty$, del siguiente modo:

$$Tf(x) = \int_0^{1-x} f(y)dy, \ \forall f \in C([0,1]), \ \forall x \in [0,1].$$

Prueba que T es compacto y calcula $\sigma(T)$.

17.- Sean $E = \mathcal{L}_p([0,1])$, $1 \leq p \leq \infty$, ó $E = C([0,1])$ y $T : E \to E$ definido por:

$$Tf(x) = \int_0^1 (x \wedge y) f(y) dy, \ \forall f \in E, \ \forall x \in [0,1].$$

(a) Prueba que $Tf(x) = \int_0^x y f(y)dy + x\int_x^1 f(y)dy$. (b) Prueba que T es compacto. (c) Halla $\sigma(T)$.