(1) Notemos que si $x, y \in \ell_1$, su producto $z = x \cdot y$ se define como la serie producto de las series $\sum_{n\geq 0} x_n$, $\sum_{n\geq 0} y_n$.

(1) Hay que comprobar que : $x, y \in \ell_1 \Rightarrow x \cdot y = z \in \ell_1$.

Esto es consecuencia del siguiente resultado de la teoría de series:

"Si $\sum_{n\geq 0} a_n$, $\sum_{n\geq 0} b_n$ son series de términos positivos convergentes, v.g. $\sum_{n\geq 0} a_n = A$, $\sum_{n\geq 0} b_n = B$, entonces su producto $\sum_{n\geq 0} c_n$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$, es también convergente, digamos $\sum_{n\geq 0} c_n = C$, y $C = A \cdot B$"

Queda así probado que $x \cdot y = z \in \ell_1$ y que:

$$\|z\|_1 = \sum_{n\geq 0} |z_n| \leq \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k| \cdot |y_{n-k}| \right) = \left(\sum_{n\geq 0} |x_n|\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} |y_n|\right) = \|x\|_1 \cdot \|y\|_1$$

(2) El producto es asociativo porque el producto de series lo es.

(3) Por último es fácil ver que $(\lambda x) y = \lambda \cdot (x \cdot y)$, $x(y+z) = x \cdot y + x \cdot z$, $x \cdot y = y \cdot x$ (el producto de series tiene estas propiedades) y que existe unidad que es $e = (1, 0, 0, 0, \ldots)$ con $\|e\|_1 = 1$.

Por tanto $(\ell_1, \|\cdot\|, \cdot)$ es un álgebra de Banach conmutativa y unitaria.

---

(2) Por ser F equicontinua, dado $\varepsilon > 0$, $\forall x \in K$, existe una bola $B(x; r_x)$ (de centro x y radio $r_x > 0$) t.q. $\forall\, t, s \in B(x; r_x)$, $\forall f \in F$, $|f(t) - f(s)| \leq \varepsilon$. La colección de bolas $\{B(x; r_x/2)\}_{x \in K}$ recubre K, que es compacto. Luego $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i; \frac{1}{2} r_{x_i})$ para ciertos $x_1, \ldots, x_n$. Sea $\delta = \frac{1}{2} \min\{r_{x_1}, \ldots, r_{x_n}\}$. Entonces si $t, s \in K$ verifican $d(t,s) \leq \delta$, existirá $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ t.q. $t \in B(x_{i_0}; \frac{1}{2} r_{x_{i_0}})$, de donde $s \in B(x_{i_0}; r_{x_{i_0}})$. Luego $|f(t) - f(s)| \leq \varepsilon$, $\forall f \in F$.

---

(3) (a) Que $\sum_{n\geq 0} |c_n| < +\infty$ se obtiene aplicando el criterio de Raabe.

(b) **Tenemos que probar que** dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in [-1, 1]$,

$\left| |x| - P_n(x) \right| \leq \varepsilon$. Como $\sum_{n \geq 0} |c_n| < +\infty$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\sum_{n \geq n_0} |c_n| \leq \varepsilon$. Afirmamos que $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in [-1,1]$, $\left| |x| - P_n(x) \right| \leq \varepsilon$. En efecto, como $x \in [-1,1]$ se tiene $y = x^2 - 1 \in [-1,1]$, y podemos utilizar el desarrollo $(1+y)^{1/2} = \sum_{k \geq 0} c_k \cdot y^k$ (válido para $y \in [-1,1]$).

Así que $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in [-1,1]$,

$$|x| = (1 + x^2 - 1)^{1/2} = \sum_{k \geq 0} c_k \cdot (x^2-1)^k = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot (x^2-1)^k + \sum_{k > n} c_k \cdot (x^2-1)^k$$

de donde:

$$\left| |x| - \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot (x^2-1)^k \right| = \left| \sum_{k>n} c_k \cdot (x^2-1)^k \right| \leq \sum_{k>n} |c_k| \leq \varepsilon .$$

---

(4) Supongamos que $e^{-2\pi i t} \in \mathcal{A}$. Entonces dado $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe $\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot e^{2\pi i k t} = g(t) \in$ $\in \operatorname{alg}\{1, f\}$ t.q. $\| e^{-2\pi i t} - g(t) \| \leq \frac{1}{2}$. Así que:

$$1 = \left| \int_0^1 e^{-2\pi i t} \cdot e^{2\pi i t} \cdot dt \right| = \left| \int_0^1 [g(t) - (g(t) - e^{-2\pi i t})]\, e^{2\pi i t} \cdot dt \right| =$$

$$= \left| \cancel{\int_0^1 g(t) \cdot e^{2\pi i t} \cdot dt}^{\,0} + \int_0^1 (e^{-2\pi i t} - g(t))\, e^{2\pi i t} \cdot dt \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 (e^{-2\pi i t} - g(t))\, e^{2\pi i t} \, dt \right| \leq \int_0^1 \| e^{-2\pi i t} - g(t) \| \cdot \| e^{2\pi i t} \| \cdot dt \leq \frac{1}{2}$$

lo que es contradictorio.

---

(5) Hay que probar que, dado $\varepsilon > 0$, existe un polinomio trigonométrico **de la forma** $C_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \cos kt$ **t.q.** $\| f - C_n \|_\infty \leq \varepsilon$. **Puesto que** $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, por T. de Weierstrass (15.10. Teorema), existe un polinomio trigonométrico $P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cdot \cos kt + b_k \cdot \operatorname{sen} kt)$ t.q. $\| f - P_n \|_\infty \leq \varepsilon$. Aplicando que f y $\cos kt$ son pares y que $\operatorname{sen} kt$ es impar, obtenemos:

$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\left| f(t) - \sum_{k=0}^{n} (a_k \cdot \cos kt + b_k \cdot \operatorname{sen} kt) \right| \leq \varepsilon \qquad \xRightarrow{\text{Sumando}}$$

$(t \to -t)$ $$\left| f(t) - \sum_{k=0}^{n} (a_k \cdot \cos kt - b_k \cdot \operatorname{sen} kt) \right| \leq \varepsilon$$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $|2[f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \cos kt]| \le 2\varepsilon \iff \| f - \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \cos kt \|_\infty \le \varepsilon.$

---

(6) Como $T = \sum_{i,j} T_{ij}$ es claro que $\|T\| \le \sum_{i,j} \|T_{ij}\|$. Pero:

$$\|T_{ij}\| = \sup \left\{ \| e_i \cdot a_{ij} \cdot x_j \|_r : \left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\|_p \le 1 \right\}$$

Como $\| e_i \cdot a_{ij} \cdot x_j \|_r = |a_{ij}| \cdot |x_j|$ y $\left[\left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\|_p \le 1 \Rightarrow |x_j| \le 1 \right]$, concluimos que

$\|T_{ij}\| \le |a_{ij}|$. Luego $\|T\| \le \sum_{i,j} |a_{ij}|$.

---

(7) Bastará probarlo cuando $\dim M = 1$ (luego se procede por inducción). Así que sea $M = [a]$.

(1) Si $a \in N$, entonces $M + N = N$, que es cerrado por hipótesis.

(2) Sea $a \notin N$. Por T. de H-B existe $f \in X^*$ t.q. $N \subset \ker f$ y $f(a) = 1$. Sea $\{x_n\}_{n \ge 1} \subset M + N$ t.q. $x_n \longrightarrow x$. Queremos probar que $x \in M + N$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene la descomposición $x_n = y_n + z_n$, $y_n = \lambda_n \cdot a \in M$, $z_n \in N$. La familia $\{x_n\}_{n \ge 1}$ es acotada (porque es convergente). Luego $\{f(x_n) : n \ge 1\} = \{\lambda_n\}_{n \ge 1}$ es acotado en $\mathbb{K}$. Así que existe una subsucesión $\{\lambda_{n_k}\}_{k \ge 1}$ convergente, digamos, $\lambda_{n_k} \longrightarrow \lambda$. De aquí que $y_{n_k} = \lambda_{n_k} \cdot a \longrightarrow \lambda a$. Por lo tanto $x_{n_k} - y_{n_k} = z_{n_k} \longrightarrow x - \lambda a = z$. Como $z_{n_k} \in N$ y N es cerrado, resulta $z \in N$. Así que $x = \lambda a + z \in M + N$, lo que prueba que $M + N$ es cerrado.

---

(8)

(a) Hay que probar que existen $k, K > 0$ t.q. $\forall x \in X$, $k \cdot \|x\| \le \|Tx\| \le K \cdot \|x\|$.

Sea $0 < r = \inf\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$. Se tiene que $r \cdot \|x\| \le \|Tx\|$, $\forall x \in X$. En efecto, ello es claro si $x = 0$. Sea $x \ne 0$. Entonces, si $y = \frac{x}{\|x\|}$, resulta $\|y\| = 1$, por lo que $\|Ty\| = \|T(\frac{x}{\|x\|})\| \ge r$ e.d. $\|Tx\| \ge r \cdot \|x\|$. Por último como $T \in$

$\in \mathcal{B}(X,Y)$, se tiene, $\forall x \in X$, $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$. Así que T es isomorfismo topológico sobre su imagen.

(b) **(b1)** Una aplicación lineal $S : X/M \to Y$ t.q. $T = S \circ Q$ existe (basta definir $S([x]) = Tx$, $\forall x \in X$, comprobar que es lineal y que $T = S \circ Q$) y es única (porque toda aplicación lineal $S : X/M \to Y$ t.q. $T = S \circ Q$ debe verificar que $S([x]) = Tx$, $\forall x \in X$).

Veamos que S es continua. Recordemos que:

(1) La aplicación cociente $Q : X \to X/M$ es continua (luego $Q^{-1}(G) \in T_X$, $\forall G \in T_{X/M}$).

(2) $\forall x \in X$, $\|Qx\| \leq \|x\|$ (porque $\|Qx\| = \inf\{\|x+z\| : z \in M\} \leq \|x\|$).

(3) $B_{X/M} \supset Q(B_X) \supset \mathring{B}_{X/M}$ (por la definición de la norma en X/M).

(4) Q es abierta, e.d. $\forall G \in T_X$, $Q(G) \in T_{X/M}$ (por (3))

Por tanto $G \in T_{X/M}$ sii $Q^{-1}(G) \in T_X$. Para probar que S es continua bastará ver que, $\forall \mathcal{U} \in T_Y$, $S^{-1}(\mathcal{U}) \in T_{X/M}$. Pero $S^{-1}(\mathcal{U}) \in T_{X/M}$ sii $Q^{-1} \circ S^{-1}(\mathcal{U}) = (S \circ Q)^{-1}(\mathcal{U}) = T^{-1}(\mathcal{U}) \in T_X$, lo que es cierto porque T es continua por hipótesis.

(b2) Sea $S([x]) = S([y]) \Rightarrow Tx = Ty \Rightarrow x - y \in M = \ker T \Rightarrow [x] = [y] \Rightarrow S$ es inyectiva. Se tiene además:

$$\|S\| = \sup\{\|S([x])\| : [x] \in B_{X/M}\} =$$

$$= \sup\{\|Tx\| : [x] \in B_{X/M}\} = \begin{cases} \underset{\substack{\uparrow \\ Q(B_X) \subset B_{X/M}}}{\geq} \sup\{\|Tx\| : x \in B_X\} = \|T\| \\ = \sup\{\|Tx\| : [x] \in \mathring{B}_{X/M}\} \underset{\substack{\uparrow \\ \mathring{B}_{X/M} \subset Q(B_X)}}{\leq} \sup\{\|Tx\| : x \in B_X\} = \|T\| \end{cases}$$

Luego $\|S\| = \|T\|$.

AF   HOJA Nº 2

(9) Consideremos ~~en primer~~ lugar el caso real : $C(K) = \{f: K \to \mathbb{R} \text{ continuas}\}$.

(1) Sea ϕ funcional positivo y $\phi(1) = u \geq 0$. Entonces, $\forall f \in B_{C(K)}$, $\phi(f) \in [-u, u]$ ($\Rightarrow \phi$ es acotado y por tanto continuo). En efecto, si $f \in B_{C(K)}$, entonces $-1 \leq f(t) \leq 1$, $\forall t \in K$. Como ϕ es positivo, obtenemos:

$$-u = \phi(-1) \leq \phi(f) \leq \phi(1) = u$$

(2) Supongamos ahora sólo que ϕ es funcional sobre $C(K)$

__i+ii ⇒ iii__ Si ϕ no es positivo, $\exists f \in B_{C(K)}$, $f \geq 0$ t.q. $\phi(f) < 0$. Sea $g = 1 - f$. Entonces $0 \leq g \leq 1 \Rightarrow g \in B_{C(K)}$, y se tiene:

$$1 = \phi(1) = \phi(1 - f + f) = \phi(1-f) + \phi(f) \underset{\substack{\uparrow \\ \phi(f)<0}}{<} \phi(1-f) \leq \|\phi\| \cdot \|1-f\| \underset{\substack{\uparrow \\ \|\phi\|=1}}{\leq} 1$$

lo que es contradictorio.

__i+iii ⇒ ii__ Sea $u = \phi(1)$. Entonces, ϕ positivo $\Rightarrow u \geq 0$ y (por lo visto antes) $\phi(f) \in [-u, u]$, $\forall f \in B_{C(K)}$. Luego $\|\phi\| = \sup\{|\phi(f)| : f \in B_{C(K)}\} \leq u$. Pero $\|\phi\| = 1 \Rightarrow u \geq 1$. Por otra parte $u = \phi(1) \leq \|\phi\| \cdot \|1\| \leq 1$. Por tanto $u = 1$.

__ii+iii ⇒ i__ ϕ positivo + $\phi(1) = 1 \Rightarrow \phi(f) \in [-1, 1]$, $\forall f \in B_{C(K)} \Rightarrow$ $\|\phi\| = \sup\{|\phi(f)| : f \in B_{C(K)}\} \leq 1$. Pero $1 \in B_{C(K)}$ y $\phi(1) = 1$. Luego $\|\phi\| = 1$.

El caso complejo ($C(K) = \{f : K \to \mathbb{C} \text{ continua}\}$) se reduce al anterior considerando el espacio $C_{\mathbb{R}}(K) = \{f: K \to \mathbb{R} \text{ continua}\}$, que verifica:

(i) ϕ funcional positivo sobre $C(K) \Rightarrow \phi$ funcional positivo sobre $C_{\mathbb{R}}(K)$

(ii) $C(K) = C_{\mathbb{R}}(K) + i \cdot C_{\mathbb{R}}(K)$.

---

(10) Si ϕ es convexa continua (observa que la palabra "continua" es superflua porque "convexa + finita" $\Rightarrow$ "continua"), entonces $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \phi(x) \leq y\}$ es un convexo cerrado de $\mathbb{R}^2$. Si $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus C$ es un punto ($\Rightarrow P$ es compacto convexo) por T. de H-B, existe una forma lineal y continua (e.d. una recta $r_p(x) = a_p \cdot x + b_p$) que separa P de C e.d. $y_0 < r_p(x_0)$, $r_p(x) \leq \phi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Por tanto:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi(x) = \sup\{ r_p(x) : P \in \mathbb{R}^2 \setminus C \}$$

(incluso nos podemos quedar con una familia contable de rectas r_p)

Toda recta $r(x) = ax+b$ verifica, ya que μ es probabilidad, que:

$$r\left(\int_\Omega f\, d\mu\right) = a \cdot \int_\Omega f\, d\mu + b = \int_\Omega af\, d\mu + \int_\Omega b\, d\mu = \int_\Omega (af+b)\, d\mu = \int_\Omega r \circ f\, d\mu \leq \int_\Omega \phi(f)\, d\mu$$

Por tanto, ya que $r_p \leq \phi$, $\forall P \in \mathbb{R}^2 \setminus C$, obtenemos:

$$\phi\left(\int_\Omega f\, d\mu\right) = \sup_{P \in \mathbb{R}^2 \setminus C} r_P\left(\int_\Omega f\, d\mu\right) = \sup_{P \in \mathbb{R}^2 \setminus C} \int_\Omega r_P \circ f\, d\mu \leq \int_\Omega \phi \circ f\, d\mu$$

---

(11)

(1) $\|f_a\|_p = \left[\int_\mathbb{R} |f(t-a)|^p\, dt \right]^{1/p} \underset{t-a=x}{=} \left[\int_\mathbb{R} |f(x)|^p\, dx \right]^{1/p} = \|f\|_p$ (en particular $f_a \in L_p(\mathbb{R})$, si $f \in L_p(\mathbb{R})$)

(2) Sabemos (ver Ej. 62) que el subespacio generado por las funciones características de los intervalos finitos es denso en $L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$. Luego bastará probar que si $f = \chi_I$, $I = [c,d]$, y $a_n \to 0$ entonces $\|f_{a_n} - f\|_p \to 0$. Pero $f_{a_n} =$

$= \chi_{[c+a_n,\, d+a_n]} \Rightarrow f - f_{a_n} = \chi_{[c,\, c+a_n]} - \chi_{[d,\, d+a_n]}$. Luego

$$\|f - f_{a_n}\|_p \leq (2a_n)^{1/p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

---

(12)(a) f^δ es continua en $\mathbb{R}$

Recordemos, en primer término, que si $g \in L_1(\mathbb{R})$, entonces, $\forall u \in \mathbb{R}$ fijo se verifica que $\lim_{v \to 0} \int_u^{u+v} g \cdot dt = 0$.

Fijemos $t_0 \in \mathbb{R}$. Queremos probar que $\lim_{\eta \to 0} f^\delta(t_0 + \eta) = f^\delta(t_0)$. Pero:

$$f^\delta(t_0+\eta) = \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} f(t_0+\eta+u)\,du = \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta+\eta}^{\delta+\eta} f(t_0+u)\,du = \frac{1}{2\delta}\left[\int_{-\delta}^{\delta} f(t_0+u)\,du + \int_{\delta}^{\delta+\eta} f(t_0+u)\,du - \int_{-\delta}^{-\delta+\eta} f(t_0+u)\,du\right]$$

Como $\displaystyle\int_{\delta}^{\delta+\eta} f(t_0+u)\,du \xrightarrow[\eta\to 0]{} 0 \xleftarrow[\eta\to 0]{} \int_{-\delta}^{-\delta+\eta} f(t_0+u)\,du$, concluimos que:

$$f^\delta(t_0+\eta) \xrightarrow[\eta\to 0]{} \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} f(t_0+u)\,du = f^\delta(t_0)$$

<u>$f^\delta \in L_1(\mathbb{R})$ y $\|f^\delta\|_1 \le \|f\|_1$</u>. En efecto:

$$\|f^\delta\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f^\delta(t)|\,dt \le \frac{1}{2\delta}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-\delta}^{\delta} |f(t+u)|\,du\right)dt = \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(t+u)|\,dt\right)du =$$

Teorema de Fubini

$$= \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} \|f_{-u}\|_1\cdot du = \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\|f\|_1\cdot du = \|f\|_1 .$$

(b) Se tiene que:

$$\|f-f^\delta\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \left|f(t) - \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} f(t+u)\,du\right| dt = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{1}{2\delta}\left[\int_{-\delta}^{\delta}(f(t)-f(t+u))\,du\right]\right| dt \le$$

$$\le \frac{1}{2\delta}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-\delta}^{\delta}|f(t)-f(t+u)|\,du\right)dt = \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(t)-f(t+u)|\,dt\right)du =$$

T. de Fubini

$$= \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\|f-f_{-u}\|_1\cdot du$$

Pero por Ej. 76, $\|f-f_{-u}\|_1 \xrightarrow[u\to 0]{} 0$. Luego, dado $\varepsilon>0$, $\exists\, \delta_0>0$ t.q. si $0\le\delta\le\delta_0$, entonces $\|f-f_{-u}\|_1\le\varepsilon$, para $|u|\le\delta$. Así que tomando $0<\delta\le\delta_0$:

$$\|f-f^\delta\|_1 \le \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\|f-f_{-u}\|_1\,du \le \frac{\varepsilon}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}du = \varepsilon$$

lo que prueba que $\|f-f^\delta\|_1 \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$.

(13) Decimos que $\{\phi_c\}_{c\in[0,1]}$ es <u>total</u> en $L_1([0,1])$ si: $[f\in L_1([0,1])$ y $\phi_c(f)=0, \forall c\in[0,1]] \Rightarrow f=0$. Así que sea $f\in L_1([0,1])$ t.q. $\phi_c(f)=0$, $\forall c\in[0,1]$. Entonces:

$$\int_c^d f\,dt = 0, \quad \forall c,d\in[0,1]$$

Sumergiendo $L_1([0,1])$ en $L_1(\mathbb{R})$ de modo natural (**e.d. si** $g\in L_1([0,1])$, definimos $g|_{(-\infty,0)} = 0 = g|_{(1,+\infty)}$), se tendrá que:

$$\forall c,d\in\mathbb{R}, \quad \int_c^d f\,dt = 0 \Rightarrow \forall \delta>0, \quad f^\delta(t) = \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} f(t+u)\,du = 0 \Rightarrow \forall\delta>0, \ f^\delta = 0.$$

Pero por **Ej. 77**, $f^\delta \xrightarrow[\delta\to 0]{} f$ en la norma $\|\cdot\|_1$. Luego $f=0$.

---

(14) (a) Si T es un espacio topológico, se prueba **que** $C_0(T)$ es un álgebra de Banach conmutativa de modo análogo a como se prueba para $C(K)$, con K compacto. No existe elemento unidad en $C_0(T)$, a menos que T sea compacto.

Si aceptamos que existe un subálgebra $\mathcal{Q}\subset C_0(T)$ que separa puntos de T y no se anula en T, estamos aceptando que T es localmente compacto + Hausdorff (ó T_2). En efecto:

(i) <u>$\mathcal{Q}$ separa puntos</u> $\Rightarrow \forall x,y\in T, x\neq y, \exists f\in\mathcal{Q}$ t.q $f(x)\neq f(y)$. Los conjuntos:

$$V^x = \{z\in T: |f(z)-f(x)| < \tfrac{1}{3}|f(x)-f(y)|\}$$

$$V^y = \{z\in T: |f(z)-f(y)| < \tfrac{1}{3}|f(x)-f(y)|\}$$

son entornos abiertos de x,y, respectivamente, t.q. $V^x\cap V^y = \emptyset$

$\Rightarrow$ T es Hausdorff ó T_2

(ii) <u>$\mathcal{Q}$ no se anula en T</u> $\Rightarrow$ T es localmente compacto.

En efecto, sea $x\in T$. Entonces $\exists f\in\mathcal{Q}$ t.q. $|f(x)|>0 \Rightarrow$ el conjunto $\{z\in T: |f(z)|\geq \frac{1}{2}|f(x)|\}$ es un <u>entorno compacto de x</u>.

Por tanto T admite una compactificación.

[Una compactificación de un e.t. X, es otro espacio topológico Y compacto t.q.

(i) X se sumerge homeomorficamente en Y

(ii) X es denso en Y e.d. $\overline{X} = Y$]

Más concretamente, como T es localmente compacto + T_2, T admite la compactificación en un punto ó de Alexandroff αT. Es decir, αT (que también denotamos por K) es un e.t. compacto que, como conjunto, contiene justamente un elemento (denotado por ∞) más que T. Así que $K = T \cup \{\infty\}$. El espacio $C_0(T)$ se corresponde isomorfica e isometricamente con el subespacio $\{f \in C(K) : f(\infty) = 0\}$. Sea $\mathcal{A}_1 = alg\{1, \mathcal{A}\}$ en $C(K)$. Se tiene que $\mathcal{A}_1$ separa puntos de K y no se anula en K. Por el T. de Stone-Weierstrass (caso real, pues suponemos que $C(K) = \{f : K \to \mathbb{R} \text{ continua}\}$) resulta que $\overline{\mathcal{A}_1} = C(K)$. Sea $f \in C_0(T)$ e.d. $f \in C(K)$ t.q. $f(\infty) = 0$. Entonces existe $a \in \mathbb{R}$ y $g \in \mathcal{A}$ tales que $\|f - a - g\|_\infty \leq \varepsilon$, para un $\varepsilon > 0$ previo. Por tanto $|f(\infty) - a - g(\infty)| = |-a| \leq \varepsilon$. De aquí que $\|f - g\|_\infty \leq 2\varepsilon$, lo que prueba que $\overline{\mathcal{A}} = C_0(T)$.

(b) Basta aplicar (a) ~~a~~ $\mathcal{A} = alg\{p(t)e^{-nt} : n = 1, 2, \dots, \ p \text{ polinomio}\}$ y observar que:

(i) $p(t)e^{-nt} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0 \Rightarrow \mathcal{A} \subset C_0([0, +\infty))$

(ii) Claramente $\mathcal{A}$ es un álgebra que separa puntos de $[0, \infty)$ y no se anula en $[0, +\infty)$ (basta considerar e^{-t}).

(c) Igual que (b).

(15) (a) Sea $E = \{p(t)\cdot e^{-t} : p \text{ polinomio}\}$. Es claro que E es un subespacio de $C_0([0,\infty))$ (porque $p(t)\cdot e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$). Por Ejer. 79 bastará probar que $p(t)\cdot e^{-nt} \in \overline{E}$, $\forall p$ polinomio, $n = 1,2,3,\dots$ Procediendo por inducción sobre n, probamos que $p(t)\cdot e^{-nt/2} \in \overline{E}$, $\forall p$ polinomio, para $n = 2,3,\dots$

1ª Etapa. Por hipótesis es cierto para $n=2$.

2ª Etapa. Sea cierto para n, e.d. $p(t)\cdot e^{-nt/2} \in \overline{E}$, $\forall p$ polinomio, y probemos que $p(t)\,e^{-(n+1)t/2} \in \overline{E}$, $\forall p$ polinomio. Por el T. de Taylor:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left| e^{-t/2} - \left[1 - \frac{t}{2\cdot 1!} + \frac{t^2}{2^2\cdot 2!} - \dots \pm \frac{t^m}{2^m\cdot m!}\right]\right| = \frac{e^{-\theta t}\cdot t^{m+1}}{2^{m+1}\cdot (m+1)!},\quad 0<\theta<1/2$$

Fijemos $q(t)$ polinomio y probemos que, dado $\varepsilon>0$, $\exists m_0 \in \mathbb{N}$, t.q. $\forall m \geq m_0$, $\forall t \in [0,\infty)$

$$(*)\quad \left| q(t)\left[e^{-t/2} - \left(1 - \frac{t}{2\cdot 1!} + \frac{t^2}{2^2\cdot 2!} - \dots \pm \frac{t^m}{2^m\cdot m!}\right)\right]\cdot e^{-nt/2}\right| \leq \varepsilon$$

Sea $M = \sup\{|q(t)\cdot e^{-t/2}| : t \in [0,\infty)\} < +\infty$. Entonces, $\forall t \in [0,\infty)$:

$$\left|q(t)\left[e^{-t/2} - \left(1 - \frac{t}{2\cdot 1!} + \frac{t^2}{2^2\cdot 2!} - \dots \pm \frac{t^m}{2^m\cdot m!}\right)\right]e^{-nt/2}\right| \leq \left|q(t)\cdot \frac{e^{-\theta t}\cdot t^{m+1}}{2^{m+1}\cdot(m+1)!}\cdot e^{-nt/2}\right| \leq$$

$$\leq |q(t)\cdot e^{-t/2}|\,\frac{t^{m+1}\cdot e^{-t/2}}{2^{m+1}\cdot(m+1)!} \leq M\cdot \frac{t^{m+1}\cdot e^{-t/2}}{2^{m+1}\cdot(m+1)!}$$

Así que todo se reduce a estudiar la función $f_m(t) = \dfrac{t^m\cdot e^{-t/2}}{2^m\cdot m!}$. Su máximo se alcanza en:

$$0 = f_m'(t) = \frac{m\cdot t^{m-1}\cdot e^{-t/2} - \frac{1}{2}t^m\cdot e^{-t/2}}{2^m\cdot m!} \iff t = 2m$$

y su valor verifica:

AF　　　HOJA Nº 2　　　(11)

$$f_m(2m) = \frac{(2m)^m \cdot e^{-m}}{2^m \cdot m!} = \frac{m^m \cdot e^{-m}}{m!} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \quad \left[\begin{array}{c}\text{Ver la Fórmula}\\ \text{de Stirling}\end{array}\right]$$

Así que $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall m \geq m_0$, $\forall t \in [0,\infty)$, $\dfrac{t^{m+1} \cdot e^{-t/2}}{2^{m+1} \cdot (m+1)!} \leq \dfrac{\varepsilon}{M}$. Luego se verifica (*) para este m_0. Como, por hipótesis,

$$q(t)\left[1 - \frac{t}{2\cdot 1!} + \frac{t^2}{2^2 \cdot 2!} - \cdots \pm \frac{t^m}{2^m \cdot m!}\right] e^{-nt/2} \in \overline{E}$$

y $\varepsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $q(t) \cdot e^{-(n+1)t/2} \in \overline{E}$.

(b) El razonamiento **es análogo al anterior**. En primer **término**, **es claro que** $F = \{p(t) \cdot e^{-t^2} :$ **p polinomio**$\}$ **es un** subespacio de $C_0(\mathbb{R})$. **Por Ej. 79** bastará **ver que** $p(t) \cdot e^{-nt^2} \in \overline{F}$, $\forall p$ polinomio, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Por inducción sobre n, probamos que $p(t) \cdot e^{-nt^2/2} \in \overline{F}$, $\forall p$ polinomio, para $n = 2, 3, \ldots$

1ª Etapa. **Por** hipótesis, es cierto para $n = 2$

2ª Etapa. **Sea** cierto para n y probémoslo para $n+1$. **Por T. de Taylor**:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left| e^{-t^2/2} - \left(1 - \frac{t^2}{2\cdot 1!} + \frac{t^4}{2^2 \cdot 2!} - \cdots \pm \frac{t^{2m}}{2^m \cdot m!}\right)\right| = \frac{e^{-\theta t^2} \cdot t^{2(m+1)}}{2^{m+1} \cdot (m+1)!}, \quad 0 < \theta < 1/2$$

Fijemos $q(t)$ polinomio y probemos que, dado $\varepsilon > 0$, $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall m \geq m_0$, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\left| q(t)\left[e^{-t^2/2} - \left(1 - \frac{t^2}{2\cdot 1!} + \frac{t^4}{2^2 \cdot 2!} - \cdots \pm \frac{t^{2m}}{2^m \cdot m!}\right)\right] e^{-nt^2/2} \right| \leq \varepsilon$$

Sea $M = \sup\{ |q(t) \cdot e^{-t^2/2}| ; t \in \mathbb{R}\} < +\infty$. Entonces $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\left| q(t)\left[e^{-t^2/2} - \left(1 - \frac{t^2}{2\cdot 1!} + \frac{t^4}{2^2 \cdot 2!} - \cdots \pm \frac{t^{2m}}{2^m \cdot m!}\right)\right] e^{-nt^2/2} \right| \leq \left| q(t) \cdot \frac{e^{-\theta t^2} \cdot t^{2(m+1)}}{(m+1)! \cdot 2^{m+1}} \cdot e^{-nt^2/2} \right| \leq$$

$$\leq |q(t) \cdot e^{-t^2/2}| \cdot \frac{t^{2(m+1)} \cdot e^{-t^2/2}}{2^{m+1} \cdot (m+1)!} \leq M \cdot \frac{t^{2(m+1)} \cdot e^{-t^2/2}}{2^{m+1} \cdot (m+1)!}$$

Así que habrá que estudiar la función $f_m(t^2) = \dfrac{t^{2m} \cdot e^{-t^2/2}}{2^m \cdot m!}$.

Recordemos que f_m es la función del caso (a), que alcanza su máximo en $t_m = \pm\sqrt{2m}$. Este máximo verifica:

$$f_m(t_m^2) = f_m(2m) \leq \frac{m^m \cdot e^{-m}}{m!} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \left(\text{Por fórmula de Stirling}\right)$$

El resto del argumento es como en (a).

16. En primer término la función $\Psi : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ está bien definida pues $\frac{f(t)}{\sqrt{t}} \in L^1(\lambda)$, $\forall f \in C([0,1])$ ya que $\forall f \in C([0,1])$

$$\int_{0^+}^1 \frac{|f(t)|}{\sqrt{t}}dt \leq \|f\|_\infty \int_{0^+}^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = 2\|f\|_\infty. \tag{1}$$

Además Ψ es claramente lineal.

(1) La aplicación $\Psi : (C([0,1]), \|.\|_\infty) \to \mathbb{R}$ es continua por (1).

(2) La aplicación $\Psi : (C([0,1]), \|.\|_1) \to \mathbb{R}$ no es continua porque, como vamos a ver, no es acotada para la norma $\|.\|_1$. En efecto, sea $f_n \in C([0,1])$, $\forall n \geq 1$, tal que: (i) $f_n(t) = \frac{n}{2}$, si $0 \leq t \leq \frac{1}{n}$; (ii) $f_n(t) = 0$ si $\frac{2}{n} \leq t \leq 1$; (iii) para $\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{2}{n}$ el grafo de f_n es el segmento recto que une los dos tramos anteriores. Observemos que $\|f_n\|_1 \leq 1$ y, sin embargo,

$$\Psi(f_n) = \int_{0^+}^1 \frac{f_n(t)}{\sqrt{t}}dt \geq \frac{n}{2}\int_{0^+}^{1/n} \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \frac{\sqrt{n}}{2} \to +\infty.$$

17. Sea $B := \{f \in C([0,1]) : \|f\|_\infty \leq 1\}$ la bola unidad cerrada de $(C([0,1]), \|.\|_\infty)$.

(a) Bastará probar que, si $f_0 \in C([0,1])$ verifica $|f_0(t)| > 1$ para cierto $t_0 \in [0,1]$, existe $x^* \in (C([0,1]), \|.\|_1)^*$ separando f_0 de B. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $f_0(t_0) > 1 + \epsilon_0$ con $\epsilon_0 > 0$. Elegimos $0 < \epsilon < 1$ tal que $f_0(t) > 1 + \epsilon_0$, $\forall t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$. Sea $x^* : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ tal que $x^*(f) = \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} f(t)dt$, $\forall f \in C([0,1])$. Es inmediato que $x^* \in C([0,1]), \|.\|_1)^*$. Además

$$x^*(f_0) = \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} f_0(t)dt \geq (1+\epsilon_0)\int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \mathbf{1}_{[0,1]}dt > \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \mathbf{1}_{[0,1]}dt > 0,$$

mientras que para toda $f \in B$ se tiene que

$$x^*(f) = \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} f(t)dt \leq \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \mathbf{1}_{[0,1]}dt.$$

(b) Esto es obvio.

(c) Necesariamente $int_{\|.\|_1}(B) = \emptyset$, pues en caso contrario B sería un entorno del 0 en $(C([0,1]), \|.\|_1)$ y, por tanto, la identidad $id : (C([0,1]), \|.\|_1) \to (C([0,1]), \|.\|_\infty)$ sería una aplicación continua, lo que es falso (ver Ejercicio 7, H.1 de AF.).

Observemos que no hay contradicción con el Cor. 2.3.3 de Teoría porque $(C([0,1]), \|.\|_1)$ es en pero no es espacio de Banach.

18. Supongamos que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ es análogo). Bastará probar que existe $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon D \subset T(B(E))$. Sean $e \in B(E)$ tal que $Te \neq 0$ y $\epsilon := |Te|$. Entonces

$$\epsilon D = \{zTe : z \in D\} = T(\{ze : z \in D\}) \subset T(B(E)).$$

19. (a) Veamos que para $1 \leq r < s \leq \infty$ y para todo $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell_r$ se verifica la desigualdad $\|x\|_s \leq \|x\|_r$.

(a1) Supongamos que $s = \infty$. Como $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ porque $\|x\|_r = (\sum_{n\geq 1} |x_n|^r)^{1/r} < \infty$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\|x\|_\infty = |x_p|$, por lo que obviamente $\|x\|_\infty = |x_p| \leq \|x\|_r$.

(a2) Supongamos que $s < \infty$. Es claro que, si $x = 0$ la desigualdad se cumple. Sea $x \neq 0$. Distinguimos dos casos, a saber

Caso 1. Sea $x \in S(\ell_r)$. Entonces $|x_n| \leq 1$ de donde $|x_n|^s \leq |x_n|^r$, $\forall n \geq 1$. Por tanto

$$\|x\|_s^s = \sum_{n\geq 1} |x_n|^s \leq \sum_{n\geq 1} |x_n|^r = \|x\|_r^r = 1,$$

es decir, $\|x\|_s \leq 1 = \|x\|_r$.

Caso 2. Sea $x \neq 0$ arbitrario. Entonces $x/\|x\|_r \in S(\ell_r)$ y por el Caso 1 se verifica

$$\tfrac{1}{\|x\|_r}\|x\|_s = \|\tfrac{x}{\|x\|_r}\|_s \leq \|\tfrac{x}{\|x\|_r}\|_r = \tfrac{1}{\|x\|_r}\|x\|_r,$$

de donde $\|x\|_s \leq \|x\|_r$ en este caso.

Por tanto concluimos que la inclusión $i : \ell_r \to \ell_s$ es lineal y continua.

(b) Sin embargo la inclusión $i : \ell_r \to \ell_s$ no es sobre porque

(b1) Si $s = \infty$, entonces $x = (1, 1, 1, \cdots)$ está en ℓ_∞ pero no está en ℓ_r.

(b2) Sean $s < \infty$ y $x = (x_n)_{n \geq 1}$ tal que $x_n = n^{-1/r}$. Entonces $x \in \ell_s \setminus \ell_r$.

(c) El vector $x = (x_n)_{n \geq 1}$ tal que $x_n = n^{-1/r}$ verifica $x \in \cap_{s>r} \ell_s \setminus \ell_r$.