# VARIABLE COMPLEJA Y ANÁLISIS FUNCIONAL

Antonio Suárez Granero

Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

# Índice general

# Parte I

# VARIABLE COMPLEJA

# Capítulo 1

# Resumen de resultados básicos previos

## 1.1. Diferenciación. Funciones holomorfas

**Definición 1.1.1.** *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $z_0 \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Decimos que $f$ es diferenciable (compleja) en $z_0$ sii existe:*

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

*Decimos que $f$ es holomorfa en $\Omega$ (abrev., $f \in \mathcal{H}(\Omega)$) sii existe $f'(z)$, $\forall z \in \Omega$.*

**Proposición 1.1.2.** *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $z_0 \in \Omega$ y $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$.*

*(A) Son equivalentes:*
*(A1) $f$ es diferenciable (compleja) en $z_0$.*
*(A2) $f$ es diferenciable (real) en $z_0$ y se verifican las ecs. de Cauchy-Riemann:*

$$f_x(z_0) + i f_y(z_0) = 0 \quad \Leftrightarrow u_x(z_0) = v_y(z_0),\ u_y(z_0) = -v_x(z_0)$$

*(B) Son equivalentes los siguientes asertos:*
*(B1) $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*
*(B2) $f$ es diferenciable (real) en $\Omega$ + ecs. de Cauchy-Riemann.*
*(B3) Existen y son continuas en $\Omega$ las derivadas parciales $u_x, u_y, v_x, v_y$ + ecs. de Cauchy-Riemann.*

*(C) Se tiene que $\mathcal{H}(\Omega) \subset C(\Omega, \mathbb{C})$ es un sub-álgebra conmutativa unitaria tq si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega$, entonces $1/f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

*(D) Sean $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$ abierto y $\Omega \xrightarrow{f} \Omega_1 \xrightarrow{g} \mathbb{C}$ holomorfas. Entonces $h := g \circ f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y se verifica que ,$\forall z \in \Omega$, $h'(z) = g'(f(z))f'(z)$ (regla de la cadena).*

*(E) Sean $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$ abierto y $\Omega \xrightarrow{f} \Omega_1 \xrightarrow{g} \mathbb{C}$ tq $g$ es holomorfa, $f$ es continua, $g'(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega_1$, y $g \circ f(z) = z$, $\forall z \in \Omega$. Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))}$.*

## 1.2. Desarrollos en serie. Funciones analíticas

Una serie formal es una expresión del tipo $A(X) := \sum_{n\geq 0} a_n \cdot X^n$, en donde $X$ es un símbolo y $a_n \in \mathbb{C}$. Si $\alpha = \overline{\lim}_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$, el radio de convergencia $\rho(A)$ de $A(X)$ es:

$$\rho(A) = \begin{cases} \alpha^{-1}, & \text{si } 0 < \alpha < +\infty, \\ 0, & \text{si } \alpha = +\infty, \\ +\infty, & \text{si } 0 = \alpha. \end{cases}$$

En relación con la convergencia, la serie numérica $A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^n$ verifica lo siguiente:

1. En el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq |z| \leq r < \rho(A)\}$, la serie $A(z)$ converge absoluta y uniformemente.

2. Si $|z| > \rho(A)$, la serie $A(z)$ diverge.

3. Si $|z| = \rho(A)$, puede ocurrir de todo, siendo útiles los siguientes criterios:

**Proposición 1.2.1.** *(a)(Criterio de Picard) Si $a_n \downarrow 0$, entonces la serie $\sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^n$ converge para $|z| = 1$, $z \neq 1$,.*

*(b) (Criterio de Abel) Si existen $r_0, M > 0$ tq $|a_n| \cdot r_0^n < M$, $\forall n \geq 1$, entonces la serie $\sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^n$ converge absoluta y uniformemente en $\{|z| \leq r < r_0\}$.*

**Proposición 1.2.2.** *Sea $A(X) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot X^n$ una serie formal. Entonces:*

1. *$A(z) \in \mathcal{H}(\overset{\circ}{B}(0; \rho(A)))$.*

2. *Si $DA(X) = \sum_{n\geq 0} na_n \cdot X^{n-1}$ es la serie formal derivada, entonces $\rho(A) = \rho(DA)$ y $A'(z) = DA(z)$, $\forall z \in \overset{\circ}{B}(0; \rho(A))$.*

3. *$A(z) \in C^\infty(\overset{\circ}{B}(0; \rho(A)))$ y $A^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$.*

Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $z_0 \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Decimos que $f$ es *desarrollable en serie de potencias* en $z_0$ sii $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot (z - z_0)^n$ en un entorno de $z_0$.

**Proposición 1.2.3.** *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $z_0 \in \Omega$ y $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$.*

1. *Si $f$ es desarrollable en serie en $z_0$, entonces el desarrollo es único y, en un entorno de $z_0$, existen las derivadas sucesivas $f^{(n)}$, $\forall n \geq 1$.*

2. *Si $f, g$ son desarrollables en serie en $z_0$, entonces: (i) $f \cdot g$ es desarrollable en $z_0$; (ii) $f \cdot g = 0$ en un entorno de $z_0$ sii $f = 0$ en un entorno de $z_0$ ó $g = 0$ en un entorno de $z_0$.*

3. *Si $f$ es desarrollable en serie en $z_0$, existe $V \subset \Omega$ entorno de $z_0$ y existe $h : V \to \mathbb{C}$ tal que $h'(z) = f(z)$, $\forall z \in V$. Además $h$ es única, salvo adición de constantes.*

Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $z_0 \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Decimos que $f$ es *analítica* en $\Omega$ (abrev., $f \in \mathcal{A}(\Omega)$) sii es desarrollable en serie en cada $z \in \Omega$.

**Proposición 1.2.4.** *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$.*

1. *Si $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, entonces existen las derivadas sucesivas $f^{(n)}$ y $f^{(n)} \in \mathcal{A}(\Omega)$, $\forall n \geq 1$. En particular, $\mathcal{A}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega)$.*

2. *$\mathcal{A}(\Omega)$ es un álgebra conmutativa y unitaria, subálgebra de $\mathcal{H}(\Omega)$, y tal que si $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ entonces $\frac{1}{f} \in \mathcal{A}(\Omega \setminus f^{-1}(0))$.*

3. *Sean $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$ abierto y $\Omega \xrightarrow{f} \Omega_1 \xrightarrow{g} \mathbb{C}$ analíticas. Entonces $g \circ f \in \mathcal{A}(\Omega)$.*

## 1.3. Caminos y ciclos. La función índice

Un *camino* es un par $\{\gamma, [a, b]\}$ en donde $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es una aplicación continua diferenciable con continuidad a trozos. Indicaremos por $\gamma^* = \gamma([a, b])$. Se dice que $\Gamma$ es un *ciclo* sii $\Gamma$ es la suma de una familia finita de caminos cerrados $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$, es decir, $\Gamma^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \cup \cdots \cup \gamma_n^*$ y para toda $f : \Gamma^* \to \mathbb{C}$ continua $\int_\Gamma f(z) \cdot dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z) \cdot dz$.

Si $\Gamma$ es un ciclo y $\Omega = \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ la función *índice* respecto de $\Gamma$ es la aplicación $Ind_\Gamma : \Omega \to \mathbb{C}$ tq $\forall z \in \Omega$:

$$Ind_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dw}{w - z}.$$

Recordemos que $Ind_\Gamma \in C(\Omega \setminus \Gamma^*, \mathbb{Z})$, es constante en cada componente conexa de $\Omega \setminus \Gamma^*$ y nula en la componente no acotada.

## 1.4. El Teorema local de Cauchy

**Proposición 1.4.1.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $\gamma^* \subset \Omega$ camino cerrado y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tq $f' \in C(\Omega, \mathbb{C})$. Entonces $\int_\gamma f'(z) \cdot dz = 0$.*

**Proposición 1.4.2.** *(T. de Cauchy para un triángulo) Sean* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto,* $p \in \Omega$, $f \in C(\Omega, \mathbb{C})$, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{p\})$ *y* $\Delta \subset \Omega$ *un triángulo cerrado. Entonces* $\int_{\partial\Delta} f(z) \cdot dz = 0$.

**Proposición 1.4.3.** *(T. de Cauchy para un abierto convexo) Sean* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto convexo,* $p \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{p\}) \cap C(\Omega, \mathbb{C})$. *Entonces existe* $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ *tq* $f(z) = F'(z)$, $\forall z \in \Omega$, *y para todo camino cerrado* $\gamma^* \subset \Omega$ *se tiene que* $\int_\gamma f(z) \cdot dz = 0$.

**Proposición 1.4.4.** *(Fórmula de Cauchy para un abierto convexo) Sean* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto convexo,* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *y* $\gamma^* \subset \Omega$ *camino cerrado. Entonces* $\forall z \in \Omega \setminus \gamma^*$:

$$f(z) \cdot Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \cdot dw \textit{ (Fórmula de Cauchy)}$$

**Corolario 1.4.5.** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto. Entonces:*

1. $\mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$.
2. *(T. de Morera) Sea* $f \in C(\Omega, \mathbb{C})$ *tal que* $\int_{\partial\Delta} f \cdot dz = 0$ *para todo triángulo* $\Delta \subset \Omega$. *Entonces* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
3. *Sean* $p \in \Omega$, $f \in C(\Omega, \mathbb{C}) \cap \mathcal{H}(\Omega \setminus \{p\})$. *Entonces* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

**Proposición 1.4.6.** *(Desigualdades de Cauchy) Sean* $a \in \mathbb{C}$, $0 < r < R < \infty$, $f \in \mathcal{H}(\overset{\circ}{B}(a; R))$ *admitiendo en* $\overset{\circ}{B}(a; R)$ *el desarrollo en serie* $f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n \cdot (z - a)^n$ *y* $M(r) = \max\{|f(z)| : |z - a| = r\}$. *Entonces:*

$$|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}, \; n = 0, 1, 2, \ldots \textit{ (Desigualdades de Cauchy).}$$

**Corolario 1.4.7.**

1. *(T. de Liouville) Toda* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *acotada es constante.*
2. *(T. Fundamental del Álgebra) Todo polinomio de grado* $n$ *tiene* $n$ *ceros en* $\mathbb{C}$, *contado cada cero tantas veces como indique su multiplicidad.*

## 1.5. Ceros de las funciones analíticas

**Proposición 1.5.1.** *(T. de los ceros de las funciones analíticas) Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *región,* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *y* $Z(f) = f^{-1}(0)$. *Entonces:*

1. *Si* $Z(f)' \cap \Omega \neq \emptyset$, *se tiene que* $Z(f) = \Omega$.
2. *Si* $Z(f)' \cap \Omega = \emptyset$, *se tiene que* $|Z(f)| \leq \aleph_0$ *y para cada* $a \in Z(f)$ *existen* $m(a) \in \mathbb{N}$ *único (que denominamos orden del cero de* $f$ *en* $a$*) y* $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ *tq* $g(a) \neq 0$ *y* $f(z) = (z - a)^{m(a)} \cdot g(z)$, $\forall z \in \Omega$.

**Proposición 1.5.2.** *(Ppio. de identidad) Sean* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *región,* $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ *y* $Z = \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$. *Si* $Z' \cap \Omega \neq \emptyset$, *entonces* $f = g$ *en* $\Omega$.

## 1.6. Teorema de Cauchy Global.

**Proposición 1.6.1.** *(T. de Cauchy Global) Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\Gamma^* \subset \Omega$ ciclo tq $Ind_\Gamma(\alpha) = 0,\ \forall \alpha \notin \Omega$. Entonces:*

*(1) $f(z) \cdot Ind_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw,\ \forall z \in \Omega \setminus \Gamma^*$.*

*(2) $\int_\Gamma f(w) \cdot dw = 0$*

*Si $\Gamma_0, \Gamma_1$ son ciclos en $\Omega$ tq $Ind_{\Gamma_0}(\alpha) = Ind_{\Gamma_1}(\alpha),\ \forall \alpha \notin \Omega$, entonces:*

*(3) $\int_{\Gamma_0} f(z) \cdot dz = \int_{\Gamma_1} f(z) \cdot dz$.*

## 1.7. Series de Laurent

Una serie formal del tipo $A(X) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \cdot X^n,\ a_n \in \mathbb{C}$, recibe el nombre de serie de Laurent. Adoptaremos la siguiente notación:

$$\rho_1(A) = \text{radio de convergencia de } A^+(X) := \sum_{n\geq 0} a_n \cdot X^n,$$
$$\rho_2(A) = \overline{\lim}_{n\to\infty} |a_{-n}|^{1/n}.$$

Si $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq r_2 < |z| < r_1\}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$, decimos que $f$ es *desarrollable en serie de Laurent* en el anillo $\Omega$ sii existe una serie formal de Laurent $A(X) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \cdot X^n$ con $\rho_2(A) \leq r_2 < r_1 \leq \rho_1(A)$ tq, $\forall z \in \Omega,\ f(z) = A(z)$.

**Proposición 1.7.1.** *Sean $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq r_2 < |z| < r_1\}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Son equivalentes: (a) $f$ es desarrollable en serie de Laurent en $\Omega$; (b) $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

## 1.8. Singularidades aisladas

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto, $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ decimos que $f$ tiene en $a$ una *singularidad aislada*, que podrá ser una singularidad evitable, un polo o una singularidad esencial.

**Proposición 1.8.1.** *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. Son equivalentes:*

1. *$f$ tiene en $a$ una singularidad evitable.*
2. *$f$ es acotada en cierto anillo $\{z : 0 < |z - a| < \epsilon\} \subset \Omega$.*

**Proposición 1.8.2.** *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. Son equivalentes:*

1. *$f$ tiene en $a$ un polo de orden $m$.*
2. *Si definimos $g(z) := (z-a)^m \cdot f(z),\ \forall z \in \Omega\setminus\{a\}$, entonces $g \in \mathcal{H}(\Omega\setminus\{a\})$, $\lim_{z\to a} g(z) \neq 0$ y $a$ es una singularidad evitable de $g$.*

3. $\frac{1}{f}$ *tiene en* $a$ *un cero de orden* $m$.

**Proposición 1.8.3.** *(T. de Casoratti-Weierstrass) Sean* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un abierto,* $a \in \Omega$ *y* $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. *Son equivalentes:*

1. $f$ *tiene en* $a$ *una singularidad esencial.*

2. $\forall \epsilon > 0$ *tq* $B(a;\epsilon) \subset \Omega$ *se tiene que* $f(B_r(a;\epsilon))$ *es denso en* $\mathbb{C}$.

## 1.9. Residuos

**Proposición 1.9.1.** *(T. de los residuos) Sean* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto y* $f$ *holomorfa en* $\Omega$ *excepto por singularidades aisladas* $S \subset \Omega$. *Si* $\Gamma^* \subset \Omega \setminus S$ *es un ciclo tq* $Ind_\Gamma(\alpha) = 0,\ \forall \alpha \notin \Omega$, *se tiene que:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\cdot dz = \sum_{a\in S} Res(f;a)\cdot Ind_\Gamma(a)$$

# Capítulo 2

# Funciones meromorfas. Principio del Argumento. Teorema de Rouché. Teorema de Hurwitz

## 2.1. Introducción

Comenzaremos este Capítulo haciendo varias observaciones de índole topológica.

**Observaciones.**

*(1) Si $G \subset \mathbb{C}$ es un abierto y $A \subset G$ verifica que $|A| \geq \aleph_1$, entonces $A' \cap G \neq \emptyset$.*

En efecto, si $A' \cap G = \emptyset$, por cada $x \in G$ existe un entorno abierto $V(x)$ tal que $x \in V(x) \subset G$ y $|A \cap V(x)| < \aleph_0$. Como $\mathbb{C}$ es hereditariamente Lindelöf, existe una familia contable $\{x_n : n \geq 1\} \subset G$ tal que $G = \bigcup_{n \geq 1} V(x_n)$. Por tanto

$$A = A \cap G = A \cap (\bigcup_{n \geq 1} V(x_n)) = \bigcup_{n \geq 1} A \cap V(x_n),$$

de donde sale que $|A| \leq \aleph_0$. Hemos llegado a una contradicción que prueba el enunciado.

*(2) Consecuencias inmediatas de (1) son:*

*(21) Si $A \subset \mathbb{C}$ verifica que $|A| \geq \aleph_1$, entonces $A' \neq \emptyset$.*

*(22) Sea $G \subset \mathbb{C}$ un abierto tal que $A \subset G$ verifica $A' \cap G = \emptyset$. Entonces*

*(i) $|A| \leq \aleph_0$ y $G \setminus A = G \setminus \overline{A}$ es abierto.*

*(ii) Para todo $a \in A$ existe $\epsilon_a > 0$ tal que $B(a; \epsilon_a) \subset G$ y $A \cap B(a; \epsilon_a) = \{a\}$.*

*(3) Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es una región (= abierto conexo) y $A \subset \Omega$ verifica $|A| \leq \aleph_0$, entonces $\Omega \setminus A$ es conexo por caminos.*

En efecto, probemos, en primer término, que, dados $P, Q \in G$, existen $\mathfrak{c}$ caminos casi-disjuntos uniendo $P$ con $Q$ dentro de $G$. Dos caminos se dicen casi-disjuntos si, a lo más, tienen en común los puntos inicial y final. Fijemos $P \in G$ y sea $G_P$ el conjunto de los puntos de $G$, que pueden unirse con $P$ mediante $\mathfrak{c}$ caminos casi-disjuntos dentro de $G$.

(A) $P \in G_P$**.** Como $G$ es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(P, \epsilon) \subset \Gamma$. Ahora basta considerar la familia de circunferencias $C_t := \{P + it + te^{i\theta} : \theta \in [-\pi/2, \frac{3}{2}\pi]\}, t \in [0, \epsilon/2]$.

(B) $G_P$ **es abierto.** Sea $R \in G_P$ y veamos que existe un $r > 0$ tal $B(R, r) \subset G_P$. Hay dos casos a considerar:

**Caso 1.** Sea $R = P$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $B(P, \epsilon) \subset G$. Tenemos que probar que todo punto $S \in B(P, r)$ se puede unir con $P$ mediante $\mathfrak{c}$ caminos casi-disjuntos dentro de $G$. Si $S = P$, esto se hace en (A). Si $S \neq P$, sea $\mu$ la mediatriz del segmento $[P, S]$. A continuación unimos cada punto $T$ de $\mu \cap B(P, \epsilon)$ con $P$ y $S$. Empalmando los dos segmentos obtenidos se obtiene una familia de $\mathfrak{c}$ caminos casi-disjuntos (uno por cada $T \in \mu \cap B(P, \epsilon)$) dentro de $G$, que unen $P$ con $R$. Por tanto $B(P, \epsilon) \subset G_P$.

**Caso 2.** Sea $R \neq P$. Elegimos $r > 0$ tal que $P \notin B(R, r) \subset G$. Vamos a probar que $B(R, r) \subset G_P$. Para ello fijamos $S \in B(R, r)$ y probamos que hay $\mathfrak{c}$ caminos casi-disjuntos uniendo $P$ con $S$ dentro de $G$. Por hipótesis existen $\mathfrak{c}$ caminos $(\gamma_i)_{i<\mathfrak{c}}$ casi-disjuntos uniendo $P$ con $R$ dentro de $G$. Por cada $i < \mathfrak{c}$ sea $T_i$ :=primer punto en que $\gamma_i$ toca a $B(R, r)$. Obviamente los puntos $(T_i)_{i<\mathfrak{c}}$ están en la esfera $S(R, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - R| = r\}$ y son distintos dos a dos. Sea $\delta_i$ el camino desde $P$ a $S$ obtenido empalmando el tramo de $\gamma_i$ fuera de $B(R, r)$ (es decir, hasta $T_i$ inclusive) con el segmento $[T_i, S]$. Es inmediato que $(\delta_i)_{i<\mathfrak{c}}$ es una familia de $\mathfrak{c}$ caminos casi-disjuntos uniendo $P$ con $S$ dentro de $G$. Por tanto $S \in G_P$.

(C) $G \setminus G_P$ **es abierto.** En efecto, sea $R \in G \setminus G_P$. Naturalmente $R \neq P$ y existe $r > 0$ tal que $P \notin B(R, r) \subset G$. Vamos a probar que $\overset{\circ}{B}(R, r) \subset G \setminus G_P$ viendo que, si $S \in \overset{\circ}{B}(R, r)$, no hay $\mathfrak{c}$ caminos casi-disjuntos uniendo $P$ con $S$ dentro de $G$. Supongamos que sí existen $\mathfrak{c}$ caminos $(\gamma_i)_{i<\mathfrak{c}}$ casi-disjuntos uniendo $P$ con $S$ dentro de $G$. Por cada $i < \mathfrak{c}$ sea $T_i$ :=primer punto en que $\gamma_i$ toca a $B(R, r)$. Obviamente los puntos $(T_i)_{i<\mathfrak{c}}$ están en la esfera $S(R, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - R| = r\}$ y son distintos dos a dos. Sea $\delta_i$ el camino desde $P$ a $R$ obtenido empalmando el tramo de $\gamma_i$ fuera de $B(R, r)$ (es decir, hasta $T_i$ inclusive) con el segmento $[T_i, R]$ (es el radio). Obviamente $(\delta_i)_{i<\mathfrak{c}}$ es una familia de $\mathfrak{c}$ caminos casi-disjuntos uniendo $P$ con $R$ dentro de $G$. Como $R \notin G_P$ hemos llegado a una contradicción, que prueba que $S \notin G_P$. Por tanto $G \setminus G_P$ es abierto.

Finalmente, como $G$ es región, $G_P$ y $G \setminus G_P$ son abiertos y $G_P \neq \emptyset$, concluimos que $G = G_P$, es decir, que todo par de puntos $P, Q \in G$ se puede unir mediante $\mathfrak{c}$ caminos casi-disjuntos dentro de $G$.

Sean $P, Q \in G \setminus A$. Por lo que acabamos de ver existen $\mathfrak{c}$ caminos casi-disjuntos uniendo $P$ con $Q$ dentro de $G$. Como $A$ es contable sólo puede cortar a una familia contable de estos caminos. En consecuencia, $\mathfrak{c}$ caminos de la anterior familia no cortan a $A$, es decir, están dentro de $G \setminus A$. Por lo tanto $G \setminus A$ es conexo por caminos.

*(4) Sea $G \subset \mathbb{C}$ una región y $A \subset G$ un subconjunto tal que $A' \cap G = \emptyset$. Entonces $G \setminus A$ es región.*

En efecto, basta aplicar (22) y (3).

*(5) Sean $G \subset \mathbb{C}$ un abierto y $\Gamma^* \subset G$ un ciclo tal que $Ind_\Gamma(z) = 0$, $\forall z \notin G$. Sea $S \subset G$ tal que $S' \cap G = \emptyset = S \cap \Gamma^*$. Entonces $|\{s \in S : Ind_\Gamma(s) \neq 0\}| < \aleph_0$.*

Es claro que

$$\{s \in S : Ind_\Gamma(s) \neq 0\} \subset W :=$$
$$= \bigcup \{U : U \text{ componente conexa acotada de } \mathbb{C} \setminus \Gamma^* \text{ con } Ind_\Gamma \restriction U \neq 0\}.$$

Obviamente $W$ es un acotado (porque no contiene a la componente conexa no-acotada) y $W \subset G$.

**Aserto.** $\overline{W} \subset G$.

En efecto, supongamos que existe $z_0 \in \overline{W} \setminus G$. Entonces $Ind_\Gamma(z_0) = 0$ y existe una secuencia $\{w_n : n \geq 1\} \subset W$ tal que $w_n \underset{n \to \infty}{\to} z_0$. Como $Ind_\Gamma$ es continua, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq N$, $Ind_\Gamma(w_n) = 0$. Por otra parte, $w_n \in W$ y por tanto $Ind_\Gamma(w_n) \neq 0$, $\forall n \geq 1$. Llegamos a una contradicción, que prueba el Aserto.

Como $S' \cap G = \emptyset$, necesariamente $|S \cap \overline{W}| < \aleph_0$ (por el Aserto y porque $\overline{W}$ es compacto). En consecuencia $|\{s \in S : Ind_\Gamma(s) \neq 0\}| < \aleph_0$ porque $\{s \in S : Ind_\Gamma(s) \neq 0\} \subset S \cap \overline{W}$.

## 2.2. Funciones meromorfas. Propiedades

Sea $G \subset \mathbb{C}$ un abierto. Una función $f$ es meromorfa en $G$ sii $f$ es analítica en $G$ salvo en un conjunto de singularidades aisladas $\mathcal{P}(f)$, que son los polos de $f$ en $G$. Denotaremos por $\mathcal{M}(G)$ al conjunto de las funciones meromorfas en $G$. Naturalmente $\mathcal{H}(G) \subset \mathcal{M}(G)$.

**Proposición 2.2.1** (Propiedades de las funciones meromorfas). *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un abierto no-vacío.*

*(1) Si $f \in \mathcal{M}(G)$, se tiene que:*
*(i) $\mathcal{P}(f)' \cap G = \emptyset$, $|\mathcal{P}(f)| \leq \aleph_0$, $G \setminus \mathcal{P}(f) \in T_\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(G \setminus \mathcal{P}(f))$.*
*(ii) En particular, si $G$ es región, entonces $G \setminus \mathcal{P}(f)$ es región.*

*(2) Si $f \in \mathcal{M}(G)$ definimos $\tilde{f} : G \to \mathbb{C}_\infty$ de modo que*

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z), & si\ z \in G \setminus \mathcal{P}(f) \\ \infty, & si\ z \in \mathcal{P}(f) \end{cases}$$

*entonces $\tilde{f} \in C(G, \mathbb{C}_\infty)$. En consecuencia, se puede considerar a $\mathcal{M}(G)$ como un subconjunto de $C(G, \mathbb{C}_\infty)$.*

*(3) Si* $f, g \in \mathcal{M}(G)$ *y* $\lambda \in \mathbb{C}$*, entonces* $f+g, \lambda f, fg \in \mathcal{M}(G)$*.*

*(4) Si* $G$ *es región y* $f \in \mathcal{M}(G)$ *es tal que* $f \neq 0$*, entonces* $\frac{1}{f} \in \mathcal{M}(G)$*.*

*(5)* $(\mathcal{M}(G), +, \star)$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{C}$ *(*$\star$ *es el producto por escalares de* $\mathbb{C}$*) y* $(\mathcal{M}(G), +, \star, \cdot)$ *es un álgebra conmutativa (*$\cdot$ *es el producto de funciones de* $\mathcal{M}(G)$*). Si* $G$ *es región,* $(\mathcal{M}(G), +, \cdot)$ *es un cuerpo conmutativo y* $(\mathcal{M}(G), +, \star, \cdot)$ *es un álgebra conmutativa tal que* $\mathcal{M}(G) \setminus \{0\} = Inv(\mathcal{M}(G))$*(= elementos invertibles de* $\mathcal{M}(G)$*).*

*(6) Si* $f \in \mathcal{M}(G)$*, también* $f' \in \mathcal{M}(G)$ *y* $\mathcal{P}(f') = \mathcal{P}(f)$*.*

*(7) Sea* $G$ *región y* $f \in \mathcal{M}(G)$ *tal que* $f \neq 0$*. Entonces:*

*(71) Si* $a \in \mathcal{Z}(f)$*,* $a$ *es polo de orden* $1$ *de* $f'/f$ *y* $\mathcal{R}es(f'/f; a) = m(a)$*, siendo* $m(a)$ *la multiplicidad de* $a$ *como cero de* $f$*.*

*(72) Si* $a \in \mathcal{P}(f)$*,* $a$ *es polo de orden* $1$ *de* $f'/f$ *y* $\mathcal{R}es(f'/f; a) = -m(a)$*, siendo* $m(a)$ *la multiplicidad de* $a$ *como polo de* $f$*.*

*(73)* $f'/f \in \mathcal{M}(G)$*,* $f'/f \in \mathcal{H}(G \setminus (\mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{P}(f))$ *y* $\mathcal{P}(f'/f) = \mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{P}(f)$*.*

*Demostración.* (1) (i) Necesariamente $\mathcal{P}(f)' \cap G = \emptyset$, pues si $z_0 \in \mathcal{P}(f)' \cap G$, $z_0$ no sería ni punto de holomorfía de $f$ ni polo aislado de $f$, lo que no puede ser por la definición de función meromorfa. Aplicando las Observaciones anteriores sale que $|\mathcal{P}(f)| \leq \aleph_0$, $G \setminus \mathcal{P}(f) \in T_{\mathbb{C}}$ y $f \in \mathcal{H}(G \setminus \mathcal{P}(f))$.

(ii) sale de (i) y de la Observación (4).

(2) Es inmediato comprobar (mediante sucesiones) que $\tilde{f} \in C(G, \mathbb{C}_\infty)$.

(3) Es inmediato comprobar que $fg$ es holomorfa en todo $G$, salvo en un cierto subconjunto de $\mathcal{P}(f) \cup \mathcal{P}(g)$, en donde $fg$ tiene polos. Por tanto

$$\mathcal{P}(fg)' \cap G \subset (\mathcal{P}(f) \cup \mathcal{P}(g))' \cap G = \emptyset.$$

En consecuencia $fg \in \mathcal{M}(G)$. Observemos que algunos puntos de $\mathcal{P}(f) \cup \mathcal{P}(g)$ pueden no estar en $\mathcal{P}(fg)$.

(4) Observemos que $G \setminus \mathcal{P}(f)$ es región y que

$$\mathcal{Z}(f)' \cap (G \setminus \mathcal{P}(f)) = \emptyset$$

porque $f \neq 0$ y el T. de los ceros de las funciones analíticas. Por tanto $\mathcal{Z}(f)' \cap G = \emptyset$. Ahora observemos que $\mathcal{P}(1/f) = \mathcal{Z}(f)$, $\mathcal{Z}(1/f) = \mathcal{P}(f)$ y que se conservan las multiplicidades de polos y ceros.

(5) es inmediato.

(6) Si $a \in G$ es un punto de holomorfía de $f$, claramente también lo es de $f'$. Sea $a \in \mathcal{P}(f)$ polo de $f$ de orden $m > 0$. Entonces $f$ tiene, en una bola reducida

$\overset{\circ}{B}_r(a,\epsilon),\ \epsilon > 0$, el desarrollo de Laurent

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n + \frac{a_{-1}}{z-a} + ... + \frac{a_{-m}}{(z-a)^m},\ a_{-m} \neq 0.$$

Por tanto en $\overset{\circ}{B}_r(a,\epsilon)$ se verifica

$$f'(z) = \sum_{n\geq 1} na_n(z-a)^{n-1} + \frac{-a_{-1}}{(z-a)^2} + ... + \frac{-ma_{-m}}{(z-a)^{m+1}},$$

es decir, que $f'$ tiene en $a$ un polo de orden $m+1$.

(7) (71) Como $a$ es un cero de orden $m(a) > 0$ de $f$, en una bola abierta $\overset{\circ}{B}(a,\epsilon),\ \epsilon > 0$, se tiene el desarrollo

$$f(z) = \sum_{n\geq m(a)} a_n(z-a)^n = g(z)(z-a)^{m(a)},$$

siendo $g$ holomorfa en $\overset{\circ}{B}(a,\epsilon)$ y $g(z) \neq 0,\ \forall z \in \overset{\circ}{B}(a,\epsilon)$. Así que en la bola reducida $\overset{\circ}{B}_r(a,\epsilon)$ se verifica

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)(z-a)^{m(a)} + m(a)g(z)(z-a)^{m(a)-1}}{g(z)(z-a)^{m(a)}} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{m(a)}{z-a}.$$

Por tanto, $f'/f$ tiene en $a$ un polo de orden 1 con residuo $\mathcal{R}es(f'/f;a) = m(a)$.

(72) es análogo y (73) inmediato. ■

## 2.3. El Principio del Argumento

**Proposición 2.3.1** (El Principio del Argumento)**.** *Sean $G \subset \mathbb{C}$ una región, $\gamma^* \subset G$ un ciclo tal que $Ind_\gamma(z) = 0,\ \forall z \notin G$, y $f \in \mathcal{M}(G)$ tal que $f \neq 0$ y $(\mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{P}(f)) \cap \gamma^* = \emptyset$. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}dz = \sum_{a\in\mathcal{Z}(f)} m(a)\cdot Ind_\gamma(a) - \sum_{a\in\mathcal{P}(f)} m(a)\cdot Ind_\gamma(a),$$

*(ambos sumatorios finitos)*

*Demostración.* Vamos a aplicar el Teorema de los Residuos a la función $f'/f$. Por la Proposición 2.2.1 sabemos que $f'/f \in \mathcal{M}(G)$ y que $\mathcal{P}(f'/f) = \mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{P}(f)$. Como se verifica $\emptyset = \mathcal{P}(f'/f) \cap \gamma^*$, la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

tiene perfecto sentido. Por otra parte, los sumatorios del segundo miembro de la fórmula del enunciado son finitos pues

$$|\{a \in \mathcal{Z}(f) : Ind_\gamma(a) \neq 0\}| < \aleph_0 \text{ y } |\{a \in \mathcal{P}(f) : Ind_\gamma(a) \neq 0\}| < \aleph_0$$

por la Observación (5) del comienzo y porque $(\mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{P}(f))' \cap G = \emptyset = (\mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{P}(f)) \cap \gamma^*$. Ahora basta aplicar el Teorema de los Residuos y tener en cuenta el punto (7) de la Proposición 2.2.1. Así que obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \sum_{p \in \mathcal{P}(f'/f)} \mathcal{R}es(f'/f; p) \cdot Ind_\gamma(p) \\ &= \sum_{a \in \mathcal{Z}(f)} m(a) \cdot Ind_\gamma(a) - \sum_{a \in \mathcal{P}(f)} m(a) \cdot Ind_\gamma(a). \end{aligned}$$

■

**Proposición 2.3.2.** *Sean $G \subset \mathbb{C}$ una región, $\gamma^* \subset G$ un ciclo tal que $Ind_\gamma(z) = 0$, $\forall z \notin G$, $g \in \mathcal{H}(G)$ y $f \in \mathcal{M}(G)$ tal que $f \neq 0$ y $(\mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{P}(f)) \cap \gamma^* = \emptyset$. Entones*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z) \frac{f'}{f} dz = \sum_{a \in \mathcal{Z}(f)} m(a) g(a) \cdot Ind_\gamma(a) - \sum_{a \in \mathcal{P}(f)} m(a) g(a) \cdot Ind_\gamma(a),$$

*(ambos sumatorios finitos)*

*Demostración.* La función $h := g\frac{f'}{f}$ verifica $h \in \mathcal{M}(G)$, $\mathcal{P}(h) \subset \mathcal{P}(f'/f) = \mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{P}(f)$. Observemos que, dado $p \in \mathcal{P}(f'/f) = \mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{P}(f')$, $p$ será polo (de orden 1) de $h$ sii $g(p) \neq 0$. Por tanto, $\mathcal{P}(h) \cap \gamma^* = \emptyset$ y podemos aplicar el Teorema de los Residuos. Además, si $p \in \mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{P}(f')$, entonces

$$\mathcal{R}es(h; p) = g(p) \cdot \mathcal{R}es(f'/f; p) = \pm g(p) m(p),$$

en donde hay que poner $+$, si $p \in \mathcal{Z}(f)$, y $-$, si $p \in \mathcal{P}(f)$. Por tanto, aplicando el T. de los Residuos obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \sum_{p \in \mathcal{P}(g(f'/f))} \mathcal{R}es(g(f'/f); p) \cdot Ind_\gamma(p) \\ &= \sum_{a \in \mathcal{Z}(f)} g(a) m(a) \cdot Ind_\gamma(a) - \sum_{a \in \mathcal{P}(f)} g(a) m(a) \cdot Ind_\gamma(a). \end{aligned}$$

■

## 2.4. Teorema de Rouché. Teorema de Hurwitz

**Proposición 2.4.1** (Teorema de Rouché)**.** *Sean $G \subset \mathbb{C}$ una región, $\gamma^* \subset G$ un camino cerrado tal que $Ind_\gamma(z) = 0$, $\forall z \notin G$, y $f, g \in \mathcal{M}(G)$ tales $\gamma^* \cap (\mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{P}(f)) = \emptyset$. Supongamos además que:*

*(i) $Ind_\gamma(z) = 0$ ó 1, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$; (ii) $|g(z) - f(z)| < |f(z)|$, $\forall z \in \gamma^*$ (en particular $\mathcal{P}(g) \cap \gamma^* = \emptyset$).*

*Sea $W_1 := \{z \in G : Ind_\gamma(z) = 1\}$. Entonces $\mathcal{N}_f - \mathcal{P}_f = \mathcal{N}_g - \mathcal{P}_g$, siendo*

$$\mathcal{N}_f := \text{ n}^o \text{ de ceros de } f \text{ dentro de } W_1 \text{ contados según su multiplicidad,}$$

$$\mathcal{P}_f := \text{ n}^o \text{ de polos de } f \text{ dentro de } W_1 \text{ contados según su multiplicidad,}$$

*y análogamente $\mathcal{N}_g$ y $\mathcal{P}_g$.*

*Demostración.* En primer término, además de verificarse $\mathcal{P}(g) \cap \gamma^* = \emptyset$ (por (ii)), también ocurre que $\mathcal{Z}(g) \cap \gamma^* = \emptyset$, porque, si para algún $z \in \gamma^*$ se verificase $g(z) = 0$, entonces (ii) nos daría que $|f(z)| < |f(z)|$, lo que no puede ser.

Sea $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ una parametrización de $\gamma^*$ y definamos $\delta : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ de modo que

$$\forall t \in [0, 2\pi], \ \delta(t) = \frac{g \circ \gamma(t)}{f \circ \gamma(t)}.$$

Es claro que $\delta$ define un camino cerrado tal que $\delta^* \subset \overset{\circ}{B}(1,1)$, es decir, $|1-\delta(t)| < 1$, $\forall t \in [0, 2\pi]$. Por tanto $Ind_\delta(0) = 0$. Teniendo en cuenta el Ppio. del Argumento y que

$$\forall t \in [0, 2\pi], \ \frac{\delta'(t)}{\delta(t)} = \Big(\frac{g'(\gamma(t))}{g(\gamma(t))} - \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\Big)\gamma'(t),$$

se verifica que

$$\begin{aligned} 0 = Ind_\delta(0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\delta \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{[0,2\pi]} \frac{\delta'(t)}{\delta(t)}dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{[0,2\pi]} \Big(\frac{g'(\gamma(t))}{g(\gamma(t))} - \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\Big)\gamma'(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz \\ &= \mathcal{N}_g - \mathcal{P}_g - (\mathcal{N}_f - \mathcal{P}_f), \end{aligned}$$

como se pretendía demostrar. ■

**Proposición 2.4.2** (Teorema de Hurwitz)**.** *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un abierto, $a \in G$, $R > 0$ tal que $B(a, R) \subset G$, $\gamma^* = \partial B(a, R)$, $\{f_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{H}(G)$ y $f : G \to \mathbb{C}$ tal que $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ uniformemente sobre los subconjuntos compactos de $G$. Se tiene que:*

*(a) $f \in \mathcal{H}(G)$.*

*(b) Si $\mathcal{Z}(f) \cap \gamma^* = \emptyset$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq N$, se verifica $\mathcal{N}_f = \mathcal{N}_{f_n}$, siendo*

$$\mathcal{N}_f := \text{ n}^o \text{ de ceros de } f \text{ dentro de } B(a,R) \text{ contados según multiplicidad },$$

*y análogamente $\mathcal{N}_{f_n}$.*

*Demostración.* (a) Que $f \in \mathcal{H}(G)$ sale del Teorema de Morera.

(b) Sean $\epsilon > 0$ tal que $\Omega := \overset{\circ}{B}(a, R+\epsilon) \subset G$ y

$$m := \text{mín}\{|f(z)| : z \in \gamma^*\},$$

que verifica $m > 0$. Como $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ uniformemente sobre los subconjuntos compactos de $G$ y $\gamma^*$ es uno de dichos subconjuntos compactos, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq N$, $|f_n(z) - f(z)| < m \leq |f(z)|$, $\forall z \in \gamma^*$. Observemos que se cumplen las condiciones del Teorema de Rouché para la región $\Omega$ (en lugar de $G$), $\gamma^*$, $f$ y $f_n$ (en lugar de $g$). Por tanto

$$\mathcal{N}_f - \mathcal{P}_f = \mathcal{N}_{f_n} - \mathcal{P}_{f_n}.$$

Como $\mathcal{P}_f = 0 = \mathcal{P}_{f_n}$, obtenemos $\mathcal{N}_f = \mathcal{N}_{f_n}$, como se pretendía probar. ■

**Proposición 2.4.3.** *Sean $G \subset \mathbb{C}$ una región, $\{f_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{H}(G)$ y $f : G \to \mathbb{C}$ tal que $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ uniformemente sobre los subconjuntos compactos de $G$. Supongamos que $\mathcal{Z}(f_n) = \emptyset$, $\forall n \geq 1$. Entonces $f \in \mathcal{H}(G)$ y ó $f = 0$ ó $\mathcal{Z}(f) = \emptyset$.*

*Demostración.* En primer término, que $f \in \mathcal{H}(G)$ sale del Teorema de Morera. Si $f = 0$ sobre $G$, hemos terminado. Supongamos que $f \neq 0$ y que existe $a \in \mathcal{Z}(f)$. Como $G$ es región y $f \neq 0$, necesariamente $a$ es un cero aislado de $f$, lo que implica que existe $R > 0$ tal que $B(a,R) \subset G$ y $\mathcal{Z}(f) \cap \partial B(a,R) = \emptyset$. Por el Teorema de Hurwitz existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_n$ tiene en $B(a,R)$ el mismo número de ceros (contados según multiplicidad) que $f$, lo que es imposible porque $\mathcal{Z}(f_n) = \emptyset$. ■

# Capítulo 3

# Teoremas del módulo máximo y de la aplicación abierta. Automorfismos del disco unidad

## 3.1. Teorema del módulo máximo

**Teorema 3.1.1** (Teorema del módulo máximo). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $a \in \Omega$, $r > 0$ y $B(a, r) \subset \Omega$, entonces*

$$|f(a)| \leq \text{máx}\{|f(z)| : z \in \partial B(a, r)\} =: M(r). \tag{3.1}$$

*Además la igualdad ocurre en (3.1) sii $f = cte$ en $\Omega$.*

*Demostración.* Por la Fórmula de Cauchy (ver 1.4.4) se verifica que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(z)}{z - a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{it})}{re^{it}} rie^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt. \tag{3.2}$$

Por tanto, $|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{it})| dt \leq M(r)$.

Si $f = cte$ en $\Omega$, es claro que $|f(a)| = M(r)$.

Supongamos que $|f(a)| = M(r)$. Si $|f(a)| = M(r) = 0$, entonces $f = 0$ sobre $\partial B(a, r)$ y por tanto $f = 0$ en $\Omega$ por el T. de los ceros de las funciones analíticas. Sea pues $|f(a)| = M(r) \neq 0$. Multiplicando, si es preciso, por un cierto $e^{i\tau}$ de modo que $f(a)e^{i\tau} > 0$ (los módulos y $M(r)$ no varían), podemos suponer que $f(a) > 0$. Considerando por separado parte real y parte imaginaria en la igualdad (3.2) obtenemos

$$0 < f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{R}e(f(a + re^{it})) dt, \; 0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{I}m(f(a + re^{it})) dt.$$

Puesto que $\mathcal{R}e(f(a + re^{it}))$ es continua en $[0, 2\pi]$ y $\mathcal{R}e(f(a + re^{it})) \leq M(r) = f(a)$, necesariamente $\mathcal{R}e(f(a + re^{it})) = M(r) = f(a)$, $\forall t \in [0, 2\pi]$. En consecuencia $\mathcal{I}m(f(a+$

$re^{it})) = 0,\ \forall t \in [0, 2\pi]$, es decir, $f = f(a) = cte$ sobre $\partial B(a, r)$. Esto implica por el T. de los ceros de las funciones analíticas que $f = f(a) = cte$ en $\Omega$. ■

**Corolario 3.1.2.** *Sea $G \subset \mathbb{C}$ una región, $a \in G$ y $f \in \mathcal{H}(G)$ tal que $|f(a)| \geq |f(z)|$, $\forall z \in G$. Entonces $f = cte$ en $G$.*

*Demostración.* Sea $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset G$. Por hipótesis $|f(a)| \geq \text{máx}\{|f(z)| : z \in \partial B(a, r)\} =: M(r)$. Por el T. del módulo máximo sabemos que $|f(a)| \leq M(r)$. Luego $|f(a)| = M(r)$ y, de nuevo por el T. del módulo máximo, concluimos que $f = cte$ en $G$. ■

**Corolario 3.1.3.** *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un abierto acotado y $f \in \mathcal{H}(G) \cap C(\overline{G})$. Entonces*

$$\text{máx}\{|f(z)| : z \in \overline{G}\} = \text{máx}\{|f(z)| : z \in \partial G\}.$$

*Demostración.* Obviamente $\text{máx}\{|f(z)| : z \in \overline{G}\} \geq \text{máx}\{|f(z)| : z \in \partial G\}$ porque $\partial G \subset \overline{G}$. Supongamos que

$$\text{máx}\{|f(z)| : z \in \overline{G}\} > \text{máx}\{|f(z)| : z \in \partial G\} \tag{3.3}$$

y sea $a \in \overline{G}$ tal que $|f(a)| = \text{máx}\{|f(z)| : z \in \overline{G}\}$. Necesariamente $a \in G$ porque $a \in \overline{G} = G \cup \partial G$, pero $a \notin \partial G$ por (3.3). Sea $G_1$ la componente conexa de $G$ tal que $a \in G_1$. Por Corolario 3.1.2 se tiene que $f = cte$ sobre $G_1$ y, en consecuencia, $|f(z)| = |f(a)|$, $\forall z \in \partial G_1 \subset \partial G$. Por tanto, finalmente, $\text{máx}\{|f(z)| : z \in \overline{G}\} = \text{máx}\{|f(z)| : z \in \partial G\}$ cqd. ■

Si $A \subset \mathbb{C}$, definimos $\partial_\infty A =$ frontera de $A$ en $\mathbb{C}_\infty$ y $\overline{A}^{\mathbb{C}_\infty} = \overline{A}^\infty =$ cierre de $A$ en $\mathbb{C}_\infty$. Por tanto:

(1) Si $A$ es un subconjunto acotado, $\partial_\infty(A) = \partial A$ y $\overline{A}^\infty = \overline{A}$.

(2) Si $A$ es un subconjunto no-acotado, $\partial_\infty(A) = \partial A \cup \{\infty\}$ y $\overline{A}^\infty = \overline{A} \cup \{\infty\}$.

En otras palabras, $A \subset \mathbb{C}$ es acotados sii $\partial_\infty(A) = \partial A$ sii $\overline{A}^\infty = \overline{A}$.

**Lema 3.1.4.** *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f \in C(G, \mathbb{C})$ tal que*

$$\forall a \in \partial_\infty G,\ \limsup_{z \to a, z \in G} |f(z)| \leq M$$

*para cierto $M \in \mathbb{R}$. Entonces, para todo $\delta > 0$, el conjunto $B_\delta := \{z \in G : |f(z)| \geq M + \delta\}$ es un subconjunto compacto de $G$.*

*Demostración.* Bastará probar que $\overline{B_\delta}^\infty \subset G$. Supongamos que existe $a \in \overline{B_\delta}^\infty \setminus G$. Entonces $a \in \partial_\infty G$ y se verifica:

(i) Por una parte, $\limsup_{z \to a, z \in B_\delta} |f(z)| \leq M$ por la hipótesis de trabajo y porque $B_\delta \subset G$.

(ii) Por otra parte, como $a \in \overline{B_\delta}^\infty$, necesariamente $\limsup_{z \to a, z \in B_\delta} |f(z)| \geq M + \delta$ por la definición de $B_\delta$.

Llegamos a una contradicción que prueba el Lema. ■

**Corolario 3.1.5.** *Sea $G \subset \mathbb{C}$ una región y $f \in \mathcal{H}(G)$ tal que*

$$\forall a \in \partial_\infty G, \ \limsup_{z\to a, z\in G} |f(z)| \leq M$$

*para cierto $0 \leq M < \infty$. Entonces $|f(z)| \leq M, \ \forall z \in G$.*

*Demostración.* Sea $\delta > 0$ y $H_\delta := \{z \in G : |f(z)| \geq M + \delta\}$. Bastará probar que $H_\delta = \emptyset$. Supongamos que $H_\delta \neq \emptyset$. Por el Lema 3.1.4 se tiene que $H_\delta$ es un subconjunto compacto de $G$. Por compacidad existe $w \in H_\delta \subset G$ tal que $M + \delta \leq |f(w)| = \max\{|f(z)| : z \in H_\delta\} = \max\{|f(z)| : z \in G\}$. Por Corolario 3.1.2 $f = cte$ en $G$ y, por tanto, $|f| = |f(w)| \geq M + \delta$ en $G$. Así que ,$\forall a \in \partial_\infty G$, $\limsup_{z\to a, z\in G} |f(z)| = |f(w)| \geq M + \delta > M$, lo que contradice el enunciado. En consecuencia, $H_\delta = \emptyset$ cqd. ∎

## 3.2. El Teorema de la aplicación abierta

**Lema 3.2.1.** *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Definimos $g : \Omega\times\Omega \to \mathbb{C}$ del siguiente modo*

$$g(z, w) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}, & z \neq w \\ f'(z), & z = w \end{cases}$$

*Se tiene que $g \in C(\Omega \times \Omega, \mathbb{C})$.*

*Demostración.* La continuidad de $g$ es dudosa únicamente sobre la diagonal $\Delta := \{(z, w) \in \Omega \times \Omega : z = w\}$. Así que sea $a \in \Omega$ y probemos que $g$ es continua en $(a, a)$. Fijemos $\epsilon > 0$. Por continuidad, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset \Omega$ y $|f'(a) - f'(\xi)| < \epsilon$, $\forall \xi \in B(a, r)$. Si $z, w \in B(a, r)$, denotemos por $[z, w]$ el segmento que une $z$ con $w$, es decir, $[z, w] := \{z + t(w - z) : t \in [0, 1]\}$. Obviamente $[z, w] \subset B(a, r)$ (por convexidad) y $[z, w]$ es un camino, que se parametriza mediante la aplicación $\xi_{[z,w]} : [0, 1] \to \mathbb{C}$ tal que

$$\forall t \in [0, 1], \ \xi_{[z,w]}(t) := (1 - t)z + tw = z + t(w - z).$$

Observemos que $\xi'_{[z,w]}(t) = w - z = cte$.

**Aserto.** Fijados $z_1, z_2 \in B(a, r)$, se tiene

$$g(z_2, z_1) = \int_0^1 f'(\xi_{[z_1,z_2]}(t))dt.$$

En efecto, si $z_1 = z_2$, entonces $\xi_{[z_1,z_2]}(t) = z_1, \ \forall t \in [0, 1]$, y el resultado es inmediato. Sea $z_1 \neq z_2$. Entonces

$$f(z_2)-f(z_1) = \int_{[z_1,z_2]} f'(w)dw = \int_0^1 f'(\xi_{[z_1,z_2]}(t))\xi'_{[z_1,z_2]}(t)dt = \int_0^1 f'(\xi_{[z_1,z_2]}(t))(z_2-z_1)dt.$$

Por tanto

$$g(z_2, z_1) = \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = \int_0^1 f'(\xi_{[z_1,z_2]}(t))dt.$$

Aplicando el Aserto, para todo par $z, w \in B(a,r)$ se tiene

$$g(z,w) - g(a,a) = \int_0^1 [f'(\xi_{[w,z]}(t)) - f'(a)]dt.$$

Por tanto, como $|f'(\xi_{[w,z]}(t)) - f'(a)| < \epsilon,\ \forall t \in [0,1]$, obtenemos que

$$\forall z, w \in B(a,r),\ |g(z,w) - g(a,a)| \leq \int_0^1 |f'(\xi_{[w,z]}(t)) - f'(a)|dt \leq \epsilon,$$

y esto prueba que $g$ es continua en $(a,a)$. ■

**Proposición 3.2.2** (Teorema de la aplicación abierta)**.** *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $z_0 \in \Omega$ tales que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces existe un entorno abierto $V \subset \Omega$ de $z_0$ tal que:*

*(1) $f$ es 1-a-1 en $V$ y $f'(z) \neq 0,\ \forall z \in V$.*

*(2) $W := f(V)$ es abierto.*

*(3) Si $\psi : W \to V$ es la inversa de $f \restriction V$, entonces $\psi \in \mathcal{H}(W)$ y ,$\forall w \in W,\ \psi'(w) = 1/(f'(\psi(w)))$.*

*Demostración.* (1) Aplicando el Lema 3.2.1 a $f$ (y conservando su notación), como $g$ es continua en $\Omega \times \Omega$ y $0 < |f'(z_0)| = |g(z_0, z_0)|$, existe un entorno $U \subset \Omega \times \Omega$ de $(z_0, z_0)$ tal que $|g(z_1, z_2)| \geq \frac{1}{2}|f'(z_0)| > 0$ para todo $(z_1, z_2) \in U$. Teniendo en cuenta que la topología de $\Omega \times \Omega$ es la topología producto, existe un entorno abierto $V \subset \Omega$ de $z_0$ tal que $V \times V \subset U$ y por tanto

$$\forall (z_1, z_2) \in V \times V,\ |g(z_1, z_2)| \geq \tfrac{1}{2}|g(z_0, z_0)| = \tfrac{1}{2}|f'(z_0)| > 0.$$

De aquí deducimos que

$$\forall (z_1, z_2) \in V \times V \setminus \Delta,\ \ |f(z_1) - f(z_2)| \geq \tfrac{1}{2}|f'(z_0)| \cdot |z_1 - z_2| \neq 0, \tag{3.4}$$

y

$$\forall z \in V, |g(z,z)| = |f'(z)| \geq \tfrac{1}{2}|f'(z_0)| \neq 0.$$

Así que $f \restriction V$ es 1-a-1 y, además, $f'(z) \neq 0,\ \forall z \in V$.

(2) Fijemos $\xi \in V$ y sea $r > 0$ tal que $B(\xi, r) \subset V$. Por (3.4) se verifica que

$$\forall t \in [0, 2\pi],\ |f(\xi + re^{it}) - f(\xi)| \geq \tfrac{1}{2}|f'(z_0)| \cdot r := 2\delta.$$

Sea $a \in \mathbb{C} \setminus f(V)$. Queremos probar que $|a - f(\xi)| \geq \delta$, lo que implicará que $\overset{\circ}{B}(f(\xi), \delta) \subset f(V)$. Se verifica lo siguiente

(i) Si $|a - f(\xi)| \geq 2\delta$ hemos terminado.

(ii) Sea $|a - f(\xi)| < 2\delta$. Consideremos la función $h(z) = 1/(a - f(z))$, $\forall z \in V$, que verifica $h \in \mathcal{H}(V)$. Por el T. del módulo máximo

$$\frac{1}{|a - f(\xi)|} = |h(\xi)| \leq \text{máx}\Big\{\frac{1}{|a - f(\xi + re^{it})|} : t \in [0, 2\pi]\Big\}.$$

Pero

$$2\delta \leq |f(\xi + re^{it}) - f(\xi)| \leq |a - f(\xi)| + |a - f(\xi + re^{it})|,$$

de donde

$$0 < 2\delta - |a - f(\xi)| \leq |a - f(\xi + re^{it})|, \ \forall t \in [0, 2\pi].$$

En consecuencia

$$\frac{1}{|a - f(\xi + re^{it})|} \leq \frac{1}{2\delta - |a - f(\xi)|}, \quad \forall t \in [0, 2\pi],$$

de donde

$$\frac{1}{|a - f(\xi)|} \leq \frac{1}{2\delta - |a - f(\xi)|} \ \text{ y, por tanto, } \ \delta \leq |a - f(\xi)|,$$

como queríamos probar.

Como $\xi \in V$ es arbitrario, concluimos que $W := f(V)$ es un abierto de $\mathbb{C}$. Además, como $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in V$, aplicando a cada $z \in V$ el argumento que acabamos de ver, también sale que $f \restriction V$ es abierta, por lo que su inversa $\psi := (f \restriction V)^{-1} : W \to V$ es continua (de momento).

(3) sale aplicando 1.1.2 (E) y teniendo en cuenta que $f \circ \psi = id_W$, $\psi$ es continua, $f \in \mathcal{H}(V)$ y $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in V$. ■

A continuación vemos que, si $G \subset \mathbb{C}$ es una región, $f \in \mathcal{H}(G)$ y $f$ no es constante en $G$, también es $f$ abierta en $G$, aunque sea $f'(z) = 0$ en algún punto de $G$.

**Proposición 3.2.3.** *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f$ no constante, $z_0 \in \Omega$ y $w_0 := f(z_0)$. Supongamos que $z_0$ es un cero de orden $m \geq 1$ de la función $f(z) - w_0$. Entonces existen un entorno abierto $U \subset \Omega$ de $z_0$ y $\varphi \in \mathcal{H}(U)$ tales que*

*(1) $f(z) = w_0 + (\varphi(z))^m$, $\forall z \in U$.*

*(2) $\varphi'(z) \neq 0$, $\forall z \in U$, $\varphi(U) = \overset{\circ}{B}(0, r) =: D(0, r)$ para cierto $r > 0$ y $\varphi \restriction U$ es invertible.*

*(3) $f(\Omega)$ es un abierto de $\mathbb{C}$. (4) $f$ es abierta en $\Omega$.*

*Demostración.* Sean $\epsilon > 0$ tal que $B(z_0, \epsilon) \subset \Omega$ con $f(z) \neq w_0$, $\forall z \in B_r(z_0, \epsilon)$, y $G := \overset{\circ}{B}(z_0, \epsilon)$. Dicha bola existe porque $f$ no es constante en $\Omega$ (aplicar T. de los ceros de las funciones analíticas). Por tanto $z_0$ es un cero aislado de $f(z) - w_0$ de orden $m$ tal que, naturalmente, $m \geq 1$. Así que existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que

$$\forall z \in \Omega, \quad f(z) = w_0 + (z - z_0)^m g(z)$$

y $g(z) \neq 0$, $\forall z \in G$. Por tanto $g'/g \in \mathcal{H}(G)$ y por ello existe $h \in \mathcal{H}(G)$ (ver la Proposición 1.4.3) tal que $h' = g'/g$ en $G$. Puesto que $(ge^{-h})' = 0$ en $G$, se deduce que $ge^{-h} = M = cte \neq 0$ en $G$, es decir, $g = Me^h$ en $G$. Sin pérdida de generalidad, poniendo $h + Log(M)$ en lugar de $h$ si es preciso, podemos suponer que $g = e^h$ en $G$. Definamos

$$\forall z \in G, \quad \varphi(z) := (z - z_0)e^{h(z)/m}.$$

Claramente $\varphi \in \mathcal{H}(G)$ y $\varphi'(z_0) \neq 0$. Por tanto, podemos aplicar el T. de la aplicación abierta a $\varphi$. Deducimos que existe un entorno abierto $V \subset G$ de $z_0$ verificando las conclusiones de dicho Teorema. En particular, $\varphi$ es abierta en $V$ y como $\varphi(z_0) = 0$, existe cierto $r > 0$ tal que $\overset{\circ}{B}(0, r) \subset \varphi(V)$. Sea $U := \varphi^{-1}(\overset{\circ}{B}(0, r)) \cap V$. Ahora se tiene lo siguiente:

(1) Como trivialmente $f(z) = w_0 + (\varphi(z))^m$, $\forall z \in G$, y $U \subset G$, esta igualdad también es válida en $U$.

(2) sale de la elección de $U$ y del T. de la aplicación abierta que hemos utilizado.

(3) Observemos que $f$ transforma $U$ en $w_0 + \overset{\circ}{B}(0, r^m)$, que es un entorno abierto de $w_0$. Como $z_0 \in \Omega$ es arbitrario, concluimos que $f(\Omega)$ es un abierto de $\mathbb{C}$.

(4) Sean $z_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tales que $\overset{\circ}{B}(z_0; r) \subset \Omega$. Observemos que $\overset{\circ}{B}(z_0; r)$ es región y que $f$ no es constante en $\overset{\circ}{B}(z_0; r)$ (si lo fuera, sería constante en $\Omega$). Aplicando (3) sale que $f(\overset{\circ}{B}(z_0; r))$ es un abierto. Esto prueba que $f$ es abierta en $\Omega$. ■

**Proposición 3.2.4.** *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f$ es 1-a-1 en $\Omega$. Entonces $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega$, $W := f(\Omega)$ es un abierto de $\mathbb{C}$ y la inversa $g := f^{-1} : W \to \Omega$ verifica $g \in \mathcal{H}(W)$.*

*Demostración.* Supongamos que existe $z_0 \in \Omega$ tal que $f'(z_0) = 0$. Entonces $z_0$ es cero de $f(z) - f(z_0)$ de orden $m \geq 2$. Por la Proposición 3.2.3 existe un entorno abierto $U \subset \Omega$ de $z_0$ verificando que $f(z) = f(z_0) + (\varphi(z))^m$, $\forall z \in U$, siendo $\varphi \in \mathcal{H}(U)$ tal que $\varphi(U) = \overset{\circ}{B}(0, r) := D(0, r)$ para cierto $r > 0$ y $\varphi$ es 1-a-1. Sea $a \in D(0, r^m) \setminus \{0\}$. La ecuación $z^m = a$ tiene $m$ soluciones distintas $\beta_1, ..., \beta_m \in D(0, r)$. Obviamente, como $\varphi$ es 1-a-1 sobre $U$, existen $m$ puntos distintos $\gamma_1, ..., \gamma_m \in U$ tales que $\varphi(\gamma_i) = \beta_i$. En consecuencia

$$f(\gamma_i) = f(z_0) + (\varphi(\gamma_i))^m = f(z_0) + a, \ i = 1, ..., m,$$

lo que es una contradicción porque $f$ es 1-a-1. Por tanto $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega$. Usando ahora el T. de la aplicación abierta sale que $W := f(\Omega)$ es un abierto de $\mathbb{C}$, que la inversa $f^{-1}$ es holomorfa en $f(\Omega)$ y que $(f^{-1})'(w) = 1/(f'(f^{-1}(w)), \ \forall w \in f(\Omega)$. ■

**NOTA.** Observemos que, si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es una región y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ verifica $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega$, $f$ no es necesariamente 1-a-1 en $\Omega$. Basta considerar $f(z) = z^2$ sobre $\Omega := \overset{\circ}{B}_r(0, 1)$.

## 3.3. El Lema de Schwarz

Definimos $\mathcal{H}^\infty := \mathcal{H}^\infty(D) := \{f : D \to \mathbb{C} : f \text{ acotada y } f \in \mathcal{H}(D)\}$. Si $f \in \mathcal{H}^\infty$, se define

$$\|f\| = \|f\|_\infty := \sup\{|f(z)| : z \in D\}.$$

Trivialmente $(\mathcal{H}^\infty, +, \star, \|\cdot\|)$ es un espacio normado. Aún más, es un espacio de Banach.

**Proposición 3.3.1** (Lema de Schwarz)**.** *Sea $f \in \mathcal{H}^\infty$ tal que $\|f\| \leq 1$ y $f(0) = 0$. Se tiene que*

*(1) $|f(z)| \leq |z|, \ \forall z \in D$.*

*(2) $|f'(0)| \leq 1$.*

*(3) Si vale la igualdad en* (1) *para algún $z \in D \setminus \{0\}$ ó si vale en* (2)*, entonces $f(z) = \lambda z$ para cierto $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$.*

*Demostración.* Sea $g : D \to \mathbb{C}$ tal que

$$g(z) = \begin{cases} f(z)/z, & 0 < |z| < 1 \\ f'(0), & z = 0 \end{cases}$$

Se tiene que

(a) Obviamente $f(z) = zg(z), \ \forall z \in D$

(b) $g \in \mathcal{H}(D)$ porque trivialmente $f(z)/z \in \mathcal{H}(D \setminus \{0\})$ y $\lim_{z \to 0} g(z) = f'(0) = g(0)$.

(c) $g \in \mathcal{H}^\infty$. De hecho, $\|g\| \leq 1$. En efecto, cogemos $1 > \epsilon > 0$ y aplicamos el Corolario 3.1.3 (en realidad, el T. del módulo máximo) a la bola $B(0, 1-\epsilon)$ y a cualquier $z \in B(0, 1-\epsilon)$. Obtenemos que

$$|g(z)| \leq \max\{|g(w)| : w \in \partial B(0, 1-\epsilon)\} = \frac{\max\{|f(w)| : w \in \partial B(0, 1-\epsilon)\}}{1-\epsilon}.$$

Por tanto, para todo $z \in D$ se verifica

$$|g(z)| \leq \limsup_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\max\{|f(w)| : w \in \partial B(0, 1-\epsilon)\}}{1-\epsilon} \leq \|f\| \leq 1.$$

(1) y (2). Puesto que $f(z) = zg(z)$ y $\|g\| \leq 1$, obtenemos que $|f(z)| \leq |z|, \ \forall z \in D$, y que $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$.

(3) Supongamos que para cierto $z \in D \setminus \{0\}$ se verifica $|f(z)| = |z|$. Entonces $|g(z)| = 1$. También, si $|f'(0)| = 1$, sale que $|g(0)| = 1$. En cualquier de los casos, aplicando el Corolario 3.1.2 obtenemos que $g(z) = \lambda = cte, \ \forall z \in D$, con $|\lambda| = 1$. De aquí que $f(z) = \lambda z, \ \forall z \in D$, con $|\lambda| = 1$. ∎

## 3.4. Automorfismos del disco unidad $D$

Un automorfismo de un abierto $U$ de $\mathbb{C}$ es toda biyección $f : U \to U$ que sea holomorfa (y por tanto bi-holomorfa). Indicaremos por $Aut(U)$ el conjunto de los automorfismos del abierto $U \subset \mathbb{C}$. Si $a \in D := \overset{\circ}{B}(0,1)$, definimos

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\tfrac{1}{\overline{a}}\},\ \varphi_a(z) := \frac{z-a}{1-\overline{a}z},$$

y $\tilde{\varphi}_a : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ de modo que

$$\tilde{\varphi}_a(z) = \begin{cases} \varphi_a(z), & z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\overline{a}}\} \\ \infty, & z = \frac{1}{\overline{a}} \\ -\frac{1}{\overline{a}}, & z = \infty \end{cases}$$

**Proposición 3.4.1.** *Sea $a \in D$. Se tiene que*

*(1) $\varphi_a \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\overline{a}}\})$ con polo de orden 1 en $1/\overline{a}$ y $\varphi_a(\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\overline{a}}\}) = \mathbb{C} \setminus \{\frac{-1}{\overline{a}}\}$. Si $a = 0$, entonces $\varphi_0 = id_{\mathbb{C}}$ y $1/\overline{a} = \infty$ es polo de $\varphi_0$.*

*(2) $\varphi_{-a} \circ \varphi_a = id$ en $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\overline{a}}\}$, $\varphi_a \circ \varphi_{-a} = id$ en $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{1}{\overline{a}}\}$ y $\varphi_a$ es una biyección entre $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\overline{a}}\}$ y $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{1}{\overline{a}}\}$.*

*(3) $\varphi_a$ es una biyección bi-holomorfa entre $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\overline{a}}\}$ y $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{1}{\overline{a}}\}$.*

*(4) $\tilde{\varphi}_a$ es un homeomorfismo de $\mathbb{C}_\infty$ sobre $\mathbb{C}_\infty$.*

*(5) Si $\mathbb{T} := \partial D$, $\varphi_a(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$ y $\varphi_a$ es un homeomorfismo de $\mathbb{T}$ en sí mismo.*

*(6) $\varphi_a(D) = D$ y $\varphi_a$ es un automorfismo de $D$.*

*(7) $\varphi_a'(0) = 1 - |a|^2$ y $\varphi_a'(a) = 1/(1-|a|^2)$.*

*Demostración.* (1) Si $a \neq 0$, el único problema de $\varphi_a$ está en la solución de la ec. $1 - \overline{a}z = 0$, es decir, en $1/\overline{a}$, en donde tiene un polo de orden 1. Claramente, $\varphi_a \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\overline{a}}\})$. Observemos que $|1/\overline{a}| > 1$. La ec. $\varphi_a(z) = w_0$ con $w_0 \in \mathbb{C}$ tiene la única solución $z = (w_0 + a)/(1 + w_0\overline{a})$, que existe siempre salvo para $w_0 = -1/\overline{a}$. Por tanto $\varphi_a(\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\overline{a}}\}) = \mathbb{C} \setminus \{\frac{-1}{\overline{a}}\}$.

Si $a = 0$ es claro que $\varphi_0 = id_{\mathbb{C}}$ y que $\infty = 1/\overline{a}$ es un polo de $\varphi_0$.

(2) Basta echar las cuentas para comprobar que $\varphi_{-a} \circ \varphi_a = id$ en $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\overline{a}}\}$ y $\varphi_a \circ \varphi_{-a} = id$ en $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{1}{\overline{a}}\}$. En consecuencia, $\varphi_a$ y $\varphi_{-a}$ son biyecciones entre $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\overline{a}}\}$ y $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{1}{\overline{a}}\}$, tales que $(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{-a}$ y $(\varphi_{-a})^{-1} = \varphi_a$.

(3) Por lo tanto, $\varphi_a$ es una biyección holomofa entre $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\overline{a}}\}$ y $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{1}{\overline{a}}\}$, es decir, un homeomorfismo holomorfo, cuyo inverso $\varphi_{-a}$ es también holomorfo.

(4) Es claro que $\tilde{\varphi}_a$ es una biyección de $\mathbb{C}_\infty$, que es trivialmente bi-continua.

(5) Sea $e^{it} \in \mathbb{T}$. Entonces

$$|\varphi_a(e^{it})| = \left|\frac{e^{it} - a}{1 - \overline{a}e^{it}}\right| = \left|\frac{e^{it} - a}{e^{-it} - \overline{a}}\right| = 1.$$

Por tanto, $\varphi_a(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$. Obviamente, también ocurre que $\varphi_{-a}(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$. Como $\varphi_a \circ \varphi_{-a} \upharpoonright \mathbb{T} = id_{\mathbb{T}}$, se tiene que

$$\mathbb{T} = \varphi_a \circ \varphi_{-a}(\mathbb{T}) \subset \varphi_a(\mathbb{T}).$$

Por tanto $\varphi_a(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$ y $\varphi_a$ es un homeomorfismo de $\mathbb{T}$ en $\mathbb{T}$.

(6) Por el Corolario 3.1.3 y (5) todo $z \in D$ verifica

$$|\varphi_a(z)| \leq \text{máx}\{|\varphi_a(w)| : w \in \mathbb{T}\} = 1.$$

Como $\varphi_a$ no es constante en $D$, del Corolario 3.1.2 obtenemos que $|\varphi_a(z)| < 1,\ \forall z \in D$, es decir, $\varphi_a(D) \subset D$. Por la misma razón $\varphi_{-a}(D) \subset D$. Como $\varphi_a \circ \varphi_{-a} = id$ sobre $D$, se tiene que

$$D = \varphi_a \circ \varphi_{-a}(D) \subset \varphi_a(D).$$

En consecuencia, $\varphi_a(D) = D$ y, por tanto, $\varphi_a$ es un automorfismo de $D$.

(7) sale sin dificultad echando cuentas. ∎

**Proposición 3.4.2.** *Sean $f \in \mathcal{H}^\infty$ con $\|f\| \leq 1$ y $a, b \in D$ tales que $f(a) = b$. Entonces:*

*(1) $|f'(a)| \leq \frac{1-|b|^2}{1-|a|^2}$.*

*(2) La igualdad vale en la anterior acotación de* (1) *sii*

$$f(z) = \varphi_{-b}(\lambda\varphi_a(z)),\ \forall z \in D,$$

*para cierto $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$.*

*Demostración.* (1) Pongamos

$$g(z) = \varphi_b \circ f \circ \varphi_{-a}(z),\ \forall z \in D.$$

Es claro que $g \in \mathcal{H}^\infty$, $\|g\| \leq 1$ y $g(0) = 0$. Del Lema de Schwarz obtenemos que $|g'(0)| \leq 1$. De la regla de la cadena y de (7) de la Proposición 3.4.1 sale que

$$g'(0) = \varphi_b'(b) \cdot f'(a) \cdot \varphi_{-a}'(0) \ \text{ de donde } |f'(a)| \leq \frac{1-|b|^2}{1-|a|^2}. \tag{3.5}$$

(2) Es inmediato (por (7) de la Proposición 3.4.1) que $|f'(a)| = (1-|b|^2)/(1-|a|^2)$, si

$$f(z) = \varphi_{-b}(\lambda\varphi_a(z)),\ \forall z \in D,$$

para cierto $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$.

Por otra parte, por el Lema de Schwarz, la igualdad vale en la anterior acotación de (1) sii $|g'(0)| = 1$ sii $g(z) = \lambda z,\ \forall z \in D$, con $\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1$, en cuyo caso tendríamos

$$f(z) = \varphi_{-b}(\lambda\varphi_a(z)),\ \forall z \in D.$$

∎

**Proposición 3.4.3** (T. de caracterización de los automorfismos de $D$)**.** *Sea $f : D \to D$ un automorfismo de $D$ tal que $f^{-1}(0) = a \in D$. Entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ tal que $f(z) = \lambda \cdot \varphi_a(z)$, $\forall z \in D$. En consecuencia los automorfismos $Aut(D)$ de $D$ verifican*

$$Aut(D) = \{e^{i\theta} \cdot \varphi_b : e^{i\theta} \in \partial D,\ b \in D\}.$$

*Demostración.* Sea $g := f^{-1} : D \to D$. Se tiene que $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in D$ (por la Proposición 3.2.4) y además que $g'(w) = 1/(f'(g(w))$, $\forall w \in D$ (por la regla de la cadena). En particular $g'(0) \cdot f'(a) = 1$. Por la Proposición 3.4.2 precedente sabemos que

$$|f'(a)| \leq \frac{1}{1 - |a|^2} \ \text{ y } |g'(0)| \leq 1 - |a|^2.$$

Puesto que $g'(0) \cdot f'(a) = 1$, necesariamente

$$|f'(a)| = \frac{1}{1 - |a|^2} \ \text{ y } |g'(0)| = 1 - |a|^2.$$

Finalmente, de nuevo por la Proposición 3.4.2, concluimos que $f(z) = \lambda \cdot \varphi_a(z)$, $\forall z \in D$, con $|\lambda| = 1$. ∎

# Capítulo 4

# Topología compacto-abierta. Teorema de Ascoli. Teorema de Weierstrass. Teorema de Montel

## 4.1. Familias anidadas. La topología compacto-abierta

**Proposición 4.1.1.** *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío. Existe una familia de subconjuntos compactos $\{K_n : n \geq 1\}$ de $G$ tal que*

*(1) $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1} \subset G$.*
*(2) $\cup_{n\geq 1} K_n = \cup_{n\geq 1} \overset{\circ}{K}_n = G$.*
*De lo anterior se deduce que:*
*(3) Para todo compacto $K \subset G$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_m$.*

*Una familia de compactos $\mathcal{K} := \{K_n : n \geq 1\}$ se dice que* **está anidada** *(de modo creciente) dentro de $G$ si se verifican las condiciones (1), (2) y (3) anteriores.*

*Demostración.* Basta coger $K_n := \{z \in G : d(z, {}^cG) \geq \frac{1}{n}\} \cap B(0,n), \ \forall n \geq 1.$ ■

**Proposición 4.1.2.** *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto, $\mathcal{K} := \{K_n : n \geq 1\}$ una familia anidada de compactos dentro de $G$ y $(F,d)$ un em. Para todo par $f, g \in C(G,F)$ definimos:*

$$\rho_{K_n}(f,g) := \text{máx}\{d(f(z),g(z)) : z \in K_n\}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

*y*

$$\rho_{\mathcal{K}}(f,g) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_{K_n}(f,g)}{1+\rho_{K_n}(f,g)}.$$

*Se tiene que:*

*(1) $(C(G,F), \rho_{K_n})$ es un espacio pseudométrico para todo $n \geq 1$.*
*(2) $(C(G,F), \rho_{\mathcal{K}})$ es un espacio métrico.*

*Demostración.* Es inmediato que tanto $\rho_{K_n}$ como $\rho_{\mathcal{K}}$ son pseudo-métricas en $C(G,F)$. Además, $\rho_{\mathcal{K}}$ es una métrica porque para todo par $f,g \in C(G,F)$ se tiene

$$\rho_{\mathcal{K}}(f,g) = 0 \;\Leftrightarrow\; f \restriction K_n = g \restriction K_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \;\Leftrightarrow f = g.$$

■

**Proposición 4.1.3.** *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un abierto, $(F,d)$ un em., $\mathcal{K} := \{K_n : n \geq 1\}$ una secuencia anidada de compactos dentro de $G$ y $(C(G,F),\rho)$ el espacio de las funciones continuas $f : G \to F$ con la métrica $\rho := \rho_{\mathcal{K}}$ subordinada a la familia $\mathcal{K} = \{K_n : n \geq 1\}$. Se tiene lo siguiente:*

*(1) Para todo $\epsilon > 0$ existen $\delta > 0$ y un compacto $K \subset G$ tales que*

$$\forall f,g \in C(G,F),\ \sup\{d(f(z),g(z)) : z \in K\} \leq \delta \;\Rightarrow\; \rho(f,g) \leq \epsilon.$$

*(2) Para todo $\epsilon > 0$ y todo subconjunto compacto $K \subset G$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\forall f,g \in C(G,F),\ \rho(f,g) \leq \delta \;\Rightarrow\; \sup\{d(f(z),g(z)) : z \in K\} \leq \epsilon.$$

*(3) Sea $U \subset C(G,F)$. Son equivalentes*

*(3a) $U$ es abierto en $(C(G,F),\rho)$.*

*(3b) Para todo $f \in U$ existen $\epsilon > 0$ y un subconjunto compacto $K \subset G$ tales que*

$$\{g \in C(G,F) : \sup\{d(f(z),g(z)) : z \in K\} \leq \epsilon\} \subset U.$$

*(4) Sea $\{f_n : n \geq 0\} \subset C(G,F)$. Entonces son equivalentes*

*(4a) $f_n \overset{\rho}{\to} f_0$.*

*(4b) Para todo $r \in \mathbb{N}$, $f_n \to f_0$ uniformemente sobre $K_r$.*

*(4c) Para todo subconjunto compacto $K \subset G$, $f_n \to f_0$ uniformemente sobre $K$.*

*(5) $(C(G,F),\rho)$ es un espacio métrico, que es completo caso de serlo $(F,d)$.*

*(6) Sea $\mathcal{H} := \{H_n : n \geq 1\}$ otra secuencia de subconjuntos compactos anidada dentro de $G$ y $\rho_{\mathcal{H}}$ la métrica asociada. Entonces las métricas $\rho := \rho_{\mathcal{K}}$ y $\rho_{\mathcal{H}}$ son uniformemente equivalentes.*

*Demostración.* (1) Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n>N} \frac{1}{2^n} \leq \frac{\epsilon}{2}$. Hacemos $K := K_N$ y $\delta := \epsilon/2$. Entonces para todo par $f,g \in C(G,F)$ tal que $\rho_{K_N}(f,g) \leq \epsilon/2$ se tiene que

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{n=N} \frac{1}{2^n}\frac{\rho_{K_n}(f,g)}{1+\rho_{K_n}(f,g)} + \sum_{n>N} \frac{1}{2^n}\frac{\rho_{K_n}(f,g)}{1+\rho_{K_n}(f,g)} \leq \sum_{n=1}^{n=N} \frac{1}{2^n}\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon.$$

(2) Sean $r \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_r$, $\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $\psi(t) = t/(1+t)$, $\eta := \psi(\epsilon)$ y $\delta := \eta/2^r$. Sean $f, g \in C(G, F)$ tales que $\rho(f, g) \leq \delta$. Entonces

$$\delta \geq \rho(f, g) \geq \frac{1}{2^r} \frac{\rho_{K_r}(f, g)}{1 + \rho_{K_r}(f, g)} = \frac{1}{2^r} \psi(\rho_{K_r}(f, g)),$$

de donde sale que $\psi(\rho_{K_r}(f, g)) \leq \eta = \psi(\epsilon)$. Por tanto, como $\psi$ es creciente obtenemos

$$\epsilon \geq \rho_{K_r}(f, g) = \sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K_r\} \geq \sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\}.$$

(3) $(3a) \Rightarrow (3b)$. Sea $f \in U$. Como $U$ es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\{g \in C(G, F) : \rho(f, g) \leq \epsilon\} =: B_\rho(f, \epsilon) \subset U.$$

Por (1) existen $\delta > 0$ y un subconjunto compacto $K \subset G$ tales que

$$\{g \in C(G, F) : d(f(z), g(z)) \leq \delta, \ \forall z \in K\} \subset B_\rho(f, \epsilon) \subset U.$$

$(3b) \Rightarrow (3a)$. Sea $f \in U$. Por hipótesis existen $\epsilon > 0$ y un subconjunto compacto $K \subset G$ tales que

$$\{g \in C(G, F) : \sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\} \leq \epsilon\} \subset U.$$

Por (2) existe $\delta > 0$ tal que

$$\{g \in C(G, F) : \rho(f, g) \leq \delta\} =: B_\rho(f, \delta) \subset \{g \in C(G, F) : \sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\} \leq \epsilon\}.$$

Por tanto $B_\rho(f, \delta) \subset U$ y esto prueba que $U$ es un abierto en $(C(G, F), \rho)$.

(4) $(4a) \Rightarrow (4b)$. Sea $r \in \mathbb{N}$ fijo. Se tiene que

$$\frac{1}{2^r} \frac{\rho_{K_r}(f_n, f_0)}{1 + \rho_{K_r}(f_n, f_0)} \leq \rho(f_n, f_0) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Por tanto

$$\rho_{K_r}(f_n, f_0) = \sup\{d(f_n(z), f_0(z)) : z \in K_r\} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

es decir, $f_n \to f_0$ uniformemente sobre $K_r$.

$(4b) \Rightarrow (4c)$ es obvio por (3) de la Proposición 4.1.1.

$(4c) \Rightarrow (4a)$. Sea $\epsilon > 0$. Elegimos $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i>n_1} \frac{1}{2^i} \leq \epsilon/2$. A continuación elegimos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se verifique

$$\sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_{K_i}(f_n, f_0)}{1 + \rho_{K_i}(f_n, f_0)} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Entonces para todo $n \geq n_0$ se tiene que

$$\rho(f_n, f_0) = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_{K_i}(f_n, f_0)}{1 + \rho_{K_i}(f_n, f_0)} + \sum_{i>n_1} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_{K_i}(f_n, f_0)}{1 + \rho_{K_i}(f_n, f_0)} \leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i>n_1} \frac{1}{2^i} \leq \epsilon.$$

(5) Supongamos que $(F, d)$ es un em completo y sea $\{f_n : n \geq 1\} \subset C(G, F)$ una sucesión de Cauchy en la métrica $\rho := \rho_{\mathcal{K}}$. En particular, la sucesión $\{f_n(z) : n \geq 1\} \subset F$ es de Cauchy en $(F, d)$, $\forall z \in G$. En consecuencia, para todo $z \in G$ existe el límite $\lim_{n\to\infty} f_n(z)$ en $(F, d)$. Definimos $f : G \to F$ de modo que $f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z)$, $\forall z \in G$. Además, para cada $r \in \mathbb{N}$ la sucesión $\{f_n \restriction K_r : n \geq 1\}$ es una sucesión de Cauchy en $C(K_r, F)$ para la convergencia uniforme sobre $K_r$. Este hecho, unido a que la secuencia $\mathcal{K}$ está anidada en $G$, nos lleva a concluir que $f \in C(G, F)$. Ahora basta aplicar (4).

(6) Sean $f, g \in C(G, F)$ y $\epsilon > 0$. Queremos ver que existe $\eta > 0$ tal que, si $\rho_{\mathcal{H}}(f, g) < \eta$, entonces $\rho_{\mathcal{K}}(f, g) < \epsilon$. Sea $p \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n>p} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $K_p \subset H_m$. Teniendo en cuenta que, $\forall r \leq p$, $\rho_{K_r}(f, g) \leq \rho_{K_p}(f, g) \leq \rho_{H_m}(f, g)$ y las propiedades de la función $\psi(t) = \frac{t}{1+t}$, es claro que existe $\eta_1 > 0$ tal que, si $\rho_{H_m}(f, g) < \eta_1$, entonces

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_{K_n}(f, g)}{1 + \rho_{K_n}(f, g)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

A continuación observemos que $\rho_{H_m}(f, g)$ se hace muy pequeño, tomando $\rho_{\mathcal{H}}(f, g)$ suficientemente pequeño. Así que es posible elegir $\eta > 0$ tal que $\rho_{\mathcal{H}}(f, g) < \eta$ implique que $\rho_{H_m}(f, g) < \eta_1$. Por tanto, si $\rho_{\mathcal{H}}(f, g) < \eta$, se verifica

$$\rho_{\mathcal{K}}(f, g) = \sum_{n\geq 1}^{p} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_{K_n}(f, g)}{1 + \rho_{K_n}(f, g)} + \sum_{n>p} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_{K_n}(f, g)}{1 + \rho_{K_n}(f, g)} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

■

**Definición 4.1.4.** *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto y $(F, d)$ un espacio métrico. La topología compacto-abierta $\tau_{co}$ de $C(G, F)$ es la topología asociada a la métrica $\rho_{\mathcal{H}}$, siendo $\mathcal{H} := \{H_n : n \geq 1\}$ una familia anidada dentro de $G$. Observemos que la métrica $\rho_{\mathcal{H}}$ es completa, si $(F, d)$ es em completo. $\tau_{co}$ es una topología metrizable, que no depende de la familia anidada $\mathcal{H} := \{H_n : n \geq 1\}$ dentro de $G$ elegida para definirla.*

## 4.2. El Teorema de Ascoli

A continuación nos vamos a ocupar de la caracterización de los subconjuntos compactos de $(C(G, F), \tau_{co})$. Comenzaremos recordando los conceptos de compacto, relativamente compacto, precompacto, etc., en el contexto de los espacios métricos. Si $(F, d)$ es un em y $A \subset F$, entonces:

(1) $A$ es compacto si de todo recubrimiento abierto de $A$ se puede extraer un subrecubrimiento finito de $A$. $A$ es relativamente compacto si existe un subconjunto compacto $K \subset F$ tal que $A \subset K$.
(2) Es inmediato que $A$ es relativamente compacto sii $\overline{A}$ es compacto.
(3) $A$ es precompacto si para todo $\epsilon > 0$ existe un número finito de bolas de radio $\epsilon$ que recubren $A$.

(4) Si $(F, d)$ es un em completo se prueba sin dificultad que:
(41) $A$ es compacto $\Leftrightarrow$ $A$ es precompacto y cerrado.
(42) $A$ es relativamente compacto $\Leftrightarrow$ $A$ es precompacto.

(5) Si $G \subset \mathbb{C}$ es un abierto, un subconjunto $\mathcal{F} \subset C(G, F)$ se dice que es *equicontinuo en* $z_0 \in G$ si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \sup\{d(f(z), f(z_0)) : z \in B(z_0, \delta), f \in \mathcal{F}\} \le \epsilon.$$

Decimos que $\mathcal{F}$ es *equicontinuo* sii $\mathcal{F}$ es equicontinuo en cada $z \in G$.

En lo que sigue consideraremos el espacio $(C(G, F), \tau_{co})$, siendo $G \subset \mathbb{C}$ un abierto y $(F, d)$ un em. En $C(G, F)$ consideraremos la métrica $\rho = \rho_{\mathcal{K}}$ asociada a una cierta familia anidada de compactos $\mathcal{K} = \{K_n : n \ge 1\}$ dentro de $G$.

**Lema 4.2.1.** *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un abierto, $(F, d)$ un em y $\mathcal{F} \subset C(G, F)$. Entonces*

*(A) Son equivalentes:*

*(A1) $\mathcal{F}$ es precompacto.*

*(A2) Para todo subconjunto compacto $K \subset G$ y todo $\epsilon > 0$ existen $f_1, ..., f_r \in \mathcal{F}$ tales que, para todo $f \in \mathcal{F}$, existe $j \in \{1, 2, ..., r\}$ tal que* $\sup\{d(f(z), f_j(z)) : z \in K\} \le \epsilon$.

*(B) $\mathcal{F}$ es equicontinuo sii $\overline{\mathcal{F}}$ es equicontinuo.*

*(C) Si $z_0 \in G$ son equivalentes:*

*(C1) $\mathcal{F}(z_0) := \{f(z_0) : f \in \mathcal{F}\} \subset F$ es relativamente compacto.*

*(C2) $\overline{\mathcal{F}}(z_0)$ es relativamente compacto.*

*Demostración.* (A) $(A1) \Rightarrow (A2)$. Sean $K \subset G$ un subconjunto compacto y $\epsilon > 0$ fijos. Por (2) de la Proposición 4.1.3 existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall f, g \in C(G, F),\ \rho(f, g) \le \delta \ \Rightarrow\ \sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\} \le \epsilon. \tag{4.1}$$

Supongamos que $\mathcal{F}$ es precompacto. Entonces, por definición, existen $f_1, ..., f_r \in \mathcal{F}$ tales que

$$\forall f \in \mathcal{F},\ \exists j \in \{1, ..., r\} \text{ tal que } \rho(f, f_j) \le \delta.$$

Por (4.1) concluimos que $\sup\{d(f(z), f_j(z)) : z \in K\} \le \epsilon$.

$(A2) \Rightarrow (A1)$. Fijemos $\delta > 0$. Por (1) de la Proposición 4.1.3 existen $\epsilon > 0$ y un subconjunto compacto $K \subset G$ tales que

$$\forall f, g \in C(G, F),\ \sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\} \le \epsilon \ \Rightarrow\ \rho(f, g) \le \delta.$$

Por hipótesis

$$\exists f_1, ..., f_r \in \mathcal{F} \text{ tales que },\ \forall f \in \mathcal{F},\ \exists j \in \{1, 2, ..., r\} \text{ tal que } \sup\{d(f(z), f_j(z)) : z \in K\} \le \epsilon.$$

Por tanto $\rho(f, f_j) \le \delta$ y esto prueba que $\mathcal{F}$ es precompacto.

(B) Es claro que $\mathcal{F}$ es equicontinuo, caso de serlo $\overline{\mathcal{F}}$. Supongamos ahora que $\mathcal{F}$ es equicontinuo y probemos que también lo es $\overline{\mathcal{F}}$. Sea $\epsilon > 0$. Por hipótesis por cada $z \in G$ existe $\delta_z > 0$ tal que $B(z, \delta_z) \subset G$ y

$$\sup\{d(f(w), f(z)) : f \in \mathcal{F}, w \in B(z, \delta_z)\} \leq \epsilon.$$

Si $f \in \overline{\mathcal{F}}$, existe una secuencia $\{f_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{F}$ tal que $f_n \overset{\rho}{\to} f$ de donde $f_n(w) \overset{d}{\to} f(w)$, $\forall w \in G$. De aquí que por contuinidad también es verdad que

$$\sup\{d(f(w), f(z)) : f \in \overline{\mathcal{F}}, w \in B(z, \delta_z)\} \leq \epsilon,$$

lo que implica que $\overline{\mathcal{F}}$ es equicontinuo.

(C) $(C1) \Rightarrow (C2)$. Si $f_0 \in \overline{\mathcal{F}}$, existe una secuencia $\{f_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{F}$ tal que $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f_0$ en la métrica $\rho$. Por tanto, $f_n(z_0) \to f_0(z_0)$ en $(F, d)$ y por ello $f(z_0) \in \overline{\mathcal{F}(z_0)}$. En consecuencia, $\overline{\mathcal{F}}(z_0) \subset \overline{\mathcal{F}(z_0)}$. Finalmente observemos que $\overline{\mathcal{F}(z_0)}$ es compacto en $(F, d)$, de donde sale que $\overline{\mathcal{F}}(z_0)$ es relativamente compacto.

$(C2) \Rightarrow (C1)$ es obvio. ■

**Proposición 4.2.2** (Teorema de Ascoli). *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $(F, d)$ un em completo y $\mathcal{F} \subset C(\Omega, F)$. Son equivalentes:*

*(1) $\mathcal{F}$ es cerrado, equicontinuo y $\mathcal{F}(K)$ es un subconjunto compacto de $F$, para todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$.*

*(2) $\mathcal{F}$ es cerrado, equicontinuo y $\mathcal{F}(w)$ es un subconjunto compacto de $F$, para todo $w \in \Omega$.*

*(3) $\mathcal{F}$ es cerrado, equicontinuo y $\mathcal{F}(w)$ es relativamente compacto en $(F, d)$, para todo $w \in \Omega$.*

*(4) $\mathcal{F}$ es compacto.*

*Demostración.* Las implicaciones $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ son obvias.

$(3) \Rightarrow (4)$. Sea $\rho$ la métrica asociada a una secuencia de compactos anidada dentro de $\Omega$. Sabemos que $(C(\Omega, F), \rho)$ es un em completo. Por tanto, por el T, de Bolzano-Weierstrass, $\mathcal{F}$ es compacto sii $\mathcal{F}$ es precompacto. En consecuencia, por el Lema 4.2.1 bastará probar que

"Dados un subconjunto compacto $K \subset \Omega$ y $\epsilon > 0$, existen $f_1, ..., f_s \in \mathcal{F}$ tales que, $\forall f \in \mathcal{F}$, existe $j \in \{1, 2, ..., s\}$ tal que $\max\{d(f(z), f_j(z)) : z \in K\} \leq \epsilon$."

Así pues, fijemos el subconjunto compacto $K \subset \Omega$ y $\epsilon > 0$. Puesto que $\mathcal{F}$ es equicontinuo, por cada $z \in K$ existe un entorno abierto $V^z \subset \Omega$ de $z$ tal que

$$\sup\{d(f(z), f(w)) : w \in V^z, f \in \mathcal{F}\} \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Al ser $K$ compacto, se pueden elegir $z_1, ..., z_r \in K$ de modo que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{r} V^{z_i}.$$

Sean

$$H := \overline{\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{F}(z_i)} \text{ y } \varphi : \mathcal{F} \to H^r \text{ tal que } \varphi(f) = (f(z_i))_{i=1}^r, \ \forall f \in \mathcal{F}.$$

Observemos que $H$ es un subconjunto compacto de $F$ (aplicar que $\mathcal{F}(w)$ es rel. compacto en $F$) y, por tanto, $H^r$ es un espacio métrico compacto, con la métrica $\tilde{d}$ tal que

$$\forall (h_i)_{i=1}^r, (h_i')_{i=1}^r \in H^r, \quad \tilde{d}((h_i)_{i=1}^r, (h_i')_{i=1}^r) = \max\{d(h_i, h_i') : i = 1, 2, ..., r\}.$$

En consecuencia, $\varphi(\mathcal{F})$ es $\tilde{d}$-precompacto (todos los subconjuntos de $H^r$ lo son). De aquí que

$$\exists f_1, ..., f_s \in \mathcal{F} \text{ tales que } \varphi(\mathcal{F}) \subset \bigcup_{i=1}^{s} B_{\tilde{d}}(\varphi(f_i), \epsilon/3).$$

Sea $f \in \mathcal{F}$ fijo. Por lo anterior existe $j \in \{1, ..., s\}$ tal que

$$\max\{d(f(z_i), f_j(z_i)) : i = 1, ..., r\} \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Sean $z \in K$ y $i \in \{1, ..., r\}$ tales que $z \in V^{z_i}$. Entonces

$$d(f(z), f_j(z)) \leq d(f(z), f(z_i)) + d(f(z_i), f_j(z_i)) + d(f_j(z_i), f_j(z)) \leq$$
$$\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

(4) $\Rightarrow$ (1). (A) Claramente $\mathcal{F}$ es cerrado, porque es compacto.

(B) Sea $K \subset \Omega$ un subconjunto compacto y probemos que $\mathcal{F}(K)$ es un subconjunto compacto de $F$. Para ello vamos a utilizar la caracterización de los conjuntos métricos compactos por sucesiones. Así que cogemos sucesiones $\{f_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{F}$, $\{z_n : n \geq 1\} \subset K$ y probamos que existe una subsucesión $\{f_{n_r}(z_{n_r}) : r \geq 1\} \subset F$ que converge a algún punto de $\mathcal{F}(K)$. Puesto que $\mathcal{F}$ es métrico compacto (en $(C(\Omega, F), \rho)$) y $K$ es también métrico compacto en $\mathbb{C}$, podemos suponer, pasando a una subsucesión si es preciso, que existen $f_0 \in \mathcal{F}$ y $z_0 \in K$ tales que $f_n \xrightarrow{\rho} f_0$ y $z_n \to z_0$ en $\mathbb{C}$.

**Aserto.** $f_n(z_n) \xrightarrow{d} f_0(z_0)$ en $(F, d)$.

En efecto, sea $\epsilon > 0$. Puesto que $f_n \xrightarrow{\rho} f_0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_1$ se verifica

$$\max\{d(f_n(z), f_0(z)) : z \in K\} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $z_n \to z_0$ en $K$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f_0(z_n), f_0(z_0)) \leq \frac{\epsilon}{2}, \ \forall n \geq n_2.$$

Por tanto para $n \geq n_1 \vee n_2$ se tiene que

$$d(f_n(z_n), f_0(z_0)) \leq d(f_n(z_n), f_0(z_n)) + d(f_0(z_n), f_0(z_0)) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

lo que prueba el Aserto.

(C) Probemos que $\mathcal{F}$ es equicontinuo. Caso de no serlo, existirán $z_0 \in \Omega$, $\epsilon > 0$ y dos sucesiones $\{f_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{F}$ y $\{z_n : n \geq 1\} \subset \Omega$ tales que

$$z_n \to z_0 \quad \text{pero } d(f_n(z_n), f_n(z_0)) \geq \epsilon, \ \forall n \geq 1. \tag{4.2}$$

Utilizando el mismo argumento que en (B), podemos suponer que existe $f_0 \in \mathcal{F}$ tal que $f_n \xrightarrow{\rho} f_0$ y $f_n(z_n) \to f_0(z_0)$ en $(F, d)$. Por otra parte, de (4.2) y razones de continuidad deducimos que $d(f_0(z_0), f_0(z_0)) \geq \epsilon$, una contradicción que prueba que $\mathcal{F}$ es equicontinuo.

■

**Corolario 4.2.3.** *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $(F, d)$ un em completo y $\mathcal{F} \subset C(\Omega, F)$. Son equivalentes:*

*(1) $\mathcal{F}$ es relativamente compacto.*

*(2) $\mathcal{F}$ es equicontinuo y $\mathcal{F}(w)$ es un subconjunto rel. compacto en $(F, d)$, para todo $w \in \Omega$.*

*Demostración.* Sale inmediatamente del T. de Ascoli y del Lema 4.2.1. ■

**Corolario 4.2.4.** *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $(F, d)$ un em completo y $\mathcal{F} := \{f_n : n \geq 1\} \subset C(\Omega, F)$. Se verifica que:*

*(1) Si $\mathcal{F}$ es equicontinuo y $\mathcal{F}(z)$ es un subconjunto relativamente compacto en $(F, d)$ para todo $z \in \Omega$, existe una subsucesión $\{f_{n_k} : k \geq 1\}$ y una función $f \in C(\Omega, F)$ tales que $f_{n_k} \xrightarrow{\rho} f$.*

*(2) Si $\mathcal{F}$ es equicontinuo y puntualmente convergente, existe $f \in C(\Omega, F)$ tal que $f_n \xrightarrow{\rho} f$.*

*Demostración.* (1) Basta observar que $\mathcal{F}$ es rel. compacto en $(C(\Omega, F), \rho)$ por el Corolario 4.2.3.

(2) Puesto que $\mathcal{F}$ es puntualmente convergente, $\mathcal{F}(z)$ es rel. compacto en $(F, d)$ para todo $z \in \Omega$. Por (1) $\mathcal{F}$ es rel. compacto en $(C(\Omega, F), \rho)$ y existen $f \in C(\Omega, F)$ y una subsucesión $\{f_{n_r} : r \geq 1\}$ tales que $f_{n_r} \xrightarrow{\rho} f$. En particular, $f_{n_r}(z) \xrightarrow{d} f(z)$, $\forall z \in \Omega$.

**Aserto.** $f_n \xrightarrow{\rho} f$.

En efecto, en caso contrario, existirá una subsucesión $\{f_{p_i} : i \geq 1\}$ tal que $\rho(f, f_{p_i}) \geq \epsilon$ para cierto $\epsilon > 0$. Por el razonamiento anterior, existen $g \in C(\Omega, F)$ y una subsucesión de $\{f_{p_i} : i \geq 1\}$ (que denotamos también $\{f_{p_i} : i \geq 1\}$ por sencillez) tal que $f_{p_i} \stackrel{\rho}{\to} g$. Se tiene que

(i) $\rho(f, g) \geq \epsilon$ por continuidad.

(ii) $f_{p_i}(z) \stackrel{d}{\to} g(z),\ \forall z \in \Omega$.

Como $\lim f_{p_i}(z) = \lim f_{n_r}(z)$ para todo $z \in \Omega$, concluimos que $g = f$, una contradicción que prueba el Aserto. ■

## 4.3. El Teorema de Weierstrass

**Proposición 4.3.1** (Teorema de Weierstrass). *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un abierto, $\{f_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{H}(G)$ y $f : G \to \mathbb{C}$ tales que $f_n \to f$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $G$. Entonces:*

*(1) $f \in \mathcal{H}(G)$. En particular, $\mathcal{H}(G)$ es cerrado en $(C(G, \mathbb{C}), \rho)$.*

*(2) Las derivadas $k$-ésimas $f_n^{(k)}, f^{(k)}$ verifican $f_n^{(k)} \stackrel{\rho}{\to} f^{(k)},\ \forall k \in \mathbb{N}$.*

*Demostración.* (1) Sea $\mathcal{K} := \{K_r : r \geq 1\}$ la secuencia anidada dentro de $G$ asociada a la métrica $\rho$. Como $G = \bigcup_{r \geq 1} \overset{\circ}{K}_r$ y $f$ es continua sobre cada $K_r$, es claro que $f \in C(G, \mathbb{C})$. Sea $\Delta$ un triángulo cerrado tal que $\Delta \subset G$. Es claro que $f_n \to f$ uniformemente sobre $\Delta$ (y en particular sobre $\partial\Delta$) porque $\Delta$ es compacto. Además $\int_{\partial\Delta} f_n(z)dz = 0$ porque $f_n \in \mathcal{H}(G)$. Por tanto

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z)dz = 0.$$

Por el T. de Morera concluimos que $f \in \mathcal{H}(G)$.

(2) Bastará probar el caso $k = 1$. Para $k > 1$ se aplica inducción. Sean $a \in G$ y $0 < r < R < \infty$ tales que $B(a, R) \subset G$. Si $\gamma = \partial B(a, R)$, para todo $z \in B(a, r)$ y todo $n \geq 1$, por la Fórmula integral de Cauchy (ver Hoja 2, Ejer. 20) se tiene:

$$\left| f_n'(z) - f'(z) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(\xi) - f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| \leq \frac{M_n \cdot R}{(R - r)^2},$$

siendo $M_n := \max\{|f_n(z) - f(z)| : z \in \gamma^*\}$. Como $M_n \to 0$ (porque $f_n \to f$ uniformemente sobre $\gamma^*$), concluimos que $f_n' \to f'$ uniformemente sobre $B(a, r)$. Y también $f_n' \to f'$ uniformemente sobre cualquier compacto $K \subset G$, porque $K$ se puede cubrir con una familia finita de bolas cerradas tales que sobre cada una de ellas se verifica la convergencia $f_n' \to f'$ uniformemente. ■

**Corolario 4.3.2.** *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un abierto, $\{f_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{H}(G)$ y $f : G \to \mathbb{C}$ tales que la serie $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge hacia $f$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $G$. Entonces:*

*(1)* $f \in \mathcal{H}(G)$.

*(2) La serie de las derivadas k-ésimas* $\sum_{n\geq 1} f_n^{(k)}$ *también converge hacia la derivada* $f^{(k)}$ *uniformemente sobre subconjuntos compactos de* $G$.

*Demostración.* Es consecuencia inmediata del T. de Weierstrass. ■

## 4.4. El Teorema de Montel

Sean $G \subset \mathbb{C}$ un abierto y $\mathcal{F} \subset C(G, \mathbb{C})$. En $C(G, \mathbb{C})$ consideramos la métrica $\rho$ asociada a una secuencia anidada dentro de $G$. Entonces:

(1) Decimos que $\mathcal{F}$ es *normal* sii $\overline{\mathcal{F}}$ es compacto, es decir, normal = rel. compacto.

(2) Decimos que $\mathcal{F}$ es *localmente acotado* sii para todo $a \in G$ existe $r > 0$ tal que $\mathcal{F}(B(a,r))$ es acotado en $\mathbb{C}$. Obviamente, $\mathcal{F}$ es localmente acotado sii $\mathcal{F}(K)$ es un acotado de $\mathbb{C}$ para todo compacto $K \subset G$.

**Proposición 4.4.1** (Teorema de Montel)**.** *Sean* $G \subset \mathbb{C}$ *un abierto y* $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(G)$ *un subconjunto. Son equivalentes:*

*(1)* $\mathcal{F}$ *es normal ; (2)* $\mathcal{F}$ *es localmente acotado.*

*Demostración.* (1) $\Rightarrow$ (2). Si $\mathcal{F}$ es normal, entonces $\overline{\mathcal{F}}$ es compacto y, por el T. de Ascoli, concluimos que $\mathcal{F}(K)$ es rel. compacto (y por tanto acotado) en $\mathbb{C}$, para todo compacto $K \subset G$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Por el T. de Ascoli (ó el Corolario 4.2.3) bastará comprobar que $\mathcal{F}$ es equicontinuo en $G$. Sean $a \in G$ y $r > 0$ tales que $B(a,r) \subset G$. Por hipótesis $\mathcal{F}(B(a,r))$ es un conjunto acotado de $\mathbb{C}$. Sea $0 \leq M < \infty$ tal que $\mathcal{F}(B(a,r)) \subset B(0,M)$. Sea $z \in B(a, r/2)$. Si $\gamma = \partial B(a,r)$, por la Fórmula de Cauchy obtenemos

$$\begin{aligned} |f(z) - f(a)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left( \frac{f(\xi)}{\xi - z} - \frac{f(\xi)}{\xi - a} \right) d\xi \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma f(\xi) \frac{z-a}{(\xi - z)(\xi - a)} d\xi \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) \frac{z - a}{(a + re^{it} - z)(re^{it})} rie^{it} dt \right| \leq \frac{2M}{r} |z - a|. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Sean $\epsilon > 0$ y $0 < \delta \leq \text{mín}\{\frac{r}{2}, \epsilon \frac{r}{2M}\}$. Entonces para todo $z \in \overset{\circ}{B}(a, \delta)$ y todo $f \in \mathcal{F}$ se verifica $|f(z) - f(a)| \leq \epsilon$ por (4.3). Por tanto, $\mathcal{F}$ es equicontinuo. ■

**Corolario 4.4.2.** *Sean* $G \subset \mathbb{C}$ *un abierto y* $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(G)$ *un subconjunto. Son equivalentes:*

*(1)* $\mathcal{F}$ *es compacto ; (2)* $\mathcal{F}$ *es cerrado y localmente acotado.*

*Demostración.* Es consecuencia inmediata del T. de Montel. ■

# Capítulo 5

# Funciones armónicas. El problema de Dirichlet. Desigualdades y Teorema de Harnack.

## 5.1. Introducción

Si $G \subset \mathbb{C}$ es un abierto, una aplicación $u : G \to \mathbb{R}$ es *armónica* sii existen y son continuas hasta las segundas derivadas parciales $u_{xx}, u_{yy}$ y se verifica la ec. de Laplace $0 = \Delta u := u_{xx} + u_{yy}$. Denotaremos por $\mathcal{H}ar(G)$ al colectivo de las funciones $u : G \to \mathbb{R}$ armónicas en $G$. Si $f = u + iv \in \mathcal{H}(G)$, es trivial comprobar (utilizando las ecs. de Cauchy-Riemann) que $u, v$ son funciones armónicas en $G$. Se dice que $v$ es la armónica conjugada de $u$ en $G$.

**Proposición 5.1.1.** *Sean $G = \mathbb{C}$ ó $G = D$ y $u \in \mathcal{H}ar(G)$. Entonces $u$ tiene armónica conjugada en $G$.*

*Demostración.* Para cada $(x, y) \in G$ definimos $v(x, y)$ de la siguiente forma

$$v(x, y) := \int_0^y u_x(x, t)dt + \varphi(x), \tag{5.1}$$

donde $\varphi : G \to \mathbb{R}$ es una función que depende sólo de $x$ y que debemos determinar. Derivando la ec. (5.1) respecto de $x$ y teniendo en cuenta que $\Delta u = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} v_x(x, y) = \int_0^y u_{xx}(x, t)dt + \varphi'(x) = \int_0^y -u_{yy}(x, t)dt + \varphi'(x) = \\ = -u_y(x, y) + u_y(x, 0) + \varphi'(x). \end{aligned}$$

Por tanto, imponiendo que $v_x(x, y) = -u_y(x, y)$, sale que $\varphi'(x) = -u_y(x, 0)$, de donde

$$v(x, y) = \int_0^y u_x(x, t)dt - \int_0^x u_y(t, 0)dt.$$

Esta función $v$ así definida verifica $v_x = -u_y,\ v_y = u_x$. Por tanto $u_x, u_y, v_x$ y $v_y$ existen, son continuas y satisfacen las ecs. de Cauchy-Riemann en $G$. En consecuencia $f(z) = u(z)+iv(z)$ verifica $f \in \mathcal{H}(G)$ y por ello la función $v$ construida es la conjugada armónica de $u$. ∎

**NOTA.** Por el Teorema de Riemann la Proposición 5.1.1 es válida para toda región simplemente conexa $G \subset \mathbb{C}$.

**Proposición 5.1.2.** *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un abierto, $a \in G$ y $R > 0$ con $B(a, R) \subset G$, $u \in \mathcal{H}ar(G)$ y $\gamma^* := \partial B(a, R)$. Entonces*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + Re^{it})dt.$$

*Demostración.* Sea $\epsilon >$ tal que $\overset{\circ}{B}(a, R + \epsilon) \subset G$. Por la Proposición 5.1.1 existe $f \in \mathcal{H}(\overset{\circ}{B}(a, R+\epsilon))$ tal que $\mathcal{R}e(f) = u$. Por la Fórmula de Cauchy (ver la Proposición 1.4.4) se tiene que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(a + Re^{it})}{Re^{it}} iRe^{it}dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{it})dt.$$

Por tanto, considerando la parte real obtenemos que

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + Re^{it})dt.$$

∎

Si $G \subset \mathbb{C}$ es un abierto y $u \in C(G, \mathbb{C})$, decimos que *$u$ tiene la Propiedad del Valor Medio (abrev., PVM)* si para todo $a \in G$ y $R > 0$ tales que $B(a, R) \subset G$ se verifica

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + Re^{it})dt.$$

## 5.2. El Principio del máximo

**Proposición 5.2.1.** *[Ppio. del máximo, 1ª Versión] Sean $G \subset \mathbb{C}$ una región y $u \in C(G, \mathbb{R})$ con la PVM. Si existe $a \in G$ tal que $u(a) \geq u(z)$, $\forall z \in G$, entonces $u = cte$ en $G$.*

*Demostración.* Sea $A := \{z \in G : u(z) = u(a)\}$, que es un cerrado relativo de $G$. Sean $r > 0$ y $z_0 \in A$ tales que $B(z_0, r) \subset G$. Como $u$ tiene la PVM se verifica que

$$u(a) = u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})dt.$$

Puesto que $u$ es continua, concluimos que $u(z_0 + re^{it}) = u(a),\ \forall t \in [0, 2\pi]$ y $\forall r > 0$ tal que $B(z_0, r) \subset G$. En consecuencia, existe $r > 0$ tal que $B(z_0, r) \subset A$, es decir, $A$ es abierto. Luego $A$ es un "clopen" no vacío de la región $G$. Esto implica que $A = G$ y que $u = cte$ en $G$. ∎

**Corolario 5.2.2.** *Sean $G \subset \mathbb{C}$ una región acotada y $u \in C(\overline{G}, \mathbb{R})$ con la PVM en $G$. Entonces*

$$\max\{u(z) : z \in \overline{G}\} = \max\{u(z) : z \in \partial G\}.$$

*Demostración.* Si el enunciado no fuese cierto, existiría $a \in G$ tal que $u(a) \geq u(z),\ \forall z \in G$. Por la Proposición 5.2.1 sale que $u = cte$ en $G$ y también en $\overline{G}$, por continuidad. Por tanto se verifica el resultado. ∎

**Lema 5.2.3.** *Sean $G \subset \mathbb{C}$ una región y $\psi \in C(G, \mathbb{R})$ con la PVM verificando*

$$\limsup_{z \to a, z \in G} \psi(z) \leq 0,\ \forall a \in \partial_\infty(G).$$

*Entonces ó $\psi(z) < 0,\ \forall z \in G$, ó $\psi = 0$ en $G$.*

*Demostración.* En primer término, por el Ppio. del máximo, 1ª Versión, bastará probar que $\psi(z) \leq 0,\ \forall z \in G$. Supongamos, por reducción al absurdo, que existe $b \in G$ tal que $\psi(b) > 0$. Sean $\psi(b) > \epsilon > 0$ y $B := \{z \in G : \psi(z) \geq \epsilon\}$. Por el Lema 3.1.4 se tiene que $B$ es un subconjunto compacto de $G$. Como $\psi$ es continua sobre $B$, que es compacto, existe $z_0 \in B$ tal que $\psi(z_0) \geq \psi(z),\ \forall z \in G$. Por el Ppio. del máximo, 1ª Versión, concluimos que $\psi = cte = \psi(z_0) > 0$ en $G$, lo que no puede ser pues implicaría que

$$\limsup_{z \to a, z \in G} \psi(z) \geq \psi(z_0) > 0,\ \forall a \in \partial_\infty(G),$$

que contradice las hipótesis de trabajo. Por tanto $\psi(z) \leq 0,\ \forall z \in G$, y esto termina la demostración del Lema. ∎

**Proposición 5.2.4.** *[Ppio. del máximo, 2ª Versión] Sean $G \subset \mathbb{C}$ una región y $u, v \in C(G, \mathbb{R})$ con la PVM verificando que*

$$\forall a \in \partial_\infty G,\ \limsup_{z \to a, z \in G} u(z) \leq \liminf_{z \to a, z \in G} v(z).$$

*Entonces ó $u(z) < v(z),\ \forall z \in G$, ó $u = v$ en $G$.*

*Demostración.* Sea $a \in \partial_\infty G$. Si $\eta > 0$ denotemos $G_\eta := G \cap B(a, \eta)$, si $a \in \mathbb{C}$, y $G_\eta := {}^cB(0, \eta^{-1}) \cap G$, si $a = \infty$. Aplicando las hipótesis obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{\eta \downarrow 0} [\sup\{u(z) : z \in G_\eta\} - \inf\{v(z) : z \in G_\eta\}] \\ &= \lim_{\eta \downarrow 0} \sup\{u(z) - v(w) : z, w \in G_\eta\} \\ &\geq \lim_{\eta \downarrow 0} \sup\{u(z) - v(z) : z \in G_\eta\} = \limsup_{z \to a, z \in G} (u - v)(z). \end{aligned}$$

En consecuencia, la función $\psi = u - v$ verifica sobre $G$ las condiciones del Lema 5.2.3. Por tanto ó $\psi(z) < 0,\ \forall z \in G$, ó $\psi = 0$ sobre $G$, que es justamente lo que se quiere probar. ■

**Corolario 5.2.5.** *Sean $G \subset \mathbb{C}$ una región acotada y $u \in C(\overline{G}, \mathbb{R})$ con la PVM en $G$. Entonces, si $u \restriction \partial(G) = 0$, se tiene que $u = 0$ en $\overline{G}$.*

*Demostración.* Por el Ppio. del máximo, 2ª Versión (ó el Lema 5.2.3), se verifica que ó $u(z) < 0,\ \forall z \in G$, ó $u = 0$ en $G$. Considerando $v = -u$ y razonando de igual forma, concluimos que ó $v(z) < 0,\ \forall z \in G$, ó $v = 0$ en $G$. Por tanto, debe ser $u = 0$ en $G$ y también en $\overline{G}$, por continuidad. ■

**Corolario 5.2.6** (Ppio. del mínimo)**.** *Sean $G \subset \mathbb{C}$ una región y $u \in C(G, \mathbb{R})$ con la PVM en $G$. Si existe $a \in G$ tal que $u(a) \leq u(z),\ \forall z \in G$, entonces $u = cte$ en $G$.*

*Demostración.* Basta considerar la función $v = -u$ y aplicar el Ppio. del máximo, 1ª Versión. ■

## 5.3. El núcleo de Poisson

Para $0 \leq r < 1$ y $\theta \in \mathbb{R}$ definimos el núcleo de Poisson $P_r(\theta)$ como

$$P_r(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} = \sum_{n\geq 0} r^n e^{in\theta} + \sum_{n\leq -1} r^{-n} e^{in\theta} =$$
$$= 1 + \sum_{n\geq 1} r^n (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) = 1 + 2\sum_{n\geq 1} r^n cos(n\theta).$$

Poniendo $z = re^{i\theta},\ 0 \leq r < 1,\ \theta \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$(1+z)\frac{1}{1-z} = (1+z)(1+z+z^2+...) = 1 + 2\sum_{n\geq 0} z^n = 1 + 2\sum_{n\geq 1} r^n e^{in\theta}.$$

De aquí que

$$\mathcal{R}e\big(\frac{1+z}{1-z}\big) = \mathcal{R}e\big(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\big) = 1 + 2\sum_{n\geq 1} r^n \cdot cos(n\theta) = P_r(\theta).$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} = \frac{(1+re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})} = \frac{1+2ri\cdot sen(\theta) - r^2}{|1-re^{i\theta}|^2},$$

obtenemos que

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cdot cos(\theta)+r^2}.$$

**Proposición 5.3.1.** *El núcleo de Poisson $P_r(\theta)$ tiene las siguientes propiedades:*

*(1)* $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)d\theta = 1$.

*(2)* $P_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es función periódica de período* $2\pi$ *tal que* $P_r(\theta) > 0$ *y* $P_r(\theta) = P_r(-\theta)$, $\forall\ \theta \in \mathbb{R}$.

*(3)* $P_r(\theta) < P_r(\delta)$ *si* $0 < \delta < |\theta| \leq \pi$.

*(4) Si* $\pi \geq \delta > 0$ *se verifica que* $\lim_{r\uparrow 1} P_r(\theta) = 0$ *uniformemente para* $\pi \geq |\theta| \geq \delta$.

*Demostración.* (1) Fijado $0 \leq r < 1$, la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in\theta}$ converge uniformemente en $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Por tanto, se puede intercambiar la integral $\int$ y el sumatorio $\sum$ en el siguiente cálculo:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in\theta})d\theta = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{r^{|n|}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}d\theta = \frac{r^{|0|}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 1.$$

(2) y (3) salen inmediatamente de la expresión de $P_r(\theta)$.

(4) sale observando que para $\pi \geq |\theta| \geq \delta$ se verifica $0 < P_r(\theta) \leq P_r(\delta) \underset{r\uparrow 1}{\to} 0$. ■

## 5.4. El problema de Dirichlet

El problema de Dirichlet sobre el disco unidad $D$ se enuncia de la siguiente forma. Dada una función continua $f : \partial D \to \mathbb{R}$, ¿existe alguna función continua $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ tal que $u \restriction D \in \mathcal{H}ar(D)$ y $u \restriction \partial D = f$? La respuesta a esta pregunta es afirmativa y se ve en la siguiente Proposición.

**Proposición 5.4.1.** *[Sol. del problema de Dirichlet en D] Sea* $f : \partial D \to \mathbb{R}$ *una función continua. Entonces existe una función continua* $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ *tal que* $u \restriction D \in \mathcal{H}ar(D)$ *y* $u \restriction \partial D = f$*. Además,* $u$ *es única y verifica que para todo* $0 \leq r < 1$ *y todo* $-\pi \leq \theta \leq \pi$*:*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(e^{it})dt. \tag{5.2}$$

*Demostración.* Definimos $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

(a) Hacemos $u \restriction \partial D = f$.

(b) Sobre $D$ utilizamos la fórmula (5.2) para definir $u$.

Se tiene claramente que $u \restriction \partial D = f$. Además:

(i) $u \restriction D \in \mathcal{H}ar(D)$.

En efecto si $0 \leq r < 1$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$ se verifica:

$$\begin{aligned}
u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{R}e\Big(\frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}}\Big)\cdot f(e^{it})dt \\
&= \mathcal{R}e\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}}dt\Big) \\
&= \mathcal{R}e\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}}dt\Big) \\
&= \mathcal{R}e\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z}\cdot\frac{z+w}{z-w}dz\Big),
\end{aligned}$$

en donde en la última línea hemos puesto $e^{it} = z$, $re^{i\theta} = w$ y $\gamma^* = \partial D$. Definimos $g : D \to \mathbb{C}$ del siguiente modo:

$$\forall w \in D,\ g(w) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z}\cdot\frac{z+w}{z-w}dz.$$

Como $u = \mathcal{R}e(g)$ en $D$, para ver que $u \restriction D \in \mathcal{H}ar(D)$, bastará probar que $g \in \mathcal{H}(D)$. Con este objetivo, fijamos $w_0 \in D$ y probamos que existe la derivada $g'(w_0)$ (y además la calculamos). Se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{w\to w_0} \frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0} &= \lim_{w\to w_0} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z}\cdot\frac{\frac{z+w}{z-w}-\frac{z+w_0}{z-w_0}}{w-w_0}dz \\
&= \lim_{w\to w_0} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z}\cdot\frac{2z}{(z-w)(z-w_0)}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{2f(z)}{(z-w_0)(z-w_0)}dz.
\end{aligned}$$

(ii) $u$ es continua en $\overline{D}$.

Teniendo en cuenta que $u$ es continua en el abierto $D$ (porque $u$ es la parte real de la función $g \in \mathcal{H}(D)$), bastará probar que $u$ es continua en $\partial D$. Para ello probamos el siguiente Aserto, del que se deduce inmediatamente la continuidad de $u$ sobre $\partial D$.

**Aserto.** Dados $\alpha \in [-\pi, \pi]$ y $\epsilon > 0$, existe $0 < \rho < 1$ y un entorno $A$ de $e^{i\alpha}$ en $\partial D$ (un arco) tal que, si $\rho < r < 1$ y $e^{i\theta} \in A$, entonces

$$|u(re^{i\theta}) - f(e^{i\alpha})| < \epsilon.$$

Por razones de sencillez, probamos el Aserto para $\alpha = 0$ (si $\alpha \neq 0$, el razonamiento es análogo). Como $f$ es continua en $z = 1$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(e^{i\theta}) - f(1)| < \frac{1}{3}\epsilon$ siempre que $|\theta| < \delta$. Sea $M := \text{máx}\{|f(e^{i\theta})| : |\theta| \leq \pi\} + 1$. De (4) de la Proposición 5.3.1 sale que existe $0 < \rho < 1$ tal que $P_r(\theta) < \epsilon/(3M)$ para todo $\rho \leq r < 1$ y todo $\pi \geq |\theta| \geq \frac{1}{2}\delta$.

Sea $A$ el arco $A := \{e^{i\theta} : |\theta| < \frac{1}{2}\delta\}$. Entonces para $e^{i\theta} \in A$ y $\rho < r < 1$ se tiene

$$u(re^{i\theta}) - f(1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(e^{it})dt - f(1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)(f(e^{it}) - f(1))dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} P_r(\theta - t)(f(e^{it}) - f(1))dt + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\geq\delta} P_r(\theta - t)(f(e^{it}) - f(1))dt. \quad (5.3)$$

Se tiene que:

(a) Si $|t| < \delta$, entonces $|f(e^{it}) - f(1)| < \frac{1}{3}\epsilon$ y por tanto

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} P_r(\theta - t)(f(e^{it}) - f(1))dt\right| \leq \frac{1}{3}\epsilon \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)dt = \frac{1}{3}\epsilon.$$

(b) Si $|t| \geq \delta$, entonces $|\theta - t| \geq \frac{1}{2}\delta$ y, por construcción, $P_r(\theta - t) \leq \frac{\epsilon}{3M}$. Por tanto

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|t|\geq\delta} P_r(\theta - t)(f(e^{it}) - f(1))dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\epsilon}{3M}2Mdt = \frac{2}{3}\epsilon.$$

Teniendo en cuenta (a), (b) y (5.3) obtenemos que

$$|u(re^{i\theta}) - f(1)| \leq \epsilon,\ \forall \rho < r < 1,\ \forall e^{i\theta} \in A.$$

(iii) $u$ es la única solución del problema de Dirichlet en $D$.

En efecto, sea $v : \overline{D} \to \mathbb{R}$ otra solución del problema de Dirichlet en $D$. Consideremos $w := u - v$ y apliquemos el Corolario 5.2.5. Obtenemos que $w = 0$ en $\overline{D}$, lo que prueba la unicidad de la solución del problema de Dirichlet en $D$. ■

**Corolario 5.4.2.** *Sea $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ una función continua y armónica sobre $D$. Entonces para $0 \leq r < 1$ y todo $\theta \in \mathbb{R}$ se verifica*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)u(e^{it})dt.$$

*Además, $u = \mathcal{R}e(f)$ sobre $D$, siendo $f \in \mathcal{H}(D)$ la función analítica tal que*

$$\forall z \in D,\ f(z) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}u(e^{it})dt.$$

*Demostración.* Este resultado sale inmediatamente de la Proposición 5.4.1. ■

**Proposición 5.4.3.** *Sean $a \in \mathbb{C}$ y $0 < R < \infty$.*

*(A) (Sol. del problema de Dirichlet en $B(a,R)$). Sea $f \in C(\partial B(a,R),\mathbb{R})$. Existe una única $u \in C(B(a,R),\mathbb{R}) \cap \mathcal{H}ar(\overset{\circ}{B}(a,R))$ tal que $u \upharpoonright \partial B(a,R) = f$. Además, si $0 \le r < R$ y $\theta \in \mathbb{R}$, se tiene que*

$$u(a+re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cdot cos(\theta-t)+r^2}\cdot f(a+Re^{it})dt.$$

*(B) Sea $u \in C(B(a,R),\mathbb{R}) \cap \mathcal{H}ar(\overset{\circ}{B}(a,R))$. Entonces, si $0 \le r < R$ y $\theta \in \mathbb{R}$, se tiene que*

$$u(a+re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cdot cos(\theta-t)+r^2}\cdot u(a+Re^{it})dt.$$

*Demostración.* (A) Sea $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ tal que $Tz = a+Rz$. Claramente $T$ es una homotecia seguida de una traslación (es decir, es una transformación de Möbius) tal que $T(\overline{D}) = B(a,R)$. Sea $\tilde{f} \in C(\partial D,\mathbb{R})$ tal que $\tilde{f}(z) = f\circ T(z)$. Por la Prop. 5.4.1 existe una única $\tilde{u} \in C(\overline{D},\mathbb{R}) \cap \mathcal{H}ar(D)$ tal que $\tilde{u} \upharpoonright \partial D = \tilde{f}$. Definamos $u : B(a,R) \to \mathbb{R}$ tal que, si $z = a+re^{i\theta} \in B(a,R)$, entonces $u(z) = \tilde{u}\circ T^{-1}(z) = \tilde{u}(se^{i\theta})$ con $s = r/R$. Se tiene que:

(i) $u \in C(B(a,R),\mathbb{R})$ y $u \upharpoonright \partial B(a,R) = f$.

(ii) Puesto que $\tilde{u} \upharpoonright D$ es la parte real de una función holomorfa en $D$, digamos $\tilde{u} = \mathcal{R}e(g)$ (ver Prop. 5.4.1) y $u \upharpoonright \overset{\circ}{B}(a,R) = (\tilde{u} \upharpoonright D)\circ T^{-1} = \mathcal{R}e(g\circ T^{-1})$, concluimos que $u \upharpoonright \overset{\circ}{B}(a,R)$ es la parte real de una función holomorfa en $\overset{\circ}{B}(a,R)$ y por tanto $u \in \mathcal{H}ar(\overset{\circ}{B}(a,R))$.

(iii) En consecuencia $u$ resuelve el problema de Dirichlet en $B(a,R)$. Además es la única solución, pues de haber otra, digamos $v$, entonces $w := u-v$ verificaría $w \in C(B(a,R),\mathbb{R})$, $w \upharpoonright \partial B(a,R) = 0$ y $w \in PVM$ en $\overset{\circ}{B}(a,R)$. Por el Cor. 5.2.5 se tiene que $w = 0$ en $B(a,R)$, es decir, $u = v$ en $B(a,R)$, lo que prueba la unicidad de la solución $u$.

Calculemos el valor de $u(a+re^{i\theta})$ para $0 \le r < R$ y $\theta \in \mathbb{R}$. Sea $s = r/R$. Se tiene que

$$\begin{aligned} u(a+re^{i\theta}) = \tilde{u}(se^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_s(\theta-t)\tilde{f}(e^{it})dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-s^2}{1-2s\cdot cos(\theta)+s^2}\cdot f(a+Re^{it})dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cdot cos(\theta-t)+r^2}\cdot u(a+Re^{it})dt. \end{aligned}$$

(B) es consecuenia inmediata de (A). ■

En la expresión anterior hemos utilizado *el núcleo de Poisson modificado*

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cdot cos(\theta - t) + r^2} = \frac{R^2 - r^2}{|R - re^{i(\theta - t)}|^2}. \tag{5.4}$$

**Corolario 5.4.4.** *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un abierto y $u : G \to \mathbb{R}$ una función continua verificando la PVM. Entonces $u \in \mathcal{H}ar(G)$.*

*Demostración.* En efecto, sean $a \in G$ y $0 < r < \infty$ tales que $B(a,r) \subset G$. Por la Proposición 5.4.3 existe una función continua $v : B(a,r) \to \mathbb{R}$, que es armónica en $\overset{\circ}{B}(a,r)$ y verifica $u = v$ sobre $\partial B(a,r)$. Puesto que $u - v$ verifica la PVM en $\overset{\circ}{B}(a,r)$ y $u - v = 0$ sobre $\partial B(a,r)$, del Corolario 5.2.5 obtenemos que $u = v$ sobre $B(a,r)$, lo que implica que $u \in \mathcal{H}ar(\overset{\circ}{B}(a,r))$. En consecuencia $u \in \mathcal{H}ar(G)$. ∎

## 5.5. Desigualdades y Teorema de Harnack

**Proposición 5.5.1.** *[Desigualdades de Harnack] Sean $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$, $u \in C(B(a,R),\mathbb{R}) \cap \mathcal{H}ar(\overset{\circ}{B}(a,R))$ con $u \geq 0$, $0 \leq r < R$ y $\theta \in \mathbb{R}$. Se tiene que*

$$\frac{R-r}{R+r}u(a) \leq u(a + re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r}u(a).$$

*Demostración.* Puesto que $R - r \leq |R - re^{i\theta}| \leq R + r$, de (5.4) sale que

$$\frac{R-r}{R+r} \leq \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cdot cos(\theta - t) + r^2} \leq \frac{R+r}{R-r},$$

de donde, teniendo en cuenta que $u \geq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$ obtenemos

$$\frac{R-r}{R+r}u(a + Re^{it}) \leq \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cdot cos(\theta - t) + r^2}u(a + Re^{it}) \leq \frac{R+r}{R-r}u(a + Re^{it}).$$

Por tanto integrando concluimos que

$$\begin{gathered}\frac{R-r}{R+r}u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R-r}{R+r}u(a + Re^{it})dt \leq \\ \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cdot cos(\theta - t) + r^2}u(a + Re^{it})dt = u(a + re^{i\theta}) \leq \\ \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R+r}{R-r}u(a + Re^{it})dt = \frac{R+r}{R-r}u(a).\end{gathered}$$

∎

**Proposición 5.5.2.** *[Teorema de Harnack] Sean $G \subset \mathbb{C}$ un abierto, $\mathcal{K} := \{K_n : n \geq 1\}$ una secuencia de compactos anidada dentro de $G$ y $\rho = \rho_{\mathcal{K}}$ la métrica sobre $C(G, \mathbb{C})$ asociada a la secuencia $\mathcal{K}$. Se tiene que*

*(a) $\mathcal{H}ar(G)$ es un subespacio completo y cerrado en $(C(G, \mathbb{C}), \rho)$.*

*(b) Supongamos que $G$ es región y sea $\{u_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{H}ar(G)$ tal que $u_1 \leq u_2 \leq ...$ Entonces, si $u(z) := \lim_{n\to\infty} u_n(z)$, $\forall z \in G$, se tiene la siguiente alternativa:*

*(b1) ó $u = +\infty$ en $G$ y $u_n(z) \uparrow +\infty$ uniformemente sobre compactos de $G$,*

*(b2) ó $u(z) < +\infty$, $\forall z \in G$, $u_n \underset{\rho}{\uparrow} u$ y $u \in \mathcal{H}ar(G)$.*

*Demostración.* (a) Puesto que $(C(G, \mathbb{C}), \rho)$ es un espacio métrico completo, bastará ver que $\mathcal{H}ar(G)$ es cerrado en $(C(G, \mathbb{C}), \rho)$. Sea $\{u_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{H}ar(G)$ una secuencia tal que $u_n \xrightarrow{\rho} u \in C(G, \mathbb{C})$. Es inmediato que $u$ tiene la PVM y, en consecuencia, $u \in \mathcal{H}ar(G)$ por el Corolario 5.4.4 y esto prueba que $\mathcal{H}ar(G)$ es cerrado en $(C(G, \mathbb{C}), \rho)$.

(b) Sin pérdida de generalidad, suponemos que $u_1 \geq 0$. Definimos

$$\forall z \in G, \quad u(z) = \lim_{n\to\infty} u_n(z).$$

Por las hipótesis, para todo $z \in G$ se verifica que

$$\text{ó } u(z) = \infty \quad \text{ó } \ u(z) \in \mathbb{R} \quad \text{y siempre} \quad u_n(z) \uparrow u(z).$$

Definimos

$$A := \{z \in G : u(z) = \infty\}, \quad B := \{z \in G : u(z) < \infty\},$$

que verifican $G = A \uplus B$. Vamos a probar que $A$ y $B$ son abiertos.

(1) **<u>$A$ es abierto.</u>** Sean $a \in A$ y $0 < R < \infty$ tales que $B(a, R) \subset G$. Si $|z - a| < R$, por las Desigualdades de Harnack se tiene que

$$\forall n \geq 1, \ \frac{R - |z-a|}{R + |z-a|} u_n(a) \leq u_n(z) \leq \frac{R + |z-a|}{R - |z-a|} u_n(a).$$

Como $u_n(a) \uparrow \infty$, necesariamente $u_n(z) \uparrow \infty$, es decir, $u(z) = \infty$ y, por tanto, $\overset{\circ}{B}(a, R) \subset A$. En consecuencia, $A$ es abierto.

(2) **<u>$B$ es abierto.</u>** Sean $a \in B$ y $0 < R < \infty$ tales que $B(a, R) \subset G$. Si $|z - a| < R$, razonando como en (1) concluimos que $u(z) < \infty$. Por tanto $\overset{\circ}{B}(a, R) \subset B$ y $B$ es abierto.

Como $G$ es región ó $G = A$ ó $G = B$.

**<u>Caso 1:</u>** $G = A$. Probemos el siguiente hecho.

**Aserto 1.** Si $a \in G$, existe $r > 0$ (dependiendo de $a$) tal que $B(a, r) \subset G$ y $u_n(z) \uparrow \infty$ uniformemente para $z \in B(a, r)$.

En efecto, sea $R > 0$ tal que $B(a, R) \subset G$. Para todo $n \geq 1$ y todo $z = a + re^{it}$ con $0 \leq r \leq R/2$ por las Des.de Harnack se verifica que

$$\tfrac{1}{3}u_n(a) \leq \tfrac{R-r}{R+r}u_n(a) \leq u_n(a + re^{it}).$$

Como $u_n(a) \uparrow \infty$, es claro que $u_n(z) \uparrow \infty$ uniformemente sobre $B(a, R/2)$, lo que prueba el Aserto 1.

Aplicando el Aserto 1, dado $K \subset G$ un compacto de $G$, se puede cubrir $K$ mediante una familia finita de bolas cerradas contenidas todas dentro de $G$, de modo que $u_n \uparrow \infty$ uniformemente sobre cada una de dichas bolas. De aquí se concluye que $u_n(z) \uparrow \infty$ uniformemente sobre $K$, es decir, se obtiene la alternativa $(b1)$.

<u>**Caso 2:**</u> $G = B$**.** Está claro que ahora $u(z) < \infty$, $\forall z \in G$.

**Aserto 2.** Si $a \in G$, existe $r > 0$ (dependiendo de $a$) tal que $B(a, r) \subset G$ y $u_n(z) \uparrow u(z)$ uniformemente para $z \in B(a, r)$.

En efecto, sea $R > 0$ tal que $B(a, R) \subset G$. Para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, ocurre que $0 \leq u_m - u_n \in \mathcal{H}ar(G)$ y podemos aplicar las Des. de Harnack con $0 \leq s \leq R/2$ y $\theta \in \mathbb{R}$. Obtenemos que

$$0 \leq u_m(a + se^{i\theta}) - u_n(a + se^{i\theta}) \leq \frac{R+s}{R-s}(u_m(a) - u_n(a)).$$

Dejando $n$ fijo, haciendo $m \to \infty$ y recordando que $u_m(z) \uparrow u(z)$, de la anterior desigualdad obtenemos

$$\begin{aligned} u(a + se^{i\theta}) - u_n(a + se^{i\theta}) &\leq \frac{R+s}{R-s}(u(a) - u_n(a)) \leq \\ &\leq \frac{R + R/2}{R - R/2}(u(a) - u_n(a)) = 3(u(a) - u_n(a)), \end{aligned} \tag{5.5}$$

en donde hemos utilizado que la función $g(s) = \frac{R+s}{R-s}$ es creciente en $[0, R)$ y, por tanto,

$$\frac{R+s}{R-s} \leq \frac{R + R/2}{R - R/2} = 3, \ \forall s \in [0, R/2].$$

Sea $\epsilon > 0$. Como $u_n(a) \uparrow u(a) < \infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $u(a) - u_n(a) \leq \epsilon/3$, $\forall n \geq N$. Teniendo en cuenta (5.5), para $n \geq N$ se verifica

$$\forall z \in B(a, R/2), \quad 0 \leq u(z) - u_n(z) \leq 3(u(a) - u_n(a)) \leq 3\frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $u_n(z) \uparrow u(z)$ uniformemente para $z \in B(a, R/2)$.

**Aserto 3.** $u \in C(G, \mathbb{C})$, $u_n \uparrow u$ uniformemente sobre compactos de $G$, $u_n \stackrel{\rho}{\to} u$ y $u \in \mathcal{H}ar(G)$.

En efecto, del Aserto 2 sale inmediatamente que $u_n \uparrow u$ uniformemente sobre compactos de $G$. En consecuencia $u \in C(G, \mathbb{C})$ y $u_n \stackrel{\rho}{\to} u$ porque la convergencia en la métrica $\rho$ es justamente la convergencia uniforme sobre compactos. Por tanto $u \in \mathcal{H}ar(G)$ por la parte (a) del T. de Harnack.

Es claro que el Caso 2 conduce a la alternativa $(b2)$. ■

# Parte II

# ANÁLISIS FUNCIONAL

# Capítulo 6

# Espacios normados. Teorema de Hahn-Banach. Aplicaciones

## 6.1. Introducción

Comenzaremos introduciendo las nociones de seminorma, norma, etc.

**Definición 6.1.1.** *Sea* $(X, +, \cdot)$ *un espacio vectorial (abrev., ev) sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$ $(= \mathbb{C}$ *ó* $\mathbb{R})$. *Sea* $p : X \to \mathbb{R}$. *Entonces*

*(a)* $p$ *es una* **seminorma** *sii* $, \forall x, y \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$, *se verifica:*
*(a1)* $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.
*(a2)* $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

*(b)* $p$ *es una* **pseudonorma** *sii* $, \forall x, y \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$, *se verifica:*
*(b1)* $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.
*(b2)* $p(\lambda x) \leq |\lambda| p(x)$ *siempre que* $|\lambda| \leq 1$.
*(b3)* $p(x) = 0$ *sii* $x = 0$.

*(c)* $p$ *es una* **norma** *sii* $, \forall x, y \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$, *se verifica:*
*(c1)* $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.
*(c2)* $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.
*(c3)* $p(x) = 0$ *sii* $x = 0$.

*Denotaremos las normas por* $\| \cdot \|$. *Un espacio normado (abrev., en) es un 4-pla* $(X, +, \cdot, \| \cdot \|)$ *tal que* $(X, +, \cdot)$ *es un ev sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$ *y* $\| \cdot \|$ *es una norma en* $X$.

**NOTAS.** (1) Toda norma es, a la vez, seminorma y pseudonorma.

(2) Sea $p$ una seminorma en el ev $(X, +, \cdot)$. Entonces

(2a) $p(0) = 0$. En efecto, $p(0) = p(0 \cdot 0) = 0 \cdot p(0) = 0$.

(2b) $p(x) = p(-x),\ \forall x \in X$, por $(a2)$.

(2c) $p(x) \geq 0$, $\forall x \in X$. En efecto, supongamos que para cierto $x \in X$ (necesariamente $x \neq 0$) se verifica $p(x) < 0$. Entonces también $p(x) = p(-x) < 0$ y se tiene

$$0 = p(0) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x),$$

una contradicción.

**Proposición 6.1.2.** *Sea $(X, +, \cdot)$ un ev.*

*(a) Sea $(X, \|\cdot\|)$ un en. Se tiene que, si definimos $d : X \times X \to \mathbb{R}$ de modo que $d(x, y) = \|x - y\|$, $\forall x, y \in X$, entonces $d$ es una distancia invariante por traslaciones, es decir,*

$$\forall x, y, z \in X, \quad d(x, y) = d(x + z, y + z),$$

*y homotética, es decir*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall x, y \in X, \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y).$$

*(b) Y viceversa, si $X$ es un ev y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una distancia invariante por traslaciones y homotética, definiendo $\|x\| := d(x, 0)$, $\forall x \in X$, entonces $\|\cdot\|$ es una norma cuya distancia subordinada es $d$.*

*Demostración.* (a) es de comprobación inmediata.

(b) De la definición $\|x\| := d(x, 0)$ y las propiedades de $d$ sale que

(1) $\forall x \in X$, $0 = \|x\| = d(x, 0) \Leftrightarrow x = 0$.

(2) Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene $\|\lambda x\| = d(\lambda x, 0) = |\lambda| \cdot d(x, 0) = |\lambda| \cdot \|x\|$.

(3) para todo $x, y \in X$ se tiene

$$\|x + y\| = d(x + y, 0) = d(x, -y) \leq d(x, 0) + d(-y, 0) = d(x, 0) + d(y, 0) = \|x\| + \|y\|.$$

■

## 6.2. Topología de un espacio normado

Por la Proposición 6.1.2, si $(X, \|\cdot\|)$ es un en, se tiene que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que $d(x, y) = \|x - y\|$, $\forall x, y \in X$, es una distancia en $X$. La topología del en $(X, \|\cdot\|)$ es la topología asociada a la métrica $d$. Describimos a continuación los elementos más importantes de esta topología.

(1) Bolas y esferas.

Bola abierta de centro $a \in X$ y radio $\epsilon \geq 0$ $= \overset{\circ}{B}(a, \epsilon) := \{x \in X : \|x - a\| < \epsilon\}$.

Bola cerrada de centro $a \in X$ y radio $\epsilon \geq 0$ $= B(a, \epsilon) := \{x \in X : \|x - a\| \leq \epsilon\}$.

Bola reducida (cerrada) de centro $a \in X$ y radio $\epsilon \geq 0$ $= B_r(a, \epsilon) := \{x \in X : 0 < \|x - a\| \leq \epsilon\}$.

Esfera de centro $a \in X$ y radio $\epsilon \geq 0 \; = S(a, \epsilon) := \{x \in X : \|x - a\| = \epsilon\}$.

Bola unidad cerrada $= B(X) := B(0, 1)$.

Esfera unidad $= S(X) := S(0, 1)$.

Cuando se manejen otros en, además de $X$, y convenga precisar que nos referimos a $X$, la bola cerrada (resp., abierta, etc.) en $X$ centrada en $a \in X$ y radio $r \geq 0$ se indicará por $B_X(a, r)$ (resp., $\overset{\circ}{B}_X(a, r)$, etc).

(2) Abiertos de $X \; = T_X$.

Un subconjunto $G \subset X$ es un abierto de $X$ (abrev., $G \in T_X$) sii para todo $a \in G$ existe $\epsilon > 0$ (dependiendo de $a$) tal que $\overset{\circ}{B}(a, \epsilon) \subset G$. Por $T_X$ indicaremos la familia de los abiertos de $X$, y por $\mathcal{C}_X$ la familia de los cerrados de $X$.

(3) Sucesiones convergentes en $X$.

Una sucesión $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$ es convergente en norma hacia cierto $x_0 \in X$ (abrev., $x_n \to x_0$) sii para todo $\epsilon > 0$ existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_0\| \leq \epsilon$ para todo $n \geq n_\epsilon$.

(4) Sucesiones de Cauchy en $X$.

Una sucesión $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$ es de Cauchy en norma sii para todo $\epsilon > 0$ existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| \leq \epsilon$ para todo $n, m \geq n_\epsilon$.

**Lema 6.2.1.** *Sean $(X, d)$ un em y $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $X$ tales que existen $x_0 \in X$ y una subsucesión $(x_{n_k})_k$ verificando que $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} x_0$. Entonces $x_n \to x_0$.*

*Demostración.* Pasando a una subsucesión de $(n_k)_k$ si es preciso (y llamándola también $(n_k)_k$), podemos suponer que $d(x_n, x_m) < 2^{-k}$ para todo par $n, m \geq n_k$. Sea $\epsilon > 0$. Elegimos $p \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq p$ se verifique $d(x_0, x_{n_k}) < \epsilon/2$. A continuación elegimos $q \in \mathbb{N}$ de modo que $2^{-n_q} \leq \epsilon/2$. Sea $r = p \vee q$ y cojamos $n \geq n_r$. Entonces

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_r}) + d(x_{n_r}, x_0) \leq 2^{-n_r} + \epsilon/2 \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $x_n \to x_0$. ∎

(5) Aplicaciones continuas.

Sean $(Y, T_Y)$ un espacio topológico y $T : X \to Y$ una aplicación. Recordemos que son equivalentes:

(a) $T$ es continua.

(b) Para todo $G \in T_Y$, $T^{-1}(G) \in T_X$.

(c) Para todo $C \in \mathcal{C}_Y$, $T^{-1}(C) \in \mathcal{C}_X$.

(d) Para toda sucesión convergente $x_n \to x_0$ en $(X, \|\cdot\|)$ se verifica que $Tx_n \to Tx_0$ en $(Y, T_Y)$.

## 6.3. Espacios vectoriales topológicos. Espacios de Banach

**Definición 6.3.1.** *$(X, +, \cdot, T_X)$ es un espacio vectorial topológico (evt) sii*

*(a) $(X, +, \cdot)$ es un ev sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.*

*(b) $T_X$ es una topología sobre $X$ para la que las aplicaciones suma $+ : X \times X \to X$ y producto $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ son continuas.*

**Proposición 6.3.2.** *La norma, la suma de vectores y el producto de vectores por escalares son operaciones continuas en todo en. Por tanto todo en es un evt.*

*Demostración.* Sea $(X, \|\cdot\|)$ un en.

(a) La norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ es una aplicación continua, pues, si $\{x_n : n \geq 0\} \subset X$ son vectores verificando $x_n \to x_0$ en $(X, \|\cdot\|)$, entonces $\|x_n\| \to \|x_0\|$ en $\mathbb{R}$ ya que $|\|x_n\| - \|x_0\|| \leq \|x_n - x_0\|$.

(b) la suma $+ : X \times X \to X$ es aplicación continua porque, si $x_n \to x_0$ y $y_n \to y_0$ en $(X, \|\cdot\|)$, entonces $x_n + y_n \to x_0 + y_0$ en $(x, \|\cdot\|)$ ya que

$$\|x_n + y_n - (x_0 + y_0)\| \leq \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0|.$$

(c) El producto por escalares $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ es una aplicación continua porque, si $\lambda_n \to \lambda_0$ en $\mathbb{K}$ y $x_n \to x_0$ en $(X, \|\cdot\|)$, entonces

$$\begin{aligned} \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| = \|\lambda_n(x_n - x_0) + (\lambda_n - \lambda_0)x_0\| \leq \\ \leq |\lambda_n|\|x_n - x_0\| + |\lambda_n - \lambda_0|\|x_0\| \leq M\|x_n - x_0\| + |\lambda_n - \lambda_0|\|x_0\| \underset{n\to\infty}{\to} 0, \end{aligned}$$

en donde $M$ es una constante tal que $|\lambda_n| \leq M < \infty$, $\forall n \geq 0$. ■

**Definición 6.3.3.** *Un espacio de Banach (eB) es un en $(X, \|\cdot\|)$ que es completo, es decir, toda sucesión de Cauchy de $X$ converge en $X$.*

**NOTAS.** (1) Si $(X, \|\cdot\|)$ es un en, existe un único espacio de Banach $(Z, \|\cdot\|)$ tal que: (i) $(X, \|\cdot\|)$ es un subespacio de $(Z, \|\cdot\|)$; (ii) $\overline{X} = Z$, es decir, $X$ es denso en $Z$. El espacio de Banach $(Z, \|\cdot\|)$ -que es único salvo isomorfismo isométrico y que coincide con $(X, \|\cdot\|)$ si $(X, \|\cdot\|)$ es ya eB- recibe el nombre de "completado" ó "compleción" de $(X, \|\cdot\|)$.

(2) Una serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ en un en $(X, \|\cdot\|)$ es ***absolutamente convergente*** sii $\sum_{n\geq 1} \|x_n\| < \infty$.

**Proposición 6.3.4.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un en. Son equivalentes:*

*(1) $(X, \|\cdot\|)$ es un eB.*

*(2) Toda serie absolutamente convergente de $X$ converge en $X$.*

*Demostración.* (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $\sum_{n\geq 1} x_n$ una serie en $(X, \|\cdot\|)$ *absolutamente convergente*, es decir, $\sum_{n\geq 1} \|x_n\| < \infty$. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Como $\sum_{n\geq 1} \|x_n\| < \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=m+1}^{n} \|x_i\| < \epsilon$ siempre que $n > m \geq n_0$. Por tanto la sucesión de las sumas parciales $(s_n)_n$ (siendo $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$) de la serie verifica para $n > m \geq n_0$ que

$$\|s_n - s_m\| = \| \sum_{i=m+1}^{n} \|x_i\| < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, es claro que $(s_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en $(X, \|\cdot\|)$, que es un eB. Por tanto, existe $s_0 \in X$ tal que $s_n \underset{n\to\infty}{\to} s_0$ y de aquí que $\sum_{n\geq 1} x_n = s_0$, es decir, la serie converge en $X$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Sea $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $X$. Por cada $k \in \mathbb{N}$ elegimos $n_k \in \mathbb{N}$ de modo que

(i) $\|x_n - x_m\| \leq 2^{-k}$ siempre que $n, m \geq n_k$.

(ii) $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$.

A continuación definimos los vectores $z_k \in X$ de la siguiente forma: $z_1 = x_{n_1}$ y $z_k = x_{n_k} - x_{n_{k-1}}$ para $k \geq 2$. Es inmediato que la serie $\sum_{n\geq 1} z_n$ verifica:

(a) es absolutamente convergente pues

$$\sum_{k\geq 1} \|z_k\| = \|x_{n_1}\| + \sum_{k\geq 2} \|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| \leq \|x_{n_1}\| + \sum_{k\geq 2} 2^{-(k-1)} < \infty.$$

(b) La suma parcial $s_k = \sum_{i=1}^{k} z_i$ verifica $s_k = x_{n_k}$.

Por la hipótesis (2) existe $x_0 \in X$ tal que $s_k \to x_0$, es decir, $x_{n_k} \to x_0$. Aplicando el Lema 6.2.1 concluimos que $x_n \to x_0$, es decir, que se verifica (1). ■

## 6.4. Aplicaciones lineales continuas. El espacio dual

Sean $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ dos en sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

(1) Un subconjunto $A \subset X$ es **acotado** sii existe $0 \leq r < \infty$ tal que $A \subset B(0, r)$.

(2) Una aplicación lineal $T : X \to Y$ es: (i) **acotada** sii $T(B(X))$ es un subconjunto acotado de $Y$; (ii) **un isomorfismo topológico** sii $T$ es un isomorfismo algebraico y además es un homeomorfismo, es decir, es bi-continua; (iii) **un isomorfismo isométrico** sii es un isomorfismo algebraico y una isometría.

(3) El conjunto de todas las aplicaciones $\mathbb{K}$-lineales $T : X \to \mathbb{K}$ recibe el nombre de **$\mathbb{K}$-dual algebraico de** $X$ y se denota por $X'_{\mathbb{K}}$ (ó simplemente $X'$ si está claro el cuerpo $\mathbb{K}$). Hay por tanto un dual algebraico real (siempre) y otro complejo (cuando $X$ es en sobre $\mathbb{C}$). Obviamente el $\mathbb{K}$-dual $X'_{\mathbb{K}}$ de $X$ es un ev sobre $\mathbb{K}$.

(4) El conjunto de todas las aplicaciones $\mathbb{K}$-lineales y continuas $T : X \to \mathbb{K}$ recibe el nombre de **$\mathbb{K}$-dual topológico de** $X$ y se denota por $X^*_{\mathbb{K}}$ (ó simplemente $X^*$ si

está claro el cuerpo $\mathbb{K}$). Hay por tanto un dual topológico real (siempre) y otro complejo (cuando $X$ es en sobre $\mathbb{C}$). Obviamente el $\mathbb{K}$-dual $X^*_{\mathbb{K}}$ de $X$ es un ev sobre $\mathbb{K}$ y subespacio del $\mathbb{K}$-dual algebraico $X'_{\mathbb{K}}$.

**Proposición 6.4.1.** *Sean* $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ *dos en sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$ *y* $T : X \to Y$ *una aplicación lineal. Son equivalentes:*

*(1)* $T$ *es continua.*

*(2)* $T$ *es continua en algún punto* $x_0 \in X$.

*(3)* $T$ *es continua en* $0 \in X$.

*(4)* $T$ *es acotada.*

*(5) Existe* $0 \leq K < \infty$ *tal que* $\|Tx\| \leq K\|x\|$ *para todo* $x \in X$.

*Demostración.* (1) $\Rightarrow$ (2) es evidente.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea $(x_n)_n$ una secuencia en $X$ tal que $x_n \to 0$ en $(X, \|\cdot\|)$. Tenemos que probar que $Tx_n \to T0 = 0$ en $(Y, \|\cdot\|)$. Se tiene que

$$x_n \to 0 \text{ en } (X, \|\cdot\|) \;\Rightarrow\; x_n + x_0 \to x_0 \text{ en } (X, \|\cdot\|) \;\Rightarrow\; Tx_n + Tx_0 \to Tx_0 \text{ en } (Y, \|\cdot\|),$$

porque $T$ es continua en $x_0$ y lineal. Así que

$$Tx_n = (Tx_n + Tx_0) - Tx_0 \to Tx_0 - Tx_0 = 0 \text{ en } (Y, \|\cdot\|).$$

(3) $\Rightarrow$ (4). Como $T$ es continua en $0 \in X$ y $T0 = 0$, $T^{-1}(B(Y))$ es un entorno de $0 \in X$ porque $B(Y)$ es un entorno de $0 \in Y$. Por tanto existe $0 < r < \infty$ tal que $B_X(0, r) \subset T^{-1}(B(Y))$, de donde $T(B(X)) \subset B_Y(0, 1/r)$. Esto quiere decir que $T$ es acotada.

(4) $\Rightarrow$ (5). Por (4) existe $0 \leq K < \infty$ tal que $T(B(X)) \subset B_Y(0, K)$. Veamos que este $K$ verifica (5). Si $x = 0 \in X$, se cumple (5) trivialmente porque $0 = \|T0\| \leq K\|0\| = 0$. Sea $x \in X \setminus \{0\}$. Entonces $x/\|x\| \in B(X)$ por lo que $T(x/\|x\|) \in B_Y(0, K)$, es decir,

$$\|T(\tfrac{x}{\|x\|})\| \leq K \;\Rightarrow\; \|Tx\| \leq K\|x\|.$$

(5) $\Rightarrow$ (1). Sea $(x_n)_n$ una sucesión en $X$ tal que $x_n \to x_0 \in X$ en $(X, \|\cdot\|)$, es decir, $\|x_n - x_0\| \to 0$. Veamos que $Tx_n \to Tx_0$ en $(Y, \|\cdot\|)$. Por hipótesis

$$\|Tx_n - Tx_0\| = \|T(x_n - x_0)\| \leq K\|x_n - x_0\|$$

para cierto $0 \leq K < \infty$. Como $\|x_n - x_0\| \to 0$ concluimos que $\|Tx_n - Tx_0\| \to 0$, es decir, $Tx_n \to Tx_0$ en $(Y, \|\cdot\|)$ y esto prueba que $T$ es continua. ∎

**Proposición 6.4.2.** *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un en sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$ *y* $X^*$ *el* $\mathbb{K}$*-dual topológico de* $X^*$*, es decir*

$$X^* := \{x^* : X \to \mathbb{K} : x^* \text{ es lineal y continua}\}.$$

*Para todo $x^* \in X^*$ definimos*

$$\|x^*\| := \sup\{|\langle x^*, x\rangle| : x \in B(X)\}.$$

*Se tiene que $(X^*, \|\cdot\|)$ es un eB y para todo $x^* \in X^*$ y todo $x \in X$ se verifica $|\langle x^*, x\rangle| \leq \|x^*\| \cdot \|x\|$.*

*Demostración.* (A) Comprobemos que $\|\cdot\|$ es una norma en $X^*$.

(A1) Sea $x^* \in X^*$. Se tiene que

$$0 = \|x^*\| = \sup\{|\langle x^*, x\rangle| : x \in B(X)\} \;\Leftrightarrow\; \langle x^*, x\rangle = 0,\; \forall x \in B(X) \;\Leftrightarrow x^* = 0.$$

(A2) Sean $t \in \mathbb{K},\; x^* \in X^*$. Se tiene que

$$\|tx^*\| = \sup\{|\langle tx^*, x\rangle| : x \in B(X)\} = |t| \cdot \sup\{|\langle x^*, x\rangle| : x \in B(X)\} = |t| \cdot \|x^*\|.$$

(A3) Sean $x^*, y^* \in X^*$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\|x^* + y^*\| &= \sup\{|\langle x^* + y^*, x\rangle| : x \in B(X)\} \leq \sup\{|\langle x^*, x\rangle| + |\langle y^*, x\rangle| : x \in B(X)\} \leq \\ &\leq \sup\{|\langle x^*, x\rangle| : x \in B(X)\} + \sup\{|\langle y^*, y\rangle| : y \in B(X)\} = \|x^*\| + \|y^*\|.\end{aligned}$$

(B) Veamos que $|\langle x^*, x\rangle| \leq \|x^*\| \cdot \|x\|,\; \forall x^* \in X^*,\; \forall x \in X$. Si $x = 0$, ello es obvio. Si $x \neq 0$, $x/\|x\| \in B(X)$ y por la definición de $\|x^*\|$ se tiene:

$$|\langle x^*, \tfrac{x}{\|x\|}\rangle| \leq \|x^*\| \;\Rightarrow\; \|\langle x^*, x\rangle| \leq \|x^*\| \cdot \|x\|.$$

(C) Veamos que $(X^*, \|\cdot\|)$ es un eB, es decir, que toda sucesión de Cauchy $(x_n^*)_n$ de $X^*$ converge en $X^*$.

**Aserto.** Para todo $x \in X$, la sucesión de escalares $(\langle x_n^*, x\rangle)_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$ y, por tanto, converge en $\mathbb{K}$, es decir, existe $\lim_{n\to\infty}\langle x_n^*, x\rangle =: f(x) \in \mathbb{K},\; \forall x \in X$. Además $f$ es lineal sobre $X$.

En efecto, basta tener en cuenta que:

(i) $|\langle x_n^*, x\rangle - \langle x_m^*, x\rangle| = |\langle x_n^* - x_m^*, x\rangle| \leq \|x_n^* - x_m^*\| \cdot \|x\| \to 0$ para $n, m \to \infty$ por (B) y porque $\|x_n^* - x_m^*\| \to 0$ ya que $(x_n^*)_n$ es sucesión de Cauchy.

(ii) $\mathbb{K}$ es completo.

Así que la función $f : X \to \mathbb{K}$ tal que $f(x) := \lim_{n\to\infty}\langle x_n^*, x\rangle$ está perfectamente determinada y es trivialmente lineal (por ser límite de aplicaciones lineales), según requiere el Aserto.

Finalmente, veamos que $f \in X^*$ y que $x_n^* \to f$ en $(X^*, \|\cdot\|)$. Sean $\epsilon > 0$ y $x \in B(X)$ arbitrarios. Elegimos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n^* - x_m^*\| \leq \epsilon$ para $n, m \geq n_0$. Por (B) se verifica

$$|\langle x_n^*, x\rangle - \langle x_m^*, x\rangle| \leq \epsilon\|x\|,\; \forall n, m \geq n_0. \tag{6.1}$$

Cogiendo $n \geq n_0$ fijo y haciendo $m \to \infty$ en (6.1) obtenemos que

$$|\langle x_n^*, x\rangle - f(x)| \leq \epsilon \cdot \|x\|, \ \forall n \geq n_0, \ \forall x \in B(X). \tag{6.2}$$

Esta desigualdad prueba que:

(a) $x_n^* - f \in X^*$ por Prop. 6.4.1. En consecuencia $f \in X^*$ pues $f = x_n^* - (x_n^* - f)$ y $X^*$ es un ev.

(b) Además por la definición de la norma $\|\cdot\|$ en $X^*$, se verifica $\|x_n^* - f\| \leq \epsilon$, $\forall n \geq n_0$. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se tiene $x_n^* \to f$ en $(X^*, \|\cdot\|)$.

Esto completa la prueba de la Proposición. ∎

## 6.5. Cocientes

Si $X$ es un ev y $Z \subset X$ un subespacio, el ev cociente algebraico $X/Z$ se define del siguiente modo:

(i) $X/Z$ es el conjunto cociente $X/\simeq$, donde $\simeq$ es la relación de equivalencia: $\forall x, y \in X$, $x \simeq y$ sii $x - y \in Z$. La clase determinada por $x \in X$ se denota por $[x]$ ó $x + Z$.

(ii) En $X/Z$ se definen: (1) la suma: $[x] + [y] = [x + y]$; (2) el producto por escalares: $\lambda \cdot [x] := [\lambda x]$.

Se tiene que $(X/Z, +, \cdot)$ es un ev y la aplicación cociente canónico $Q : X \to X/Z$ tal que $Q(x) = [x]$, $\forall x \in X$, es lineal y sobreyectiva.

**Proposición 6.5.1.** *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un en, $N \subset X$ un subespacio cerrado y $X/N$ el cociente algebraico. Para todo $[x] \in X/N$ definimos*

$$(*) \quad \|[x]\| := \text{ínf}\{\|x + y\| : y \in N\}.$$

*Se tiene que $(X/N, \|\cdot\|)$ es un en y el cociente canónico $Q : X \to X/N$ es una aplicación lineal y continua.*

*Demostración.* Probemos que $(*)$ es una norma en $X/N$.

(N1) Sea $[x] \in X/N$. Se tiene

$$0 = \|[x]\| = \text{ínf}\{\|x + y\| : y \in N\} \ \Leftrightarrow \ \exists (z_n)_n \subset N, \ z_n \to x \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ x \in N \quad (\text{porque } N \text{ es cerrado}) \quad \Leftrightarrow \ [x] = 0.$$

(N2) Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $[x] \in X/N$. Se tiene

$$\|\lambda[x]\| = \|[\lambda x]\| = \text{ínf}\{\|\lambda x + y\| : y \in N\} = \text{ínf}\{\|\lambda x + \lambda y\| : y \in N\} =$$
$$= |\lambda| \, \text{ínf}\{\|x + y\| : y \in N\} = |\lambda| \cdot \|[x]\|.$$

(N3) Sean $[x], [y] \in X/N$. Se tiene que

$$\|[x]+[y]\| = \|[x+y]\| = \text{ínf}\{\|x+y+z\| : z \in N\} \leq \text{ínf}\{\|x+z_1\| + \|y+z_2\| : z_1, z_2 \in N\} =$$
$$= \text{ínf}\{\|x+z_1\| : z_1 \in N\} + \text{ínf}\{\|y+z_2\| : z_2 \in N\} = \|[x]\| + \|[y]\|.$$

Sabemos que la aplicación cociente $Q : X \to X/N$ es lineal y sobreyectiva. Además es continua por la Prop. 6.4.1 y porque para todo $x \in X$ verifica

$$\|Qx\| = \|[x]\| = \text{ínf}\{\|x+y\| : y \in N\} \leq \|x\|.$$

■

## 6.6. Espacios seminormados

Sea $(X, +, \cdot, p)$ un espacio seminormado, es decir, $(X, +, \cdot)$ es un ev sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y $p : X \to \mathbb{R}$ es una seminorma en $X$. Como en el caso de las normas, se pueden definir en $X$ las bolas cerradas, abiertas, etc., relativas a $p$, y generar una topología $\tau_p$ en $X$. Observemos que: (1) si $p$ no separa puntos de $X$, la topología $\tau_p$ no será Hausdorff; (2) una norma es una seminorma $p$ tal que $(X, \tau_p)$ es Hausdorff. La mayor parte de los resultados válidos para las normas, también son válidos para las seminormas. En particular:

(i) $(X, +, \cdot, \tau_p)$ es un evt.

(ii) La caracterización de las aplicaciones lineales y continuas (Prop. 6.4.1) es válida para espacios seminormados.

(iii) El conjunto $N := \{x \in X : p(x) = 0\}$ es un subespacio cerrado de $(X, \tau_p)$.

En relación con la Prop. 6.5.1 destacamos el siguiente resultado, que nos permite pasar de un espacio seminormado $(X, p)$ al espacio normado cociente $(X/N, \|\cdot\|)$ subordinado.

**Proposición 6.6.1.** *Sean $(X, p)$ un espacio seminormado y $N := \{x \in X : p(x) = 0\}$. En el espacio cociente $X/N$, para todo $[x] \in X/N$ definimos*

$$\|[x]\| := \text{ínf}\{p(x+y) : y \in N\}.$$

*Se verifica que $(X/N, \|\cdot\|)$ es un espacio normado.*

*Demostración.* Las demostración es la misma que la de Prop. 6.5.1. ■

## 6.7. Subespacios

Sean $X$ un en y $Z \subset X$ un subespacio. Si cerramos $Z$ en $(X, \|\cdot\|)$, ¿seguirá siendo $\overline{Z}$ subespacio de $X$? Vamos a ver que la respuesta es afirmativa.

**Proposición 6.7.1.** *El cierre $\overline{Z}$ de un subespacio $Z$ de un en $X$ es también subespacio. Además $(\overline{Z}, \|\cdot\|)$ es eB, si $(X, \|\cdot\|)$ lo es.*

*Demostración.* Para ver que $\overline{Z}$ es subespacio, cogemos $x, y \in \overline{Z}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ y comprobamos que $x + y, \lambda x \in \overline{Z}$. Sean $(x_n)_n, (y_n)_n$ sucesiones en $Z$ tales que $x_n \to x$, $y_n \to y$. Por la continuidad de la $+$ y el $\cdot$ se tiene

$$x_n + y_n \to x + y, \ \lambda x_n \to \lambda x.$$

Puesto que $x_n + y_n, \lambda x_n \in Z$, concluimos que $x + y, \lambda x \in \overline{Z}$, es decir, $\overline{Z}$ es subespacio de $X$. Además, si $X$ es eB (es decir, completo), también $\overline{Z}$ es completo y, por tanto, un eB, ya que todo cerrado dentro de un completo es completo. ■

**Notación.** Si $A$ es un subconjunto de un en $X$, denotaremos:

$$[A] = \text{ subespacio generado por } A, \quad \overline{[A]} = \text{ subespacio cerrado generado por } A.$$

## 6.8. Separabilidad

**Definición 6.8.1.** *Un en $X$ es separable sii existe un subconjunto contable $A \subset X$ tal que $X = \overline{[A]}$. En caso contrario, decimos que $X$ es no separable.*

En realidad, como se ve a continuación, un en $(X, \|\cdot\|)$ es separable (según la Def. 6.8.1) sii $X$ es separable como espacio topológico.

**Proposición 6.8.2.** *Sea $X$ en. Son equivalentes:*

*(1) $X$ es separable.*

*(2) Existe un subconjunto contable $Y \subset X$ denso en $X$, es decir, tal que $\overline{Y} = X$.*

*Demostración.* (1) $\Rightarrow$ (2). Por hipótesis existe un subconjunto contable $A \subset X$ tal que $\overline{[A]} = X$. Sea $Y := [A]_{\mathbb{Q}}$, es decir, $Y$ es el conjunto de las combinaciones $\mathbb{Q}$-lineales finitas de elementos de $A$. Es claro que $Y$ es contable y que $\overline{Y} = \overline{[A]} = X$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Si $\overline{Y} = X$, también $\overline{[Y]} = X$. ■

## 6.9. El espacio $\ell_\infty$

El espacio $\ell_\infty(\mathbb{N})$ (abrev., $\ell_\infty$) es el conjunto de todas las sucesiones acotadas $x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Es claro que $\ell_\infty$ es un ev cuando se le dota de la suma y el producto por escalares (coordenada a coordenada). Si $x = (x_n)_n \in \ell_\infty$ definimos

$$\|x\| := \sup\{|x_n| : n \geq 1\}.$$

Veamos que $\|\cdot\|$ es una norma en $\ell_\infty$. Se denomina la norma del supremo y, a veces, se denota por $\|\cdot\|_\infty$.

**Proposición 6.9.1.** $(\ell_\infty, \|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach no separable.*

*Demostración.* (A) Veamos que $\|\cdot\|$ verifica los requisitos de las normas. Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in \ell_\infty$.

(N1) $0 = \|x\| = \sup\{|x_n| : n \geq 1\} \Leftrightarrow x_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\ \Leftrightarrow x = 0.$

(N2) $\|\lambda x\| = \sup\{|\lambda x_n| : n \geq 1\} = |\lambda| \cdot \sup\{|x_n| : n \geq 1\} = |\lambda| \cdot \|x\|.$

(N3) $\|x + y\| = \sup\{|x_n + y_n| : n \geq 1\} \leq \sup\{|x_n| : n \geq 1\} + \sup\{|y_n| : n \geq 1\} = \|x + y\|.$

(B) Veamos que la norma $\|\cdot\|$ es completa. Sea $(\xi_k)_k$ una sucesión de Cauchy en $(\ell_\infty, \|\cdot\|)$, siendo $\xi_k = (x_{kn})_n \in \ell_\infty,\ \forall k \geq 1$. Es inmediato que para cada $n \geq 1$ la sucesión $(x_{kn})_k$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$, que es completo. Por tanto existe $\lim_{k\to\infty} x_{kn} \in \mathbb{K}$ y este hecho nos permite definir un vector $\xi_0 := (x_{0n})_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{kn} =: x_{0n} \in \mathbb{K},\ \forall n \geq 1$. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Como $(\xi_k)_k$ es una sucesión de Cauchy, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j, k \geq k_0$ se verifica

$$\|\xi_k - \xi_j\| \leq \epsilon \ \Leftrightarrow\ |x_{kn} - x_{jn}| \leq \epsilon, \forall n \geq 1. \tag{6.3}$$

Fijando $k \geq k_0$ y haciendo $j \to \infty$ en (6.3) obtenemos

$$|x_{kn} - x_{0n}| \leq \epsilon, \forall n \geq 1. \tag{6.4}$$

La desigualdad (6.4) implica que:

(i) $\xi_k - \xi_0 \in \ell_\infty,\ \forall k \geq k_0$, de donde $\xi_0 \in \ell_\infty$, pues $\xi_0 = \xi_k - (\xi_k - \xi_0)$.

(ii) Además $\|\xi_k - \xi_0\| \leq \epsilon$ para $k \geq k_0$. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, obtenemos que $\xi_k \to \xi_0$ en $\ell_\infty$.

Por tanto la norma del supremo $\|\cdot\|$ es completa y $(\ell_\infty, \|\cdot\|)$ es un eB.

(C) Veamos que $(\ell_\infty, \|\cdot\|)$ no es separable. En efecto sea $\mathcal{C}$ el conjunto de los $(x_n)_n \in \ell_\infty$ tales que $x_n = \pm 1,\ \forall n \geq 1$. Es inmediato que: (i) $Card(\mathcal{C}) = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$; (ii) $\|u - v\| = 2,\ \forall u, v \in \mathcal{C},\ u \neq v$. Por tanto $X$ no es separable. ∎

## 6.10. Los espacios $c$ y $c_0$

Como conjuntos los espacio $c(\mathbb{N})$ y $c_0(\mathbb{N})$ (abrev., $c$ y $c_0$ resp.) son

$$c := \{x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \exists \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{K}\} \ \text{ y } \ c_0 := \{x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}.$$

Claramente $c_0 \subset c \subset \ell_\infty$ y, si los dotamos de la suma y el producto por escalares (coordenada a coordenada), ambos son subespacios vectoriales de $\ell_\infty$. Tanto en $c$ como en $c_0$ ponemos la norma del supremo de $\ell_\infty$, es decir

$$\forall x = (x_n)_n \in c, \quad \|x\| = \sup\{|x_n| : n \geq 1\},$$

de modo que $(c, \|\cdot\|)$ y $(c_0, \|\cdot\|)$ son en y subespacios de $(\ell_\infty, \|\cdot\|)$. Observemos que la norma se alcanza en alguna coordenada, si $x \in c_0$. Es decir, que si $x = (x_n)_n \in c_0$, existe $p \geq 1$ tal que $\|x\| = |x_p|$. Tal situación no ocurre, en general, si $x \in c$. Por ejemplo, no ocurre si $x := (1 - \frac{1}{n})_n \in c$.

**Proposición 6.10.1.** *(A) $(c, \|\cdot\|)$ es un eB.*

*(B) $(c_0, \|\cdot\|)$ es un eB separable.*

*(C) Si $u = (1, 1, 1, \cdots) \in \ell_\infty$, entonces $c = c_0 \oplus [u]$, por lo que $c$ es también separable.*

*Demostración.* (A) Para ver que $(c, \|\cdot\|)$ es eB bastará comprobar que es cerrado en $(\ell_\infty, \|\cdot\|)$. Sean $x = (x_n)_n \in \bar{c}$ y $\epsilon > 0$. Por hipótesis existe $z \in c$ tal que $\|x - z\| < \epsilon$. Sea $\ell := \lim_{n\to\infty} z_n$ y observemos que el hecho $\|x - z\| < \epsilon$ implica que

$$\ell - \epsilon \leq \liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \leq \ell + \epsilon,$$

es decir,

$$\limsup_{n\to\infty} x_n - \liminf_{n\to\infty} x_n \leq 2\epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

es decir, $x \in c$.

(B) Que $c_0$ es cerrado en $\ell_\infty$ se prueba con el mismo argumento usado en (A) haciendo $\ell = 0$. Por tanto, $(c_0, \|\cdot\|)$ es un eB. Veamos que $(c_0, \|\cdot\|)$ es separable. Sean $(e_n)_n$ los vectores unitarios, es decir

$$e_1 : (1, 0, 0, \cdots), e_2 := (0, 1, 0, \cdots), \text{ etc.}$$

Sea $c_{00} := [\{e_n : n \geq 1\}]$, es decir, $c_{00}$ es el espacio lineal generado por la familia de los vectores unitarios. Es inmediato que $c_0 = \overline{c_{00}}$. Por tanto $c_0$ es separable.

(C) Si $x = (x_n)_n \in c$, sea $\ell := \lim_{n\to\infty} x_n$. Es claro que $x - \ell u = y \in c_0$, es decir, $x = y + \ell u$, con $y \in c_0$. Y viceversa, como $c$ es un subespacio vectorial de $\ell_\infty$ tal que $c_0 \subset c$ y $u \in c$, es claro que $c_0 \oplus [u] \subset c$. Por tanto $c = c_0 \oplus [u]$. Además este hecho prueba también que $c$ es separable. ∎

**NOTA.** (i) $(c_{00}, \|\cdot\|)$ es en, pero no es eB.

(ii) Los vectores unitarios $(e_n)_n$ forman una base de Schauder de $c_0$ pues $c_0 = \overline{[\{e_n : n \geq 1\}}$ y, para cualesquiera $p, q \in \mathbb{N}$ y $\lambda_i \in \mathbb{K}$, se verifica que

$$\|\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i\| \leq \|\sum_{i=1}^{p+q} \lambda_i e_i\|.$$

## 6.11. Los espacios $\ell_p$, $1 \leq p < \infty$

Si $x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ y $0 < p \leq \infty$, definimos $\|x\|_p \in [0, \infty]$ como

$$\|x\|_p := \left( \sum_{n \geq 1} |x_n|^p \right)^{1/p}, \quad \text{si } \ p < \infty, \quad \text{y} \quad \|x\|_\infty := \sup\{|x_n| : n \geq 1\}, \ \text{si } p = \infty.$$

El espacio $\ell_p(\mathbb{N})$, $0 < p \leq \infty$, (abrev., $\ell_p$) es el conjunto de los vectores $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tales que $\|x\|_p < \infty$.

**Proposición 6.11.1.** $(\ell_p, +, \cdot)$, $0 < p \leq \infty$, *es un ev.*

*Demostración.* Ya sabemos que el enunciado es cierto para $p = \infty$. Sea $0 < p < \infty$. Queremos ver que $\ell_p$ es un subespacio de $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$, es decir, que $+, \cdot$ son operaciones internas en $\ell_p$.

(a) En primer término, es inmediato que si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in \ell_p$ ( es decir, $\|x\|_p < \infty$) también $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \cdot \|x\|_p < \infty$.

(b) Veamos que, si $x, y \in \ell_p$, entonces $x + y \in \ell_p$, es decir, que si $\|x\|_p, \|y\|_p < \infty$, se verifica que $\|x + y\|_p < \infty$. Teniendo en cuenta que todo par $a, b \in \mathbb{K}$ verifica

$$|a + b|^p \leq 2^p \cdot \text{máx}\{|a|, |b|\}^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p),$$

obtenemos

$$\|x + y\|_p^p = \sum_{n \geq 1} |x_n + y_n|^p \leq 2^p \sum_{n \geq 1} |x_n|^p + 2^p \sum_{n \geq n} |y_n|^p = 2^p(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p) < \infty$$

y esto prueba (b). ■

**Lema 6.11.2.** *Si* $0 < \alpha < 1$ *y* $a, b \geq 0$, *se verifica que* $a^\alpha \cdot b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b$.

*Demostración.* Si $a = 0$ ó $b = 0$ ó $a = b$, el resultado es obvio. Sea $0 < b < a$. Entonces

$$\forall 0 < b < a, \ a^\alpha \cdot b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b \ \Leftrightarrow \ \forall 0 < b < a, \ \left(\tfrac{a}{b}\right)^\alpha \leq \alpha \left(\tfrac{a}{b}\right) + (1 - \alpha) \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ \forall x > 1, \ x^\alpha \leq \alpha x + (1 - \alpha) \ \Leftrightarrow \ \forall x > 1, \ x^\alpha - 1 \leq \alpha(x - 1).$$

Por el TVM, si $x > 1$, se verifica $x^\alpha - 1 = \alpha \xi^{\alpha - 1}(x - 1)$ para cierto $\xi \in (1, x)$. Como $\xi^{\alpha-1} < 1$, concluimos que $x^\alpha - 1 < \alpha(x - 1)$, lo que completa la prueba. ■

Si $1 < p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, decimos que $q$ -que verifica $1 < q < \infty$- es el conjugado de $p$ y viceversa. Convenimos además que 1 y $\infty$ son mutuamente conjugados.

**Proposición 6.11.3.** *[Desigualdades de Hölder y Minkowski] Sean $1 \leq p, q \leq \infty$ conjugados entre sí y $x, y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Se verifica:*

$$\text{si } x \cdot y := (x_n y_n)_n, \quad \|xy\|_1 \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q \quad (\textit{Desigualdad de Hölder})$$

*y*

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \quad (\textit{Desigualdad de Minkowski}).$$

*Demostración.* **Caso 1.** Sean $p = 1$ y $q = \infty$ (ó bien $p = \infty$ y $q = 1$). Obtengamos la Des. de Hölder:

$$\sum_{n\geq 1} |x_n y_n| \leq (\sum_{n\geq 1} |x_n|)(\sup\{|y_n| : n \geq 1\}) = \|x\|_1 \|y\|_\infty \quad \text{(Des. de Hölder).}$$

La Des. de Minkowski para $p = 1$ y $p = \infty$ sale directamente:

$$\|x+y\|_1 = \sum_{n\geq 1} |x_n + y_n| \leq \sum_{n\geq 1} |x_n| + \sum_{n\geq 1} |y_n| = \|x_1\|_1 + \|y\|_1;$$

$$\|x+y\|_\infty = \sup_{n\geq 1} |x_n + y_n| \leq \sup_{n\geq 1} |x_n| + \sup_{n\geq 1} |y_n| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

**Caso 2.** Sean $1 < p, q < \infty$. Si $\|x\|_p = 0$ ó $\|y\|_q = 0$, entonces $x_n = 0$ ó $y_n = 0$, $\forall n \geq 1$, y la Des. de Hölder es inmediata. También lo es si $\|x\|_p = \infty$ ó $\|y\|_q = \infty$. Supongamos que $0 < \|x\|_p, \|y\|_q < \infty$. Para cada $n \geq 1$ aplicamos el Lema 6.11.2 a los números

$$\alpha := \tfrac{1}{p} \quad (\Rightarrow\ 1 - \alpha = \tfrac{1}{q}),\ a := \tfrac{|x_n|^p}{\|x\|_p^p} \quad \text{y} \quad b := \tfrac{|y_n|^q}{\|y\|_q^q}$$

Obtenemos

$$\frac{|x_n y_n|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_n|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_n|^q}{\|y\|_q^q}. \tag{6.5}$$

Sumando en (6.5) encontramos que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{|x_n y_n|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{p} \frac{|x_n|^p}{\|x\|_p^p} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{q} \frac{|y_n|^q}{\|y\|_q^q} = \frac{1}{p} \frac{\|x\|_p^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\|y\|_q^q}{\|y\|_q^q} = 1.$$

Multiplicando por $\|x\|_p \|y\|_q$ finalmente llegamos a

$$\|x \cdot y\|_1 = \sum_{n\geq 1} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Veamos la Des. de Minkowski. Si $\|x\|_p = \infty$ ó $\|y\|_p = \infty$ ó $\|x\|_p = 0$ ó $\|y\|_p = 0$ ó $\|x+y\|_p = 0$, la Des. de Minkowski es obvia. Supongamos que $0 < \|x+y\|_p$ y $0 < \|x\|_p, \|y\|_p < \infty$. Por Prop. 6.11.1 se verifica $\|x+y\|_p < \infty$. Aplicando la Des. de Hölder y que $(p-1)q = p$ se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} |x_n + y_n|^p &\leq \sum_{n\geq 1} |x_n| \cdot |x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n\geq 1} |y_n| \cdot |x_n + y_n|^{p-1} \leq \\ &\leq \|x\|_p \cdot (\sum_{n\geq 1} |x_n + y_n|^{(p-1)q})^{1/q} + \|y\|_p \cdot (\sum_{n\geq 1} |x_n + y_n|^{(p-1)q})^{1/q} = \\ &= (\|x\|_p + \|y\|_p) \cdot \|x+y\|_p^{p/q}. \end{aligned}$$

Dividiendo por $\|x+y\|_p^{p/q}$ queda finalmente

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

■

**Proposición 6.11.4.** *(1) $(\ell_p, +, \cdot, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.*

*(2) El espacio $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ es separable para $1 \leq p < \infty$.*

*Demostración.* (1) Ya sabemos que $\ell_\infty$ es un eB no separable (ver la Prop. 6.9.1). Consideremos el caso $1 \leq p < \infty$. En primer término, la Des. de Minkowski más unos sencillos cálculos prueban que $(\ell_p, +, \cdot, \|\cdot\|_p)$ es un en. Veamos que la norma es completa. Sea $(\xi_k)_k$ una sucesión de Cauchy en $\ell_p$, siendo $\xi_k = (x_{kn})_n \in \ell_p$, $\forall k \geq 1$. Es inmediato que para cada $n \geq 1$ la sucesión $(x_{kn})_k$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$, que es completo. Por tanto existe $\lim_{k\to\infty} x_{kn} \in \mathbb{K}$ y este hecho nos permite definir un vector $\xi_0 := (x_{0n})_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{kn} =: x_{0n} \in \mathbb{K}$, $\forall n \geq 1$. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Como $(\xi_k)_k$ es una sucesión de Cauchy, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j, k \geq k_0$ se verifica

$$\|\xi_k - \xi_j\|_p^p \leq \epsilon \ \Leftrightarrow \ \sum_{n=1}^{r} |x_{kn} - x_{jn}|^p \leq \epsilon, \ \forall r \geq 1. \tag{6.6}$$

Fijando $k \geq k_0$, $r \geq 1$ y haciendo $j \to \infty$ en (6.6) obtenemos

$$\sum_{n=1}^{r} |x_{kn} - x_{0n}|^p \leq \epsilon, \forall r \geq 1, \tag{6.7}$$

es decir, para todo $k \geq k_0$ se verifica

$$\sum_{n\geq 1} |x_{kn} - x_{0n}|^p \leq \epsilon. \tag{6.8}$$

La desigualdad (6.8) implica que:

(i) $\xi_k - \xi_0 \in \ell_p$, $\forall k \geq k_0$, de donde $\xi_0 \in \ell_p$, pues $\xi_0 = \xi_k - (\xi_k - \xi_0)$.

(ii) Además $\|\xi_k - \xi_0\|_p \leq \epsilon^{1/p}$ para $k \geq k_0$. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, obtenemos que $\xi_k \to \xi_0$ en $\ell_p$.

Por tanto la norma $\|\cdot\|_p$ es completa y $\ell_p$ es un eB.

(2) Veamos que $\ell_p$ es separable para $1 \leq p < \infty$. Sean $e_1 = (1, 0, 0, ..)$, $e_2 := (0, 1, 0, 0, ..)$, etc., los vectores unitarios. Se tiene que:

(A) Si $x \in \ell_p$, entonces $\sum_{n\geq 1} |x_n|^p < \infty$, por lo que $\sum_{n>r} |x_n|^p \to 0$ cuando $r \to \infty$. Ahora bien

$$\sum_{n>r} |x_n|^p = \|x - \sum_{n=1}^{r} x_n e_n\|_p^p,$$

es decir, $\ell_p$ está generado por la familia contable $\{e_n : n \geq 1\}$. Por tanto $\ell_p$ es separable para $1 \leq p < \infty$.

(B) Es inmediato comprobar que los vectores unitarios $\{e_n : n \geq 1\}$ verifican, para todo par $n, m \in \mathbb{N}$ y escalares $t_i \in \mathbb{K},\ 1 \leq i \leq n+m$, la siguiente desigualdad

$$\| \sum_{i=1}^{n} t_i e_i \|_p \leq \| \sum_{i=1}^{n+m} t_i e_i \|_p .$$

Por tanto $\{e_n : n \geq 1\}$ es una base de Schauder de $\ell_p$ para $1 \leq p < \infty$. ■

## 6.12. El teorema de Hahn-Banach

**Proposición 6.12.1.** *Sean $X$ un ev sobre $\mathbb{R}$ y $p : X \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que*

$$\forall x, y \in X,\ \forall t \geq 0,\ p(x+y) \leq p(x) + p(y),\ p(tx) = tp(x).$$

*Sean $M \subset X$ un subespacio y $f : M \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal tal que $f(x) \leq p(x),\ \forall x \in M$. Entonces existe una aplicación lineal $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\Lambda \restriction M = f, \quad -p(-x) \leq \Lambda x \leq p(x),\ \forall x \in X.$$

*Demostración.* (A) Sean $x_1 \in X \setminus M$ y $M_1 := \{x + tx_1 : x \in M, t \in \mathbb{R}\}$ el subespacio generado por $M$ y $x_1$. Vamos a extender $f$ a $M_1$ cumpliendo los requerimientos del enunciado. Puesto que

$$\forall x, y \in M,\ f(x) + f(y) = f(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x - x_1) + p(x_1 + y)$$

se tiene que

$$\forall x, y \in M,\ f(x) - p(x - x_1) \leq p(x_1 + y) - f(y).$$

Sean

$$\sup\{f(x) - p(x - x_1) : x \in M\} =: a \leq b := \text{ínf}\{p(x_1 + y) - f(y) : y \in M\}.$$

Elegimos arbitrariamente $\alpha \in [a, b]$ y observamos que

$$\forall x, y \in M, \quad f(x) - \alpha \leq p(x - x_1),\ f(y) + \alpha \leq p(y + x_1). \tag{6.9}$$

Las desigualdades (6.9) nos sugieren cómo definir la extensión $f_1 : M_1 \to \mathbb{R}$ de $f$ a $M_1$. Hacemos

$$f_1(x + tx_1) = f(x) + t\alpha, \quad \forall x \in M,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Es inmediato que $f_1$ es lineal y que $f_1 \restriction M = f$. Además se verifica $f_1(y) \leq p(y),\ \forall y \in M_1$, gracias a (6.9), pues, si $y = x + tx_1 \in M_1$, con $x \in M$ y $t \in \mathbb{R}$, entonces:

(i) Si $t = 0$, es claro por el enunciado que $f_1(y) = f(x) \leq p(x) = p(y)$.

(ii) Sea $t > 0$. Aplicando (6.9) se obtiene:

$$f_1(y) = t(f(\tfrac{x}{t}) + \alpha) \leq tp(\tfrac{x}{t} + x_1) = p(x + tx_1) = p(y).$$

(iii) Sea $t = -s < 0$. Aplicando (6.9) se obtiene:

$$f_1(y) = s(f(\tfrac{x}{s}) - \alpha) \leq sp(\tfrac{x}{s} - x_1) = p(x - sx_1) = p(y).$$

(B) Sea $\mathcal{P}$ la colección de todos los pares $(M', f')$, donde $M \subset M' \subset X$ es un super-espacio de $M$ y $f'$ es una extensión de $f$ a $M'$ cumpliendo los requisitos del enunciado. Introducimos en $\mathcal{P}$ un orden parcial " $\leq$ " declarando que dos pares verifican $(M', f') \leq (M'', f'')$ sii $M' \subset M''$ y $f'' \restriction M' = f'$. Por el Principio maximal de Hausdorff existe una cadena (es decir, un conjunto totalmente ordenado) maximal $\Omega$ en $\mathcal{P}$. Sea $\Phi$ la colección de todos los subespacios $M'$ tales que $(M', f') \in \Omega$. Es claro que $\Phi$ es un conjunto totalmente ordenado por inclusión. Sea $\hat{M} := \cup\{M' : M' \in \Phi\}$, que es un subespacio de $X$. Definimos el funcional $\Lambda : \hat{M} \to \mathbb{R}$ del siguiente modo. Si $x \in \hat{M}$, existe $M' \in \Phi$ tal que $x \in M'$ y definimos $\Lambda x := f'(x)$. Observemos que $\Lambda$ está bien definida sobre $\hat{M}$, es lineal y $\Lambda \leq p$ sobre $\hat{M}$.

**Aserto.** $\hat{M} = X$.

En efecto, supongamos que $\hat{M} \neq X$, es decir, que existe $x_1 \in X \setminus \hat{M}$. Entonces la parte (A) de la prueba nos permite construir una extensión de $\Lambda$ (y por tanto de $f$) al subespacio generado por $\hat{M}$ y $x_1$, lo que atenta contra la maximalidad de la cadena $\Omega$. Por tanto $\hat{M} = X$.

Finalmente, de ser $\Lambda \leq p$ deducimos que

$$\forall x \in X, \quad \Lambda(-x) \leq p(-x) \;\Rightarrow\; -p(-x) \leq \Lambda x \leq p(x).$$

$\blacksquare$

**Proposición 6.12.2.** *[Teorema de Hahn-Banach. Forma analítica] Sean $(X, \|\cdot\|)$ en, $M \subset X$ un subespacio y $f \in M^*$. Entonces existe $\Lambda \in X^*$ tal que $\Lambda \restriction M = f$ y $\|\Lambda\| = \|f\|$.*

*Demostración.* (A) En primer término supondremos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Definimos $p : X \to \mathbb{R}$ de modo que $p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$, $\forall x \in X$. Se verifica que

$$\forall x, y \in X, \; \forall t \geq 0, \; p(x + y) \leq p(x) + p(y), \; p(tx) = tp(x),$$

y además $f(x) \leq p(x)$, $\forall x \in M$. Por la Prop. 6.12.1 existe un funcional lineal $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ tal que $\Lambda \restriction M = f$ y

$$-\|f\| \cdot \|x\| \leq \Lambda x \leq \|f\| \cdot \|x\|, \; \forall x \in X.$$

La anterior desigualdad prueba que $\Lambda \in X^*$ (es decir, es continua) y $\|\Lambda\| \leq \|f\|$. Finalmente $\|\Lambda\| = \|f\|$ porque el hecho $\Lambda \restriction M = f$ implica que $\|f\| \leq \|\Lambda\|$.

(B) Sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Por $X_r, M_r$ indicaremos los en reales subyacentes a $X, M$ respectivamente. Es decir, en $X_r, M_r$ sólo se considera el producto por reales. Naturalmente $X = X_r, M = M_r$ como conjuntos, pero la estructura lineal es diferente de la de $X$ y $M$. Como $f \in M^*$, debe ser $f = u + iv$, siendo $u, v : M \to \mathbb{R}$ funcionales $\mathbb{R}$-lineales y continuos, es decir $u, v \in M_r^*$. Por otra parte

$$\forall x \in M, \quad u(ix) + iv(ix) = f(ix) = if(x) = -v(x) + iu(x),$$

de donde sale que

$$\forall x \in M, \quad v(x) = -u(ix) = u(-ix).$$

Así que

$$\forall x \in M, \quad f(x) = u(x) - iu(ix) = u(x) + iu(-ix).$$

Y viceversa, si $u \in M_r^*$ y $g(x) := u(x) + iu(-ix)$, $\forall x \in M$, entonces $g \in M^*$.

**Aserto.** $\|u\| = \|f\|$.

En efecto, claramente $\|u\| \le \|f\|$. Sea $x \in M$ y elijamos $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, tal que $\alpha f(x) = |f(x)|$. Entonces

$$|f(x)| = \alpha \cdot f(x) = f(\alpha x) = u(\alpha x),$$

y este hecho prueba que $\|f\| \le \|u\|$. En definitiva $\|u\| = \|f\|$.

Aplicando a $u$ la parte (A) obtenemos una extensión $\mathbb{R}$-lineal $\tilde{u} : X \to \mathbb{R}$ de $u$ a todo $X$ tal que $\|\tilde{u}\| = \|u\|$. A continuación, para todo $x \in X$, definimos $\Lambda x := \tilde{u}(x) + i\tilde{u}(-ix)$. Entonces $\Lambda \in X^*$, $\|\Lambda\| = \|\tilde{u}\| = \|u\| = \|f\|$ y $\Lambda \restriction M = f$. ■

**Corolario 6.12.3.** *Sean $X$ un en y $x_0 \in X$. Se tiene que $x_0$ alcanza su norma sobre $S(X^*)$, es decir, existe $x^* \in S(X^*)$ tal que $\langle x^*, x_0 \rangle = \|x_0\|$.*

*Demostración.* Si $x_0 = 0$, tomamos cualquier $x^* \in S(X^*)$. Sea $x_0 \neq 0$. Sean $M := [x_0]$ el subespacio generado por $x_0$ y $f : M \to \mathbb{K}$ el funcional tal que $f(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$. Claramente $f \in M^*$ y $\|f\| = 1$. Aplicando la Prop. 6.12.2 se obtiene una extensión $x^* \in X^*$ de $f$ a todo $X$ que tiene las siguientes propiedades:

(i) $\langle x^*, x_0 \rangle = f(x_0) = \|x_0\|$; (ii) $\|x^*\| = \|f\| = 1$. ■

Un **hiperplano** de un ev $X$ es un subespacio propio maximal. Si $H \subset X$ es un hiperplano (resp., un subespacio) de $X$ y $a \in X$, decimos que $H + a$ es **un hiperplano afín (resp., un subespacio afín)** de $X$.

**Proposición 6.12.4.** *Sea $X$ un ev.*

*(1) Sea $M \subset X$ un subespacio. Son equivalentes:*

*(a) $M$ es hiperplano.*

*(b) $X/M$ es 1-dimensional.*

*(c) $M = ker(f)$ para cierto funcional lineal $f \in X'$ tal que $f \neq 0$.*

*(2) Si $(X, \|\cdot\|)$ es un en y $M = ker(f)$ para cierta $f \in X'$, entonces $M$ es cerrado sii $f \in X^*$.*

*(3) Si $(X, \|\cdot\|)$ es un en, $M \subset X$ es un hiperplano afín cerrado sii existen $\gamma \in \mathbb{K}$ y $f \in X^*$ tales que $M = f^{-1}(\gamma)$.*

*Demostración.* (1) $(a) \Rightarrow (b)$. Si $M \subset X$ es un hiperplano, existe $e \in X \setminus M$ tal que $X = [M \cup \{e\}]$, por la definición de hiperplano. Por tanto todo $x \in X$ se puede expresar como $x = m + \lambda e$, para ciertos $m \in M$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Luego $[x] = \lambda \cdot [e]$, es decir, que $X/M$ es el ev generado por el elemento $[e]$. En consecuencia $X/M$ es unidimensional.

$(b) \Rightarrow (c)$. Sea $0 \neq \alpha \in X/M$ tal que $\alpha$ genera $X/M$, es decir, $X/M = \{t\alpha : t \in \mathbb{K}\}$. Definimos $\tilde{f} : X/M \to \mathbb{K}$ de modo que $\tilde{f}(t\alpha) = t$ y sea $f : X \to \mathbb{K}$ tal que $f := \tilde{f} \cdot Q$, siendo $Q : X \to X/M$ el cociente canónico. Es claro que $f \in X'$, $f \neq 0$ pues $\tilde{f} \neq 0$ y $M = ker(f)$.

$(c) \Rightarrow (a)$. Sea $f \in X'$, $f \neq 0$, tal que $M = ker(f)$. Claramente $M \neq X$ pues $f \neq 0$. Sea $e \in X \setminus M$ fijo. Queremos ver que $X = [M \cup \{e\}]$, lo que implicará que $M$ es un subespacio maximal propio de $X$, esto es, un hiperplano. Sea $y \in X$. Se tiene que

$$f(y - \tfrac{f(y)}{f(e)} e) = f(y) - \tfrac{f(y)}{f(e)} f(e) = 0.$$

Así que $y - e\frac{f(y)}{f(e)} \in M$, en otras palabras $y \in [M \cup \{e\}]$. Esto prueba que $X = [M \cup \{e\}]$.

(2) Es claro que si $f \in X^*$ y $M = ker(f)$, entonces $M$ es un cerrado de $X$. Supongamos ahora que $M = ker(f)$ es cerrado en $X$. Si $f = 0$ hemos terminado. Sea $f \neq 0$ y sea $u \in X$ tal que $f(u) = 1$. Entonces

$$M_1 := \{x \in X : f(x) = 1\} = M + u,$$

lo que implica que $M_1$ es un hiperplano afín cerrado de $X$ tal que $0 \notin M_1$. Sea $r > 0$ tal que $B_X(0, r) \cap M_1 = \emptyset$.

**Aserto.** $f(B_X(0, r)) \subset B_{\mathbb{K}}(0, 1)$

En efecto, supongamos que $|f(x_0)| > 1$ para cierto $x_0 \in B_X(0, r)$. Entonces $x_0/f(x_0) \in M_1 \cap B_X(0, r)$, una contradicción que prueba el Aserto.

Finalmente, del Aserto se deduce que $f$ es acotada. Luego $f \in X^*$ por la Prop. 6.4.1.

(3) Si $M$ es un hiperplano afín cerrado de $X$, existen $a \in X$ y un hiperplano cerrado $L$ de $X$ tales que $M = L + a$. Por (1) y (2) existe $f \in X^*$ tal que $L = ker(f)$. Por tanto, si $f(a) =: \gamma$, es claro que $M = f^{-1}(\gamma)$.

Y viceversa, si $M = f^{-1}(\gamma)$ para ciertos $f \in X^*$ y $\gamma \in \mathbb{K}$, entonces $M = L + a$ donde $L = ker(f)$ y $a \in f^{-1}(\gamma) = M$ arbitrario. Por lo tanto $M$ es un hiperplano afín cerrado. ■

Si $\Omega$ es un abierto convexo de un en $(X, \|\cdot\|)$ tal que $0 \in \Omega$, se define **el funcional de Minkowski** $p : X \to \mathbb{R}$ **de** $\Omega$ de la siguiente manera

$$\forall x \in X, \quad p(x) := \inf\{t \geq 0 : x \in t\Omega\}.$$

**Lema 6.12.5.** *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un en, $\Omega \subset X$ un abierto convexo tal que $0 \in \Omega$ y $p : X \to \mathbb{R}$ el funcional de Minkowski de $\Omega$. Se verifica:*

*(1) $0 \leq p(x) < \infty$, $\forall x \in X$, y $p(0) = 0$ .*

*(2) Sea $0 < t < \infty$. Se tiene que $p(x) < t$ sii $x \in t\Omega$, es decir, $t\Omega = \{x \in X : p(x) < t\}$.*

*(3) Para todo par $x, y \in X$ y todo $\lambda \geq 0$, se tiene $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ y $p(\lambda x) = \lambda \cdot p(x)$.*

*Demostración.* (1) Como $\Omega$ es abierto y $0 \in \Omega$, claramente $X = \cup\{n\Omega : n \in \mathbb{N}\}$, lo que implica que $p(x) < \infty$, $\forall x \in X$. Además, por definición $0 \leq p(x)$, $\forall x \in X$. Como $0 \in t\Omega$, $\forall t \geq 0$, es claro que $p(0) = 0$.

(2) Si $p(x) < t$, por la definición de $p(x)$ existe $0 \leq s < t$ tal que $x \in s\Omega$. Puesto que $s\Omega \subset t\Omega$, es claro que $x \in t\Omega$.

Sea $x \in t\Omega$. Como $\Omega$ abierto, para todo $0 \leq s < t$ con $t - s$ muy pequeño se verifica $x \in s\Omega$. Luego $p(x) < t$.

(3) Sean $p(x) < t$ y $p(y) < s$ arbitrarios. Por (2) se tiene que $x \in t\Omega$, $y \in s\Omega$. Entonces $x + y \in t\Omega + s\Omega = (s + t)\Omega$, de donde $p(x + y) < t + s$ por (2). En consecuencia $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ porque $t$ y $s$ se pueden tomar arbitrariamente cerca de $p(x)$ y $p(y)$, respectivamente.

Finalmente, sean $\lambda \geq 0$ y $x \in X$. Si $\lambda = 0$, es claro que $p(0 \cdot x) = p(0) = 0 = 0 \cdot p(x)$. Sea $\lambda > 0$. Se tiene

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \inf\{t \geq 0 : \lambda x \in t\Omega\} = \inf\{t \geq 0 : x \in \tfrac{t}{\lambda}\Omega\} = \\ &= \lambda \cdot \inf\{\tfrac{t}{\lambda} \geq 0 : x \in \tfrac{t}{\lambda}\Omega\} = \lambda p(x). \end{aligned}$$

■

**NOTA.** Sean $(X, \|\cdot\|)$ un en, $\Omega \subset X$ un abierto convexo tal que $0 \in \Omega$ y $p : X \to \mathbb{R}$ el funcional de Minkowski de $\Omega$. Es fácil ver que los siguientes asertos son equivalentes:

(1) $\Omega$ es simétrico respecto del 0; (2) $p$ es una seminorma.

Aún más, $p$ es una norma sii $\Omega$ es simétrico respecto de 0 y radialmente acotado.

**Proposición 6.12.6.** *[Teorema de Hahn-Banach. Forma geométrica] Sean $(X, \|\cdot\|)$ un en, $\emptyset \neq \Omega \subset X$ un abierto convexo y $M \subset X$ un subespacio afín tales que $\Omega \cap M = \emptyset$. Entonces existe un hiperplano afín cerrado $H \subset X$ verificando $M \subset H$ y $H \cap \Omega = \emptyset$. En particular, si $M$ es un subespacio, $H$ es un hiperplano cerrado.*

*Demostración.* (A) Supongamos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y que $0 \in \Omega$. Como $0 \notin M$, existe un subespacio $L \subset X$ tal que $M = L + a$ para cualquier punto $a \in M$, punto que fijamos. Sea $F = [M] = [L \cup \{a\}] = L \oplus [a]$. Se tiene que $M$ es un hiperplano afín de $F$ y por la Prop. 6.12.4 existe $T \in F'$ tal que $M = \{x \in F : Tx = 1\}$. Sea $p$ el funcional de Minkowski de $\Omega$.

**Aserto 1.** Para todo $x \in F$ se verifica $Tx \leq p(x)$.

En efecto, si $Tx \leq 0$, ello es claro porque $0 \leq p(x)$. Sea $Tx = \lambda > 0$. Entonces

$$T\left(\tfrac{x}{\lambda}\right) = 1 \;\Leftrightarrow\; \tfrac{x}{\lambda} \in M \;\Rightarrow\; \tfrac{x}{\lambda} \notin \Omega \;\Leftrightarrow\; x \notin \lambda\Omega \;\Leftrightarrow\; p(x) > \lambda = Tx.$$

Por la Proposición 6.12.1 existe $\Lambda \in X'$ tal que $\Lambda \restriction F = T$ y $\Lambda x \leq p(x),\ \forall x \in X$.

**Aserto 2.** Existe $0 < K < \infty$ tal que $p(x) \leq K\|x\|,\ \forall x \in X$.

En efecto, como $\Omega$ es un entorno de 0, existe $r > 0$ tal que $B(0, r) \subset \Omega$. Sean $K = r^{-1}$ y $x \in X$. Si $x = 0$ es claro que $p(x) = 0 \leq 0 = K\|x\|$. Sea $x \neq 0$. Entonces, teniendo en cuenta el Lema 6.12.5 obtenemos

$$r\tfrac{x}{\|x\|} \in B(0, r) \;\Rightarrow\; r\tfrac{x}{\|x\|} \in \Omega \Leftrightarrow x \in r^{-1}\|x\|\Omega \Leftrightarrow p(x) < K\|x\|.$$

Del Aserto 2 se deduce que $|\Lambda x| \leq K\|x\|,\ \forall x \in X$, es decir, $\Lambda \in X^*$ por la Prop. 6.4.1. Por tanto $H := \{x \in X : \Lambda x = 1\}$ es un hiperplano afín cerrado tal que $M \subset H$. Además $\Omega \cap H = \emptyset$ pues, si $x \in \Omega$, $p(x) < 1$ por lo que $1 > p(x) \geq \Lambda x$, es decir, $x \notin H$.

(B) Supongamos que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y que $0 \in M$, es decir, $M$ es un subespacio vectorial. Sean $X_r, M_r$ los correspondientes ev reales subyacentes. Por la parte (A) existe $H_1 \subset X$ hiperplano real cerrado tal que $M \subset H_1$ y $\Omega \cap H_1 = \emptyset$. Por la Prop. 6.12.4 existe $T_1 \in (X_r)^*$ tal que $H_1 = ker(T_1)$. Sea $Tx := T_1(x) - iT_1(ix),\ \forall x \in X$. Por la prueba de la Prop. 6.12.2 sabemos que $T \in X^*$, es decir, $T$ es un funcional $\mathbb{C}$-lineal y continuo. Sea $H := ker(T)$. Entonces

(i) $H = H_1 \cap iH_1$. Basta aplicar que $Tx := T_1(x) - iT_1(ix),\ \forall x \in X$.

(ii) Como $M = iM$ (porque $M$ ahora es un subespacio $\mathbb{C}$-lineal) y $M \subset H_1$, claramente $M \subset iH_1$, de donde $M \subset H_1 \cap iH_1 = H$.

(iii) $H \cap \Omega \subset H_1 \cap \Omega = \emptyset$.

Luego $H$ es el hiperplano que buscamos. ∎

## 6.13. Teoremas de separación

**Proposición 6.13.1.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un en.*

*(1) Si $x, y \in X, x \neq y$, existe $x^* \in X^*$ tal que $\langle x^*, x\rangle \neq \langle x^*, y\rangle$.*

*(2) Para todo $x \in X$ se tiene $\|x\| = \max\{\langle B(X^*), x\rangle\}$.*

*(3) Si $M \subset X$ es un subespacio cerrado y $x_0 \in X \setminus M$, existe $x^* \in X^*$ tal que $M \subset ker(x^*)$ y $\langle x^*, x\rangle \neq 0$. Aún más, se puede elegir $x^*$ tal que $\langle x^*, x\rangle > 0$*

*Demostración.* (1) Sea $x_0 = x - y \neq 0$. Por el Cor. 6.12.3 existe $x^* \in S(X^*)$ tal que $\langle x^*, x_0\rangle = \|x_0\| \neq 0$. Luego $\langle x^*, x\rangle \neq \langle x^*, y\rangle$.

(2) En primer término, para todo $x^* \in B(X^*)$ y todo $x \in X$ se verifica $|\langle x^*, x\rangle| \leq \|x^*\| \cdot \|x\| \leq \|x\|$, de donde $\|x\| \geq \sup\{\langle B(X^*), x\rangle\}$. Ahora basta aplicar el Cor. 6.12.3.

(3) Por ser $M$ cerrado existe $\epsilon > 0$ tal que, si $\Omega := int(B(x_0, \epsilon))$, entonces $\Omega \cap M = \emptyset$. Por la forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach (ver Prop. 6.12.6) existe $f \in X^*$ tal que $M \subset H := ker(f)$ y $H \cap \Omega = \emptyset$. Como $x_0 \notin H$, $\langle f, x_0\rangle \neq 0$. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, tal que $\lambda\langle f, x_0\rangle = |\langle f, x_0\rangle| > 0$. Cogiendo $x^* := \lambda f$ se verifica el enunciado. ■

**Proposición 6.13.2** (T. de separación de HB para abiertos convexos)**.** *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un en y $A, B$ dos subconjuntos convexos disjuntos no vacíos de $X$, siendo además $A$ abierto. Entonces existen $T \in (X_r)^*$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\forall x \in A,\ \forall y \in B,\ Tx < \gamma \leq Ty.$$

*Es decir, el hiperplano afín real cerrado $T^{-1}(\gamma)$ separa $A$ de $B$.*

*Demostración.* Trabajaremos en el espacio real subyacente $X_r$. Sean $\Omega := B - A$ y $M := \{0\}$. $M$ es un subespacio cerrado de $X_r$ y $\Omega$ es un abierto convexo tales que $M \cap \Omega = \emptyset$. Por el Teorema de Hahn-Banach, forma geométrica, existe $T \in (X_r)^*$ tal que $H \cap \Omega = \emptyset$ siendo $H = ker(T)$. Multiplicando $T$ por un escalar adecuado, si es preciso, podemos suponer que $Tu = 1$ para cierto $u \in \Omega$. Por ser $\Omega$ conexo deducimos que $Tz > 0,\ \forall z \in \Omega$, es decir

$$\forall x \in A,\ \forall y \in B,\ Tx < Ty.$$

Sea $\gamma := \inf\{Ty : y \in B\}$. Entonces $\gamma \in \mathbb{R}$ y además

$$\forall x \in A,\ \forall y \in B,\ Tx \leq \gamma \leq Ty.$$

Como $A$ es abierto, dado $x \in A$, existe $\epsilon > 0$ tal que $x + \epsilon u \in A$. Por tanto $Tx + \epsilon = T(x + \epsilon u) \leq \gamma$, de donde finalmente $Tx < \gamma$. ■

**Proposición 6.13.3** (T. de separación de HB para compactos convexos)**.** *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un en y $A, B$ dos subconjuntos cerrados convexos disjuntos no vacíos de $X$, siendo además $B$ compacto. Entonces existen $T \in (X_r)^*$, $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\eta > 0$ tales que*

$$\forall x \in A,\ \forall y \in B,\ Tx \leq \gamma - \eta < \gamma + \eta \leq Ty.$$

*Es decir, el hiperplano afín real cerrado $T^{-1}(\gamma)$ separa estrictamente $A$ de $B$.*

*Demostración.* Puesto que $B$ es compacto y $A \cap B = \emptyset$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\Omega_1 := A + int(B(0,\epsilon))$ y $\Omega_2 := B + int(B(0,\epsilon))$ son convexos abiertos que verifican $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Por la Prop. 6.13.2 existen $T \in (X_r)^*$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\forall x \in \Omega_1,\ \forall y \in \Omega_2,\ Tx < \gamma \leq Ty.$$

Sean $u \in X_r$ y $\eta > 0$ tales que $Tu = 1$ y $\|\eta u\| < \epsilon$. Si $x \in A,\ y \in B$ es claro que $x + \eta u \in \Omega_1,\ y - \eta u \in \Omega_2$. Por tanto $\forall x \in A,\ \forall y \in B$:

$$Tx + \eta = T(x + \eta u) < \gamma \leq T(y - \eta u) = Ty - \eta \ \Rightarrow\ Tx < \gamma - \eta < \gamma + \eta \leq Ty.$$

■

## 6.14. Espacios de dimensión finita

Todo ev sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita $n$ es algebraicamente isomorfo a $\mathbb{K}^n$. Indicaremos por $e_1, e_2, ..., e_n$ los vectores canónicos unitarios de $\mathbb{K}^n$. En $\mathbb{K}^n$ hay infinitas normas. Algunas de ellas son las siguientes:

(1) La norma del supremo $=: \|\cdot\|_\infty$:

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, \quad \|x\|_\infty := \sup\{|x_i| : i = 1, 2, ..., n\}.$$

(2) La norma $\ell_1 \ =: \|\cdot\|_1$:

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, \quad \|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

(3) La norma $\ell_2 \ =: \|\cdot\|_2$:

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, \quad \|x\|_2 := (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2}.$$

Con cualquiera de estas normas $\mathbb{K}^n$ es un eB pues es un subespacio cerrado de $\ell_\infty,\ \ell_1$ y $\ell_2$, respectivamente.

Si $X$ es un ev y $\|\cdot\|_a,\ \|\cdot\|_b$ son dos normas sobre $X$, decimos que $\|\cdot\|_a,\ \|\cdot\|_b$ **son equivalentes** sii existen constantes $0 < k \leq K < \infty$ tales que

$$\forall x \in X,\ k\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq K\|x\|_a.$$

Por la Prop. 6.4.1 las normas $\|\cdot\|_a,\ \|\cdot\|_b$ son equivalentes sii las identidades $id : (X, \|\cdot\|_a) \to (X, \|\cdot\|_b),\ id : (X, \|\cdot\|_b) \to (X, \|\cdot\|_a)$ son lineales y continuas. Observemos que las normas $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ son equivalentes sii las topologías (metrizables) asociadas $\tau_a$ y $\tau_b$ coinciden.

**Proposición 6.14.1.** *Dado $n \in \mathbb{N}$, todas las normas de $\mathbb{K}^n$ son equivalentes entre sí. En particular, todas las normas inducen la misma topología sobre $\mathbb{K}^n$ y $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ es un eB cualquiera que sea la norma $\|\cdot\|$.*

*Demostración.* Por transitividad, bastará probar que, dada una norma $\|\cdot\|$ sobre $\mathbb{K}^n$, dicha norma $\|\cdot\|$ es equivalente a la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$.

**Aserto.** La aplicación $\psi : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $\psi(x) = \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{K}^n$, es continua.

En efecto, la identidad $id : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ es continua pues, dado $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, se tiene

$$\|id(x)\| = \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|e_i\| \leq$$
$$\leq \sup\{|x_i| : i = 1, 2, .., n\} \cdot \sum_{i=1}^n \|e_i\| = K\|x\|_\infty,$$

siendo $K = \sum_{i=1}^n \|e_i\|$. Por la Prop. 6.4.1 la aplicación anterior $id$ es continua (y lineal, naturalmente). Por otra parte la aplicación $\phi : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ tal que $\phi(x) := \|x\|$ es continua (ver la Prop. 6.3.2). Por tanto $\psi$ es continua ya que $\psi = \phi \circ id$.

Sean $B(\mathbb{K}^n)$ y $S(\mathbb{K}^n)$ la bola unidad cerrada y la esfera unidad cerrada, respectivamente, de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Observemos que la bola unidad $B(\mathbb{K}^n)$, dotada de la topología inducida por la norma $\|\cdot\|_\infty$, es un espacio topológico homeomorfo al producto $B(\mathbb{K}) \times \overset{n}{\cdots} \times B(\mathbb{K})$ con la topología producto. Por tanto la bola $B(\mathbb{K}^n)$ es compacta en $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$, y también lo es la esfera unidad $S(\mathbb{K}^n)$, porque $S(\mathbb{K}^n)$ es un cerrado de $B(\mathbb{K}^n)$. Por razones de compacidad $\psi$ alcanza su máximo y su mínimo, $M$ y $m$ respectivamente, en $S(\mathbb{K}^n)$. Se tiene que:

(i) $0 < m \leq M < \infty$. En efecto, como $m$ se alcanza, existe $x_0 \in S(\mathbb{K}^n)$ tal que $m = \|x_0\|$. Puesto que $x_0 \neq 0$ (porque está en la esfera $S(\mathbb{K}^n)$ y $0 \notin S(\mathbb{K}^n)$), necesariamente $m > 0$.

(ii) Para todo $x \in \mathbb{K}^n$ se verifica

$$m\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq M\|x\|_\infty.$$

En efecto, si $x = 0$ ello es trivial. Sea $x \neq 0$. Entonces $x/\|x\|_\infty \in S(\mathbb{K}^n)$ por lo que

$$m \leq \psi(\tfrac{x}{\|x\|_\infty}) = \left\|\tfrac{x}{\|x\|_\infty}\right\| \leq M \;\Rightarrow\; m\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq M\|x\|_\infty.$$

Por tanto, las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes. ∎

**Corolario 6.14.2.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un en y $Z \subset X$ un subespacio de dimensión finita. Entonces $(Z, \|\cdot\|)$ es un eB y un subespacio cerrado de $(X, \|\cdot\|)$.*

*Demostración.* El espacio $(Z, \|\cdot\|)$ es isomorficamente isométrico a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ para cierto $n \in \mathbb{N}$. Luego $(Z, \|\cdot\|)$ es un eB (y por tanto un subespacio cerrado de $(X, \|\cdot\|)$) por la Prop. 6.14.1. ∎

**Proposición 6.14.3** (Teorema de Riesz). *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un en. Son equivalentes:*

*(1) $X$ es de dimensión finita; (2) La bola unidad cerrada $B(X)$ es compacta.*

*Demostración.* (1) $\Rightarrow$ (2). Por hipótesis $X = \mathbb{K}^n$ para cierto $n \in \mathbb{N}$. Sean $B_1$ la bola unidad cerrada de $\mathbb{K}^n$ con la norma dada $\|\cdot\|$ y $B_2$ la bola unidad cerrada en $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Sabemos que $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes en $\mathbb{K}^n$ y que $B_2$ es un compacto (ver la prueba de Prop. 6.14.1). Puesto que existe $M > 0$ tal que $B_1 \subset M \cdot B_2$, siendo $B_1$ cerrada en $M \cdot B_2$, concluimos que $B_1$ es compacta.

(2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que la bola unidad cerrada $B(X)$ es normo-compacta. Este hecho implica que existen puntos $x_1, ..., x_n \in X$ tales que

$$B(X) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + \tfrac{1}{2} B(X)). \tag{6.10}$$

Sea $Y := [\{x_1, x_2, ..., x_n\}]$, que es un subespacio de dimensión finita $dim(Y) \leq n$ y, por el Cor. 6.14.2, un subespacio cerrado de $X$. De (6.10) obtenemos que

$$B(X) \subset Y + \tfrac{1}{2} B(X). \tag{6.11}$$

Teniendo en cuenta que $\lambda Y = Y$, para todo $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, de (6.11) pasamos a

$$\tfrac{1}{2} B(X) \subset \tfrac{1}{2} Y + \tfrac{1}{4} B(X) = Y + \tfrac{1}{4} B(X).$$

Sustituyendo en (6.11) y teniendo en cuenta que $Y + Y = Y$ obtenemos

$$B(X) \subset Y + \tfrac{1}{2} B(X) \subset Y + Y + \tfrac{1}{4} B(X) = Y + \tfrac{1}{4} B(X). \tag{6.12}$$

De aquí que $\frac{1}{2} B(X) \subset Y + \frac{1}{8} B(X)$, que sustituido en (6.11) nos permite poner

$$B(X) \subset Y + \tfrac{1}{2} B(X) \subset Y + Y + \tfrac{1}{8} B(X) = Y + \tfrac{1}{8} B(X). \tag{6.13}$$

Y así sucesivamente. Llegamos a que $B(X) \subset Y + \frac{1}{2^n} B(X)$ para $n \geq 1$. En consecuencia

$$B(X) \subset \bigcap_{n \geq 1} (Y + \tfrac{1}{2^n} B(X)).$$

Como $Y$ es cerrado en $X$ se tiene que

$$Y = \bigcap_{n \geq 1} (Y + \tfrac{1}{2^n} B(X)),$$

de donde $B(X) \subset Y$. Por tanto $X \subset Y$ y $dim(X) \leq dim(Y) \leq n$. ∎

# Capítulo 7

# Aplicaciones lineales. Dualidad. Reflexividad. Topologías débil y débil*

## 7.1. Introducción

Si $X, Y$ son en sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, entonces:

(1) $L(X,Y)$ será el conjunto de las aplicaciones lineales $T : X \to Y$. Si $Y = \mathbb{K}$, entonces $L(X,Y) = X'$. Es claro que $(L(X,Y), +, \cdot)$ es un ev sobre $\mathbb{K}$, siendo $+$ la suma de aplicaciones lineales y $\cdot$ el producto por escalares.

(2) Denotaremos por $\mathcal{B}(X,Y)$ al conjunto de las aplicaciones lineales acotadas de $X$ en $Y$. $\mathcal{L}(X,Y)$ será el conjunto de las aplicaciones lineales continuas de $X$ en $Y$. Si $Y = \mathbb{K}$, entonces $\mathcal{L}(X,Y) = X^*$. Ya sabemos (ver la Prop. 6.4.1) que $\mathcal{B}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$. Es claro que $(\mathcal{L}(X,Y), +, \cdot)$ es un ev sobre $\mathbb{K}$, subespacio de $(L(X,Y), +, \cdot)$.

**Proposición 7.1.1.** *Sean $X$ en, $T \in L(X,\mathbb{K}) = X'$, $T \neq 0$ y $ker(T) = T^{-1}(0)$. Son equivalentes:*

*(1) $T \in X^*$.*

*(2) $ker(T)$ es cerrado en $X$.*

*(3) $ker(T)$ no es denso en $X$.*

*Demostración.* (1) $\Rightarrow$ (2). Si $T$ es continuo, $ker(T) = T^{-1}(0)$ es cerrado en $X$, ya que $\{0\}$ es un cerrado de $Y$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Como $T \neq 0$, debe ser $ker(T) \neq X$. Luego $ker(T)$ no es denso en $X$, pues de serlo, teniendo en cuenta que $ker(T)$ es cerrado en $X$ por (2), resultaría $ker(T) = X$, lo que no puede ser.

(3) $\Rightarrow$ (1). Si $ker(T)$ no es denso en $X$, como es hiperplano, debe ser $ker(T) = \overline{ker(T)}$, es decir, $ker(T)$ es un hiperplano cerrado. De aquí que $T \in X^*$ por la Prop.

6.12.4. ■

**Proposición 7.1.2.** *Sean $X, Y$ en sobre $\mathbb{K}$ y definamos para cada $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ el número*

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\| : x \in B(X)\}.$$

*Se verifica que $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|)$ es un en tal que*

$$\forall x \in X,\ \forall T \in \mathcal{L}(X,Y),\ \|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|. \tag{7.1}$$

*Además, si $Y$ es eB, $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|)$ también es eB.*

*Demostración.* En primer término, si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $T(B(X))$ es un acotado de $Y$ y, por tanto, $0 \leq \|T\| < \infty$. Veamos que $\|\cdot\|$ verifica los requisitos de las normas. Sean $T, S \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$.

(N1) $0 = \|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in B(X)\}$ sii $Tx = 0,\ \forall x \in B(X)$ sii $T = 0$.

(N2) $\|\lambda T\| = \sup\{\|\lambda \cdot Tx\| : x \in B(X)\} = |\lambda| \cdot \sup\{\|Tx\| : x \in B(X)\} = |\lambda| \cdot \|T\|$.

(N3) $\|T+S\| = \sup\{\|(T+S)x\| : x \in B(X)\} = \sup\{\|Tx + Sx\| : x \in B(X)\} \leq \sup\{\|Tx\| : x \in B(X)\} + \sup\{\|Sx\| : x \in B(X)\} = \|T\| + \|S\|$.

Observemos que (7.1) sale directamente de la definición de la norma $\|T\|$.

Supongamos que $Y$ es un eB. Sea $(T_n)_n \subset \mathcal{L}(X,Y)$ una sucesión de Cauchy.

**Aserto.** Para todo $x \in X$ la sucesión $(T_n x)_n \subset Y$ es una sucesión de Cauchy en $Y$.

En efecto, teniendo en cuenta que $\|T_n - T_m\| \to 0$ cuando $n, m \to \infty$ y (7.1), fijado $x \in X$ se verifica

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \underset{n,m\to\infty}{\to} 0.$$

Por tanto, ya que $Y$ es eB, podemos definir $T_0 : X \to Y$ tal que $T_0 x := \lim_{n\to\infty} T_n x$, $\forall x \in X$. Es inmediato que $T_0 \in L(X,Y)$. Sean $\epsilon > 0$ y $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tales que $\|T_n - T_m\| \leq \epsilon$, $\forall n, m \geq n_\epsilon$. Para todo $x \in B(X)$ se verifica:

$$\forall n, m \geq n_\epsilon,\ \|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \leq \epsilon.$$

Fijando $n \geq n_\epsilon$, haciendo $m \to \infty$ en la anterior desigualdad y teniendo en cuenta que $T_m x \to T_0 x$ obtenemos

$$\forall x \in B(X),\ \forall n \geq n_\epsilon,\ \|(T_n - T_0)(x)\| = \|T_n x - T_0 x\| \leq \epsilon. \tag{7.2}$$

Inmediatamente de (7.2) deducimos que:

(a) Puesto que obviamente $T_n - T_0 \in L(X,Y)$, de la Prop. 6.4.1 obtenemos que $T_n - T_0 \in \mathcal{L}(X,Y)$ y, por tanto, que $T_0 = T_n - (T_n - T_0) \in \mathcal{L}(X,Y)$.

(b) Para todo $n \geq n_\epsilon$ se verifica $\|T_n - T_0\| \leq \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $T_n \to T_0$ en $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|)$.

En consecuencia $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|)$ es un eB. ■

**Proposición 7.1.3.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un en sobre $\mathbb{K}$. Son equivalentes:*

*(1) $X$ es de dimensión finita.*

*(2) $\mathcal{L}(X,Y) = L(X,Y)$ para todo en $(Y, \|\cdot\|)$ sobre $\mathbb{K}$.*

*(3) $X' = X^*$.*

*(4) $\mathcal{L}(X,Y) = L(X,Y)$ para algún en $(Y, \|\cdot\|)$ sobre $\mathbb{K}$ tal que $Y \neq \{0\}$.*

*Demostración.* (1) $\Rightarrow$ (2). Si $dim(X) = n$, entonces $X = \mathbb{K}^n$. Vamos a considerar en $X$ la norma $\|\cdot\|_1$ tal que, para todo $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in X$ (los $e_i$ son los vectores unitarios de $\mathbb{K}^n$), se tiene que $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Recordemos que la norma $\|\cdot\|_1$ es equivalente a la dada $\|\cdot\|$. Sea $(Y, \|\cdot\|)$ un en sobre $\mathbb{K}$. Claramente $\mathcal{L}(X,Y) \subset L(X,Y)$. Cojamos $f \in L(X,Y) \setminus \{0\}$ y probemos que $f \in \mathcal{L}(X,Y)$. Sea $K := \sup\{\|f(e_i)\| : i = 1, \ldots, n\}$. Para todo $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in X$ se verifica

$$\|f(x)\| = \|\sum_{i=1}^n x_i f(e_i)\| \leq K \sum_{i=1}^n |x_i| = K\|x\|_1.$$

Por la Proposición 6.4.1 deducimos que $f \in \mathcal{L}(X,Y)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) son obvios.

(4) $\Rightarrow$ (1). Puesto que $Y \neq \{0\}$, podemos fijar un cierto $y_0 \in Y \setminus \{0\}$. Supongamos que $dim(X)$ es infinita. Sea $\tilde{B} := \{\tilde{u}_i : i \in I\}$ una base algebraica o de Hamel de $X$. Esto quiere decir que todo $x \in X$ admite una única expresión de la forma $x = \sum_{i \in I_x} x_i \tilde{u}_i$ para ciertos $x_i \in \mathbb{K}$ y cierto subconjunto finito $I_x \subset I$. Como la dimensión $dim(X)$ es infinita, $|I| \geq \aleph_0$. Elegimos una cierta subfamilia contable $I_0 := \{i_n : n \geq 1\}$ de $I$ y pasamos a una nueva base de Hamel $B := \{u_i : i \in I\}$ tal que:

(1) $u_i = \tilde{u}_i$ si $i \in I \setminus I_0$.

(2) Si $i = i_n \in I_0$, entonces $u_i = \tilde{u}_i/(n\|\tilde{u}_i\|)$. Observemos que con esta definición $\|n \cdot u_{i_n}\| = 1$.

Sea $T : X \to Y$ tal que, si $x = \sum_{i \in I_x} x_i u_i$, entonces $Tx = (\sum_{i \in I_x} x_i) y_0$. Es claro que $T \in L(X,Y)$. Sin embargo $T \notin \mathcal{L}(X,Y)$ porque $T$ no es acotada ya que, aunque $\|n \cdot u_{i_n}\| \leq 1$, $\forall n \geq 1$, se verifica que $\|T(n \cdot u_{i_n})\| = n\|y_0\| \to \infty$ para $n \to \infty$. Por tanto debe ser $dim(X)$ finita. ■

## 7.2. Duales de orden superior. Espacios reflexivos

Si $(X, \|\cdot\|)$ es un en sobre $\mathbb{K}$, el dual topológico $X^*$ de $X$ se definió en el Capítulo 6. Sabemos que $(X^*, \|\cdot\|)$ es un eB sobre $\mathbb{K}$ (por la Prop. 6.4.2 ó la Prop. 7.1.2). En consecuencia, existe el dual topológico de $(X^*, \|\cdot\|)$, que se denomina **bidual** de $X$ y se denota por $X^{**}$. Obviamente $(X^{**}, \|\cdot\|)$ es un eB, siendo $\|\cdot\|$ la correspondiente norma dual. A continuación, pasaríamos al **tridual** $X^{***}$ de $X$, que es el dual del bidual $(X^{**}, \|\cdot\|)$. Y así sucesivamente. Se obtienen de este modo los duales superiores de $X$.

Existe una inclusión canónica $J : X \to X^{**}$ de un en $X$ en su bidual $X^{**}$ de gran interés. Comencemos definiendo $J$ como aplicación de $X$ en $(X^*)'$ (= dual algebraico de $X^*$) de la siguiente forma:

$$\forall x \in X,\ \forall x^* \in X^*,\ \langle J(x), x^* \rangle := \langle x^*, x \rangle.$$

**Proposición 7.2.1.** *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un en y* $J : X \to (X^*)'$ *la aplicación anteriormente definida. Se tiene que:*

*(1)* $J(x) \in X^{**},\ \forall x \in X$.

*(2)* $J$ *es un isomorfismo isométrico entre* $(X, \|\cdot\|)$ *y su imagen* $(J(X), \|\cdot\|)$ *en* $X^{**}$.

*Demostración.* (1) Dado $x \in X$, $J(x)$ es una aplicación lineal sobre $X^*$. Además para todo $x^* \in X^*$ se verifica:

$$|\langle J(x), x^* \rangle| = |\langle x^*, x \rangle| \leq \|x\| \cdot \|x^*\|.$$

Por la Proposición 6.4.1 se verifica que $J(x)$ es continua sobre $X^*$, es decir, $J(x) \in X^{**}$. Así que la aplicación $J$, que sale de $X$ hacia $(X^*)'$, va a parar, de hecho, a $X^{**} \subset (X^*)'$.

(2) En primer término, la aplicación $J : X \to X^{**}$ es lineal. En estas condiciones bastará probar que $\|J(x)\| = \|x\|,\ \forall x \in X$. Así que fijamos $x_0 \in X$. Aplicando la definición de la norma en $X^{**}$ y la Prop. 6.13.1 se tiene que

$$\|J(x_0)\| = \sup\{|\langle J(x_0), x^* \rangle| : x^* \in B(X^*)\} = \sup\{|\langle x^*, x_0 \rangle| : x^* \in B(X^*)\} = \|x_0\|.$$

■

**Definición 7.2.2.** *Un eB* $(X, \|\cdot\|)$ *es reflexivo sii* $J(X) = X^{**}$.

**NOTA.** Si $X$ es en pero no es eB, $X$ no puede ser reflexivo por la Prop. 7.2.1 y porque los espacios duales son eB.

**Ejemplos.** (ver Ejercicios) (1) Los espacios $\ell_p,\ 1 < p < \infty$, son reflexivos; (2) los espacios $\ell_1, \ell_\infty, c$ y $c_0$ no son reflexivos.

## 7.3. La topología débil

Si $(X, \|\cdot\|)$ es un en, **la topología débil** de $X$ es la topología inicial de $X$ para las aplicaciones $X \ni x \to \langle x^*, x \rangle,\ \forall x^* \in X^*$. La topología débil de $X$ se denota por $w$ (la $w$ de "weak" ). Conviene resaltar algunos elementos de $w$, a saber:

(1) Entornos en $w$. Si $x_0 \in X$, una base de entornos de $x_0$ para la topología $w$ está formada por los subconjuntos $W(x_0; x_1^*, \ldots, x_n^*; \epsilon)$ tales que

$$W(x_0; x_1^*, \ldots, x_n^*; \epsilon) := \{x \in X : |\langle x_i^*, x_0 - x \rangle| < \epsilon\}, \tag{7.3}$$

siendo $n \in \mathbb{N},\ \epsilon > 0$ y $x_i^* \in X^*,\ i = 1, \ldots, n$, arbitrarios.

(2) Convergencia en $w$. Dados $x_0 \in X$ y una red $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset X$, se verifica $x_\alpha \underset{\alpha\in\mathcal{A}}{\to} x_0$ en la $w$-topología sii $\langle x^*, x_\alpha\rangle \underset{\alpha\in\mathcal{A}}{\to} \langle x^*, x_0\rangle$ en $\mathbb{K}$ para todo $x^* \in X^*$.

(3) Continuidad en $w$. Sea $(Y, T_Y)$ un et. Una aplicación $f : (Y, T_Y) \to (X, w)$ es continua sii $x^* \circ f : (Y, T_Y) \to \mathbb{K}$ es continua para todo vector $x^* \in X^*$.

**Proposición 7.3.1.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un en. Entonces:*

*(1) $w \leq \tau_{\|\cdot\|}$, siendo $\tau_{\|\cdot\|}$ la topología en $X$ subordinada a la norma $\|\cdot\|$. En consecuencia la identidad $id : (X, \|\cdot\|) \to (X, w)$ es continua.*

*(2) $w$ es una topología Hausdorff y completamente regular (es decir, $T_{3a}$) en $X$.*

*(3) $X_w := (X, +, \cdot, w)$ es un evt.*

*(4) $X^* = (X_w)^*$, siendo $(X_w)^* := \{z \in X' : z$ es $w$-continuo$\}$.*

*(5) $(X, w)$ y $(X, \|\cdot\|)$ tienen los mismos convexos cerrados.*

*Demostración.* (1) Sea $x_0 \in X$ y $W(x_0; x_1^*, \ldots, x_n^*; \epsilon)$ un entorno de $x_0$ como el definido en (7.3). Hay que ver que existe un $\tau_{\|\cdot\|}$-entorno de $x_0$ (por ejemplo, una bola centrada en $x_0$) contenido en $W(x_0; x_1^*, \ldots x_n^*; \epsilon)$. Pero esto es inmediato porque $B(x_0, \epsilon/M) \subset W(x_0; x_1^*, \ldots x_n^*; \epsilon)$ siendo $M := \sup\{\|x_i^*\| : i = 1, \ldots, n\} + 1$.

(2) Que $w$ es Hausdorff ó $T_2$ se debe a que los vectores de $X^*$ separan los puntos de $X$ (ver la Prop. 6.13.1). Veamos que es completamente regular. Para ello consideramos un vector $x_0 \in X$ y un subconjunto $w$-cerrado $\emptyset \neq F \subset X$ tal que $x_0 \notin F$. Hay que hallar una función $w$-continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x_0) = 0$ y $f \restriction F = 1$. Por hipótesis existe un cierto $w$-entorno $W(x_0; x_1^*, \ldots, x_n^*; \epsilon)$ de $x_0$ (como el de (7.3) ) tal que $W(x_0; x_1^*, \ldots, x_n^*; \epsilon) \cap F = \emptyset$. Recordemos que los funcionales $x_i^*$ (y también sus valores absolutos $|x_i^*|$) son $w$-continuos. Sea $f : X \to [0, 1]$ tal que

$$f(x) := \tfrac{1}{\epsilon}\, \text{ínf}\{\epsilon, \vee\{|\langle x_i^*, x - x_0\rangle| : i = 1, \ldots, n\}\}.$$

Es inmediato que la función $f$ verifica los requisitos anteriores.

(3) Veamos que suma $+$ y producto por escalares $\cdot$ son operaciones continuas para la $w$-topología. Sean $(x_\alpha, y_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}, (\lambda_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ redes en $X \times X$ y $\mathbb{K}$, respectivamente, tales que

$$(x_\alpha, y_\alpha) \underset{\alpha\in\mathcal{A}}{\to} (x_0, y_0) \in X \times X \quad \text{y} \quad \lambda_\alpha \underset{\alpha\in\mathcal{A}}{\to} \lambda_0 \in \mathbb{K} \tag{7.4}$$

en $(X, w) \times (X, w)$ y $\mathbb{K}$, respectivamente. Sea $z^* \in X^*$ arbitrario. Queremos ver que

$$\langle z^*, x_\alpha + y_\alpha\rangle \underset{\alpha\in\mathcal{A}}{\to} \langle z^*, x_0 + y_0\rangle \;\text{ y }\; \langle z^*, \lambda_\alpha x_\alpha\rangle \underset{\alpha\in\mathcal{A}}{\to} \langle z^*, \lambda_0 x_0\rangle.$$

De (7.4) deducimos que

$$x_\alpha \underset{\alpha\in\mathcal{A}}{\to} x_0 \quad \text{y} \quad y_\alpha \underset{\alpha\in\mathcal{A}}{\to} y_0 \quad \text{en } (X, w).$$

De aquí que

$$\langle z^*, x_\alpha\rangle \underset{\alpha\in\mathcal{A}}{\to} \langle z^*, x_0\rangle \quad \text{y} \quad \langle z^*, y_\alpha\rangle \underset{\alpha\in\mathcal{A}}{\to} \langle z^*, y_0\rangle.$$

Por tanto

$$\langle z^*, x_\alpha + y_\alpha\rangle = \langle z^*, x_\alpha\rangle + \langle z^*, y_\alpha\rangle \underset{\alpha\in\mathcal{A}}{\to} \langle z^*, x_0\rangle + \langle z^*, y_0\rangle = \langle z^*, x_0 + y_0\rangle.$$

Además, también ocurre que

$$\langle z^*, \lambda_\alpha x_\alpha\rangle = \lambda_\alpha\langle z^*, x_\alpha\rangle \underset{\alpha\in\mathcal{A}}{\to} \lambda_0\langle z^*, x_0\rangle = \langle z^*, \lambda_0 x_0\rangle,$$

por ser el producto continuo en $\mathbb{K}$.

(4) Como la identidad $id : (X, \|\cdot\|) \to X_w$ es lineal y continua, es claro que $(X_w)^* \subset X^*$. Sea $f \in X^*$ y probemos que $f \in (X_w)^*$. Para ello bastará ver que $f$ es $w$-continua en $0 \in X$, es decir, que si $U$ es un entorno de $0 \in \mathbb{K}$ (por ejemplo, $U = B_{\mathbb{K}}(0, \epsilon)$ para $\epsilon > 0$), entonces $f^{-1}(U)$ es un $w$-entorno de $0 \in X$. Pero ello es cierto, pues $f^{-1}(B_{\mathbb{K}}(0, \epsilon)) \supseteq W(0; f; \epsilon)$, que es un $w$-entorno básico de 0 por (7.3).

(5) Si $F \subset X$ es convexo y $w$ cerrado, claramente $F$ es convexo $\|\cdot\|$-cerrado porque la identidad $id : (X, \|\cdot\|) \to (X, w)$ es lineal y continua.

Sea $F \subset X$ convexo y $\|\cdot\|$-cerrado. Veamos que es $w$-cerrado. Por cada $x \in X \setminus F$ (ver la Prop. 6.13.3) existen $f_x \in X^*$ y $\gamma_x \in \mathbb{R}$ tales que

$$\langle \mathcal{R}e f_x, x\rangle > \gamma_x \geq \sup\langle \mathcal{R}e f_x, F\rangle.$$

El siguiente HECHO es elemental.

**HECHO.** Una aplicación $f = u + iv : X \to \mathbb{C}$ es $w$-continua sii $u, v$ son $w$-continuas.

Sea $f_x = u_x + iv_x,\ \forall x \in X \setminus F$. Por el HECHO $u_x = \mathcal{R}e(f_x)$ es $w$-continua, además de $\mathbb{R}$-lineal, de donde $C_x := u_x^{-1}((-\infty, \gamma_x])$ es un subconjunto convexo $w$-cerrado de $X$ tal que $F \subset C_x$ aunque $x \notin C_x,\ \forall x \in X \setminus F$. Por tanto

$$F = \bigcap_{x\in X\setminus F} C_x,$$

y esto prueba que $F$ es $w$-cerrado. ∎

**NOTA.** Si $(X, \|\cdot\|)$ es un en, se tiene que:

(i) $\tau_{\|\cdot\|} = w$ sii $X$ es de dimensión finita.

(ii) La topología $w$ no es, en general, normal. De hecho, $w$ es normal sii $(X, w)$ es Lindelof. Por ejemplo, esto ocurre, entre otros casos, si $(X, \|\cdot\|)$ es separable.

## 7.4. La topología débil*

Si $(X, \|\cdot\|)$ es un en, **la topología débil*** de $X^*$ es la topología inicial de $X^*$ para las aplicaciones $X^* \ni x^* \to \langle x^*, x\rangle, \ \forall x \in X$. La topología débil* de $X^*$ se denota por $w^*$ (la $w$ y el * de "weak*" ). Conviene resaltar algunos elementos de $w^*$, a saber:

(1) Entornos de $w^*$. Si $z_0 \in X^*$, una base de entornos de $z_0$ para la topología $w^*$ está formada por los subconjuntos $W(z_0; x_1, \ldots, x_n; \epsilon)$ tales que

$$W(z_0; x_1, \ldots, x_n; \epsilon) := \{x^* \in X^* : |\langle z_0 - x^*, x_i\rangle| < \epsilon\}, \tag{7.5}$$

siendo $n \in \mathbb{N}, \ \epsilon > 0$ y $x_i \in X, \ i = 1, \ldots, n$, arbitrarios.

(2) Convergencia en $w^*$. Dados $x_0^* \in X^*$ y una red $(x_\alpha^*)_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset X^*$, se verifica $x_\alpha^* \underset{\alpha\in\mathcal{A}}{\to} x_0^*$ en la $w^*$-topología sii $\langle x_\alpha^*, x\rangle \underset{\alpha\in\mathcal{A}}{\to} \langle x_0^*, x\rangle$ en $\mathbb{K}$ para todo $x \in X$.

(3) Continuidad en $w^*$. Sea $(Y, T_Y)$ un et. Una aplicación $f : (Y, T_Y) \to (X^*, w^*)$ es continua sii $F_x \circ f : (Y, T_Y) \to \mathbb{K}$ es continua para todo vector $x \in X$, siendo $F_x : X^* \to \mathbb{K}$ tal que $F_x(x^*) = \langle x^*, x\rangle, \ \forall x^* \in X^*$.

**Proposición 7.4.1.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un en. Entonces:*

*(1) $w^* \leq w \leq \tau_{\|\cdot\|}$, siendo $w$ la $w$-topología de $X^*$ y $\tau_{\|\cdot\|}$ la topología en $X^*$ subordinada a la norma $\|\cdot\|$ de $X^*$. En consecuencia las aplicaciones $id : (X^*, w) \to (X^*, w^*)$ y $id : (X^*, \tau_{\|\cdot\|}) \to (X^*, w^*)$ son lineales y continuas.*

*(2) $w^*$ es una topología Hausdorff y completamente regular (es decir $T_{3a}$) en $X^*$.*

*(3) $(X^*, +, \cdot, w^*)$ es un evt.*

*(4) $(X^*, w^*)^* = X$, siendo $(X^*, w^*)^*$ la familia de aplicaciones lineales $\psi : X^* \to \mathbb{K}$ que son $w^*$-continuas.*

*Demostración.* (1) Puesto que ya sabemos que $w \leq \tau_{\|\cdot\|}$ (ver la Prop. 7.3.1) bastará probar que $w^* \leq w$. Para ver este hecho, consideremos $X$ sumergido en $X^{**}$ mediante el isomorfismo isométrico $J$ (ver la Prop. 7.2.1). Como $\langle x^*, x\rangle = \langle J(x), x^*\rangle, \ \forall x \in X, \ \forall x^* \in X^*$, ocurre que la topología $w^*$ de $X^*$ es la topología inicial de $X^*$ para las aplicaciones $X \ni x^* \to \langle z, x^*\rangle \in \mathbb{K}, \ \forall z \in J(X)$. Puesto que la $w$ de $X^*$ es la topología inicial de $X^*$ generada por las aplicaciones $X^* \ni x^* \to \langle z, x^*\rangle, \ \forall z \in X^{**}$, necesariamente $w^* \leq w$, pues, en general, $J(X)$ es más pequeño que $X^{**}$. Es claro que si $J(X) = X^{**}$ (es decir, $X$ es reflexivo), entonces (y sólo entonces) $w^* = w$.

(2) y (3) se prueban como en la Prop. 7.3.1.

(4) Es claro, por la definición de la topología $w^*$, que $X \subset (X^*, w^*)^*$ (ó mejor, que $J(X) \subset (X^*, w^*)^*$). Sea $f \in (X^*, w^*)^*$. Entonces, dado $\delta > 0$, $f^{-1}(B_\mathbb{K}(0, \delta))$ debe ser un $w^*$-entorno de $0 \in X^*$. Por tanto, existe un $w^*$-entorno básico $W(0; x_1, \ldots, x_n; \epsilon)$ (como en (7.5)) de 0, con $x_i \in X, \ i = 1, \ldots, n$, y $\epsilon > 0$, de modo que $W(0; x_1, \ldots, x_n; \epsilon) \subset f^{-1}(B_\mathbb{K}(0, \delta))$. De aquí sale que $\cap_{i=1}^n ker(x_i) \subset ker(f)$ y que $f$ es combinación lineal de $x_i, \ i = 1, \ldots, n$, (ver Ejercicio 10, Hoja 1, Problemas de AF). Por tanto $f \in X$. ■

## 7.5. El Teorema de Alaoglu

**Proposición 7.5.1** (Teorema de Alaoglu). *Si $(X, \|\cdot\|)$ es un en, $B(X^*)$ es $w^*$-compacto en $(X^*, w^*)$.*

*Demostración.* Por cada $x \in X$, sean $Q_x := \{z \in \mathbb{K} : |z| \leq \|x\|\}$ y $K := \Pi_{x\in X} Q_x$. Por el T. de Tyjonov $K$ es un conjunto compacto, cuando se le dota de la topología producto $\tau_p$, que es la topología inicial para las proyecciones $K \ni k \to k(x)(= x$-ésima coordenada de $k)$, $\forall x \in X$. La aplicación $(B(X^*), w^*) \ni x^* \xrightarrow{i} (\langle x^*, x\rangle)_{x\in X} \in (K, \tau_p)$ es trivialmente un homeomorfismo entre $B(X^*)$ y su imagen en $K$. Por tanto, como $(K, \tau_p)$ es compacto, para probar que $(B(X^*), w^*)$ también lo es, bastará ver que $i(B(X^*))$ es cerrado en $(K, \tau_p)$. Sea $(i(x^*_\alpha))_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset i(B(X^*))$ una red tal que $i(x^*_\alpha) \underset{\alpha\in\mathcal{A}}{\to} k_0 \in K$ en $(K, \tau_p)$. Queremos ver que existe $x^*_0 \in B(X^*)$ tal que $k_0 = i(x^*_0)$.

Sea $\psi : X \to \mathbb{K}$ tal que $\psi(x) = k_0(x),\ \forall x \in X$.

**Aserto 1.** $\psi \in X'$.

En efecto, para $x, y \in X,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\psi(\lambda x + \mu y) = k_0(\lambda x + \mu y) &= \lim_{\alpha\in\mathcal{A}} \langle x^*_\alpha, \lambda x + \mu y\rangle = \\
= \lim_{\alpha\in\mathcal{A}} \langle x^*_\alpha, \lambda x\rangle + \lim_{\alpha\in\mathcal{A}} \langle x^*_\alpha, \mu y\rangle &= \lambda \lim_{\alpha\in\mathcal{A}} \langle x^*_\alpha, x\rangle + \mu \lim_{\alpha\in\mathcal{A}} \langle x^*_\alpha, y\rangle = \\
&= \lambda k_0(x) + \mu k_0(y) = \lambda\psi(x) + \mu\psi(y).
\end{aligned}$$

**Aserto 2.** $\psi \in B(X^*)$.

En efecto, para todo $x \in X$, como $|\langle x^*_\alpha, x\rangle| \leq \|x^*_\alpha\| \cdot \|x\| \leq \|x\|$ (porque $x^*_\alpha \in B(X^*)$), se verifica

$$|\psi(x)| = |\lim_{\alpha\in\mathcal{A}} \langle x^*_\alpha, x\rangle| = \lim_{\alpha\in\mathcal{A}} |\langle x^*_\alpha, x\rangle| \leq \|x\|.$$

Por tanto $\psi \in X^*$ y $\|\psi\| \leq 1$, es decir, $\psi \in B(X^*)$.

Finalmente observemos que $i(\psi) = k_0$ por la definición de $\psi$. ■

**Corolario 7.5.2.** *Si $(X, \|\cdot\|)$ es un en, entonces $(X^*, w^*)$ es $T_4$, es decir Hausdorff y normal.*

*Demostración.* Por el T. de Alaoglu se verifica que $(X^*, w^*)$ es $\mathcal{K}_\sigma$ pues $X^* = \cup_{n\geq 1} nB(X^*)$. Por tanto $(X^*, w^*)$ es Lindelof. Teniendo en cuenta que "regular +Lindelof $\Rightarrow$ normal " y la Prop. 7.4.1, concluimos que $(X^*, w^*)$ es $T_4$. ■

## 7.6. El Teorema de Goldstine

**Proposición 7.6.1** (T. de separación de HB para $(X^*, w^*)$). *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un en, $K \subset X^*$ un subconjunto convexo $w^*$-cerrado y $x^*_0 \in X^* \setminus K$. Entonces existe $x_0 \in X$ tal* *que*

$$\langle \mathcal{R}e(J(x_0)), x_0^* \rangle > \sup \langle \mathcal{R}e(J(x_0)), K \rangle. \tag{7.6}$$

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad suponemos que $x_0^* = 0$. Puesto que $K$ es $w^*$-cerrado y $0 \notin K$, existe un $w^*$-entorno básico $W_0 := W(0; x_1, \ldots, x_n; \epsilon)$ de 0 como en (7.5) tal que $W_0 \cap K = \emptyset$. Por la Prop. 6.13.2 existen $z = u + iv \in X^{**}$, $u = \mathcal{R}e(z) \in (X_r^*)^*$, y $\gamma > 0$ tales que

$$\forall x^* \in W_0, \ \langle u, x^* \rangle < \gamma \leq \text{ínf} \langle u, K \rangle \tag{7.7}$$

y en particular

$$\langle u, 0 \rangle = 0 < \gamma \leq \text{ínf} \langle u, K \rangle. \tag{7.8}$$

Sean $J(x_k) = u_k + iv_k$ siendo $J : X \to X^{**}$ la inmersión canónica (ver la Prop. 7.2.1), $u_k := \mathcal{R}e(J(x_k))$ y $v_k := \mathcal{I}m(J(x_k))$. Por (7.7) es claro que

$$\cap_{k=1}^n ker(J(x_k)) = \cap_{k=1}^n (ker(u_k) \cap ker(v_k)) \subset ker(u).$$

Por el Ej. 10 , Hoja 1 de Problemas de AF, este hecho implica que $u$ es combinación $\mathbb{R}$-lineal de los funcionales $\{u_k, v_k : k = 1, \ldots, n\}$, vg., $u = \sum_{k=1}^n (t_k u_k + s_k v_k)$ con $t_k, s_k \in \mathbb{R}$ ($s_k = 0$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Por tanto

$$u = \mathcal{R}e(\sum_{k=1}^n (t_k J(x_k) - s_k J(ix_k))) = \mathcal{R}e(J(\sum_{k=1}^n (t_k - is_k) x_k)).$$

Sea $x_0 = -\sum_{k=1}^n (t_k - is_k) x_k$. Es claro que $x_0 \in X$ y que $-u = \mathcal{R}e(J(x_0))$. Por (7.8) obtenemos

$$\langle \mathcal{R}e(J(x_0)), 0 \rangle = 0 > \sup \langle \mathcal{R}e(J(x_0)), K \rangle. \tag{7.9}$$

■

**Proposición 7.6.2** (Teorema de Goldstine)**.** *Si* $(X, \|\cdot\|)$ *es un en, se tiene que* $\overline{J(B(X))}^{w^*} = B(X^{**})$*, es decir,* $J(B(X))$ *es* $w^*$*-denso en el compacto* $B(X^{**})$ *de* $(X^{**}, w^*)$*.*

*Demostración.* Sea $K := \overline{J(B(X))}^{w^*}$ la $w^*$-clausura de $J(B(X))$ en $(B(X^{**}), w^*)$. Observemos que $K$ es un subconjunto $w^*$-compacto convexo y simétrico respecto de 0. Supongamos que $B(X^{**}) \neq K$ y sea $z \in B(X^{**}) \setminus K$. Por el Teorema de separación de Hahn-Banach para el espacio $(X^{**}, w^*)$ (Prop. 7.6.1), existe un vector $x_0^* \in X^*$ tal que

$$\langle \mathcal{R}e(J(x_0^*)), z \rangle > \sup \langle \mathcal{R}e(J(x_0^*)), K \rangle \geq 0.$$

Por otra parte

$$\|x_0^*\| = \|J(x_0^*)\| = \|\mathcal{R}e(J(x_0^*))\| \geq \langle \mathcal{R}e(J(x_0^*)), z \rangle$$

y, puesto que $K \supseteq J(B(X))$ y $\langle \mathcal{R}eJ(x_0^*), Jx\rangle = \langle \mathcal{R}e(x_0^*), x\rangle,\ \forall x \in X$, también se verifica que:

$$\sup\langle \mathcal{R}e(J(x_0^*)), K\rangle \geq \sup\langle \mathcal{R}eJ(x_0^*), J(B(X))\rangle = \sup\langle \mathcal{R}e(x_0^*), B(X)\rangle = \|\mathcal{R}e(x_0^*)\| = \|x_0^*\|.$$

Llegamos a una contradicción que prueba que $B(X^{**}) = K$. ■

# Capítulo 8

# Teorema de Baire. Teorema de Banach-Steinhaus. Teorema de la aplicación abierta. Teorema del gráfico cerrado

## 8.1. El Teorema de Baire

Sea $(X, T_X)$ un et. Un subconjunto $A \subset X$ se dice :

(i) **diseminado** (ó "nowhere dense" ) sii $int(\overline{A}) = \emptyset$.

(ii) **de 1ª categoría en** $X$ **(ó magro)** sii $A = \cup_{n \geq 1} A_n$ siendo cada $A_n$ diseminado.

(iii) **de 2ª categoría en** $X$ sii $A$ no es de 1ª categoría en $X$.

**Proposición 8.1.1** (Teorema de Baire). *Sea $(X, T_X)$ un et tal que:(a) ó $X$ es métrico completo; (b) ó $X$ es localmente compacto $T_2$. Entonces, si $\{G_n : n \geq 1\}$ es un a secuencia de abiertos densos de $X$, se verifica que $\cap_{n \geq 1} G_n$ es un subconjunto denso en $X$. Por tanto $X$ es de 2ª categoría en sí mismo.*

*Demostración.* Sea $\{G_n : n \geq 1\}$ es un a secuencia de abiertos densos de $X$. Para probar que $\cap_{n \geq 1} G_n$ es un subconjunto denso en $X$, bastará ver que, dado un abierto no vacío $U_0$ de $X$, se verifica $U_0 \cap (\cap_{n \geq 1} G_n) \neq \emptyset$. Para ello construimos una sucesión decreciente de abiertos no vacíos $U_n$ de $X$ tales que $\overline{U}_n \subset U_{n-1} \cap G_n$, para $n \geq 1$, siendo $U_n$ en el caso (a) de la forma $U_n = int(B(a_n, \epsilon_n))$ para cierto $a_n \in X$ cierto $0 < \epsilon_n \leq 2^{-n}$.

Supongamos que se ha construido hasta $U_{n-1}$ verificando los requerimientos citados. Como $G_n$ es un abierto denso de $X$, ocurre que $G_n \cap U_{n-1}$ es un abierto no vacío de $X$. Entonces:

(a) Si $X$ es métrico completo, sea $U_n = int(B(a_n, \epsilon_n))$ para cierto $a_n \in X$ cierto $0 < \epsilon_n \leq 2^{-n}$ de modo que la bola cerrada $B(a_n, \epsilon_n) \subset G_n \cap U_{n-1}$.

(b) Si $X$ es localmente compacto, sea $U_n$ un abierto no vacío tal que $\overline{U}_n$ sea compacto y $\overline{U}_n \subset G_n \cap U_{n-1}$.

Sea $K := \cap_{n\geq 1} U_n = \cap_{n\geq 1}\overline{U}_n \subset U_0 \cap (\cap_{n\geq 1} G_n)$. Veamos que $K \neq \emptyset$. En el caso (a) la sucesión $(a_n)_n$ es de Cauchy y, por tanto, converge a cierto $a_0$, que claramente verifica $a_0 \in K$. Luego el resultado es cierto bajo la hipótesis (a).

En el caso (b), como los compactos $(\overline{U}_n)_n$ tienen la propiedad de la intersección finita, también se verifica que $\emptyset \neq \cap_{n\geq 1}\overline{U}_n = K$, y esto concluye la prueba. ■

**Corolario 8.1.2.** *Todo espacio métrico completo sin puntos aislados es incontable.*

*Demostración.* Sea $(X, T_X)$ un em completo sin puntos aislados no vacío. Es claro que para todo $x \in X$ se verifica que $\overline{\{x\}} = \{x\}$ y que $int(\{x\}) = \emptyset$. Como $X = \bigcup_{x\in}\{x\}$, $X$ debe ser incontable pues $X$ es 2ª categoría en sí mismo por la Prop. 8.1.1. ■

**Corolario 8.1.3.** *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un eB y* $C \subset X$ *un subconjunto cerrado convexo simétrico respecto del* 0 *tal que* $X = \bigcup_{n\geq 1} nC$. *Entonces* $C$ *es un entorno de* 0.

*Demostración.* Puesto que el producto por un escalar no nulo es una homotecia, cada $nC$, $n \geq 1$, es convexo cerrado simétrico afínmente homeomorfo a $C$. Puesto que por el Teorema de Baire $X$ es de 2ª categoría, algún $nC$ tiene interior no vacío, es decir, $int(C) \neq \emptyset$. Así que existen $x_0 \in C$ y $r > 0$ tales que $B(x_0, r) \subset C$. Como $C$ es simétrico convexo, $B(-x_0, r) \subset C$ y

$$B(0, r) = \tfrac{1}{2}B(x_0, r) + \tfrac{1}{2}B(-x_0, r) \subset C.$$

Por tanto $C$ es un entorno del 0. ■

## 8.2. El Teorema de Banach-Steinhaus

**Proposición 8.2.1** (Teorema de Banach-Steinhaus ó de la acotación uniforme)**.** *Sean* $X$ *un eB,* $Y$ *un en y* $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ *un subconjunto tal que*

$$\forall x \in X, \quad \sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{A}\} < \infty.$$

*Entonces* $\sup\{\|T\| : T \in \mathcal{A}\} < \infty$.

*Demostración.* Sea $C := \{x \in X : \|Tx\| \leq 1, \forall T \in \mathcal{A}\}$. Es trivial comprobar que $C$ es convexo y simétrico respecto del 0. Además $C$ es cerrado pues, si $(x_n)_n \subset C$ es una sucesión tal que $x_n \to x_0 \in X$ en norma, entonces $\|Tx_0\| = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| \leq 1$, $\forall T \in \mathcal{A}$, por lo que $x_0 \in C$.

**Aserto.** $X = \bigcup_{n\geq 1} nC$.

En efecto, sean $x \in X$ y $\mathbb{N} \ni n > \sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{A}\}$. Se tiene que

$$\sup\{\|T(x/n)\| : T \in \mathcal{A}\} = \tfrac{1}{n}\sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{A}\} \leq 1.$$

Por tanto $x/n \in C \Leftrightarrow x \in nC$ y esto prueba que $X = \bigcup_{n \geq 1} nC$.

Aplicando el Corolario 8.1.3 concluimos que existe $r > 0$ tal que $B(0, r) \subset C$, es decir, para todo $x \in B(0, r)$ se tiene que $\|Tx\| \leq 1$, $\forall T \in \mathcal{A}$. Este hecho implica que $\|Tx\| \leq 1/r$, $\forall T \in \mathcal{A}$, $\forall x \in B(X)$, y en consecuencia

$$\forall T \in \mathcal{A}, \quad \|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in B(X)\} \leq \tfrac{1}{r}.$$

■

**Corolario 8.2.2.** *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un en y $A \subset X$ un subconjunto. Son equivalentes:*

*(1) $A$ es acotado; (2) $\langle x^*, A\rangle$ es acotado para todo $x^* \in X^*$.*

*Demostración.* (1) $\Rightarrow$ (2). Si $A$ es acotado, existe $0 \leq M < \infty$ tal que $A \subset B(0, M)$. Así que, fijado $x^* \in X^*$, $\langle x^*, A\rangle$ es acotado pues se tiene

$$\forall x \in A, \quad |\langle x^*, x\rangle| \leq \|x^*\| \cdot \|x\| \leq M \cdot \|x^*\|.$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Sea $J(A)$ la copia isométrica de $A$ en $X^{**}$ (ver la Prop. 7.2.1). Por (2) para todo $x^* \in X^*$ se tiene

$$\sup\{|\langle J(x), x^*\rangle| : x \in A\} = \sup\{|\langle x^*, x\rangle| : x \in A\} < \infty.$$

Aplicando el T. de Banach-Steinhaus (Prop. 8.2.1) y que $J$ es una isometría obtenemos que

$$\sup\{\|x\| : x \in A\} = \sup\{\|Jx\| : x \in A\} < \infty,$$

es decir, $A$ es acotado. ■

## 8.3. El Teorema de la aplicación abierta

Una aplicación $f : X \to Y$ entre dos et $(X, T_X), (Y, T_Y)$ es **abierta** sii $f(T_X) \subset T_Y$. Es fácil ver que una aplicación lineal $T : X \to Y$ entre dos en $X, Y$ es abierta sii $T(B(X))$ es un entorno de 0 en $Y$.

**Proposición 8.3.1** (Teorema de la aplicación abierta para eB)**.** *Sean $X, Y$ dos eB y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Son equivalentes :(a) $T$ es sobreyectiva; (b) $T$ es abierta.*

*Demostración.* Como $(b) \Rightarrow (a)$ es obvio, procedemos a demostrar $(a) \Rightarrow (b)$. Tenemos que probar que $V := T(B(X))$ es un entorno de 0 en $Y$. Es claro que $V$ es un subconjunto convexo simétrico de $Y$ y que $Y = \bigcup_{n \geq 1} nV$. Nuestra idea es aplicar el Cor. 8.1.3. Lamentablemente **no podemos aplicar el Cor. 8.1.3 a** $V$ porque no estamos seguros de que $V$ sea cerrado. Sin embargo, **el Cor. 8.1.3 sí se puede aplicar a** $\overline{V}$ porque $\overline{V}$ es convexo cerrado simétrico y $Y = \bigcup_{n \geq 1} n\overline{V}$. Por tanto existe $r > 0$ tal que $B_Y(0, r) \subset \overline{V}$.

**Aserto.** $\overline{V} \subset 2V$.

En efecto, fijemos $y_0 \in \overline{V}$. A continuación procedemos por etapas.

**Etapa 1.** Como $V = T(B(X))$ es denso en $\overline{V}$, existe $x_1 \in B(X)$ tal que $\|y_0 - Tx_1\| \leq \frac{1}{2}r$, de donde $y_0 - Tx_1 \in \frac{1}{2}rB(Y)$.

**Etapa 2.** Puesto que

$$\tfrac{1}{2}rB(Y) \subset \tfrac{1}{2}\overline{V} = \overline{T(\tfrac{1}{2}B(X))},$$

podemos hallar $x_2 \in \frac{1}{2}B(X)$ tal que

$$\|(y_0 - Tx_1) - Tx_2\| \leq \tfrac{1}{4}r \quad \Leftrightarrow \quad y_0 - T(x_1 + x_2) \in \tfrac{1}{4}rB(Y).$$

**Etapa 3.** Puesto que

$$\tfrac{1}{4}rB(Y) \subset \tfrac{1}{4}\overline{V} = \overline{T(\tfrac{1}{4}B(X))},$$

podemos hallar $x_3 \in \frac{1}{4}B(X)$ tal que

$$\|(y_0 - T(x_1 + Tx_2)) - Tx_3\| \leq \tfrac{1}{8}r \quad \Leftrightarrow \quad y_0 - T(x_1 + x_2 + x_3) \in \tfrac{1}{8}rB(Y).$$

Reiterando, obtenemos una sucesión $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ tal que

$$\|y_0 - T(x_1 + \cdots + x_n)\| \leq 2^{-n} \cdot r \quad \text{y} \quad x_n \in 2^{-(n-1)}B(X), \quad \text{es decir }, \ \|x_n\| \leq 2^{-(n-1)}, \ \forall n \geq 1.$$

La serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ converge a cierto $x_0 \in X$ porque es claramente absolutamente convergente y $X$ es eB (ver la Prop. 6.3.4). Por tanto $x_1 + \cdots + x_n \to x_0$ en $(X, \|\cdot\|)$ de donde, por la continuidad de $T$, obtenemos $T(x_1 + \cdots + x_n) \to Tx_0$ en $(Y, \|\cdot\|)$. Por otra parte

$$\|y_0 - T(x_1 + \cdots + x_n)\| \leq 2^{-n} \cdot r.$$

Haciendo $n \to \infty$ en la anterior desigualdad, concluimos que $\|y_0 - Tx_0\| = 0$, es decir $y_0 = tx_0$.

Por otra parte $x_0 \in 2B(X)$ porque

$$\|x_0\| \leq \sum_{n\geq 1} \|x_n\| \leq \sum_{n\geq 1} 2^{-(n-1)} = 2.$$

Por tanto $y_0 \in T(2B(X)) = 2V$, lo que prueba que $\overline{V} \subset 2V$.

Finalmente, es claro que se verifica

$$\tfrac{1}{2}rB(Y) \subset \tfrac{1}{2}\overline{V} \subset V$$

y de aquí concluimos que $V$ es un entorno de 0 en $Y$. ■

**Corolario 8.3.2.** *Sean $X, Y$ dos eB y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ biyectiva. Entonces $T$ es un isomorfismo topológico, es decir, un isomorfismo bi-continuo.*

*Demostración.* Es claro que $T$ es un isomorfismo algebraico. Por tanto $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es sobreyectiva. Por la Prop. 8.3.1 se tiene que $T$ es abierta, es decir, $T^{-1}$ es continua. Por tanto $T$ es un isomorfismo topológico. ■

## 8.4. El Teorema del gráfico cerrado

**El gráfico ó grafo** de una función $f : X \to Y$ entre dos et $X, Y$es el subconjunto $G(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$. Decimos que **f tiene gráfico cerrado** sii $G(f)$ es un subconjunto cerrado de $(X \times Y, \tau_p)$, siendo $\tau_p$ la topología producto de $X \times Y$. Observemos que, si $f$ es continua y $Y$ es $T_2$, $G(f)$ es cerrado (es fácil de ver), pero que $G(f)$ sea cerrado no implica, en general, que $f$ sea continua. En el resultado que se prueba a continuación, se exhiben situaciones en las que los dos asertos anteriores son equivalentes.

Si $X, Y$ son em, $(X \times Y, \tau_p)$ también es metrizable y para una función $f : X \to Y$ son trivialmente equivalentes:

(i) $G(f)$ es cerrado.

(ii) Si $(x_n)_n \subset X$ es una sucesión tal que $x_n \to x_0 \in X$ y $f(x_n) \to y_0 \in Y$, entonces $y_0 = f(x_0)$.

**Proposición 8.4.1** (Teorema del gráfico cerrado)**.** *Sean $X, Y$ dos eB y $T \in L(X, Y)$. Son equivalentes:*

*(1) $T$ es continua ; (2) $G(T)$ es cerrado.*

*Demostración.* (1) $\Rightarrow$ (2) se verifica siempre.

(2) $\Rightarrow$ (1). Por ser $T$ lineal, $G(T)$ es claramente un subespacio vectorial del ev producto $(X \times Y, +, \cdot)$. Con la norma

$$\forall (x, y) \in X \times Y, \quad \|(x, y)\| = \sup\{\|x\|, \|y\|\},$$

$(X \times Y, \|\cdot\|)$ es un eB. Observemos que la topología producto $\tau_p$ de $X \times Y$ es justamente la topología subordinada a la norma $\|\cdot\|$. Como, por hipótesis, $G(T)$ es cerrado en $X \times Y$, $(G(T), \|\cdot\|)$ es también eB. Consideremos la aplicación $P : G(T) \to X$ tal que $P(x, Tx) = x, \ \forall (x, Tx) \in G(T)$.

**Aserto.** $P$ es una biyección entre $G(T)$ y $X$ tal que $P \in \mathcal{L}(G(T), X)$.

En efecto, es claro que $P$ es lineal. Además es biyectiva pues, si $i : X \to G(T)$ es tal que $i(x) = (x, Tx), \ \forall x \in X$, entonces $P \circ i = id_X$ y $i \circ P = id_{G(T)}$. Finalmente $P$ es continua porque

$$\|P(x, Tx)\| = \|x\| \leq \sup\{\|x\|, \|Tx\|\} = \|(x, Tx)\|.$$

Por el Cor. 8.3.2 se tiene que $P$ es un isomorfismo topológico. Así que $P^{-1} = i : X \to G(T)$ es una aplicación lineal y continua. Finalmente obtenemos que $T$ es continua porque $T = \pi_2 \circ i$, siendo $\pi_2 : X \times Y \to Y$ la proyección sobre $Y$, que es trivialmente lineal y continua. ■

# Capítulo 9

# Espacios de Hilbert. Proyección ortogonal. Sistemas ortonormales. Bases.

## 9.1. Introducción

Si $H$ es un ev sobre $\mathbb{K}$, **un producto escalar (ó producto interno)** es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ tal que para todo $x, y, z \in H$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ se verifican las siguientes cláusulas $(e1) - (e5)$:

(e1) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (la barra indica conjugación en $\mathbb{C}$).

(e2) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

(e3) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.

(e4) $\langle x, x \rangle \geq 0$.

(e5) $\langle x, x \rangle = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$.

A partir de las cláusulas $(e1) - (e5)$ se prueba inmediatamente sin dificultad lo siguiente:

(e6) $\langle 0, y \rangle = 0 = \langle y, 0 \rangle$.

(e7) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.

(e8) $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$.

(e9) Fijado $y \in H$, la aplicación $H \ni x \to \langle x, y \rangle$ es lineal y la aplicación $H \ni x \to \langle y, x \rangle$ es antilineal.

(e10) $\langle x, x \rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$.

**Proposición 9.1.1.** *Sean $H$ un ev y $\langle , \rangle$ un producto escalar en $H$. Entonces:*

*(1) Identidad de polarización. Para todo $x, y \in H$:*

$$\mathbb{K} = \mathbb{C},\ \langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}[\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle + i\langle x+iy, x+iy\rangle - i\langle x-iy, x-iy\rangle].$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{R},\ \langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}[\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle].$$

*(2) Identidad del paralelogramo. Para todo $x, y \in H$:*

$$\langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle = 2[\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle].$$

*(3) Desigualdad de Cauchy-Schwartz: $\forall x, y \in H,\ |\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$.*

*(4) Desigualdad triangular ó de Minkowski:*

$$\forall x, y \in H,\ \langle x+y, x+y\rangle^{1/2} \leq \langle x, x\rangle^{1/2} + \langle y, y\rangle^{1/2}.$$

*Demostración.* (1) y (2) son de comprobación inmediata. Basta echar cuentas.

(3) Sean $x, y \in H$ fijos y $\lambda \in \mathbb{K}$ variable. Entonces:

$$0 \leq \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + |\lambda|^2\langle y, y\rangle + 2\mathcal{R}e(\lambda\langle y, x\rangle).$$

Sean $re^{i\theta} := \langle y, x\rangle$ con $r = |\langle y, x\rangle|$ y $\lambda := te^{-i\theta},\ t \in \mathbb{R}$. Entonces $2\mathcal{R}e(\lambda\langle y, x\rangle) = 2t \cdot |\langle y, x\rangle|$. Así que

$$\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq \langle x, x\rangle + t^2\langle y, y\rangle + 2t \cdot |\langle y, x\rangle|.$$

De aquí sale fácilmente que $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$.

(4) Se tiene que:

$$\begin{aligned}\langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2 \cdot \mathcal{R}e\langle x, y\rangle \leq \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2|\langle x, y\rangle| \leq \\ \leq \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\langle x, x\rangle^{1/2} \cdot \langle y, y\rangle^{1/2} = (\langle x, x\rangle^{1/2} + \langle y, y\rangle^{1/2})^2.\end{aligned}$$

■

**Proposición 9.1.2.** *Sean $H$ un ev, $\langle , \rangle$ un producto escalar en $H$ y $\|x\| := \langle x, x\rangle^{1/2}$, $\forall x \in H$. Entonces $(H, \|\cdot\|)$ es un en.*

*Demostración.* En primer término, la raíz cuadrada en la definición $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ tiene sentido puesto que $\langle x, x\rangle \geq 0$. Veamos que se cumplen los requisitos de las normas. Sean $x, y \in H$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Se tiene que:

(N1) Aplicando las cláusulas (e5) y (e6) obtenemos:

$$0 = \|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} \Leftrightarrow x = 0.$$

(N2) $\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x\rangle^{1/2} = (|\lambda|^2\langle x, x\rangle)^{1/2} = |\lambda|\langle x, x\rangle^{1/2} = |\lambda| \cdot \|x\|$.

(N3) Aplicando la Des. de Minkowski se tiene:

$$\|x+y\| = \langle x+y, x+y\rangle^{1/2} \leq \langle x, x\rangle^{1/2} + \langle y, y\rangle^{1/2} = \|x\| + \|y\|.$$

■

**Definición 9.1.3.** *(1) Un espacio preHilbert es un par $(H, \langle , \rangle)$ tal que $(H, \|\cdot\|)$ es un en y $\langle , \rangle$ es un producto escalar en $H$ de modo que la norma $\|\cdot\|$ procede de $\langle , \rangle$, es decir, $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}, \forall x \in H$. El en $(H, \|\cdot\|)$ puede no ser completo.*

*(2) Un espacio de Hilbert (abrev., eH) es un espacio preHilbert que es eB.*

**Proposición 9.1.4.** *Sea $(H, \langle , \rangle)$ un espacio preHilbert. Entonces:*

*(1) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \ \forall x, y \in H$.*

*(2) Fijado $y \in H$, las aplicaciones $H \ni x \overset{\Phi_y}{\to} \langle x, y\rangle \in \mathbb{K}$ y $H \ni x \overset{\Psi_y}{\to} \langle y, x\rangle \in \mathbb{K}$ son continuas, $\Phi_y$ es lineal con norma $\|\Phi_y\| \leq \|y\|$ y $\Psi_y$ es antilineal.*

*(3) El producto escalar $\langle , \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ es continua para la topología de la norma $\|\cdot\|$ de $H$.*

*Demostración.* (1) sale de la Des. de Cauchy-Schwarz y la definición de la norma $\|\cdot\|$.

(2) Fijemos $y \in H$.

(21) la aplicación $\Phi_y$ es trivialmente lineal y, por la Prop. 6.4.1, es además continua con $\|\Phi_y\| \leq \|y\|$ pues por (1) se verifica:

$$\forall x \in H, \ |\Phi_y(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|y\| \cdot \|x\|.$$

(22) La aplicación $\Psi_y$ es trivialmente antilineal, es decir:

$$\forall u, v \in H, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \Psi_y(\lambda u + \mu v) = \overline{\lambda}\Psi_y(u) + \overline{\mu}\Psi(v).$$

Además $\Psi_y$ es continua pues $\Psi_y = \overline{\{\cdot\}} \circ \Phi_y$, siendo $\overline{\{\cdot\}}$ la aplicación conjugación en $\mathbb{K}$.

(3) Sean $(x_n)_n, (y_n)_n$ dos sucesiones en $H$ tales que $x_n \to x_0 \in H$ y $y_n \to y_0 \in H$ para la norma $\|\cdot\|$ de $H$. En particular existe $0 \leq M < \infty$ tal que $\|x_n\| \leq M, \ \forall n \geq 0$. Queremos ver que $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x_0, y_0\rangle$. Se tiene que

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| = |\langle x_n, y_n - y_0\rangle + \langle x_n - x_0, y_0\rangle| \leq |\langle x_n, y_n - y_0\rangle| + |\langle x_n - x_0, y_0\rangle| \leq$$
$$\leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y_0\| + \|x_n - x_0\| \cdot \|y_0\| \leq M\|y_n - y_0\| + \|y_0\| \cdot \|x_n - x_0\| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

■

## 9.2. Ortogonalidad

**Definición 9.2.1.** *Sea $(H, \langle , \rangle)$ un espacio preHilbert.*

*(1) Dados $x, y \in H$, se dice que $x$ es ortogonal a $y$ (abrev., $x \perp y$) sii $\langle x, y\rangle = 0$. Es claro que $x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$.*

*(2) Dados $x \in H$ y $A \subset H$, decimos que $x$ es ortogonal a $A$ (abrev., $x \perp A$) sii $x \perp a, \ \forall a \in A$.*

*(3) Dados $A, B \subset H$, decimos que $A$ es ortogonal a $B$ (abrev., $A \perp B$) sii $a \perp b$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$. Es claro que $A \perp B \Leftrightarrow B \perp A$.*

*(4) Dado $A \subset H$, el complemento ortogonal $A^\perp$ de $A$ es $A^\perp := \{x \in H : x \perp A\}$.*

**Proposición 9.2.2.** *Sean $(H, \langle , \rangle)$ un espacio preHilbert y $A, A_i, B \subset H, i \in I$. Entonces:*

*(1) $A^\perp$ es un subespacio cerrado de $H$.*

*(2) Si $A \subset B$, entonces $B^\perp \subset A^\perp$.*

*(3) $A^\perp = \overline{[A]}^\perp$.*

*(4) $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^\perp = \bigcap_{i \in I} A_i^\perp$.*

*(5) $A \subset A^{\perp\perp}$.*

*(6) [Teorema de Pitágoras] Si $x_i \in H$, $i = 1, \dots, n$, son ortogonales dos a dos, entonces $\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$.*

*Demostración.* (1) Si $a \in H$, la aplicación $\Phi_a : H \to \mathbb{K}$ tal que $\Phi_a(x) = \langle x, a \rangle$, $\forall x \in H$, verifica $\Phi_a \in H^*$ por la Prop. 9.1.4. Así que $a^\perp := \Phi_a^{-1}(0)$ es un subespacio cerrado de $H$. Finalmente observemos que $A^\perp = \cap_{a \in A} a^\perp$.

(2) es inmediato.

(3) Por (1) ocurre que $x^\perp$ es un subespacio cerrado de $H$, $\forall x \in H$, de donde $A \subset x^\perp$ sii $\overline{[A]} \subset x^\perp$. Por tanto para $x \in H$ se verifica:

$$x \in A^\perp \Leftrightarrow A \subset x^\perp \Leftrightarrow \overline{[A]} \subset x^\perp \Leftrightarrow x \in \overline{[A]}^\perp.$$

(4) $x \in (\bigcup_{i \in I} A_i)^\perp \;\Leftrightarrow\; x \in A_i^\perp,\ \forall i \in I \;\Leftrightarrow\; x \in \bigcap_{i \in I} A_i^\perp$.

(5) es obvio.

(6) es inmediato. Basta echar las cuentas.

■

## 9.3. La proyección ortogonal

Si $(E, d)$ es un em, $y_0 \in E$ y $A \subset E$, definimos la **distancia** $dist(y_0, A)$ **de** $y_0$ **a** $A$ como

$$dist(y_0, A) := \text{ínf}\{d(y_0, a) : a \in A\}.$$

Decimos que $a_0 \in A$ **es la proyección de** $y_0$ **sobre** $A$ sii $d(y_0, a_0) = dist(y_0, A)$. Esta proyección no siempre existe y, de existir, puede no ser única.

**Proposición 9.3.1** (Teorema de la proyección. 1ª Parte)**.** *Sean $(H, \langle , \rangle)$ un eH y $X \subset H$ un subconjunto convexo cerrado no vacío. Entonces:*

*(1) Para todo $h \in H$ existe la proyección de $h$ sobre $X$ y es única. La denotamos por $P_X(h)$.*

*(2) Si $h \in H$ la proyección $P_X(h)$ está caracterizada por la siguiente equivalencia:*

$$z = P_X(h) \;\Leftrightarrow\; z \in X \;\; y \;\; \mathcal{R}e\langle h - z, x - z\rangle \leq 0, \; \forall x \in X. \tag{9.1}$$

*(3) Para todo $h, k \in H$ se tiene $\|P_X(h) - P_X(k)\| \leq \|h - k\|$ y esto implica que la aplicación $P_X : H \to X$ es continua.*

*Demostración.* (1) Bastará probar el enunciado para $h = 0$. Sea $\alpha := \text{ínf}\{\|z\| : z \in X\}$ y consideremos los subconjuntos $X_n := \{z \in X : \|z\| \leq (\alpha^2 + \frac{1}{n})^{1/2}\}, \; n \in \mathbb{N}$. Si $x, y \in X_n$, entonces $\frac{1}{2}(x + y) \in X_n$ (porque $X_n$ es convexo) y además

$$\|\tfrac{1}{2}(x + y)\|^2 \geq \alpha^2 \;\Rightarrow\; \|x + y\|^2 \geq 4\alpha^2.$$

Por tanto, aplicando la identidad del paralelogramos a $x, y \in X_n$ obtenemos

$$\|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 \leq 2(\alpha^2 + \tfrac{1}{n}) + 2(\alpha^2 + \tfrac{1}{n}) - 4\alpha^2 = \tfrac{4}{n}.$$

En consecuencia el diámetro $diam(X_n)$ de $X_n$ verifica

$$diam(X_n) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in X_n\} \leq 2 \cdot n^{-1/2}.$$

Así que $\{X_n : n \geq 1\}$ es una sucesión de subconjuntos no vacíos convexos cerrados decrecientes (es decir, $X_{n+1} \subset X_n$) cuyo diámetro verifica $diam(X_n) \to 0$. Puesto que $H$ es completo existe un único $u \in H$ tal que $\{u\} = \bigcap_{n\geq 1} X_n$. Naturalmente $\|u\| = \alpha$ y además $u = P_X(0)$.

(2) Sabemos por (1) que la proyección $P_X(h)$ existe y es única. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $P_X(h) = 0$.

(i) Comprobemos que, si $z = 0 = P_X(h)$, entonces $\mathcal{R}e\langle h, x\rangle \leq 0, \; \forall x \in X$, que es a lo que se reduce la parte derecha de (9.1) tras la simplificación introducida (tras hacer $P_X(h) = 0$). Si $x \in X$, también $\{tx : t \in [0, 1]\} \subset X$ porque $0, x \in X$ y $X$ es convexo. Como en $P_X(h) = 0 \in X$ se alcanza la mínima distancia de $h$ a $X$ (que es $\|h\|$), es claro que

$$\forall t \in [0, 1], \|h\|^2 \leq \|h - tx\|^2 = \|h\|^2 + t^2\|x\|^2 - 2t \cdot \mathcal{R}e\langle h, x\rangle \;\Rightarrow 2\mathcal{R}e\langle h, x\rangle \leq t\|x\|^2, \forall t \in (0, 1].$$

Por tanto $\mathcal{R}e\langle h, x\rangle \leq 0, \forall x \in X$.

(ii) Sea ahora $z \in X$ verificando la parte derecha de (9.1). Hay que probar que $z = P_X(h) = 0$, es decir, que $\|h - z\| \leq \|h\|$ (esto implicará que $dist(h, z) = \|h - z\| \leq \|h\| = dist(h, X)$, de donde $z = P_X(h)$). Por (9.1) con $x = 0 \in X$ se tiene

$$\mathcal{R}e\langle h - z, -z\rangle \leq 0 \;\Rightarrow -2\mathcal{R}e\langle h, z|\rangle + \|z\|^2 \leq -\|z\|^2.$$

Por tanto

$$\|h - z\|^2 = \|h\|^2 + \|z\|^2 - 2\mathcal{R}e\langle h, z\rangle\| \leq \|h\|^2.$$

(3) Sea $u := h - P_X(h) + P_X(k) - k$. Se tiene que

$$\|h-k\|^2 = \|P_X(h) - P_X(k)\|^2 + \|u\|^2 + 2\mathcal{R}e\langle P_X(h) - P_X(k), u\rangle.$$

Bastará probar que

$$2\mathcal{R}e\langle P_X(h) - P_X(k), u\rangle \geq 0. \tag{9.2}$$

Pero

$$\langle u, P_X(h) - P_X(k)\rangle = -\langle h - P_X(h), P_X(k) - P_X(h)\rangle - \langle k - P_X(k), P_X(h) - P_X(k)\rangle.$$

A continuación por (2) obtenemos

$$\mathcal{R}e\langle P_X(h) - P_X(k), u\rangle = \mathcal{R}e\langle u, P_X(h) - P_X(k)\rangle \geq 0.$$

En consecuencia se verifica (9.2). ■

**Proposición 9.3.2** (Teorema de la proyección. 2ª Parte)**.** *Sean* $(H, \langle,\rangle)$ *un eH y* $X \subset H$ *un subespacio cerrado. Entonces:*

*(1) Para todo* $a \in H$ *se tiene:*

$$z = P_X(a) \;\Leftrightarrow\; z \in X \quad y \;\; (a - z)\perp X.$$

*(2)* $P_X : H \to X$ *es una aplicación lineal continua e idempotente, es decir,* $P_X^2 = P_X$*.*

*(3) Si* $X \neq \{0\}$, $\|P_X\| = 1$*.*

*Demostración.* (1) $\Rightarrow$. Sea $z = P_X(a) \in X$, que sabemos que existe y es único por la Prop. 9.3.1. Por (2) de la Prop. 9.3.1:

$$\forall x \in X, \mathcal{R}e\langle a - z, x - z\rangle \leq 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}e\langle a - z, y\rangle \leq 0, \;\forall y \in X. \tag{9.3}$$

Poniendo $-y \in X$ en lugar de $y \in X$ en (9.3) obtenemos

$$\forall y \in X, \;\mathcal{R}e\langle a - z, y\rangle \geq 0. \tag{9.4}$$

Por tanto de (9.3) y (9.4) sale que

$$\forall y \in X, \;\mathcal{R}e\langle a - z, y\rangle = 0. \tag{9.5}$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, (9.5) implica que $a - z\perp X$.

Sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Poniendo $iy$ en lugar de $y \in X$ en (9.5) se tiene que

$$\forall y \in X, \;0 = \mathcal{R}e\langle a - z, iy\rangle = \mathcal{R}e(-i\langle a - z, y\rangle) = \mathcal{I}m\langle a - z, y\rangle. \tag{9.6}$$

Combinando (9.5) y (9.6) obtenemos que $\langle a - z, y\rangle = 0, \;\forall y \in X$, es decir, $a - z\perp X$.

$\Leftarrow$. Sea $z \in X$ tal que $a - z \perp X$. Esto quiere decir que

$$\forall x \in X, \ \mathcal{R}e\langle a - z, x - z\rangle = 0 \leq 0.$$

Por la Prop. 9.3.1 obtenemos que $z = P_X(a)$.

(2) (i) Veamos que $P_X$ es lineal. Sean $a, b \in H$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Se tiene que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha a - \alpha P_X(a) \perp X \\ \beta b - \beta P_X(b) \perp X \end{array} \right. \Rightarrow \ \alpha a + \beta b - (\alpha P_X(a) + \beta P_X(b)) \perp X \overset{\text{por (1)}}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow \ P_X(\alpha a + \beta b) = \alpha P_X(a) + \beta P_X(b).$$

(ii) Ya sabemos por la Prop. 9.3.1 que $P_X$ es continua. Finalmente es trivial que $P_X^2 = P_X$.

(3) En primer término $\|P_X\| \leq 1$ porque por la Prop. 9.3.1 se verifica:

$$\|P_X(z)\| = \|P_X(z) - P_X(0)\| \leq \|z\|, \ \forall z \in H$$

Por otra parte, si $a \in X \setminus \{0\}$, se tiene que:

$$1 = \left\| \frac{a}{\|a\|} \right\| = \|P_X\left(\frac{a}{\|a\|}\right)\|,$$

de donde $\|P_X\| \geq 1$. Por tanto $\|P_X\| = 1$. ■

## 9.4. Complementación

Sean $H$ un en y $X \subset H$ un subespacio cerrado.

(1) **Una proyección de** $H$ **sobre** $X$ es una aplicación lineal continua $P : H \to H$ tal que $P(H) = X$ y $P^2 = P$.

(2) Decimos **que** $X$ **está complementado en** $H$ sii existe una proyección $P : H \to H$ tal que $P(H) = X$.

(3) Supongamos que $P : H \to H$ es una proyección tal que $P(H) = X$, es decir, que $X$ está complementado en $H$. Si $Y := ker(P)$ y $Q := I - P$ ($I = id_X$), se tiene que $Q$ es también una proyección en $H$ tal que $Q(H) = Y$. Esto quiere decir que $Y$ también está complementado en $H$. Además se verifica $H = X \oplus Y$ (suma directa). Se dice que $Y$ es **el complemento topológico de** $X$ (y viceversa) y que $H$ es **suma directa topológica de** $X$ **e** $Y$.

**Corolario 9.4.1.** *Sean $(H, \langle , \rangle)$ un eH y $X \subset H$ un subespacio cerrado. Entonces:*

*(1) $X$ está complementado en $H$ a través de la proyección $P_X$.*

*(2) $X^\perp = ker(P_X)$ y $X^{\perp\perp} = X$.*

*(3) $H = X \oplus X^\perp$, es decir, $H$ es la suma directa topológica de $X$ y $X^\perp$.*

*Demostración.* (1) sale de la definición de subespacio complementado y de los resultados anteriores.

(2) Sea $a \in H$. Se tiene que:

$$a \in ker(P_X) \Leftrightarrow P_X(a) = 0 \Leftrightarrow a = a - P_X(a) \perp X \Leftrightarrow a \in X^{\perp}.$$

Para la igualdad $X^{\perp\perp} = X$ notemos que $X \subset X^{\perp\perp}$. Sea $x \in X^{\perp\perp}$. Se tiene que:

$$x - P_X(x) \in X^{\perp} \Rightarrow \begin{cases} \langle x, x - P_X(x)\rangle = 0 \\ \langle P_X(x), x - P_X(x)\rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ \|x - P_X(x)\|^2 = 0 \ \Rightarrow \ P_X(x) = x \ \Rightarrow \ x \in X.$$

(3) es consecuencia de lo anterior y las definiciones. ■

## 9.5. El dual $H^*$

**Proposición 9.5.1.** *[Teorema de Frechet-Riesz] Sea $(H, \langle , \rangle)$ un eH. Entonces:*

*(1) Si $a \in H$ y $\Phi_a : H \to \mathbb{K}$ es tal que $\Phi_a(x) = \langle x, a\rangle$, $\forall x \in H$, entonces $\Phi_a \in H^*$.*

*(2) Sea $\Phi : H \to H^*$ tal que $\Phi(a) = \Phi_a$. Se tiene que $\Phi$ es una isometría antilineal entre $H$ y $H^*$, es decir, $\forall a, b \in H$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, se verifica*

$$\|\Phi(a)\| = \|a\| \quad y \quad \Phi(\lambda a + \mu b) = \overline{\lambda}\Phi(a) + \overline{\mu}\Phi(b).$$

*Demostración.* (1) está probado en la Prop. 9.1.4.

(2) (i) Es claro que $\Phi$ es antilineal (lineal si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

(ii) $\Phi$ es una isometría. En efecto, para todo $a, x \in H$ se verifica que

$$|\Phi(a)(x)| = |\langle x, a\rangle| \leq \|a\| \cdot \|x\|,$$

de donde $\|\Phi(a)\| \leq \|a\|$. Por otra parte

$$|\Phi(a)(a)| = |\langle a, a\rangle| = \|a\|^2 \ \Rightarrow \ \|\Phi(a)\| \geq \|a\|.$$

Por tanto $\|\Phi(a)\| = \|a\|$ y $\Phi$ es una isometría entre $H$ y su imagen $\Phi(H) \subset H^*$.

(iii) Veamos que $\Phi$ es sobreyectiva. Sea $\Lambda \in H^*$ y hallemos $a \in H$ tal que $\Phi(a) = \Lambda$. Si $\Lambda = 0$ cogemos $a = 0$. Sea $\Lambda \neq 0$. Entonces $ker\Lambda$ es un hiperplano cerrado de $H$ y, por tanto, existe $b \in (ker\Lambda)^{\perp} \setminus \{0\}$ por el Cor. 9.4.1. Por tanto $ker\Lambda = (ker\Lambda)^{\perp\perp} \subset b^{\perp} = ker(\Phi(b))$. Por el Ej. 10, Hoja 1, Problemas de AF, existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $\Phi(b) = \lambda \cdot \Lambda$, es decir, $\Lambda = \Phi((1/\overline{\lambda})b)$. ■

**Corolario 9.5.2.** *Si $(H, \langle , \rangle)$ es un eH, su dual $H^*$ es también un eH.*

*Demostración.* Por la Prop. 9.5.1 todo elemento de $H^*$ es de la forma $\Phi_a$ para cierto $a \in H$. Definimos en $H^*$ un producto escalar del siguiente modo. Si $a, b \in H$ y $\Phi_a, \Phi_b \in H^*$, definimos

$$\langle \Phi_a, \Phi_b \rangle := \langle b, a \rangle.$$

Se comprueba sin dificultad que el producto $\langle , \rangle$ definido es un producto escalar en $H^*$. Además por la Prop. 9.5.1 se verifica

$$\|\Phi_a\| = \|a\| = \langle a, a \rangle^{1/2} = \langle \Phi_a, \Phi_a \rangle^{1/2}.$$

Luego la norma $\| \cdot \|$ de $H^*$ procede del producto escalar definido y, por tanto, $H^*$ es un eH. ■

## 9.6. Familias sumables

Una familia de vectores $\{x_i : i \in I\}$ de un eB $X$ se dice **sumable a cierto** $x_0 \in X$ (abrev., $\sum_{i \in I} x_i = x_0$) sii para todo $\epsilon > 0$ existe un subconjunto finito $J_\epsilon \subset I$ tal que para todo subconjunto finito $J_\epsilon \subset J \subset I$ se verifica que $\|x_0 - s_J\| \leq \epsilon$, siendo $s_J := \sum_{i \in J} x_i$.

**Proposición 9.6.1.** *[Criterio de Cauchy] Sean $X$ un eB y $\{x_i : i \in I\} \subset X$. Son equivalentes:*

*(1) $\{x_i : i \in I\}$ es sumable (a cierto $x_0 \in X$).*

*(2) Dado $\epsilon > 0$ existe un subconjunto finito $J_\epsilon \subset I$ tal que para todo subconjunto finito $K \subset I \setminus J_\epsilon$ se verifica que $\|s_K\| \leq \epsilon$, siendo $s_K := \sum_{i \in K} x_i$.*

*Demostración.* (1) $\Rightarrow$ (2). Por hipótesis, dado $\epsilon > 0$ existe un subconjunto finito $J_\epsilon \subset I$ tal que para todo subconjunto finito $J_\epsilon \subset J \subset I$ se verifica que $\|x_0 - s_J\| \leq \epsilon/2$. Sea $K \subset I \setminus J_\epsilon$ finito y $J = J_\epsilon \cup K$. Entonces

$$\|x_0 - s_{J_\epsilon}\| \leq \epsilon/2 \text{ y } \|x_0 - s_J\| \leq \epsilon/2 \;\Rightarrow\; \|s_K\| = \|s_J - s_{J_\epsilon}\| \leq \|x_0 - s_{J_\epsilon}\| + \|x_0 - s_J\| \leq \epsilon.$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Por cada $n \geq 1$ elegimos un subconjunto finito $J_n \subset I$ tal que $J_n \subset J_{n+1}$ y $\|s_K\| \leq 1/n$ para todo subconjunto finito $K \subset I \setminus J_n$. Entonces, si $m \geq n \geq p$, se verifica que $J_m \setminus J_n \subset I \setminus J_p$ es finito y por tanto:

$$\|s_{J_m} - s_{J_n}\| = \|s_{J_m \setminus J_n}\| \leq 1/p. \tag{9.7}$$

En consecuencia $\{s_{J_n} : n \geq 1\}$ es una sucesión de Cauchy. Puesto que $X$ es completo existe $\lim_{n \to \infty} s_{J_n} = x_0 \in X$. Además fijando $p = n$ y haciendo $m \to \infty$ en (9.7) obtenemos que:

$$\|x_0 - s_{J_n}\| \leq 1/n. \tag{9.8}$$

Así que dado $\epsilon > 0$, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon > 2/n$. Entonces para todo subconjunto finito $J \subset I$ tal que $J_n \subset J$ se verifica:

$$\|x_0 - s_J\| = \|x_0 - s_{J_n} - s_{J\setminus J_n}\| \leq \|x - s_{J_n}\| + \|s_{J\setminus J_n}\| \leq \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n} = \tfrac{2}{n} < \epsilon.$$

Esto prueba que $\sum_{i\in I} x_i = x_0$. ■

**NOTA.** Si $X$ es un eB y $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ es una familia contable, disponemos de dos nociones perfectamente definidas, a saber:

(a) La familia $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es sumable a cierto $x_0 \in X$; (b) $\sum_{n\geq 1} x_n = x_0$, es decir, la serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ es convergente a $x_0$.

Se verifica que $(a) \Rightarrow (b)$ pero, en general, $(a) \not\Leftarrow (b)$. En efecto:

(1) $(a) \Rightarrow (b)$ trivialmente por la definición de familia sumable.

(2) $(a) \not\Leftarrow (b)$. Veamos un contraejemplo. Sea $\{(-1)^n/n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Sabemos que la serie $\sum_{n\geq 1}(-1)^n/n$ converge a cierto $x_0 \in \mathbb{R}$. Sin embargo la familia $\{(-1)^n/n : n \in \mathbb{N}\}$ no es sumable porque tanto $\sum_{n\geq 1}(2n)^{-1} = \infty$ como $\sum_{n\geq 1}(2n-1)^{-1} = \infty$.

**Proposición 9.6.2.** *Sean $X$ un eB y $\{x_i : i \in I\} \subset X$ una familia sumable tal que $\sum_{i\in I} x_i = x_0 \in X$. Entonces $\sum_{i\in I}\langle x^*, x_i\rangle = \langle x^*, x_0\rangle$, $\forall x^* \in X^*$.*

*Demostración.* Sea $x^* \in X^*$. Si $x^* = 0$ no hay nada que probar. Sean $\|x^*\| = M > 0$ y $\epsilon > 0$. Por hipótesis existe un subconjunto finito $J_\epsilon \subset I$ tal que $\|x_0 - s_J\| \leq \epsilon/M$ para todo subconjunto finito $J \subset I$ tal que $J_\epsilon \subset J$. Por tanto

$$|\langle x^*, x_0\rangle - \sum_{i\in J}\langle x^*, x_i\rangle| = |\langle x^*, x_0 - \sum_{i\in J} x_i\rangle| = |\langle x^*, x_0 - s_J\rangle| \leq \|x^*\| \cdot \tfrac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

Así que $\sum_{i\in I}\langle x^*, x_i\rangle = \langle x^*, x_0\rangle$. ■

## 9.7. Sistemas ortonormales. Bases

Sea $(H, \langle,\rangle)$ un eH. Una familia $\mathcal{U} := \{u_i : i \in I\} \subset H$ es un **sistema ortonormal** sii $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$(= delta de Kronecker). Naturalmente $\|u_i\| = 1$, $\forall i \in I$. Si $\mathcal{U} \subset H$ es un sistema ortonormal y $x \in H$, los números $\{\langle x, u_i\rangle; i \in I\}$ son **los coeficientes de Fourier de $x$ relativos a $\mathcal{U}$**.

**Proposición 9.7.1.** *Sea $(H, \langle,\rangle)$ un eH, $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset H$ un sistema ortonormal y $M = [\mathcal{U}]$ el subespacio generado por $\mathcal{U}$. Entonces:*

*(1) Para todo $x \in H$ se tiene: (i) $x - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle u_i \perp M$; (ii) $P_M(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle u_i$; (iii) Para toda $n$-upla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ se verifica*

$$\|x - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle u_i\| \leq \|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i\|.$$

*(2) Si $x \in M$ entonces $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i$ y $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, u_i \rangle|^2$.*

*(3) Si $x \in H$ entonces $\sum_{i=1}^{n} |\langle x, u_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ y la igualdad vale sii $x \in M$.*

*(4) Los vectores $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ son linealmente independientes.*

*Demostración.* (1) (i) Como $\langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i, u_j \rangle = \langle x, u_j \rangle - \langle x, u_j \rangle = 0$, $j = 1, 2 \ldots, n$, se tiene que $x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i \perp M$.

(ii) De la Prop. 9.3.2 sale que $P_M(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i$.

(iii) es consecuencia de que $P_M(x)$ es el punto de $M$ más próximo a $x$.

(2) Si $x \in M$ entonces $x = P_M(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i$ y por el T. de pitágoras obtenemos que $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, u_i \rangle|^2$.

(3) Sean $x \in H$ y $u = x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i$, que verifica $u \perp M$. De aquí que $u \perp \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i$ porque $\sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i \in M$. Por el T. de Pitágoras y ya que $x = u + \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i$ obtenemos:

$$\|x\|^2 = \|u\|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\langle x, u_i \rangle|^2. \tag{9.9}$$

En consecuencia $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |\langle x, u_i \rangle|^2$.

Si $x \in M$, entonces vale la igualdad en la expresión anterior por (2). Supongamos que $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, u_i \rangle|^2$. Entonces $u = 0$ por (9.9), lo que implica que $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i \in M$.

(4) Supongamos que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i = 0$ para ciertos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Por el T. de Pitágoras obtenemos que $0 = \|0\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$, de donde necesariamente $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Por tanto los vectores $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ son linealmente independientes. ■

**Corolario 9.7.2** (Desigualdad de Bessel)**.** *Sean $(H, \langle , \rangle)$ un eH y $\{u_i : i \in I\} \subset H$ un sistema ortonormal en $H$. Entonces para todo $x \in H$ se verifica:*

$$\sum_{i \in I} |\langle x, u_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (\textit{Desigualdad de Bessel}).$$

*Demostración.* Por la Prop. 9.7.1 para toda familia finita $J \subset I$ se verifica que $\sum_{j \in J} |\langle x, u_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2$. Esto implica que la familia $\{|\langle x, u_i \rangle|^2 : i \in I\}$ es sumable y que $\sum_{i \in I} |\langle x, u_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2$. ■

**Proposición 9.7.3.** *Sean $(H, \langle , \rangle)$ un eH y $\{u_i : i \in I\} \subset H$ un sistema ortonormal en $H$. Entonces:*

*(1) Sea $\{\lambda_i : i \in I\} \subset \mathbb{K}$. Se tiene que la familia $\{\lambda_i \cdot u_i : i \in I\}$ es sumable sii $\sum_{i \in I} |\lambda_i|^2 < \infty$. En caso de que $\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot u_i = x_0 \in H$, se verifica que $\lambda_i = \langle x_0, u_i \rangle$, $\forall i \in I$.*

*(2) Si $x_0 \in H$, la familia $\{\langle x_0, u_i\rangle u_i : i \in I\}$ es siempre sumable, aunque no necesariamente a $x_0$.*

*Demostración.* (1) Si $K \subset I$ es un subconjunto finito, denotamos $s_K = \sum_{i\in K} \lambda_i \cdot u_i$. Por el T. de Pitágoras $\|s_K\|^2 = \sum_{i\in K} |\lambda_i|^2$. Supongamos que $\sum_{i\in I} |\lambda_i|^2 < \infty$. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe un subconjunto finito $J_\epsilon \subset I$ tal que todo subconjunto finito $K \subset I\backslash J_\epsilon$ verifica $\sum_{i\in K} |\lambda_i|^2 < \epsilon^2$, de donde $\|s_K\| < \epsilon$. Aplicando el Criterio de Cauchy (Prop. 9.6.1) obtenemos que la familia $\{\lambda_i \cdot u_i : i \in I\}$ es sumable a cierto $x_0 \in H$. Además por la Prop. 9.6.2 para cada $k \in I$ se verifica

$$\langle x, u_k\rangle = \sum_{i\in I} \langle \lambda_i \cdot u_i, u_k\rangle = \lambda_k.$$

Y viceversa, si suponemos que $\sum_{i\in I} \lambda_i \cdot u_i = x_0 \in H$, de la Des. de Bessel sale que $\sum_{i\in I} |\langle x_0, u_i\rangle|^2 \le \|x_0\|^2$. Como $\langle x_0, u_i\rangle = \lambda_i$, finalmente obtenemos que $\sum_{i\in I} |\lambda_i|^2 \le \|x_0\|^2 < \infty$.

(2) Si $x \in H$ y $\lambda_i = \langle x, u_i\rangle$, por la Desigualdad de Bessel se tiene que $\sum_{i\in I} |\lambda_i|^2 \le \|x\|^2 < \infty$. Luego la familia $\{\langle x, u_i\rangle : i \in I\}$ es sumable por (1). ∎

Si $(H, \langle,\rangle)$ es un eH y $\mathcal{U} = \{u_i : i \in I\} \subset H$ un sistema ortonormal, decimos que $\mathcal{U}$ es **maximal ó completo** si no es subconjunto propio de ningún otro sistema ortonormal de $H$.

**Proposición 9.7.4.** *Sean $(H, \langle,\rangle)$ un eH y $\mathcal{U} = \{u_i : i \in I\} \subset H$ un sistema ortonormal en $H$. Son equivalentes:*

*(1) $\mathcal{U}$ es maximal.*

*(2) $\mathcal{U}^\perp = \{0\}$.*

*(3) $\overline{[\mathcal{U}]} = H$.*

*(4) $\forall x \in H,\ x = \sum_{i\in I} \langle x, u_i\rangle u_i$.*

*(5) $\forall x \in H,\ \|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, u_i\rangle|^2$ (Identidad de Parseval).*

*Demostración.* (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $\mathcal{U}$ maximal. Si existe $x \in \mathcal{U}^\perp$ tal que $x \neq 0$, entonces $\mathcal{U} \cup \{u/\|u\|\}$ sería un sistema ortonormal estrictamente mayor que $\mathcal{U}$, lo que contradice (1).

(2) $\Leftrightarrow$ (3). Se tiene que $\mathcal{U}^\perp = \{0\}$ sii $H = \{0\}^\perp = \mathcal{U}^{\perp\perp} = \overline{[\mathcal{U}]}^{\perp\perp} = \overline{[\mathcal{U}]}$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Por la Prop. 9.7.3 la familia $\{\langle x, u_i\rangle : i \in I\}$ es sumable. Por la Prop. 9.6.2 para cada $u_k \in \mathcal{U}$ se verifica:

$$\langle x - \sum_{i\in I} \langle x, u_i\rangle u_i, u_k\rangle = \langle x, u_k\rangle - \langle x, u_k\rangle = 0.$$

Esto quiere decir que $x - \sum_{i\in I} \langle x, u_i\rangle u_i \in \mathcal{U}^\perp$, por lo que $x - \sum_{i\in I} \langle x, u_i\rangle u_i \in H^\perp = \{0\}$ pues $\mathcal{U}^\perp = \overline{[\mathcal{U}]}^\perp = H^\perp$. Por tanto $x = \sum_{i\in I} \langle x, u_i\rangle u_i$.

(4) $\Rightarrow$ (5). Si $\lambda_i = \langle x, u_i \rangle$, aplicando la Prop. 9.6.2 obtenemos

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle \sum_{i \in I} \lambda_i u_i, x \rangle = \sum_{i \in I} \lambda_i \langle u_i, x \rangle = \sum_{i \in I} |\lambda_i|^2.$$

(5) $\Rightarrow$ (1). Si $\mathcal{U}$ no fuera maximal, existiría $u \in H$ tal que $\mathcal{U} \cup \{u\}$ sería un sistema ortonormal que contiene estrictamente a $\mathcal{U}$. En particular $u \perp u_i$, $\forall i \in I$, de donde por (5) obtenemos $\|u\|^2 = 0$, es decir, $u = 0$. Esto contradice que debe ser $\|u\| = 1$. Por tanto $\mathcal{U}$ es maximal. ∎

**Definición 9.7.5.** *Si $(H, \langle , \rangle)$ es un eH, un sistema ortonormal maximal de $H$ recibe el nombre de* **base de $H$.**

**NOTA.** Si $(H, \langle , \rangle)$ es un eH y $\mathcal{B} := \{u_i : i \in I\}$ es base de $H$, por la Prop. 9.7.4 todo vector $x \in H$ admite la expresión $x = \sum_{i \in I} \langle x, u_i \rangle u_i$.

**Proposición 9.7.6** (Teorema de la base)**.** *Sea $(H, \langle , \rangle)$ un eH. Entonces:*

*(1) Todo sistema ortonormal de $H$ está contenido en un sistema ortonormal maximal de $H$.*

*(2) $H$ tiene al menos una base.*

*Demostración.* (1) Sea $\mathcal{U}$ una familia ortonormal de $H$ y sea $\mathcal{P}$ la clase de los sistemas ortonormales de $H$ que contienen a $\mathcal{U}$. Ordenamos $\mathcal{P}$ por inclusión, que es un orden parcial. Por el Ppio. maximal de Hausdorff existe una cadena maximal $\Omega$ en $\mathcal{P}$. Sea $\tilde{\mathcal{U}}$ la unión de las familias ortonormales que están presentes en $\Omega$. Es inmediato que $\tilde{\mathcal{U}}$ es un sistema ortonormal maximal que contiene a $\mathcal{U}$.

(2) Partimos de un sistema ortonormal $\mathcal{U} \neq \emptyset$, vg., $\mathcal{U} = \{u\}$ siendo $\|u\| = 1$. Por (1) existe un sistema ortonormal maximal $\tilde{\mathcal{U}}$ que contiene a $\mathcal{U}$. Es claro que $\tilde{\mathcal{U}}$ es base de $H$. ∎

Si $I$ es un conjunto, sea $\ell_2(I)$ la familia de los elementos $x = (x(i))_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ tal que la familia $\{|x(i)|^2 : i \in I\}$ es sumable, es decir, $\sum_{i \in I} |x(i)|^2 < \infty$. Es inmediato que $(\ell_2(I), +, \cdot, \| \cdot \|_2)$ es un eB, siendo $\|x\|_2 = (\sum_{i \in I} |x(i)|^2)^{1/2}$. En $\ell_2(I)$ definimos el producto escalar $\langle , \rangle$ del siguiente modo:

$$\forall x, y \in \ell_2(I), \langle x, y \rangle := \sum_{i \in I} x(i) \cdot \overline{y(i)}.$$

Es inmediato que la norma $\| \cdot \|_2$ procede de este producto escalar $\langle , \rangle$. Por tanto $(\ell_2(I), \langle , \rangle)$ es un eH. Además la familia de los vectores unitarios $\{u_i : \; i \in I\}$ de $\ell_2(I)$ es una base de $\ell_2(I)$.

**Proposición 9.7.7** (Teorema de Fischer-Riesz)**.** *Sean* $(H, \langle , \rangle)$ *un eH y* $\mathcal{B} := \{u_i : i \in I\}$ *una base de* $H$*. Entonces la aplicación* $H \ni x \xrightarrow{T} \{\langle x, u_i \rangle : i \in I\} \in \ell_2(I)$ *es un isomorfismo isométrico.*

*Demostración.* Por la identidad de Parseval $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, u_i \rangle|^2$, $\forall x \in H$, lo que implica que $T(x) \in \ell_2(I)$ y que $T$ es una isometría. Además $T$ es trivialmente lineal. Veamos que $T$ es sobreyectiva. Sea $\{\lambda_i : i \in I\} \in \ell_2(I)$. Entonces $\sum_{i \in I} |\lambda_i|^2 < \infty$, por lo que $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = x_0 \in H$ y $\lambda_i = \langle x_0, u_i \rangle$ por la Prop. 9.7.3. En consecuencia $T(x_0) = \{\lambda_i : i \in I\}$ y $T$ es sobreyectiva. ■

# Capítulo 10

# Teoría espectral. Operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert

## 10.1. Introducción

Si $X, Y$ son eB, denotamos por $\mathcal{B}(X,Y)$ (ó $\mathcal{L}(X,Y)$) al espacio de los operadores ó aplicaciones lineales continuas $T : X \to Y$ con la norma $\|T\| := \sup\{\|Tx\| : x \in B(X)\}$. El espacio $\mathcal{B}(X,X)$ lo denotamos por $\mathcal{B}(X)$. En $\mathcal{B}(X)$ se puede definir de modo natural una multiplicación de operadores: la composición "$\circ$" de operadores. Es decir, si $S, T \in \mathcal{B}(X), ST = S \circ T$. Si $S, T, U \in \mathcal{B}(X)$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, esta multiplicación tiene claramente las siguientes propiedades:

(i) Es asociativa, es decir, $S(TU) = (ST)U$.

(ii) $S(\lambda T + \mu U) = \lambda ST + \mu SU$, es decir, la multiplicación es distributiva respecto de la suma.

(iii) En general $ST \neq TS$, es decir, no es conmutativa. Si $ST = TS$, decimos que los operadores $S, T$ conmutan entre sí.

(iv) El operador identidad $I$, que se define como $Ix = x$, $\forall x \in X$, es el elemento neutro a dcha. e izda. de esta multiplicación. Observemos que $\|I\| = 1$.

(v) $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$. En efecto:

$$\|ST\| = \sup\{\|STx\| : x \in B(X)\} \leq \sup\{\|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\| : x \in B(X)\} = \|S\| \cdot \|T\|.$$

(vi) En consecuencia $(X, +, \cdot, \circ, \|\cdot\|)$ es un álgebra de Banach unitaria no conmutativa.

## 10.2. El inverso de un operador

Si $X$ es un eB y $T \in \mathcal{B}(X)$, decimos que $T$ es **invertible** sii existe $S \in \mathcal{B}(X)$ tal que $ST = I = TS$. El operador $S$, caso de existir, es único, se denomina **el inverso de** $T$ y se denota por $T^{-1}$.

**Proposición 10.2.1.** *Sean $X$ es un eB y $T \in \mathcal{B}(X)$. Son equivalentes:*

*(1) $T$ es invertible.*

*(2) $T$ es una biyección.*

*(3) $T$ es un isomorfismo topológico de $X$ sobre si mismo.*

*(4) $T$ es sobreyectiva y existe $c > 0$ tal que $\|Tx\| \geq c\|x|$, $\forall x \in X$.*

*Demostración.* (1) $\Rightarrow$ (2). Es claro que la existencia de $S \in \mathcal{B}(X)$ tal que $ST = I = TS$ implica que $T$ es una biyección de $X$ sobre sí mismo.

(2) $\Rightarrow$ (3). $T$ es un isomorfismo topológico por el Cor. 8.3.2.

(3) $\Rightarrow$ (4). Si $T$ es un isomorfismo de $X$, $T$ es sin duda sobreyectivo y el isomorfismo inverso $S$ es también continuo. Por tanto existe $0 < K < \infty$ tal que $\|Sy\| \leq K\|y\|$. Sustituyendo $y$ por $Tx$ obtenemos

$$\|x\| = \|ST(x)\| \leq K\|Tx\| \;\Rightarrow\; \tfrac{1}{K}\|x\| \leq \|Tx\|.$$

Ahora basta hacer $c := 1/K$.

(4) $\Rightarrow$ (1). En primer término, de (4) sale que por cada $y \in X$ existe un y sólo un elemento $x_y \in X$ tal que $Tx = y$. Definimos $S(y) = x_y$. Es inmediato que $S$ es lineal y que $\|Sy\| \leq c\|y\|$, es decir, $S \in \mathcal{B}(X)$. Además $TS = I = ST$. Por tanto, $T$ tiene inverso que es $T^{-1} = S$. ∎

**Proposición 10.2.2.** *Sean $X$ un eB y $S, T \in \mathcal{B}(X)$. Entonces:*

*(1) Si $T$ es invertible, también lo es $T^{-1}$ y $(T^{-1})^{-1} = T$.*

*(2) Si $T$ es invertible y $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\alpha T$ también es invertible y $(\alpha T)^{-1} = T^{-1}/\alpha$.*

*(3) Si $S, T$ son invertibles, también lo es $ST$ y $(ST)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$.*

*(4) Si $T$ es invertible y $S$ conmuta con $T$, $S$ conmuta con $T^{-1}$.*

*Demostración.* Las demostraciones son inmediatas. ∎

Sean $X$ un eB y $T \in \mathcal{B}(X)$. Convenimos que $T^0 = I$ (incluso si $T = 0$) y denotamos por $\mathcal{I}nv(X)$ a la familia de los operadores invertibles de $\mathcal{B}(X)$. Es claro que $(\mathcal{I}nv(X), \circ)$ es un grupo no abeliano.

**Proposición 10.2.3.** *Sea $X$ un eB. Se verifica:*

*(1) Si $T_0 \in \mathcal{I}nv(X)$ y $T \in \mathcal{B}(X)$ son tales que $\|T - T_0\| < \|T_0^{-1}\|^{-1}$, entonces $T \in \mathcal{I}nv(X)$ y*

$$T^{-1} = \sum_{n\geq 0} (I - T_0^{-1} \circ T)^n \circ T_0^{-1} = \sum_{n \geq 0} T_0^{-1} \circ (I - T \circ T_0^{-1})^n. \tag{10.1}$$

*(2) $\mathcal{I}nv(X)$ es un abierto de $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|)$, $I \in \mathcal{I}nv(X)$ y la aplicación $\mathcal{I}nv(X) \ni T \to T^{-1} \in \mathcal{I}nv(X)$ es continua.*

*Demostración.* (1) Puesto que

$$\|I - T_0^{-1} \circ T\| = \|T_0^{-1}(T_0 - T)\| \leq \|T_0^{-1}\| \cdot \|T_0 - T\| < 1$$

y

$$\|I - T \circ T_0^{-1}\| = \|(T_0 - T)T_0^{-1}\| \leq \|T_0^{-1}\| \cdot \|T_0 - T\| < 1,$$

concluimos que las dos series de (10.1) convergen absolutamente. Por inducción se puede ver que $(I - T_0^{-1} \circ T)^n \circ T_0^{-1} = T_0^{-1} \circ (I - T \circ T_0^{-1})^n$, $\forall n \geq 1$, de donde las dos expresiones de (10.1) son la misma cosa, digamos el operador $S \in \mathcal{B}(X)$. Veamos que $S = T^{-1}$. En efecto:

$$ST = ST_0 \circ ((T_0^{-1}T - I) + I) = -\sum_{n\geq 0}(I - T_0^{-1} \circ T)^{n+1} + \sum_{n\geq 0}(I - T_0^{-1} \circ T)^n = I;$$

$$TS = ((T \circ T_0^{-1} - I) + I) \circ T_0 \circ S = -\sum_{n\geq 0}(I - T \circ T_0^{-1})^{n+1} + \sum_{n\geq 0}(I - T \circ T_0^{-1})^n = I.$$

(2) Que $Inv(X)$ es abierto en $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|)$ sale de (1). Claramente $I \in Inv(X)$. Además la aplicación $\mathcal{I}nv(X) \ni T \to T^{-1} \in \mathcal{I}nv(X)$ es continua porque, si $\|T - T_0\| < \frac{1}{2}\|T_0^{-1}\|^{-1}$, entonces $1 - \|I - T_0^{-1}T\| > 1/2$, por lo que

$$\|T^{-1} - T_0^{-1}\| = \|\sum_{n\geq 0}(I - T_0^{-1} \circ T)^n \circ T_0^{-1} - T_0^{-1}\| = \|\sum_{n\geq 1}(I - T_0^{-1} \circ T)^n \circ T_0^{-1}\| \leq \tag{10.2}$$

$$\leq \sum_{n\geq 1} \|T_0^{-1}\| \cdot \|I - T_0^{-1} \circ T\|^n = \frac{\|T_0^{-1}\| \cdot \|I - T_0^{-1}T\|}{1 - \|I - T_0^{-1}T\|} \leq 2\|T_0^{-1}\|^2 \cdot \|T_0 - T\|.$$

■

## 10.3. El espectro. Autovalores

**Definición 10.3.1.** *Sean $X$ eB y $T \in \mathcal{B}(X)$.*

*(1) El* **espectro** *de $T$ (abrev., $sp(T)$ ó $\sigma(T)$) se define como*

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - T \quad \textit{no es invertible}\}.$$

*(2) La* **resolvente** *de $T$ (abrev., $\rho(T)$) es $\rho(T) = \mathbb{K} \setminus \sigma(T)$.*

*(3) Los* **autovalores** *de $T$ (abrev., $ev(T)$) es el colectivo*

$$ev(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - T \quad \textit{no es inyectivo}\}.$$

**NOTA.** Si $X$ es un eB y $T \in \mathcal{B}(X)$, entonces:

$$\lambda \in \sigma(T) \iff \lambda I - T \text{ no es invertible } \iff \lambda I - T \text{ no es biyectivo } \iff$$
$$\iff \begin{cases} \text{ó } \lambda I - T \text{ no es inyectivo} \\ \text{ó } \lambda I - T \text{ no es sobreyectivo.} \end{cases}$$

Por tanto $ev(T) \subset \sigma(T)$ y, en general, el contenido es estricto. Sin embargo, si $dim(X) < \infty$, entonces $ev(T) = \sigma(T)$ porque en este caso $\lambda I - T$ no es inyectivo sii $\lambda I - T$ no es sobreyectivo.

**Proposición 10.3.2.** *(T. del radio espectral. 1ª Parte) Sean $X$ eB y $T \in \mathcal{B}(X)$. Entonces:*

*(1) Existe el límite* $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \inf_{n\geq 1} \|T^n\|^{1/n}$. *El* **radio espectral** *de $T$ (abrev., $r(T)$) se define como $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ y verifica $r(T) \leq \|T\|$.*

*(2) $\sigma(T)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{K}$ tal que $\sigma(T) \subset B_{\mathbb{K}}(0, r(T))$.*

*Demostración.* (1) Sea $\alpha := \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}$. Ciertamente $\alpha \leq \liminf_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$. Sean $\epsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $\|T^{n_0}\|^{1/n_0} \leq \alpha + \epsilon$. Todo $n \in \mathbb{N}$ se puede expresar como $n = n_0 \cdot p(n) + q(n)$ siendo $p(n), q(n) \in \mathbb{N}$ y $0 \leq q(n) < n_0$. De aquí que

$$\|T^n\| \leq \|T^{n_0}\|^{p(n)} \cdot \|T\|^{q(n)}.$$

Puesto que $q(n)/n \to 0$ y $p(n)/n \to 1/n_0$, obtenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \|T^{n_0}\|^{1/n_0} \leq \alpha + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario concluimos que $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \alpha$. Finalmente observemos que $\|T^n\|^{1/n} \leq \|T\|$, $\forall n \geq 1$, lo que implica que $r(T) \leq \|T\|$.

(2) La aplicación $\mathbb{K} \ni \lambda \xrightarrow{\Psi} \lambda I - T \in \mathcal{B}(X)$ es continua y, puesto que $Inv(X)$ es abierto en $\mathcal{B}(X)$, concluimos que $\rho(T) = \Psi^{-1}(Inv(X))$ es un abierto de $\mathbb{K}$, es decir, $\sigma(T)$ es cerrado en $\mathbb{K}$.

Veamos que $\sigma(T) \subset B_{\mathbb{K}}(0, r(T))$. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| > r(T)$. Claramente la serie $\sum_{n\geq 1} T^n \cdot \lambda^{-(n+1)}$ converge absolutamente en $\mathcal{B}(X)$, de donde

$$(\lambda I - T) \circ \left( \sum_{n\geq 0} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \right) = \left( \sum_{n\geq 0} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \right) \circ (\lambda I - T) = I,$$

es decir, $\lambda \in \rho(T)$. ■

**Proposición 10.3.3.** *Sean $X$ eB y $T \in \mathcal{B}(X)$. Por cada $\lambda \in \rho(T)$ definimos la resolvente $R(\lambda, T)$ de $T$ en $\lambda$ como $R(\lambda, T) := (\lambda I - T)^{-1}$. Entonces:*

*(a) Para todo $\lambda, \mu \in \rho(T)$ se tiene la llamada* **"ecuación resolvente"** *:*

$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda) \cdot R(\lambda, T) \circ R(\mu, T) = (\mu - \lambda) \cdot R(\mu, T) \circ R(\lambda, T).$$

*(b) La aplicación $\rho(T) \ni \lambda \xrightarrow{\varphi} R(\lambda, T) \in \mathcal{B}(X)$ es diferenciable y su diferencial es $D\varphi(\lambda) = -(R(\lambda, T))^2$.*

*Demostración.* (a) Se tiene que

$$(R(\lambda, T) - R(\mu, T))(\mu I - T)(\lambda I - T) = R(\lambda, T)(\lambda I - T) - R(\mu, T)(\mu I - T) = (\mu - \lambda)I.$$

De aquí que

$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda)I \circ R(\lambda, T) \circ R(\mu, T) = R(\lambda, T) \circ (\mu - \lambda)I \circ R(\mu, T) = \\ = (\mu - \lambda)I \circ R(\mu, T) \circ R(\lambda, T).$$

(b) Se tiene que

$$\frac{\varphi(\lambda + h) - \varphi(\lambda)}{h} = \frac{R(\lambda + h, T) - R(\lambda, T)}{h} = -R(\lambda, T) \circ R(\lambda + h, T).$$

Por continuidad, haciendo $h \to 0$, obtenemos $D\varphi(\lambda) = -(R(\lambda, T))^2$. ∎

**Proposición 10.3.4.** *(T. del radio espectral. 2ª Parte) Sean $E$ un eB sobre $\mathbb{C}$ y $T \in \mathcal{B}(E)$. Entonces $\sigma(T) \neq \emptyset$ y*

$$r(T) = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

*Demostración.* Sea $\rho := \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ ($\text{máx}\{\emptyset\} = 0$). Ya sabemos por la Prop. 10.3.2 que $\rho \leq r(T)$. Como la aplicación $\rho(T) \ni z \to R(z, T) \in \mathcal{B}(E)$ es continua, se puede definir, para $p \geq 0$ y $t > \rho$, el operador $J_p(t) \in \mathcal{B}(E)$ del siguiente modo:

$$J_p(t) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (te^{i\theta})^{p+1} \cdot R(te^{i\theta}, T) d\theta.$$

Observemos que:

(I) Si $|z| > r(T)$, entonces $R(z, T) = \sum_{n \geq 0} \frac{T^n}{z^{n+1}}$, serie que converge absolutamente en $\mathcal{B}(E)$. De aquí que para $t \in (r(T), \infty)$ la serie

$$R(te^{i\theta}, T) = \sum_{n \geq 0} \frac{T^n}{(te^{i\theta})^{n+1}}$$

converge absoluta y uniformemente para $\theta \in \mathbb{R}$ y, por tanto, $\forall p \geq 0$:

$$\int_0^{2\pi} (te^{i\theta})^{p+1} \cdot R(te^{i\theta}, T) \cdot d\theta = \sum_{n \geq 0} \int_0^{2\pi} (te^{i\theta})^{p-n} T^n d\theta = \tag{10.3}$$

$$= \sum_{n \geq 0} T^n \cdot \int_0^{2\pi} t^{p-n} \cdot e^{i\theta(p-n)} \cdot d\theta = 2\pi \cdot T^p.$$

En consecuencia, $J_p(t) = T^p$ para todo $t > r(T)$ y todo $p \geq 0$.

(II) Por otra parte, aprovechando que la aplicación $\rho(T) \ni z \to z^{p+1}R(z,T)$ es diferenciable por la Prop. 10.3.3, para $t > \rho,\ p \geq 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\frac{\partial}{\partial t}((te^{i\theta})^{p+1}R(te^{i\theta},T)) = e^{i\theta}\frac{d}{dz}(z^{p+1}R(z,T))\Big|_{z=te^{i\theta}},$$
$$\frac{\partial}{\partial \theta}((te^{i\theta})^{p+1}R(te^{i\theta},T)) = ite^{i\theta}\frac{d}{dz}(z^{p+1}R(z,T))\Big|_{z=te^{i\theta}},$$

es decir,

$$\frac{\partial}{\partial t}((te^{i\theta})^{p+1}R(te^{i\theta},T)) = \frac{1}{it}\frac{\partial}{\partial \theta}((te^{i\theta})^{p+1}R(te^{i\theta},T)).$$

En consecuencia, para $p \geq 0,\ t > \rho$ y $\theta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\frac{dJ_p}{dt}(t) = \frac{1}{2it\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta}((te^{i\theta})^{p+1}R(te^{i\theta},T)) \cdot d\theta = 0.$$

Por (I) esto implica que $J_p(t) = T^p$ para todo $p \geq 0$ y todo $t > \rho$. Sea

$$\forall t > \rho, \quad M_t := \max\{\|R(te^{i\theta},T)\| : \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Se verifica que

$$\forall t > \rho,\ \forall p \geq 0,\ \|T^p\| = \|J_p(t)\| \leq t^{p+1}M_t.$$

En consecuencia $r(T) \leq t$ y, por tanto, $r(T) \leq \rho$. Así que finalmente $\rho = r(T)$.

(III) Veamos que $\sigma(T) \neq \emptyset$. Razonando por reducción al absurdo, suponemos que $\sigma(T) = \emptyset$. Entonces:

(a) $\rho = 0$ y $J_0(t) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} te^{i\theta} \cdot R(te^{i\theta},T) \cdot d\theta$ está definido en $[0,\infty)$, siendo $J_0(0) = 0$ y $J_0(t) = I$ para $t \in (r(T),\infty)$.

(b) $J_0(t)$ es continua en $[0,\infty)$. En efecto, sabemos que es diferenciable en $(\rho,\infty) = (0,\infty)$ y que $J_0'(t) = 0,\ \forall t > 0$, por lo que $J_0(t) = I,\ \forall t > 0$. Además $J_0(t)$ es continua en $t = 0$ por el Aserto siguiente.

**Aserto.** Para $0 \leq t < \frac{1}{2}\|T^{-1}\|^{-1}$ se tiene que $\|J_0(t)\| \leq t\|T^{-1}\|(1 + 2\|T^{-1}\|t)$.

En efecto, se tiene que $\|(te^{i\theta}I - T) - (-T)\| = \|te^{i\theta}I\| = t$, de donde por (10.2) se verifica que

$$\|R(te^{i\theta},T) - (-T)^{-1}\| \leq 2\|T^{-1}\|^2 \cdot t \ \Rightarrow\ \|R(te^{i\theta},T)\| \leq \|T^{-1}\| + 2\|T^{-1}\|^2 \cdot t.$$

De aquí que:

$$\|J_0(t)\| \leq \tfrac{t}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|R(te^{i\theta},T)\| \cdot d\theta \leq t\|T^{-1}\|(1 + 2\|T^{-1}\|t).$$

Hemos llegado a una contradicción que prueba que $\sigma(T) \neq \emptyset$. ■

**NOTAS.** Sea $X$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$. Vamos a ver que la situación, en lo referente al espectro $\sigma(T)$ y al radio espectral $r(T)$ de $T \in \mathcal{B}(X)$, es muy diferente al caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(a) Sea $dim(X) = 2$. Salvo isomorfismo, podemos suponer que $X = \ell_1^{(2)}$. Sea $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que
$$T := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Es inmediato que $T$ es un isomorfismo isométrico de $X$. Afirmamos que $\sigma(T) = \emptyset$. En efecto, si $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda$ deberá ser raíz real de la ec.
$$0 = det[\lambda I - T] = \lambda^2 + 1,$$
lo que no puede ser. Observemos que $\|T^n\| = 1$, por lo que $r(T) = 1$.

(b) Sea $dim(X) = 2n,\ n \geq 1$. Sin pérdida de generalidad suponemos que $X = \ell_1^{(2n)}$. Sea $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que
$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & T_n \end{pmatrix} \quad \text{siendo } T_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ i = 1, \ldots, n.$$
Es claro que $T$ es un isomorfismo isométrico de $X$ por lo que $r(T) = 1$. Por otra parte, la ecuación
$$0 = det[\lambda I - T] = (\lambda^2 + 1)^n$$
carece de raíces reales. Así que $\sigma(T) = \emptyset$.

(c) Veamos que en todo espacio $X = \ell_1(J)$, $J$ infinito, existe un isomorfismo isométrico $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $r(T) = 1$ y $\sigma(T) = \emptyset$. En efecto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $J = \{i_1, i_2 : i \in I\}$. Definimos $T$ de modo que $T(e_{i_1}) = -e_{i_2}$ y $T(e_{i_2}) = e_{i_1},\ i \in I$, es decir
$$T \upharpoonright [\{e_{i_1}, e_{i_2}\}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ i \in I.$$

(d) Si $dim(X) = 2n + 1$, entonces $\sigma(T) \neq \emptyset,\ \forall T \in \mathcal{B}(X)$. En efecto, la ecuación
$$0 = det[\lambda I - T] = \lambda^{2n+1} + a_{2n}\lambda^{2n} + \cdots + a_0,$$
tiene siempre raíz real por ser de orden impar.

## 10.4. Operadores en espacios de Hilbert

**Proposición 10.4.1.** *Sean $(H, \langle , \rangle)$ un eH y $T \in \mathcal{B}(H)$. Entonces existe un único operador $T^\bullet \in \mathcal{B}(H)$, que denominamos* **el adjunto de Hilbert** *de $T$, tal que*
$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^\bullet y\rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

*Además, para $S, T \in \mathcal{B}(H)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, se tiene:*

*(1)* $T^{\bullet\bullet} = T$.

*(2)* $(\alpha S + \beta T)^{\bullet} = \overline{\alpha} S^{\bullet} + \overline{\beta} T^{\bullet}$.

*(3)* $I^{\bullet} = I$.

*(4)* $(ST)^{\bullet} = T^{\bullet} \circ S^{\bullet}$.

*(5)* $\|T^{\bullet}\| = \|T\|$.

*Demostración.* Por la Des. de Cauchy-Schwartz se verifica que $|\langle Tx, y\rangle| \leq \|T\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$. Así que, fijado $y \in H$, la aplicación $\Lambda : H \ni x \to \langle Tx, y\rangle$ es lineal y continua con norma $\|\Lambda\| \leq \|T\| \cdot \|y\|$. Por el T. de Fischer-Riesz (ver la Prop. 9.7.7) existe un único elemento en $H$, que denotamos $T^{\bullet} y$, tal que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^{\bullet} y\rangle \quad \text{y} \quad \|T^{\bullet} y\| = \|\Lambda\| \leq \|T\| \cdot \|y\|.$$

Además $T^{\bullet}$ es lineal pues para todo $x, y, z \in H$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, se verifica

$$\begin{aligned} \langle x, T^{\bullet}(\alpha y + \beta z)\rangle &= \langle Tx, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle Tx, y\rangle + \overline{\beta}\langle Tx, z\rangle = \\ &= \overline{\alpha}\langle x, T^{\bullet} y\rangle + \overline{\beta}\langle x, T^{\bullet} z\rangle = \langle x, \alpha T^{\bullet} y + \beta T^{\bullet} z\rangle. \end{aligned}$$

Como $\|T^{\bullet} y\| \leq \|T\| \cdot \|y\|$, resulta $T^{\bullet}$ es acotado con $\|T^{\bullet}\| \leq \|T\|$. La unicidad de $T^{\bullet}$ es obvia por construcción.

(1) $T^{\bullet\bullet} = T$ porque

$$\langle x, T^{\bullet\bullet} y\rangle = \langle T^{\bullet} x, y\rangle = \overline{\langle y, T^{\bullet} x\rangle} = \overline{\langle Ty, x\rangle} = \langle x, Ty\rangle.$$

(2) Se tiene que $(\alpha S + \beta T)^{\bullet} = \overline{\alpha} S^{\bullet} + \overline{\beta} T^{\bullet}$ porque

$$\begin{aligned} \langle x, (\alpha S + \beta T)^{\bullet} y\rangle &= \langle (\alpha S + \beta T)x, y\rangle = \alpha\langle Sx, y\rangle + \beta\langle Tx, y\rangle = \\ &= \langle x, \overline{\alpha} S^{\bullet} y\rangle + \langle x, \overline{\beta} T^{\bullet} y\rangle = \langle x, (\overline{\alpha} S^{\bullet} + \overline{\beta} T^{\bullet}) y\rangle. \end{aligned}$$

(3) es evidente.

(4) $(ST)^{\bullet} = T^{\bullet} \circ S^{\bullet}$ porque

$$\langle x, (ST)^{\bullet} y\rangle = \langle (ST(x), y\rangle = \langle Tx, S^{\bullet} y\rangle = \langle x, T^{\bullet} \circ S^{\bullet} y\rangle.$$

(5) Sabemos que $\|T^{\bullet}\| \leq \|T\|$. Por otra parte, ya que $T^{\bullet\bullet} = T$, resulta $\|T\| = \|T^{\bullet\bullet}\| \leq \|T^{\bullet}\|$. Así que $\|T\| = \|T^{\bullet}\|$. ■

**Proposición 10.4.2.** *Sean $(H, \langle,\rangle)$ un eH y $T \in \mathcal{B}(H)$. Entonces:*

*(0)* $T \in Inv(H) \Leftrightarrow T^{\bullet} \in Inv(H)$ *y, de ser $T$ invertible, se verifica* $(T^{\bullet})^{-1} = (T^{-1})^{\bullet}$.

*(1)* $\sigma(T^{\bullet}) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$.

*(2)* $\rho(T^{\bullet}) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \rho(T)\}$ *y* $, \forall \lambda \in \rho(T^{\bullet}),\ R(\lambda, T^{\bullet}) = R(\overline{\lambda}, T)^{\bullet}$.

*(3)* $ker(T) = (T^{\bullet}(H))^{\perp}$ *y* $\overline{T(H)} = (ker(T^{\bullet}))^{\perp}$.

*Demostración.* (0) es consecuencia de las siguientes implicaciones:

$$T \circ T^{-1} = I = T^{-1} \circ T \Leftrightarrow (T^{-1})^{\bullet} \circ T^{\bullet} = I^{\bullet} = I = T^{\bullet} \circ (T^{-1})^{\bullet}.$$

(1) $z \in \sigma(T) \Leftrightarrow T - zI \notin Inv(H) \;\Leftrightarrow\; T^{\bullet} - \overline{z}I \notin Inv(H) \Leftrightarrow \overline{z} \in \sigma(T^{\bullet})$.

(2) En primer término

$$z \in \rho(T) \Leftrightarrow T - zI \in Inv(H) \;\Leftrightarrow\; T^{\bullet} - \overline{z}I \in Inv(H) \Leftrightarrow \overline{z} \in \rho(T^{\bullet}).$$

Además

$$R(\overline{z}, T^{\bullet}) = (T^{\bullet} - \overline{z}I)^{-1} \overset{(0)}{=} ((T - zI)^{\bullet})^{-1} = ((T - zI)^{-1})^{\bullet} = R(z, T)^{\bullet}.$$

(3) En primer término:

$$x \in ker(T) \Leftrightarrow \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^{\bullet}y\rangle, \forall y \in H \Leftrightarrow x \in (Im(T^{\bullet}))^{\perp}.$$

Además:

$$\overline{T(H)} = (T^{\bullet\bullet}(H))^{\perp\perp} = (ker(T^{\bullet}))^{\perp}.$$

■

## 10.5. Operadores autoadjuntos

**Definición 10.5.1.** *Sea $(H, \langle , \rangle)$ un eH. Un operador $T \in \mathcal{B}(H)$ se dice* **autoadjunto ó hermitiano** *sii $T = T^{\bullet}$.*

**Proposición 10.5.2.** *Sea $(H, \langle , \rangle)$ un eH y $T \in \mathcal{B}(H)$ un operador.*

*(1) Si $T$ es autoadjunto, entonces $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$, $\forall x \in H$, y $r(T) = \|T\|$.*

*(2) Para todo $T \in \mathcal{B}(H)$ se verifica que*

$$\|T\| = \sqrt{r(T \circ T^{\bullet})} = \sqrt{r(T^{\bullet} \circ T)}.$$

*Demostración.* (1) En primer término

$$\forall x \in H, \quad \langle Tx, x\rangle = \langle x, T^{\bullet}x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle},$$

de donde $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$.

Por otra parte se verifica el siguiente Aserto.

**Aserto.** Para todo operador $S \in \mathcal{B}(X)$ se verifica $\|S^{\bullet} \circ S\| = \|S\|^2 = \|S \circ S^{\bullet}\|$.

En efecto, claramente $\|S^{\bullet} \circ S\| \leq \|S\|^2$. Por otra parte:

$$\forall x \in H,\ \|Sx\|^2 = \langle Sx, Sx\rangle = \langle x, S^{\bullet} \circ Sx\rangle \leq \|x\|^2 \circ \|S^{\bullet} \circ S\| \;\Rightarrow\; \|S\|^2 \leq \|S^{\bullet} \circ S\|.$$

Por tanto $\|S^\bullet \circ S\| = \|S\|^2$. La otra igualdad es análoga.

En consecuencia, todo operador autoadjunto $T \in \mathcal{B}(H)$ verifica $\|T^2\| = \|T\|^2$. Por iteración, ya que $T^{2^n}$ es también autoadjunto para todo $n \geq 1$, obtenemos que

$$\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}, \ \forall n \geq 1.$$

De aquí que $r(T) = \text{lím}_{n\to\infty} \|T^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|T\|$.

(2) En primer término $S = T^\bullet \circ T = T \circ T^\bullet$ es autoadjunto. Ahora basta aplicar (1) y el Aserto anterior. ■

**Proposición 10.5.3.** *Sean $(H, \langle , \rangle)$ un eH y $T \in \mathcal{B}(H)$ un operador autoadjunto. Definimos*

$$m := \text{ínf}\{\langle Tx, x\rangle : x \in S(H)\} \text{ y } M := \sup\{\langle Tx, x\rangle : x \in S(H)\}.$$

*Entonces*

*(1) $\sigma(T) \subset [m, M]$ y $m, M \in \sigma(T)$; (2) $\|T\| = r(T) = \sup\{|m|, |M|\}$.*

*Demostración.* (1) En primer término las definiciones de $m$ y $M$ tienen sentido porque $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$.

(11) Probemos que $\sigma(T) \subset [m, M]$. Sean $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [m, M]$ y $x \in H \setminus \{0\}$. Denotemos

$$d(\lambda) := \text{ínf}\{|\lambda - t| : t \in [m, M]\},$$

que verifica claramente $d(\lambda) > 0$. Entonces

$$\|\lambda x - Tx\| \cdot \|x\| \geq |\langle \lambda x - Tx, x\rangle| = |(\lambda - \langle T(\frac{x}{\|x\|}), \frac{x}{\|x\|}\rangle| \cdot \|x\|^2 \geq d(\lambda) \cdot \|x\|^2, \quad (10.4)$$

de donde sale que $\lambda I - T$ es inyectivo.

**Aserto.** $Im(\lambda I - T)$ es cerrado.

En efecto, sea $(\lambda x_n - Tx_n)_n \subset Im(\lambda I - T)$ una sucesión tal que $\lambda x_n - Tx_{\to} y_0 \in H$. Por (10.4) la sucesión $(x_n)_n$ es de Cauchy y, por tanto, $x_n \to x_0$ y $\lambda x_0 - Tx_0 = y_0$ lo que prueba el Aserto. Por la Prop. 10.5.2 se tiene que $Im(\lambda I - T) = (ker(\overline{\lambda} I - T))^\perp$. Puesto que $\overline{\lambda} \notin [m, M]$, resulta ser $\overline{\lambda} I - T$ inyectivo y $H = (ker(\overline{\lambda} I - T))^\perp = Im(\lambda I - T)$. En consecuencia $\lambda I - T$ es un operador biyectivo en $H$, es decir, $\lambda \in \rho(H)$. Por tanto $\sigma(T) \subset [m, M]$.

(12) Para ver que $m, M \in \sigma(T)$, bastará probar que $m \in \sigma(T)$ pues la inclusión $M \in \sigma(T)$ sale de la anterior considerando $-T$ en lugar de $T$. Sea $S := T - mI, m \in \mathbb{N}$, que es un operador autoadjunto positivo. La aplicación $H^2 \ni (x, y) \to \langle Sx, y\rangle =: \prec x, y \succ$ es un **semi-producto escalar**. Por la Des. de Cauchy-Schwarz obtenemos que

$$\forall x, y \in H, \quad |\langle Sx, y\rangle|^2 = | \prec x, y \succ |^2 \leq \prec x, x \succ \cdot \prec y, y \succ = \langle Sx, x\rangle \cdot \langle Sy, y\rangle. \quad (10.5)$$

De la definición de $m$ tenemos que

$$\exists (x_n)_n \subset S(H) \text{ tal que } \langle Sx_n, x_n\rangle \to 0.$$

Por (10.5) se verifica que

$$\|Sx_n\|^2 = \langle Sx_n, Sx_n\rangle \leq \langle Sx_n, x_n\rangle^{1/2} \cdot \langle S^2x_n, Sx_n\rangle^{1/2} \leq \langle Sx_n, x_n\rangle^{1/2} \cdot \|S\|^{1/2} \cdot \|Sx_n\|.$$

De aquí que

$$\|Sx_n\| \leq \|S\|^{1/2} \cdot \langle Sx_n, x_n\rangle^{1/2} \to 0.$$

En consecuencia $S$ no es invertible pues, de serlo, existiría $\epsilon > 0$ tal que $\|Sx\| \geq \epsilon\|x\| = \epsilon > 0$, $\forall x \in S(H)$, lo que no ocurre. Por tanto $m \in \sigma(T)$.

(2) es consecuencia de (1) y de la Prop. 10.3.4. ■

**Proposición 10.5.4.** *Sean $(H, \langle , \rangle)$ un eH, $T \in \mathcal{B}(H)$ un operador autoadjunto, $\lambda, \mu \in ev(T)$ con $\lambda \neq \mu$ y $E_\lambda, E_\mu$ los autoespacios correspondientes. Entonces $E_\lambda \perp E_\mu$.*

*Demostración.* Sean $x \in E_\lambda, y \in E_\mu$. Entonces

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \langle x, \mu y\rangle = \mu\langle x, y\rangle.$$

De aquí que, si $\lambda \neq \mu$, debe ser $\langle x, y\rangle = 0$. ■

## 10.6. Operadores compactos

Si $X, Y$ son eB, un operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ se dice **compacto** sii $T(B(X))$ es relativamente compacto en $Y$. Adoptamos la siguiente notación:

(a) $\mathcal{K}(X, Y) := \{T \in \mathcal{B}(X, Y) : T \text{ compacto}\}$.

(b) $\mathcal{K}(X) := \mathcal{K}(X, X)$.

**Proposición 10.6.1.** *Sean $E, F, G$ eB.*

*(1) La composición de un operador compacto con otro (por cualquier lado) es también compacto.*

*(2) $\mathcal{K}(E, F)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(E, F)$. En particular el límite de operadores de rango finito es compacto.*

*(3) $\mathcal{K}(E)$ es un ideal bi-látero de $\mathcal{B}(E)$.*

*Demostración.* (1) Sean $E \overset{T}{\to} F \overset{S}{\to} G$ operadores lineales tales que $T$ es compacto. Entonces

$$S \circ T(B(E)) \subset S(\overline{T(B(E))}) \in \mathcal{K}_G \text{ pues } \overline{T(B(E))} \in \mathcal{K}_F.$$

Análogamente para la composición por el otro lado.

(2) Sea $(T_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{K}(E,F)$ de modo que $T_n \to T_0$ en $(\mathcal{B}(E,F), \|\cdot\|)$. Veamos que $T_0$ es compacto. Bastará ver que $T_0(B(E))$ es precompacto, lo que es obvio pues ,$\forall \epsilon > 0$, $\exists p \in \mathbb{N}$ tal que $T_0(B(E)) \subset T_p(B(E)) + \epsilon \cdot B(F)$.

(3) es consecuencia de (1). ■

**Proposición 10.6.2.** *Sean $E$ un eB y $T \in \mathcal{K}(E)$. Entonces:*

*(1) Si $Im(T)$ es cerrado, la dimensión $dim(Im(T)) < \infty$.*

*(2) $\forall \lambda \neq 0$, $dim(ker(\lambda I - T)) < \infty$.*

*(3) $Im(I - T)$ es cerrado.*

*(4) $I - T \in \mathcal{F}(E)$ sii $I - T$ es inyectivo.*

*(5) Si $dim(E)$ es infinita, se tiene que $0 \in \sigma(T)$.*

*Demostración.* (1) Por hipótesis $T(E)$ es un subespacio de Banach de $E$ tal que $T(E) = \cup_{n\geq 1} n \cdot \overline{T(B(E))}$, siendo $\overline{T(B(E))}$ un convexo simétrico compacto. Por el Cor. 8.1.3 $\overline{T(B(E))}$ es un entorno compacto de 0 en $T(E)$, de donde por el T. de Riesz (Prop. 6.14.3) deducimos que $dimT(E)$ es finita.

(2) Sea $F := ker(I - T)$ que es un subespacio cerrado de $E$ de dimensión finita. Se tiene que
$$B(F) = T(B(F)) \subset \overline{T(B(E))} \cap F \in \mathcal{K}_E,$$
de donde sale que $dim(F)$ es finita por el T. de Riesz (Prop. 6.14.3).

(3) Sean $y \in \overline{Im(I - T)}$ y $(x_n)_n \subset E$ tales que $x_n - Tx_n \to y$. Distinguimos dos casos, a saber:

**Caso 1.** $(x_n)_n$ (ó una subsucesión) es acotada.

Puesto que $T$ es compacto, podemos suponer (pasando a una subsucesión si es preciso) que $Tx_n \to z \in E$, es decir, $x_n \to z + y$. Por la continuidad de $T$ sale
$$z = T(y + z) \;\Rightarrow\; y = y + z - z = y + z - T(y + z).$$
En consecuencia $y \in Im(I - T)$ y, por tanto, $Im(I - T)$ es cerrado.

**Caso 2.** $\|x_n\| \to \infty$. Sea $d_n := dist(x_n, ker(I - T))$, $n \geq 1$. Puesto que $ker(I - T)$ es finito-dimensional, existe $z_n \in ker(I - T)$ tal que $d_n = \|x_n - z_n\|$. Ahora nos encontramos dos posibilidades:

(31) Supongamos que $(d_n)_n$ (ó una subsucesión) está acotada. En tal caso, en lugar de $x_n$ ponemos $x_n - z_n$, que verifica
$$(x_n - z_n) - T(x_n - z_n) = x_n - Tx_n \to y,$$
y aplicamos el Caso 1.

(32) Supongamos que $d_n \to \infty$. Puesto que $((x_n - z_n)/d_n)_n$ es una sucesión acotada, podemos suponer (pasando a una subsucesión si es preciso) que $T((x_n - z_n)/d_n) \to u \in E$. Entonces:

$$\frac{x_n - z_n}{d_n} - T\left(\frac{x_n - z_n}{d_n}\right) = \frac{x_n - Tx_n}{d_n} \to 0 \Rightarrow \frac{x_n - z_n}{d_n} \to u \Rightarrow Tu = u \Rightarrow u \in ker(I - T).$$

Por tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0$, entonces $\|x_n - z_n - d_n u\| < d_n$, lo que no puede ser ya que $z_n + d_n u \in ker(I - T)$. Por tanto nunca se da la posibilidad (32). ■

**Proposición 10.6.3.** *Sean $X, Y$ eB y $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Son equivalentes:*

*(1) $T$ es compacto; (2) $T^*$ es compacto*

*Demostración.* (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $(y_n^*)_n \subset B(Y^*)$. Vamos a probar que existe una subsucesión $(n_i)_i \subset \mathbb{N}$ tal que $(T^* y_{n_i}^*)_i$ converge en $(X^*, \|\cdot\|)$. En primer término observemos que la familia $(y_n^*)_n$ es equicontinua sobre $Y$ y que $T(B(X))$ es un subconjunto relativamente compacto en $Y$. Por el T. de Ascoli existe una subsucesión $(n_i)_i \subset \mathbb{N}$ tal que $(y_{n_i}^*)_i$ converge uniformemente en $T(B(X))$. Por otra parte

$$\|T^* y_{n_i}^* - T^* y_{n_j}^*\| = \sup\{\langle T^* y_{n_i}^* - T^* y_{n_j}^*, x\rangle : x \in B(X)\} =$$
$$= \sup\{\langle y_{n_i}^* - y_{n_j}^*, Tx\rangle : x \in B(X)\} = \sup\langle y_{n_i}^* - y_{n_j}^*, T(B(X))\rangle \underset{i,j\to\infty}{\to} 0.$$

Por tanto $(T^* y_{n_i}^*)_i$ converge en $(X^*, \|\cdot\|)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). El operador $T^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ es compacto por la demostración anterior. Así que $\overline{T^{**}(B(X^{**}))}$ es compacto en $Y^{**}$. Pero

$$\overline{T(B(X))} = \overline{T^{**}(B(X))} \subset \overline{T^{**}(B(X^{**}))} \cap Y \in \mathcal{K}_Y.$$

■

**Proposición 10.6.4.** *Sean $E$ un eB y $T \in \mathcal{K}(E)$. Entonces:*

*(1) $\sigma(T) \setminus \{0\} \subset ev(T)$ y ,$\forall \lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, $dim(ker(\lambda I - T)) < \infty$.*

*(2) Ó $|\sigma(T)|$ es finito ó, si $|\sigma(T)|$ es infinito, se tiene*

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n : n \geq 1\} \quad con\ |\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

*Demostración.* (1) Sea $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. Entonces:

$$\lambda I - T \ \text{ no invertible } \Leftrightarrow\ I - \frac{T}{\lambda} \ \text{ no invertible } \ \Leftrightarrow\ I - \frac{T}{\lambda} \ \text{ no inyectivo.}$$

Por tanto $\sigma(T) \setminus \{0\} \subset ev(T)$.

(2) Basta probar que $|\sigma(T) \cap {}^c B(0, \epsilon)| < \aleph_0$, $\forall \epsilon > 0$. Supongamos lo contrario, es decir, que para cierto $\epsilon > 0$ el conjunto anterior es infinito. Existirá entonces una

secuencia $(\lambda_n)_n \subset \sigma(T) \cap {}^cB(0,\epsilon)$, con elementos distintos dos a dos y no nulos. Por (1) $(\lambda_n)_n \subset ev(T)$. Sean $e_n \in S(E)$ tales que $Te_n = \lambda_n e_n$. Se prueba por inducción que los autovectores $(e_n)_n$ son linealmente independientes. Denotemos $E_n := [e_1, ..., e_n]$ y elijamos $u_n \in E_{n+1}$ tal que $\|u_n\| = 1$ y $dist(u_n, E_n) \geq 1/2$. Definamos $v_n := u_n/\lambda_{n+1}$. Entonces la secuencia $(v_n)_n$ verifica $\|v_n\| \leq 1/\epsilon$. Aún más, para $n > m$:

$$Tv_n - Tv_m = u_n - (Tv_m + \frac{1}{\lambda_{n+1}}(\lambda_{n+1}I - T)u_n).$$

Pero: (i) $Tv_m \in E_{m+1} \subset E_m$; (ii) $(\lambda_{n+1}I - T)u_n \in E_n$. De aquí que

$$Tv_m + \tfrac{1}{\lambda_{n+1}}(\lambda_{n+1}I - T)u_n \in E_n.$$

Por tanto

$$\|Tv_n - Tv_m\| = \|u_n - (Tv_m + \frac{1}{\lambda_{n+1}}(\lambda_{n+1}I - T)u_n)\| \geq dist(u_n, E_n) \geq 1/2.$$

Pero esto no puede ocurrir porque $T$ es compacto. ■

## 10.7. Operadores compactos autoadjuntos

**Lema 10.7.1.** *Sean $(H, \langle , \rangle)$ un eH y $0 \neq S \in \mathcal{L}(H)$ operador compacto autoadjunto. Entonces $ev(S) \neq \emptyset$ y $\max\{|\lambda| : \lambda \in ev(S)\} = \|S\|$.*

*Demostración.* Sabemos (ver la Prop. 10.5.2) que $S$ por ser autoadjunto verifica $r(S) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(S)\} = \|S\|$. Por tanto $\sigma(S) \setminus \{0\} \neq \emptyset$, de donde $ev(S) \neq \emptyset$ pues $\sigma(S) \setminus \{0\} \subset ev(S)$ al ser $S$ compacto. Así que $\|S\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(S)\} = \max\{|\lambda| : \lambda \in ev(S)\}$. ■

Si $(H, \langle , \rangle)$ es un eH y $T \in \mathcal{B}(H)$ un operador compacto autoadjunto con rango infinito, denotemos por $\Lambda := ev(T)$, $\Lambda^* = \Lambda \setminus \{0\}$ y $E_\lambda$ el autoespacio de $T$ asociado a $\lambda \in \Lambda$.

**Proposición 10.7.2.** *Sean $(H, \langle , \rangle)$ un eH y $T \in \mathcal{B}(H)$ un operador compacto autoadjunto con rango infinito. Entonces:*

*(a)* $\Lambda \subset \mathbb{R}$, $|\Lambda| = \aleph_0$, $\Lambda$ *es acotado y* $\Lambda' = \{0\}$.

*(b)* $dim(E_\lambda) < \infty$, $\forall \lambda \in \Lambda^*$.

*(c)* $E_\lambda \perp E_\mu$, $\forall \lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$.

*(d) Sea* $P_\lambda : H \to E_\lambda$ *la proyección canónica. Entonces* $T = \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \lambda \cdot P_\lambda$.

*Demostración.* En primer término $\sigma(T) = \{0\} \cup \Lambda$ por las hipótesis del enunciado.

(a) Se tiene que $\Lambda \subset \mathbb{R}$ porque $T$ es autoadjunto y $|\Lambda| < \aleph_0$ porque $T$ es compacto. Además $\Lambda' \subset \{0\}$ (puede ser $\Lambda' = \emptyset$).

Probemos que $|\Lambda^*| = \aleph_0$. De entrada $\Lambda^* \neq \emptyset$ pues existe $\lambda \in \Lambda^*$ tal que $|\lambda| = \|T\|$. Supongamos que $|\Lambda^*| < \aleph_0$, digamos $\Lambda := \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$. Pongamos $G := \oplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}$ y $F := G^\perp$. Como $G$ es finito-dimensional concluimos que $H = G \oplus F$. Claramente $T(G) \subset G$. Puesto que $T^\bullet = T$ también $T(F) \subset F$. La restricción $T \restriction F := T_F : F \to F$ de $T$ a $F$ es compacto de rango infinito y autoadjunto. Por tanto $T_F$ tiene algún autovalor no-nulo, que necesariamente será autovalor de $T$ distinto de los autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_k$. Hemos llegado a una contradicción que prueba que $|\Lambda^*| = \aleph_0$.

(b) Sea $\lambda \in \Lambda^*$ y $E_\lambda = ker(\lambda I - T)$. Por la Prop. 10.6.4 obtenemos que $dim(E_\lambda) < \infty$.

(c) ya es conocido.

(d) Sea $J \subset \Lambda^*$, $|J| < \aleph_0$, y pongamos $G_J := \oplus_{\lambda \in J} E_\lambda$ y $F_J := G_J^\perp$. Puesto que $dim(G_J) < \infty$ resulta $H = G_J \oplus F_J$. Además $T$ induce un operador compacto autoadjunto $T_J : F_J \to F_J$ tal que $\|T\| \geq \|T_J\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in ev(T_J)\}$. Observemos que:

(1) $ev(T_J) \subset \Lambda \setminus J$ pues todo autovalor de $T_J$ lo es de $T$, pero no está en $J$.

(2) Además, si $\lambda \in \Lambda \setminus J$, la propiedad de ortogonalidad de los auto-espacios implica que $E_\lambda \subset G_J^\perp = E_J$, de donde $\lambda \in ev(T_J)$. Así que

$$ev(T_J) = \Lambda \setminus J \;\Rightarrow\; \|T_J\| = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \Lambda \setminus J\}.$$

Claramente la proyección ortogonal $P_J : H \to G_J$ es $P_J = \sum_{\lambda \in J} P_\lambda$, siendo $P_\lambda : H \to E_\lambda$ la correspondiente proyección ortogonal. Así que $x - \sum_{\lambda \in J} P_\lambda(x)$, $\forall x \in H$, y además

$$\|T(x - \sum_{\lambda \in J} P_\lambda(x))\| = \|T_J(x - \sum_{\lambda \in J} P_\lambda(x))\| \leq \|x - \sum_{\lambda \in J} P_\lambda(x)\| \cdot \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \Lambda \setminus J\} \leq$$
$$\leq \|x\| \cdot \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \Lambda \setminus J\}.$$

De aquí y de la igualdad $T \circ P_\lambda = \lambda \cdot P_\lambda$ deducimos que

$$\|T - \sum_{\lambda \in J} \lambda \cdot P_\lambda\| = \|T - \sum_{\lambda \in J} T \circ P_\lambda\| \leq \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \Lambda \setminus J\}.$$

Sean $\epsilon > 0$ y $K := \{\lambda \in \Lambda : |\lambda| \geq \epsilon\}$. Puesto que $\Lambda' = \{0\}$, debe ser $|K| < \aleph_0$. Además para todo subconjunto finito $J$ tal que $K \subset J \subset \Lambda^*$ se tiene que

$$\|T - \sum_{\lambda \in J} \lambda \cdot P_\lambda\| \leq \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \Lambda \setminus J\} \leq \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \Lambda \setminus K\} \leq \epsilon.$$

■

**Corolario 10.7.3.** *Sean $(H, \langle,\rangle)$ un eH y $T \in \mathcal{B}(H)$ un operador compacto autoadjunto con rango infinito. Entonces:*

*(1) $\overline{Im(T)} = \oplus_{\lambda \in \Lambda^*} E_\lambda$.*

*(2) $\overline{Im(T)}$ es un eH separable con base $\{f_n : n \geq 1\}$ formada por los autovectores asociados a los autovalores de $\Lambda^*$.*

*(3) La secuencia $\{\mu_n : n \geq 1\} = \Lambda^*$ de los autovalores asociados a los autovectores $\{f_n : n \geq\}$ verifica que $\mu_n \to 0$ y*

$$Tx = \sum_{n \geq 1} \mu_n \langle x, f_n \rangle f_n, \ \forall x \in H.$$

*(4) $x = \sum_{\lambda \in \Lambda^*} P_\lambda x, \ \forall x \in \overline{Im(T)}$.*

*(5) Sea $E_0 := ker(T)$ y $P_0 : H \to E_0$ la proyección ortogonal. Entonces $H = \sum_{\lambda \in \Lambda} \oplus E_\lambda$ y $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda x, \quad \forall x \in H$.*

*(6) $H$ tiene una base de Hilbert formada por autovectores de $T$.*

*Demostración.* (1) Sabemos que

$$\forall x \in H, \ Tx = \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \lambda \cdot P_\lambda(x) \in \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \oplus E_\lambda \ \Rightarrow \overline{Im(T)} \subset \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \oplus E_\lambda.$$

Por otra parte $E_\lambda \subset Im(T), \ \forall \lambda \in \Lambda^*$, de donde $\sum_{\lambda \in \Lambda^*} \oplus E_\lambda \subset \overline{Im(T)}$.

(2) La base de Hilbert $(f_n)_n$ de $\overline{Im(T)}$ se obtiene uniendo las bases finitas de Hilbert de los autoespacios $E_\lambda$ asociados a los autovalores $\lambda \in \Lambda^*$.

(3) Veamos que $Tx = \sum_{n \geq 1} \mu_n \langle x, f_n \rangle f_n, \ \forall x \in H$. En efecto, como $Tx \in \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \oplus E_\lambda$, entonces

$$Tx = \sum_{n \geq 1} \langle Tx, f_n \rangle f_n = \sum_{n \geq 1} \langle x, Tf_n \rangle f_n = \sum_{n \geq 1} \mu_n \langle x, f_n \rangle f_n.$$

(4) es consecuencia de la descomposición $\overline{Im(T)} = \sum_{n \geq 1} \oplus E_\lambda$, siendo $E_\lambda$ los autoespacios.

(5) Basta tener en cuenta lo anterior y que $E_0 = ker(T) = \overline{Im(T)}^\perp$, de donde $H = E_0 \oplus \overline{Im(T)}^\perp = \sum_{\lambda \in \Lambda} \oplus E_\lambda$.

(6) Basta coger en cada autoespacio $E_\lambda$ una base de Hilbert.

■