TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS

1. Introducción

Si $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ verifican $ad - cb \neq 0$, la aplicación $S : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ de la forma

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad S(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{y } S(\infty) = \frac{a}{c}, \qquad (\frac{w}{0} = \infty, w \neq 0),$$

recibe el nombre de *transformación de Möbius.* Los coeficientes a, b, c y d, que intervienen en la definición de S, son únicos, salvo producto por un escalar $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pues, obviamente

$$\forall z \in \mathbb{C}_\infty, \quad S(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}.$$

Observemos que no puede ser $a = 0 = c$ ó $d = 0 = b$ porque ambas situaciones conducen a que $ad - bc = 0$. Algunas transformaciones de Möbius S reciben nombres especiales, a saber:

(1) S es una *traslación* si $S(z) = z + a$.

(2) S es una *homotecia o dilación* si $S(z) = az$ con $a \neq 0$.

(3) S es una *rotación* si $S(z) = e^{i\theta} z$.

(4) Finalmente, si $S(z) = 1/z$, S es una *inversión.*

Proposición 1. *Sea* $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ *una transformación de Möbius. Entonces*

(1) $S \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, *es decir,* S *es meromorfa en* $\mathbb{C}$ *con un polo simple en* $-\frac{d}{c}$, *que puede ser* $-\frac{d}{c} = \infty$, *si* $c = 0$.

(2) $S : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ *es una biyección holomorfa cuya inversa* $S^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\} \to \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ *es también transformación de Möbius verificando que* $S^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$.

(3) $S : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ *es un homeomorfismo.*

Demostración. (1) es inmediato.

(2) Un pequeño cálculo permite obtener la expresión de la inversa S^{-1}, que es $S^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$ y tiene un polo en $\frac{a}{c}$ (puede ser ∞). Es inmediato que S^{-1} es también una transformación de Möbius tal que $S \circ S^{-1} = id$ sobre $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ y que $S^{-1} \circ S = id$ sobre $C \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

(3) es inmediato. $\square$

Proposición 2. *Si* $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ *es una transformación de Möbius,* S *es la composición de un número finito de traslaciones, dilaciones e inversiones.*

Demostración. (A) **Sea** $\underline{c = 0}$. Entonces $S(z) = S_2 \circ S_1(z)$ siendo

$$S_1(z) = \tfrac{a}{d} z \ \text{ (una dilación) y } S_2(z) = z + \tfrac{b}{d} \ \text{ (una traslación)}.$$

(B) **Sea** $c \neq 0$. En este caso $S = S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$, siendo

$$S_1(z) = z + \tfrac{d}{c},\ S_2(z) = \tfrac{1}{z},\ S_3(z) = \tfrac{bc-ad}{c^2} z \quad \text{y } S_4(z) = z + \tfrac{a}{c}.$$

□

Proposición 3. *Si S, T son transformaciones de Möbius, S^{-1} y $S \circ T$ son también transformaciones de Möbius. En consecuencia, el conjunto de las transformaciones de Möbius constituyen para la composición un grupo no conmutativo de transformaciones.*

Demostración. (A) Ya sabemos (ver la Proposición 1) que, si S es transformación de Möbius, existe la inversa S^{-1}, que es transformación de Möbius.

(B) Veamos que, si S y T son transformaciones de Möbius, $S \circ T$ es también transformación de Möbius. Para ello, teniendo en cuenta la Proposición 2, bastará comprobar este hecho cuando S es una traslación ó una dilación ó una inversión y esta comprobación es rutinaria.

(C) En consecuencia, el conjunto de las transformaciones de Möbius constituyen para la composición un grupo no conmutativo de transformaciones. □

2. Puntos fijos

Los puntos fijos de la transformación de Möbius $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ son los puntos $z \in \mathbb{C}_\infty$ tales que $z = S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Resolviendo esta ecuación, se obtienen los siguientes puntos:

Sea $c = 0$. En este caso $z = \infty$ es punto fijo. Los puntos fijos finitos se obtienen resolviendo la ec. $z = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}$. Sale el punto $z = \frac{b}{d-a}$, que si $d = a$ es $z = \infty$, por lo que, en este caso (es decir, $c = 0 = a - d$), el punto $z = \infty$ es punto fijo doble.

Sea $c \neq 0$. En este caso ∞ no es punto fijo. Los puntos fijos salen resolviendo la ec.

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0.$$

Hay ó dos soluciones distintas ó una doble en $\mathbb{C}$.

Resumiendo, si S es una transformación de Möbius tal que $S \neq id$, entonces S tiene dos y sólo dos puntos fijos, aunque puede aparecer un único punto fijo doble.

Corolario 4. *Sean S, T dos transformaciones de Möbius y $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ tres puntos distintos dos a dos, tales que $S(z_i) = T(z_i),\ i = 1, 2, 3$. Entonces $S = T$.*

Demostración. La transformación $T^{-1} \circ S$ tiene tres puntos fijos distintos. Por tanto $T^{-1} \circ S = id$, es decir, $S = T$. □

3. La razón cruzada

Sean $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ tres puntos distintos. Definimos $S = S_{(z_2,z_3,z_4)} : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ de la siguiente forma:

$$S(z)=\left(\frac{z-z_3}{z-z_4}\right)/\left(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right) \quad \text{si } z_2,z_3,z_4\in\mathbb{C},$$
$$S(z)=\frac{z-z_3}{z-z_4} \quad \text{si } z_2=\infty,$$
$$S(z)=\frac{z_2-z_4}{z-z_4} \quad \text{si } z_3=\infty,$$
$$S(z)=\frac{z-z_3}{z_2-z_3} \quad \text{si } z_4=\infty.$$

Observemos que la transformación S así definida es la única transformación de Möbius verificando $S(z_2)=1,\ S(z_3)=0$ y $S(z_4)=\infty$. Si $z_1\in\mathbb{C}_\infty$ es otro punto de $\mathbb{C}_\infty$ y $S=S_{(z_2,z_3,z_4)}$ es la transformación de Möbius antes definida, la razón cruzada (z_1,z_2,z_3,z_4) (por este orden) se define como

$$(z_1,z_2,z_3,z_4)=S(z_1).$$

Proposición 5. *Sean $z_2,z_3,z_4\in\mathbb{C}_\infty$ puntos distintos y $w_2,w_3,w_4\in\mathbb{C}_\infty$ también distintos dos a dos. Entonces existe una única transformación de Möbius T tal que $Tz_i=w_i,\ i=2,3,4$.*

Demostración. Ya sabemos que, caso de existir T, debe ser única, porque una transformación de Möbius con tres puntos fijos distintos es, necesariamente, la identidad. Definimos las transformaciones de Möbius S_1,S_2 de la siguiente forma

$$S_1(z)=(z,z_2,z_3,z_4) \quad \text{y } S_2(z):=(z,w_2,w_3,w_4), \quad \forall z\in\mathbb{C}_\infty.$$

Es claro que la transformación de Möbius que buscamos es $T:=S_2^{-1}\circ S_1$. □

Proposición 6. *Sean $z_2,z_3,z_4\in\mathbb{C}_\infty$ puntos distintos y $T:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty$ una transformación de Möbius. Entonces*

$$(z,z_2,z_3,z_4)=(Tz,Tz_2,Tz_3,Tz_4),\ \forall z\in\mathbb{C}_\infty.$$

Demostración. Sean $S=S_{(z_2,z_3,z_4)}$ la transformación asociada a los puntos z_2,z_3,z_4 y $M:=S\circ T^{-1}$. Entonces

$$M(Tz_2)=1,\quad M(Tz_3)=0 \quad \text{y} \quad M(Tz_4)=\infty.$$

Entonces $M=S_{(Tz_2,Tz_3,Tz_4)}$. Por tanto, para todo $w\in\mathbb{C}_\infty$ se verifica

$$S\circ T^{-1}(w)=M(w)=(w,Tz_2,Tz_3,Tz_4).$$

Por tanto, para todo $z\in\mathbb{C}_\infty$, poniendo $w=Tz$, obtenemos

$$(z,z_2,z_3,z_4)=S(z)=M(Tz)=(Tz,Tz_2,Tz_3,Tz_4).$$

□

A continuación se hace uso del concepto de circunferencia de $\mathbb{C}_\infty$. En este concepto se incluyen las circunferencias de $\mathbb{C}$ y los conjuntos $r\cup\{\infty\}$, siendo r una recta de $\mathbb{C}$. Indicaremos $\mathbb{R}_\infty:=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$.

Lema 7. *Si S es una transformación de Möbius, $S^{-1}(\mathbb{R}_\infty)$ es una circunferencia de $\mathbb{C}_\infty$.*

Demostración. Sea $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $\forall z \in \mathbb{C}_\infty$. Sea $w \in \mathbb{C}_\infty$ y supongamos que $S(w) \in \mathbb{R}_\infty$. Entonces

$$\frac{aw+b}{cw+d} = S(w) = \overline{S(w)} = \frac{\overline{a}\overline{w}+\overline{b}}{\overline{c}\overline{w}+\overline{d}}\ , \tag{3.1}$$

de donde obtenemos que

$$(a\overline{c}-\overline{a}c)|w|^2 + (a\overline{d}-\overline{b}c)w + (b\overline{c}-d\overline{a})\overline{w} + (b\overline{d}-\overline{b}d) = 0. \tag{3.2}$$

Distinguimos dos casos:

<u>Caso 1</u>: supongamos que $a\overline{c} \in \mathbb{R}$**.** Entonces $a\overline{c}-\overline{a}c = 0$. Poniendo $a\overline{d}-\overline{b}c =: \alpha/2$ y $\beta := i(b\overline{d}-\overline{b}d) \in \mathbb{R}$, la ec. (3.2) se convierte en

$$0 = \mathcal{I}m(\alpha w) - \beta = \mathcal{I}m(\alpha w - i\beta),$$

que es la ec. de una recta de $\mathbb{C}_\infty$. Observemos que $w = \infty$ es solución de (3.1) porque

$$S(\infty) = \tfrac{a}{c} = \tfrac{\overline{a}}{\overline{c}} = \overline{S(\infty)}.$$

<u>Caso 2</u>: Supongamos que $a\overline{c} \notin \mathbb{R}$**.** Entonces $a\overline{c}-\overline{a}c \neq 0$. Dividiendo la ec. (3.2) por $a\overline{c}-\overline{a}c$ obtenemos

$$|w|^2 + \frac{a\overline{d}-\overline{b}c}{a\overline{c}-\overline{a}c}w + \frac{b\overline{c}-d\overline{a}}{a\overline{c}-\overline{a}c}\overline{w} - \frac{\overline{b}d-b\overline{d}}{a\overline{c}-\overline{a}c} = 0. \tag{3.3}$$

Poniendo

$$\gamma := \frac{b\overline{c}-d\overline{a}}{a\overline{c}-\overline{a}c} \quad \text{y} \quad \delta := \frac{\overline{b}d-b\overline{d}}{a\overline{c}-\overline{a}c} \in \mathbb{R},$$

la ec. (3.3) se convierte en

$$0 = |w|^2+\overline{\gamma}w+\gamma\overline{w}-\delta = |w|^2+\overline{\gamma}w+\gamma\overline{w}+|\gamma|^2-(|\gamma|^2+\delta) = |w+\gamma|^2-(|\gamma|^2+\delta), \tag{3.4}$$

es decir

$$|w+\gamma|^2 = (|\gamma|^2+\delta) = \left|\frac{ad-bc}{a\overline{c}-\overline{a}c}\right|.$$

Se trata de una circunferencia de centro $-\gamma$ y radio $(|\gamma|^2+\delta)^{1/2}$. □

Proposición 8. *Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ puntos distintos de $\mathbb{C}_\infty$. Son equivalentes:*

(a) $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}_\infty$.

(b) Los cuatro puntos pertenecen a una circunferencia de $\mathbb{C}_\infty$.

Demostración. Sea $S := S_{(z_2,z_3,z_4)}$. Por el Lema 7 se verifica que $S(z_1) = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}_\infty$ sii z_1 está en la circunferencia determinada por z_2, z_3 y z_4. □

Proposición 9. *Toda transformación de Möbius transforma circunferencias de $\mathbb{C}_\infty$ en circunferencias de $\mathbb{C}_\infty$.*

Demostración. Sean $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ tres puntos distintos y Γ la circunferencia que determinan en $\mathbb{C}_\infty$. Sean S una transformación de Möbius, $w_i := S(z_i),\ i = 2,3,4$, y Γ' la circunferencia determinada por los tres puntos (distintos) w_2, w_3, w_4. Sea $z \in \mathbb{C}_\infty$. Se tiene que $z \in \Gamma$ sii $(z, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}_\infty$ (por la Proposición 8) sii $(Sz, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{R}_\infty$ (por la Proposición 6) sii $Sz \in \Gamma'$ (por la Proposición 8). □

Corolario 10. *Dadas dos circunferencias* Γ *y* Γ' *de* $\mathbb{C}_\infty$*, existe (hay muchas) una transformación de Möbius que transforma* Γ *en* Γ'*. De hecho, dados tres puntos distintos* $z_2, z_3.z_4 \in \Gamma$ *y otros tres también distintos* $w_2, w_3, w_4 \in \Gamma'$*, existe una única transformación de Möbius* T *que transforma* Γ *en* Γ' *tal que* $Tz_i = w_i,\ i = 2,3,4$.

Demostración. Por la Proposición 5 existe una única transformación de Möbius T tal que $Tz_i = w_i,\ i = 2,3,4$. Por la Proposición 9 necesariamente $T(\Gamma) = \Gamma'$. □

4. Orientación de circunferencias de $\mathbb{C}_\infty$

Si Γ es una circunferencia de $\mathbb{C}_\infty$, dada una tripleta ordenada $\mathcal{O} := (z_2, z_3, z_4)$ de puntos distintos de Γ, queda determinada una *orientación* ó sentido de recorrido de Γ. Dicho sentido de recorrido (positivo respecto de $\mathcal{O}$) consiste en ir (sin salirse de Γ) de z_2 a z_3 (sin pasar por z_4), luego a z_4 y, finalmente, a z_2, sin pasar por z_3. Además, $\mathbb{C}_\infty$ queda divido en tres subconjuntos disjuntos, a saber:

(a1) El propio Γ, que por la Proposición 8 es

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}_\infty : \mathcal{I}m(z, z_2, z_3, z_4) = 0\}.$$

(a2) La región derecha $D(\Gamma, \mathcal{O})$ de Γ que es

$$D(\Gamma, \mathcal{O}) = \{z \in \mathbb{C}_\infty : \mathcal{I}m(z, z_2, z_3, z_4) > 0\}.$$

(a3) La región izquierda $I(\Gamma, \mathcal{O})$ de Γ que es

$$I(\Gamma, \mathcal{O}) = \{z \in \mathbb{C}_\infty : \mathcal{I}m(z, z_2, z_3, z_4) < 0\}.$$

Observemos que, efectivamente, los conjuntos $D(\Gamma, \mathcal{O})$ y $I(\Gamma, \mathcal{O})$ son ambos regiones de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Gamma$, porque son abiertos conexos disjuntos cuya unión es $\mathbb{C}_\infty \setminus \Gamma$.

Proposición 11. *[Ppio. de orientación] Sean* Γ_1 *y* Γ_2 *dos circunferencias de* $\mathbb{C}_\infty$*,* T *una transformación de Möbius tal que* $T(\Gamma_1) = \Gamma_2$*,* $\mathcal{O}_1 := (z_2, z_3, z_4)$ *una orientación de* Γ_1 *y* $\mathcal{O}_2 := (Tz_2, Tz_3, Tz_4)$ *la correspondiente orientación de* Γ_2*. Entonces* $T(D(\Gamma_1, \mathcal{O}_1)) = D(\Gamma_2, \mathcal{O}_2)$ *y* $T(I(\Gamma_1, \mathcal{O}_1)) = I(\Gamma_2, \mathcal{O}_2)$*. Es decir, las transformaciones de Möbius conservan las orientaciones, transformando la región derecha en región derecha y la izquierda en izquierda.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de las definiciones anteriores y de la Proposición 6. □

5. Determinación práctica de la regiones derecha é izquierda de una circunferencia

Si Γ es una circunferencia de $\mathbb{C}_\infty$ y $\mathcal{O} = (z_2, z_3, z_4)$ una tripleta de de puntos distintos de Γ, vamos a comprobar que la región derecha $D(\Gamma, \mathcal{O})$ es la región (de las dos que forman $\mathbb{C}_\infty \setminus \Gamma$) que queda a la derecha cuando nos desplazamos por Γ desde z_2 a z_4 pasando por z_3. Por tanto, $I(\Gamma, \mathcal{O})$ es la región que queda a la izquierda en este recorrido.

Comencemos considerando la circunferencia $\mathbb{R}_\infty$ y la tripleta $\mathcal{O}_\mathbb{R} = (1, 0, \infty)$. Por las propiedades de la razón cruzada sabemos que $(z, 1, 0, \infty) = z$, $\forall z \in \mathbb{C}_\infty$. Por tanto

$$D(\mathbb{R}_\infty, \mathcal{O}_\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C}_\infty : \mathcal{I}m(z) > 0\},$$

que es justamente la región de $\mathbb{C}_\infty \backslash \mathbb{R}_\infty$ que se sitúa a la derecha del recorrido, cuando nos desplazamos por $\mathbb{R}_\infty$ desde 1 a ∞ pasando por 0. Análogamente $I(\mathbb{R}_\infty, \mathcal{O}_\mathbb{R}) = \{\mathcal{I}m(z) < 0\}$, que se sitúa a la izquierda del recorrido.

Es claro que en $\mathbb{R}_\infty$ hay muchas tripletas que determinan la misma orientación que $\mathcal{O}_\mathbb{R}$ y con las mismas regiones derecha e izquierda que $\mathcal{O}_\mathbb{R}$. En realidad, todas las tripletas de $\mathbb{R}_\infty$ se agrupan en dos clases disjuntas $\mathcal{C}^+$ y $\mathcal{C}^-$. Los elementos de la clase $\mathcal{C}^+$ (en donde está $\mathcal{O}_\mathbb{R}$) determinan la misma orientación y las mismas regiones que $\mathcal{O}_\mathbb{R}$. Para los elementos de la otra clase, la orientación y las regiones son contrarias a las de $\mathcal{O}_\mathbb{R}$. Observemos que en la orientación determinada por $\mathcal{O}_\mathbb{R}$ nos vamos hacia el ∞ caminando por $\mathbb{R}_\infty$ hacia la izquierda, mientras que en la orientación de los elementos de $\mathcal{C}^-$ nos vamos hacia el ∞ caminando hacia la derecha.

Como cualquier circunferencia Γ de $\mathbb{C}_\infty$ se obtiene de $\mathbb{R}_\infty$ mediante una transformación de Möbius, que conserva las regiones derecha e izquierda por el Ppio. de orientación, es claro, por razones de continuidad, que la regla práctica, que acabamos de comprobar sobre $\mathbb{R}_\infty$, también se verifica para Γ.