

Geometría Diferencial de Variedades en el Espacio Euclideo. Test de Septiembre de 2005

Apellidos: _____

Nombre: _____

Decir cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) y cuales son falsas (F)

AFIRMACIONES	V	F
El conjunto vacío es una variedad diferenciable.	X	
El borde de un dominio regular conexo es siempre conexo.		
La intersección de variedades es una variedad		
$\omega = xdy \wedge dz - ydx \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ es exacta		
$\omega = xdy \wedge dz + ydx \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ es exacta		
$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2y^2 - z = 0\}$ es variedad		
La unión de dos variedades disjuntas es una variedad		
$(1 + z^2) dx \wedge dy \wedge dz$ es forma de volumen de $\mathbb{R}^3$		
$(1 - x^2) dx \wedge dy$ es forma de volumen de $\mathbb{R}^2$		
Si $\omega \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$ y $\int_{\mathbb{S}^2} \omega = 0$ entonces $\omega = 0$		
No existen superficies compactas paralelizables.		

- Cada respuesta acertada vale 0,2 puntos
- Cada respuesta equivocada descuenta 0,2 puntos.
- La nota máxima/minima es de ± 2 puntos.

**GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE VARIEDADES
EN EL ESPACIO EUCLIDEO.**

Examen Final Septiembre 2005

PRIMERA PARTE: de 09:30 a 11:30

Tema teórico (1,5 puntos):

Concepto de variedad diferenciable. Parametrizaciones locales. Definición de variedad. Ecuaciones (locales) implícitas.

Aplicación (1,5 puntos). Demostrar que

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ z = y^2 \end{array} \right\}$$

es una variedad diferenciable. ¿Admite M una parametrización global?. Determinar una parametrización *casi global*¹ de M

¹Es decir que solo deje un punto de M fuera de su imagen.

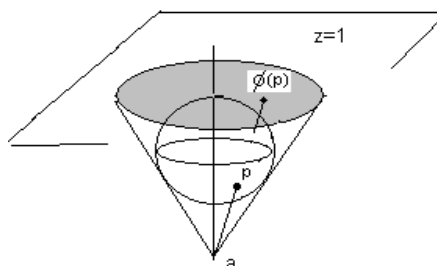
**GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE VARIEDADES
EN EL ESPACIO EUCLIDEO.**

**Examen Final Septiembre 2005
SEGUNDA PARTE: de 11:30 a 14:00**

Ejercicio 1 (3,6 puntos)

Se considera la esfera $\mathbb{S}^2$ de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, el plano $\mathbb{P}$ de ecuación $z = 1$, y el punto $a = (0, 0, -2)$. Sea $\phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}$ la aplicación que hace corresponder a cada punto $p \in \mathbb{S}^2$ el punto $\phi(p)$ intersección de la recta que pasa por a y p , con $\mathbb{P}$ (vease figura). Se pide:

1. Probar que $\phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}$ es una aplicación diferenciable.
2. Demostrar que $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z \neq -1/2\}$ es el conjunto de los puntos de $\mathbb{S}^2$ en los que ϕ es difeomorfismo local.
3. Dar orientaciones en $\mathbb{S}^2$ y en $\mathbb{P}$, y demostrar que $\mathbb{S}$ se descompone en dos componentes conexas $\mathbb{S}^+$ y $\mathbb{S}^-$ de forma que ϕ induce un difeomorfismo en $\mathbb{S}^+$ que preserva orientación y otro en $\mathbb{S}^-$ que la cambia.
4. Probar que para toda 2-forma ω en $\mathbb{P}$ se tiene: $\int_{\mathbb{S}^2} \phi^* \omega = 0$



Ejercicio 2 (1,4 puntos)

Demostrar que $\mathbb{B}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ es un dominio regular de $\mathbb{R}^3$ con borde $\mathbb{S}^2$. Demostrar (preferiblemente usando el teorema de Stokes) que:

$$4\pi = \int_{\mathbb{S}^2} xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy$$

Nota: Se supone conocido que el volumen de una bola de radio r es $(4/3)\pi r^3$.