

# La curvatura: un hilo conductor en la Geometría Diferencial

A. M. Amores  
Universidad Complutense

4 de Noviembre de 2010

## 1. Introducción

Hemos preparado estas notas como resumen de una charla en el seminario *Ideas y visualizaciones* de la *Cátedra Miguel de Guzmán* en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense. Agradezco a las profesoras Corrales y Gómez-Chacón, organizadoras del seminario, su invitación a participar, y al auditorio su interés por este trabajo.

Quisiera que fuera conocido y comprendido el enfoque de estas notas. En el programa del seminario, aparece la conferencia como una sobre los fundamentos de la Geometría Riemanniana. Advierto que esto no va a ser en absoluto un desarrollo histórico ni tampoco una exposición de los resultados más relevantes incluyendo, si fuera posible, alguno reciente. Es una discusión sobre los fundamentos pero casi desde el punto de vista de un estudiante. Mucho de lo que vamos a ver es la materia de Geometría Diferencial que se estudia antes de meterse un poco a fondo en un texto de Geometría Riemanniana. Es en ese sentido en el que lo que aquí se expone es un fundamento: se ven los conceptos, en una forma relativamente sencilla, que ayudará a la comprensión e intuición de otros conceptos más generales. Es también muy bueno que un estudiante tenga una idea, siquiera aproximada, de los primeros grandes resultados de cualquier teoría. Son como puntos de referencia que permiten situar todo el entramado. El lector debe ver esto como una rápida visita turística a una gran ciudad con poco tiempo y dinero. Subidos en un autobús recorreremos el centro de la ciudad donde se concentra lo más valioso y monumental. No se puede decir que hayamos visto los museos o apreciado a fondo la riqueza de su arquitectura y vida cultural. Sin embargo, habrá cosas que nos impresionarán o nos parecerán prometedoras y serán objeto de una visita mucho más pausada en condiciones más favorables. Nuestra visita turística tiene un hilo conductor: el concepto de curvatura, tan ubíquo y variable.

En esta exposición rápida, es imposible pretender ser exacto. Eliminamos conscientemente muchos detalles lo que hace que muchos asertos, tomados literalmente como aquí se enuncian, sean falsos. Hay también mucho “optimismo expositivo”, que quiere decir a grandes rasgos que numerosas circunstancias que podrían impedir nuestro avance se dan por no existentes. Las funciones se pueden derivar cuanto queramos, no se anulan cuando crean problemas, toda ecuación puede resolverse, etc. . Nuestro optimismo alcanza las más altas cimas al pensar que unos adjetivos o conceptos casi comprensibles para el hombre de la calle pueden sustituir a los realmente matemáticos con toda su profundidad y sofisticación.

Seamos “expositivamente optimistas”. Estamos visitando París sin saber francés, casi sin bajarnos del autobús, y puede que sin habernos informado previamente con una guía. Pero vemos de soslayo el inmenso museo del Louvre (dicen que lleno de famosas pinturas y antigüedades egipcias y mesopotámicas), las hermosas perspectivas de sus avenidas, los paseantes junto al Sena, las librerías del Barrio Latino... . Bien, por malo que sea el guía, por rápido que circule el autobús, por caro que sea el billete, cualquiera con sensibilidad por lo bello sentirá que se le abren perspectivas. Y que alguna vez habrá que volver para ver tantas bellezas con más recursos y detenimiento.

## 2. Curvas planas

Sea  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva plana con velocidad uno y  $T$  su vector tangente unitario; o sea,  $T(t) = \alpha'(t)$ . Visualizamos  $\alpha(\mathbb{R})$  como una vía de tren y  $\alpha$  como el tren que se mueve con velocidad uno por

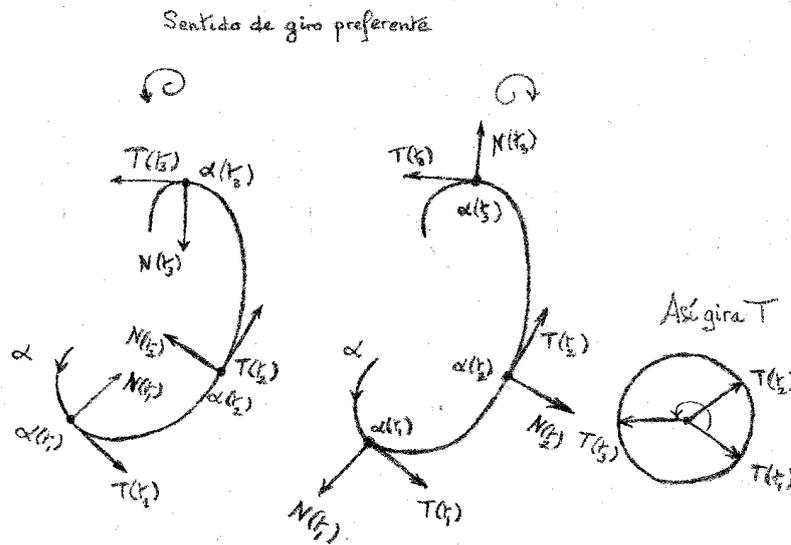


Figura 1: La base de Frenet en el plano según el sentido de giro

ella. Imaginemos que  $T$  es una aguja que se mueve en la esfera de un reloj de radio uno. Según serpentea el tren al moverse por la vía, la aguja  $T$  oscila moviéndose en sentido horario y antihorario. Es evidente que si calculamos la velocidad de  $T$ ; es decir,  $T' = \alpha''$  tenemos una medida de cuánto se tuerce la vía y a esta medida *se podría* llamar curvatura. Modificamos un poco la definición. Nuestro objetivo es que la curvatura sea una magnitud escalar y  $T'$  es un vector. Afortunadamente,  $T'$  es perpendicular a  $T$ . Lo que hacemos es añadir al reloj una segunda aguja  $N$  de longitud uno y perpendicular a  $N$ . Hay dos maneras de hacerlo y deshacemos la ambigüedad estipulando que el giro que debiéramos realizar para superponer  $T$  a  $N$  yendo por el camino más corto, deba hacerse en sentido antihorario (contrario al sentido de giro de las agujas del reloj). Una vez determinado  $N$ , como ya hemos dicho que  $T'$  debe ser proporcional a  $N$ , definimos  $\kappa$ , la **curvatura**, como el factor de proporcionalidad; o sea  $T' = \kappa N$ . Conviene ejercitar nuestra imaginación pensando en el tren y la vía y traducir al lenguaje normal el signo de  $\kappa$ . Por ejemplo, si la vía gira a izquierdas,  $\kappa > 0$  y si gira a derechas,  $\kappa < 0$ , siendo  $\kappa = 0$  en los tramos rectos. Obsérvese, porque luego tendrá su trascendencia, que si hubiéramos definido  $N$  sustituyendo "...en sentido antihorario..." por "...en sentido horario..." la nueva curvatura sería la antigua cambiada de signo y  $\kappa > 0$  representaría entonces el giro a derechas. En resumen, en la definición de curvatura debe elegirse un sentido de giro como preferente, habiendo optado nosotros por el antihorario.

Otra manera de ver la curvatura es, guiados de la intuición física, como aceleración. Si viajamos en nuestro tren, experimentaremos mayor aceleración cuanto mas cerrada sea la curva. En realidad, esto es prácticamente la definición anterior pues  $\alpha'' = T' = \kappa N$ . Conocido  $T$  se conoce  $N$  y  $\kappa$  y  $\alpha''$  se corresponden biunívocamente.

Si, igual que calculamos la velocidad de  $T$ , queremos calcular la de  $N$ , vemos fácilmente (pensar en el reloj con dos agujas solidarias  $T$  y  $N$ ) que  $N' = -\kappa T$ . Tenemos pues las llamadas ecuaciones de Frénet-Serret

$$\begin{cases} T' = \kappa N \\ N' = -\kappa T \end{cases} \quad \text{o en forma matricial} \quad \begin{pmatrix} T' \\ N' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix} \quad (1)$$

Estas ecuaciones sugieren muy claramente que  $\kappa$ , la curvatura, contiene la información esencial de la curva. El razonamiento es en líneas generales el siguiente: Las ecuaciones (1) constituyen una ecuación diferencial dependiente de  $\kappa$  en la incógnita vectorial  $(T, N)$ . Si la resolvemos (hay teoremas que garantizan que hay solución), obtenemos  $T$ , y como  $\alpha' = T$ , con una integración más se obtiene  $\alpha$ . En el proceso de resolución e integración quedan indeterminadas varias constantes. Se puede ver que la elección de

estas constantes solo influye en la posición de la curva en el plano. Hablando intuitivamente, se recupera la vía del tren con su forma inalterada pero hay infinitas formas de situarla en el plano. Aun así, se sitúe como se sitúe la vía, siempre tendrá la misma curvatura.

Podemos preguntarnos qué sucede si la curva  $\alpha$  no tiene velocidad uno, sino velocidad  $v(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$  que pueda fluctuar. Se llega a unas ecuaciones

$$\begin{cases} T' = v\kappa N \\ N' = -v\kappa T \end{cases} \quad \text{o en forma matricial} \quad \begin{pmatrix} T' \\ N' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & v\kappa \\ -v\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix} \quad (2)$$

que generalizan (1). Se tiene también que el par  $(v, \kappa)$  determina  $\alpha$  salvo su situación en el plano.

En esta sección aparece un patrón que se repetirá en el futuro: La definición de curvatura siguiendo una intuición geométrica (en el futuro, más bien algebraica) incluye este objeto dentro de unas ecuaciones que nos permiten recuperar información esencial sobre nuestro objeto geométrico (curva, superficie, etc.). *La curvatura informa sobre cómo es la geometría pero, y esto es lo más importante, la determina y restringe de modo fundamental.*

### 3. Curvas espaciales

Empezamos con la curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  con velocidad uno y tenemos, como en el caso del plano,  $T = \alpha'$ . La idea del plano se puede repetir. La diferencia es que ahora  $T$  se mueve en una esfera de radio 1 en lugar de un círculo de radio 1. Podemos escribir  $T'(t) = \kappa(t)N(t)$  siendo  $N(t)$  un vector unitario ortogonal a  $T(t)$  (o sea, tangente a la esfera en que se mueve  $T$ ) y  $\kappa(t)$  un número. En el caso del plano había dos posibles elecciones de  $N$ . Aquí preferimos imponer que  $N$  venga dado por a condición  $T' = \kappa N$  y, además,  $\kappa \geq 0$ . Esto determina  $N$  unívocamente si suponemos que  $\kappa(t)$  nunca se anula, lo que mantendremos en adelante.

Antes teníamos como ejemplo el tren y su vía. Ahora hemos de imaginar la trayectoria de un avión con velocidad 1 en el espacio. Cuanto más bruscamente gire el avión en su vuelo, mayor será  $T'$  y por ello  $\kappa = \|T'\|$ . En términos físicos,  $\kappa = \|T'\| = \|\alpha''\|$ , luego  $\kappa$  es el módulo de la aceleración. Nuevamente, una trayectoria con bruscos giros es una trayectoria con aceleraciones y curvaturas altas.

Podemos preguntarnos si, dado que empezamos con  $T' = \kappa N$ , no tendremos también  $N' = -\kappa T$ ; es decir, una ecuaciones de Frénet-Serret idénticas a (1). Pues no; en general  $N'$  no es proporcional a  $T$ . Sin embargo, veremos que hay otras ecuaciones de Frénet-Serret, aunque algo más complejas. Para cada  $t \in \mathbb{R}$  añadamos a  $\{T(t), N(t)\}$  un tercer vector  $B(t)$  de modo que  $\{T(t), N(t), B(t)\}$  sea una base de vectores unitarios y mutuamente perpendiculares. Se pide además que esté bien orientada en un sentido técnico que ignoraremos. A efectos prácticos se trata de forzar una elección única de  $B$  como vector unitario ortogonal a  $T$  y  $N$  de entre las dos posibles.

Si queremos obtener algo análogo a las ecuaciones (1) para curvas planas, empezamos por derivar  $N'$  y expresarlo como combinación lineal de  $T$ ,  $N$  y  $B$ , haciendo lo mismo con  $B$ . El resultado es mucho más sencillo que lo que cabría esperar, pues obtenemos

$$\begin{cases} T' = \kappa N \\ N' = -\kappa T + \tau B \\ B' = -\tau N \end{cases} \quad \text{o en forma matricial} \quad \begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Decimos que es sencillo porque en las ecuaciones de  $N'$  y  $B'$  podían haber salido hasta seis coeficientes diferentes de  $T$ ,  $N$  y  $B$ . Sin embargo, tres coeficientes son ceros, en otro aparece  $\kappa$  y, solo hay una nueva función  $\tau$ . Si se miran en su forma matricial, las ecuaciones son no meramente simples, sino también simétricas. Las ecuaciones (3) son las ecuaciones de Frénet-Serret para curvas alabeadas. Si  $\alpha$  no tiene velocidad 1 sino  $v > 0$  (función posiblemente no constante) hay que multiplicar el lado derecho de las tres ecuaciones por  $v$ .

La función  $\tau$  es una segunda curvatura; de hecho así se llamaba clásicamente. Hoy día se la llama **torsión**. Hemos llegado a la torsión siguiendo una guía algebraica; luego comentaremos en términos más visuales que representa. Lo verdaderamente importante de (3) es que nos permite repetir el razonamiento bosquejado para curvas planas en el sentido de que el par  $(\kappa, \tau)$  determina esencialmente la curva. En efecto, seguimos teniendo una ecuación diferencial determinada por  $(\kappa, \tau)$  en la incógnita vectorial

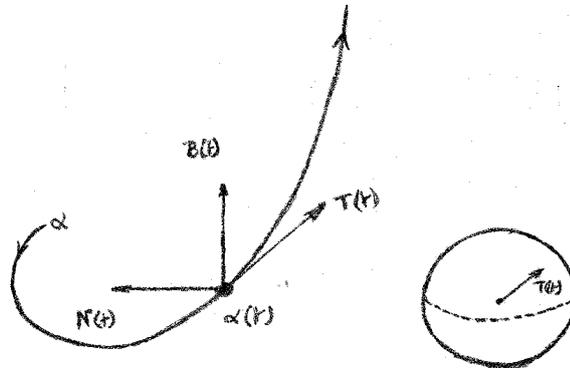


Figura 2: La base de Frénet en el espacio

$(T, N, B)$ , la resolvemos e integrando  $\alpha' = T$  llegamos a  $\alpha$ . Las constantes arbitrarias que salen por el camino mueven la posición de la trayectoria en el espacio, pero no alteran su forma. Resumiendo al máximo y con la terminología clásica: las dos curvaturas  $(\kappa, \tau)$  determinan esencialmente la curva. Lo visto para curvas planas se repite de modo idéntico para curvas espaciales.

Queda pendiente visualizar  $\tau$ , la torsión. Previamente hemos de resolver una cuestión. ¿Cómo se define el *plano* tangente en un punto  $p_0 = \alpha(t_0)$  de una curva espacial. La idea es bastante sencilla. Tomamos la recta tangente  $L$  a  $\alpha$  en  $p_0$  y otro punto  $\alpha(t)$ ,  $t \neq t_0$ . La recta  *fija*   $L$  y el punto  *móvil*   $\alpha(t)$  determinan un plano móvil  $\Pi(t)$  que siempre contiene a  $L$  y que, según se mueve  $t$ , va girando en torno a  $L$ . Si hacemos tender  $t$  a  $t_0$ , el plano  $\Pi(t)$  “tiende” a un plano  $O(p_0)$ . Intuitivamente,  $O(p_0)$  es el plano tangente en  $p_0$ . (Obsérvese que se ha seguido una idea análoga a la de definir para una curva la recta tangente en  $p_0$  como la “recta límite” de las secantes dadas por  $p_0$  y  $\alpha(t)$  cuando  $t$  tiende a  $t_0$ .) La terminología clásica para  $O(p_0)$  es la de **plano osculador**, aunque bien podemos llamarlo plano tangente. Se puede probar que, aparte de pasar por  $p_0$ ,  $O(p_0)$  tiene otra propiedad que lo fija unívocamente: el vector  $B(t_0)$  es unitario y ortogonal a él. Pues bien, con esto, fijémosnos en la tercera ecuación  $B' = -\tau N$  de (3). El vector unitario  $B$ , traza una curva en la esfera unitaria y  $\tau$  nos da la medida de esa velocidad, más precisamente  $\|B'\| = |\tau|$ . La torsión es la velocidad de oscilación del plano osculador.

## 4. Superficies

Nuestras superficies  $M$  estarán en  $\mathbb{R}^3$  y no daremos definición formal. Sin embargo tenemos que llamar la atención sobre el hecho de que si bien una curva es una función, una superficie es un conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^3$ , por supuesto, no arbitrario, debiendo carecer de picos, aristas y cualquier irregularidad que le impida tener plano tangente en cada punto. Supondremos que tenemos definido en cada  $p \in M$  un vector  $N(p)$  unitario y ortogonal al plano tangente<sup>1</sup>  $T_p M$  en  $p$ . Hay superficies como la banda de Moebius en las que tal  $N$  no existe y que consideraremos excluidas de nuestra exposición. Si existe  $N$ , hay al menos otra normal unitaria, pues  $-N$  también sirve. Elegiremos una **normal unitaria**  $N$  adscrita a  $M$  para siempre.

La idea inicial para el estudio de  $M$  en un  $p \in M$  es muy sencilla. Tomemos un vector tangente unitario  $v$  en  $p$ ; o sea,  $v \in T_p M$  y  $\langle N(p), v \rangle = 0$  ( $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto euclidiano en  $\mathbb{R}^3$ ). Hay un plano  $\Pi_v$  que pasa por  $p$  en cuya dirección están los vectores  $v$  y  $N(p)$ . En paramétricas,

$$\Pi_v : x = p + \lambda v + \mu N(p), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

<sup>1</sup>En el desarrollo formal de la materia el plano tangente es siempre un plano *vectorial*. Sin embargo, en esta exposición informal es más intuitivo y útil imaginarlo como un plano *afín* que pasa por el punto  $p$ .

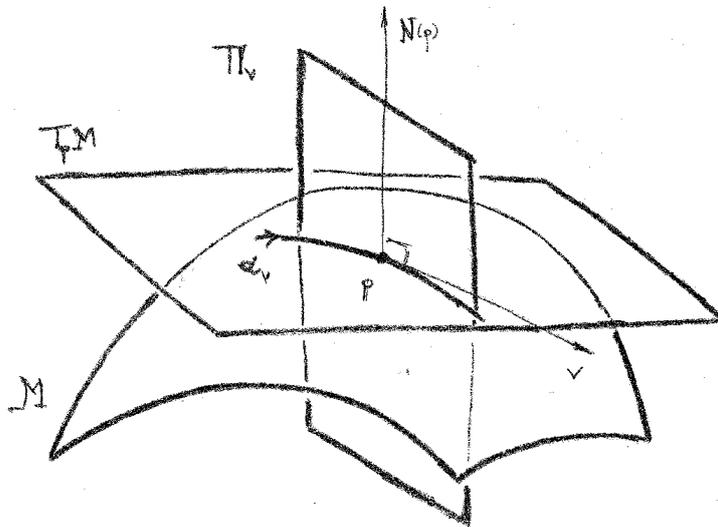


Figura 3: Sección normal

Llamaremos a este plano el plano normal dado por  $v$ . Es fácil intuir que el plano  $\Pi_v$  corta a  $M$  en una curva, queriendo decir ahora con curva “conjunto unidimensional de puntos”. Imaginemos una curva unitaria  $\alpha_v$  que toma valores en  $\Pi_v \cap M$  y que en  $t = 0$  cumple  $\alpha_v(0) = p$  y  $\alpha_v'(0) = v$ . Para abreviar llamaremos a  $\alpha_v$ , que es única salvo en su intervalo de definición, la **sección normal asociada a  $v$** . Claramente la curvatura  $\kappa_v(0)$  de  $\alpha_v$  en  $t = 0$  nos da información sobre cómo se curva la superficie en el espacio: altas curvaturas (en valor absoluto) son equivalentes a que la superficie se curve mucho. Por el contrario, si la superficie se curva poco, siendo el caso más extremo aquel en que la recta  $x = p + tv$  está contenida en  $M$ , se tiene que las  $\kappa_v(0)$  son pequeñas. Si la recta  $x = p + tv$  está contenida,  $\kappa_v(0) = 0$ . Podemos pues imaginarnos situados en  $p$  y moviendo  $v$  entre los vectores tangentes unitarios para luego anotar los números  $\kappa_v(0)$ .

Queremos comentar una cuestión técnica pero importante para entender otras ulteriores. Cuando hablamos al principio de la curvatura de curvas planas dijimos que había que elegir un sentido de giro en el plano. Nuestro plano, aquel en que toma valores  $\alpha_v$  no es  $\mathbb{R}^2$  sino el plano  $\Pi_v$ . Nuestro sentido elegido de giro, el equivalente a “girar a izquierdas” en  $\mathbb{R}^2$ , es el tomado al girar de  $v$  a  $N(p)$  por el camino más corto.

El plano  $\Pi_v$  contiene una recta

$$L_v : x = p + \lambda v, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

que divide a  $\Pi_v$  en dos semiplanos (¡mirar el signo de  $\mu$ !)

$$\Pi_v^+ : x = p + \lambda v + \mu N(p), \quad \mu \geq 0, \quad \Pi_v^- : x = p + \lambda v + \mu N(p), \quad \mu \leq 0.$$

Verbalmente, en  $\Pi_v^+$  esta  $p + N(p)$  y  $\Pi_v^-$  es el otro semiplano.

Vamos a relacionar la forma de  $\alpha_v$  y el signo de  $\kappa_v(0)$ . Imaginemos que  $\alpha_v$  tiene su traza en  $\Pi_v^+$ . Esto la fuerza a girar a izquierdas y por tanto  $\kappa_v(0) > 0$ . Análogamente, si  $\alpha_v$  tiene su traza en  $\Pi_v^-$  queda forzada a girar a derechas por tanto  $\kappa_v(0) < 0$ . Volveremos a esto al tratar la curvatura de Gauss.

Hay varios resultados sorprendentes y difícilmente intuibles a primera vista.

1. Al moverse  $v$  en el círculo unitario de  $T_p M$  y determinar el mínimo  $k_1(p)$  y máximo  $k_2(p)$  de la función resultante, descubrimos que los vectores unitarios  $v_i$ ,  $i = 1, 2$ , tales que  $\kappa_{v_i}(0) = k_i(p)$  son ortogonales. Tenemos pues una base ortonormal distinguida  $\{v_1, v_2\}$  en  $T_p M$  y dos valores distinguidos  $k_i(p)$  de las curvaturas.

2. Las dos curvaturas  $k_i(p)$  determinan cualquier otra curvatura. En efecto, si tenemos un vector unitario  $v = (\cos \omega) v_1 + (\sin \omega) v_2$ , se tiene que la curvatura  $\kappa_v(0)$  es expresable como

$$\kappa_v(0) = (\cos \omega)^2 k_1(p) + (\sin \omega)^2 k_2(p).$$

Las curvaturas  $k_1(p) \leq k_2(p)$  se las llama las **curvaturas principales** en  $p$ . Verdaderamente hacen honor a su nombre pues la fórmula precedente nos dice que, una vez conocidas, podemos saber la curvatura en cualquier otra dirección. Este descubrimiento hizo que se estudiaran combinaciones de las  $k_i(p)$ . Por ejemplo, las **curvaturas media y de Gauss** se definen por

$$H(p) = \frac{1}{2}(k_1(p) + k_2(p)), \quad K(p) = k_1(p) k_2(p).$$

La curvatura media es el promedio de las curvaturas principales. La idea original para definir  $K$  bien pudo ser otro promedio de dos números  $a, b > 0$ , que es  $\sqrt{ab}$ . No se eligió  $\sqrt{k_1(p) k_2(p)}$ , sino que se quitó la raíz pues el radicando puede ser negativo.

Las curvaturas  $k_1, k_2, H$  y  $K$  aparecen de una forma muy armónica, fácil para el cálculo y muy próximo a nuestra intuición geométrica si se adopta un enfoque distinto al de las secciones normales. Imaginemos una curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  con  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = v \in T_p M$ . Dijimos al principio que  $M$  tiene una normal *unitaria*  $N$ , luego  $N \cdot \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una curva trazada sobre  $\mathbb{S}^2$ , la esfera estándar de  $\mathbb{R}^3$  (centro el origen y radio 1). Tal como vimos en las curvas, la velocidad en  $t = 0$  de  $N \cdot \alpha$  nos da una idea de cómo se curva la superficie: a mayor curvatura (en sentido intuitivo) mayor  $v$  (al menos en módulo). Observemos que, con la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \{N \cdot \alpha(t)\} = dN(p)(\alpha'(0)) = dN(p)(v).$$

Es fundamental tener en cuenta que la derivada  $(N \cdot \alpha)'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \{N \cdot \alpha(t)\}$  mide el cabeceo de la normal y por tanto la curvatura (en sentido intuitivo) en  $p \in M$ . La función  $S(p)$  es pues<sup>2</sup>

$$(N \cdot \alpha)'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \{N \cdot \alpha(t)\} = S(p)(v), \quad S(p) : T_p M \longrightarrow T_p M,$$

con la propiedad de ser lineal. Para cada función lineal  $L : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  podemos considerar sus valores y vectores propios (puede haber problemas de existencia), su traza y su determinante. Pues bien, se tiene que

1. Los valores y vectores propios de  $L = S(p)$  existen siempre y son respectivamente  $\{k_1(p), k_2(p)\}$  y  $\{v_1, v_2\}$ . Como consecuencia,

$$S(p)(v_i) = k_i(p) v_i, \quad i = 1, 2.$$

2.  $H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(S(p))$ ,  $K(p) = \det(S(p))$ ; o sea las curvaturas media y de Gauss son la semitrazada y el determinante de la transformación de Weingarten.

Esta conexión entre la idea geométrica y la algebraica permite desarrollar la teoría ya que las posibilidades de cálculo con el Álgebra Lineal son enormes.

Nos vamos a centrar<sup>3</sup> en la curvatura de Gauss  $K$ . Por lo dicho en **1**, en la base  $\{v_1, v_2\}$  la función lineal  $S(p)$  tiene matriz diagonal

$$S(p) = \begin{pmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{pmatrix},$$

siendo los  $k_i(p)$  las curvaturas principales. Por tanto,

$$K(p) = \det S(p) = \det \begin{pmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{pmatrix} = k_1(p) k_2(p). \quad (4)$$

<sup>2</sup>Suele definirse  $S(p)(v) = -(N \cdot \alpha)'(0)$  con el signo menos para evitar la aparición de signos menos en otras fórmulas.

<sup>3</sup>La curvatura media  $H$  es también muy importante pues las superficies con  $H = 0$  son las **superficies minimales**, objeto de una amplia teoría pero que no trataremos.

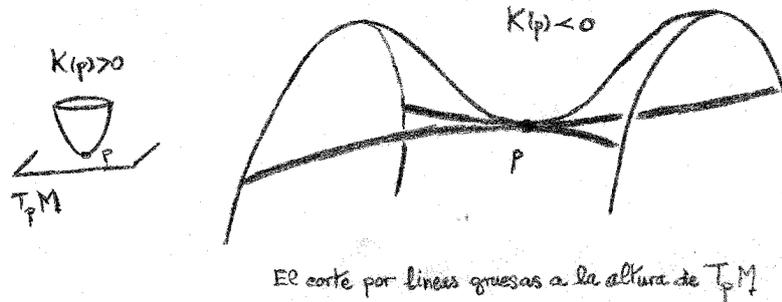


Figura 4: Forma de copa o silla según el signo de  $K$

Con palabras, *la curvatura de Gauss es el producto de las curvaturas principales*. Dado que tenemos una idea geométrica de lo que son las curvaturas principales (recordemos: los valores extremos de las curvaturas de las secciones normales) podemos dar ahora una visión intuitiva de lo que representa  $K(p)$  o, al menos, el signo de  $K(p)$ .

Imaginemos una superficie en el que para todo  $v \in T_p M$  unitario, la sección normal  $\alpha_v$  está siempre en el semiplano contrario a  $p + N(p)$ ; o sea en  $\Pi_v^-$ . (Esto es lo que pasa en la esfera tomando como  $N$  la normal exterior.) Según se ha dicho más arriba, será  $\kappa_v(0) < 0$  para todo  $v$ ; en particular  $k_1(p), k_2(p) < 0$  y nos resulta  $K(p) = k_1(p)k_2(p) > 0$ . Imaginemos ahora una superficie  $M$  en forma de silla de montar. Otra manera de describir  $M$  es dibujar dos montañas vistas lateralmente con un collado entre ellas. El punto  $p$  será el centro del collado (o el centro de la silla de montar si se quiere la otra imagen). Para mayor simetría supondremos las montañas idénticas, con la línea que une las cumbres ortogonal a nuestra visual, con  $T_p M$  horizontal y  $N(p)$  apuntando al cielo. Un montañero que con velocidad uno baje de la cima de la primera montaña, pase por  $p$ , y suba a la de la segunda, traza una curva  $\alpha_v$  en  $\Pi_v^+$  girando a izquierdas. Por tanto,  $\kappa_v(0) > 0$ . Por otra parte, otro montañero que suba al collado (no a la cima) pasando por  $p$  y bajando al valle por el otro lado, traza una curva  $\alpha_w$  en  $\Pi_w^-$  girando a derechas. Por tanto  $\kappa_w(0) < 0$ . Vemos como muy plausible, *y de hecho es cierto* que  $K(p) = k_1(p)k_2(p) < 0$  pues parece ser que las  $k_i(p)$  tendrán signos opuestos. El tosco razonamiento parte de cómo son las secciones planas y deduce el signo de  $K(p)$ , que es positivo si todas las  $\alpha_v$  están en un mismo semiplano y negativo si las  $\alpha_v$  no cumplen esto.

Hay que decir que se puede probar con mayor dificultad técnica que  $K(p) > 0$  implica los entornos de  $p$  suficientemente pequeños quedan a un lado de  $T_p M$  y que  $K(p) < 0$  implica que por pequeño que sea el entorno  $U$  de  $p$  siempre hay puntos  $q \in U$  en los dos *semiespacios* en que  $T_p M$  divide a  $\mathbb{R}^3$ . El caso  $K(p) = 0$  no tiene respuesta sencilla. Si tomamos como  $M$  un toro; o sea, el neumático de un coche, los puntos  $p$  en contacto con el suelo tienen  $K(p) > 0$  y los  $p$  más próximos al centro de la rueda tienen  $K(p) > 0$ . Más todavía, tracemos dos círculos  $C_1$  y  $C_2$  en  $M$  formados por los puntos más alejados y más cercanos al plano de simetría del coche; quitándolos tenemos dividido  $M$  en dos partes. Si por ejemplo, tomamos un punto  $q$  en la parte interior (la más cercana al eje de la rueda), vemos que  $T_q M$  corta a  $M$  cerca de  $q$  luego ahí es  $K(q) < 0$ . Análogamente si  $p$  queda en la parte exterior, dado que el plano  $T_p M$  no deja a  $M$  enteramente a un lado, deducimos que  $K(p) > 0$ . Los puntos de los  $C_i$  tienen curvatura cero.

## 5. Teoremas sobre la curvatura de Gauss

### 5.1. El teorema egregio de Gauss

Si a cada  $p \in M$  le asignamos  $K(p)$  tenemos una función  $K : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Esta función puede ser constante, mantener signo constante o cambiar de signo. Por ejemplo, es fácil adivinar que la esfera

tendrá  $K$  constante pues todas las secciones normales son arcos de círculo con radio el de la esfera. Así pues  $k_1(p) = k_2(p) = c$  (constante) y  $K(p) = c^2$ . Los cálculos analíticos dan  $c = \pm 1/r$  siendo  $r$  el radio de la esfera. La esfera estándar tiene pues  $K = 1$ . Una superficie en forma de elipsoide (una lenteja) cumple que para cada  $p$ ,  $M$  queda por completo a un lado de  $T_p M$  y según vimos más arriba esto nos lleva a  $K > 0$ , si bien la falta de simetría nos dice que  $K$  no será constante. Este mismo razonamiento nos permite adivinar que un punto concreto  $p \in M$  a distancia máxima del origen debe verificar  $K(p) > 0$  pues  $M$  está contenida en el semiespacio determinado por  $K(p)$  donde está el propio origen. Finalmente, un toro (el neumático de más arriba) tiene puntos donde  $K$  es positiva, nula o negativa.

La curvatura tiene una importante relación con las isometrías. ¿Qué es una isometría? Consideremos  $\phi : M \rightarrow \bar{M}$  una función biyectiva, diferenciable y con inversa diferenciable, que llamaremos **difeomorfismo**. (No es preciso tener una idea exacta de los conceptos, basta admitir que las definiciones son análogas a las de las funciones entre abiertos del espacio euclidiano.). Diremos que  $\phi$  es entonces una **isometría** si preserva las longitudes de las curvas<sup>4</sup>; o sea, que si  $\alpha : I \rightarrow M$  es una curva en  $M$ ,  $\bar{\alpha} = \phi \cdot \alpha : I \rightarrow \bar{M}$ , que es una curva en  $\bar{M}$ , tiene la misma longitud que  $\alpha$ . La idea de longitud de curvas permite definir una **distancia** en  $M$ . En efecto, dados  $p, q \in M$  consideramos todas las curvas  $\alpha$  que unen  $p$  con  $q$  obteniendo el conjunto  $L(p, q)$  de sus longitudes. el ínfimo de este conjunto es la **distancia**  $d(p, q)$  entre  $p$  y  $q$ . Para entender el concepto conviene imaginarse un lago con islas y dos boyas  $p, q$  en él. La distancia  $d(p, q)$  no es la distancia que necesita *volar* un pato en línea recta para ir de  $p$  a  $q$ , pudiendo pasar sobre tierra. El pato tiene que ir *nadando* e, intuitivamente, la longitud de la trayectoria más corta es la distancia. Se puede probar que se da para un difeomorfismo la equivalencia entre preservar longitudes de curvas y preservar distancias.

El **teorema egregio de Gauss** dice que una condición necesaria (pero no suficiente) para que el difeomorfismo  $\phi : M \rightarrow \bar{M}$  sea una isometría es que se cumpla

$$\bar{K} \cdot \phi = K; \quad \text{o sea, la conmutatividad del diagrama}$$

$$\begin{array}{ccc} & \phi & \bar{M} \\ & \nearrow & \downarrow \bar{K} \\ M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & K & \end{array}$$

El origen de este teorema está en el problema de si existe el mapa perfecto. Mapa perfecto es aquel que en escala 1:1 permite representar una esfera o parte de ella en un plano preservando las distancias. Con más detalle, hay que determinar dado un abierto  $U$  de una esfera si hay una isometría  $\phi : U \rightarrow \bar{U}$  siendo  $\bar{U}$  un abierto del plano. Tanto la esfera como el plano tienen curvatura constante, pero en la esfera es  $> 0$  y en el plano es  $0$ . No hay pues mapa perfecto, incluso aunque nos conformemos con representar una parte  $U$  extraordinariamente pequeña de la esfera. Es curioso que haya mapas que preservan ángulos y áreas, pero preservar distancias es imposible.

El teorema egregio tiene también otras aplicaciones. Imaginemos una curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  en el espacio y un segmento móvil cuyo punto medio de apoya en  $\alpha$  moviéndose a lo largo de ella. Los puntos barridos son de la forma

$$x = \alpha(t) + sV(t), \quad t \in I, |s| < a.$$

Los puntos  $x$  así definidos forman una superficie, caso particular de las superficies regladas. Puede probarse que las superficies regladas tienen  $K \leq 0$  Ya comentamos antes que un elipsoide tiene  $K > 0$ . Es por tanto imposible encontrar una isometría entre un trozo (por pequeño que sea) de una superficie reglada y una esfera.

Llegados aquí, podemos preguntarnos hasta qué punto es cierto el recíproco del teorema egregio. Una buena respuesta la da el **teorema de Minding**: Si suponemos que  $K$  y  $\bar{K}$  son iguales y *constantes* (digamos a  $c$ ) para cada par de puntos  $p \in M$  y  $\bar{p} \in \bar{M}$  hay entornos  $U$  y  $\bar{U}$  de estos puntos y una isometría  $\phi : U \rightarrow \bar{U}$ . Se puede ver por ejemplo que para  $c = 1$  hay modelos de superficies con curvatura 1 que *no son* esferas. “No ser” significa que no hay isometrías  $\phi : M \rightarrow \bar{M}$ , pero sí las hay entre pequeños trozos  $U$  y  $\bar{U}$ . Se podrían pues hacer mapas perfectos en estas superficies  $\bar{M}$  de pequeños trozos de una esfera. El caso  $c = -1$  es extraordinario pero en otro sentido. Su ejemplo más significativo se llama la **pseudoesfera**, una superficie en forma de trompeta no acotada. que sirve de modelo para las geometrías no euclidianas.

<sup>4</sup>No es la definición más manejable, pero sí la más intuitiva.

El teorema egregio tiene otras consecuencias trascendentales. Imaginemos una hoja de papel, que es un material flexible pero no elástico. Si pintamos una curva en ella y la alabeamos, la curva no ve su longitud alterada. Hay pues una isometría entre la hoja plana y la alabeada y por ello las dos tienen  $K = 0$ . En la hoja plana es obvio; en la hoja alabeada, que puede adoptar infinidad de formas, no tanto. Aparte de ese prodigioso método de calcular instantáneamente y sin esfuerzo, debe llamarnos la atención el que un ente como  $K$ , que en principio debería depender de como esté la hoja en el espacio ambiente, dependa en realidad solo de las distancias internas en  $M$ . En efecto, si volvemos atrás y buscamos la definición (4) de  $K(p)$  como  $\det S(p)$  y a su vez recordamos que  $S(p)(v)$  es la medida del cabeceo de la normal  $N$  en la dirección de  $v$ , uno piensa inmediatamente que  $S(p)(v)$  dependerá de la forma de  $M$  dentro del espacio. Volviendo a la hoja de papel, si esta está plana sobre la mesa,  $N$  es constante y su derivada es nula luego  $S(p)$  es nula para todo  $p$ . Sin embargo, si se enrolla la hoja en torno a una columna cilíndrica,  $N$  deja de ser constante y tenemos  $S(p) \neq 0$ . Es muy razonable pensar que si  $S(p)$  depende de como esté  $M$  en el espacio, a su determinante, que es  $K(p)$ , le pasará lo mismo. Pues no es así, por el teorema egregio. Se abre la puerta a cuestiones muy interesantes: ¿Que propiedades geométricas dependen de la posición de  $M$  en el espacio y cuales de su geometría interna? La definición precisa de las propiedades de la geometría interna es “aquellas que se conservan por isometría”. Esta geometría y propiedades se califican de **intrínsecas**. La curvatura de Gauss es una magnitud intrínseca; las otras curvaturas antes vistas, no.

## 5.2. Cómo determinar una esfera por su curvatura

Diremos que una superficie  $M$  es **conexa** si dos puntos cualesquiera de ella se pueden unir por una curva continua, y que es **compacta** si (a) Está acotada; o sea, cabe dentro de una esfera de radio suficientemente grande y (b) es cerrada; o sea, si una sucesión  $(x_n)$  de puntos de  $M$  converge a  $x \in \mathbb{R}^3$  ha de ser  $x \in M$ . En esta sección, para abreviar, “superficie” querrá decir “superficie compacta y conexa”. ¿Qué hay que pedir a la curvatura de una tal superficie para que sea una esfera? He aquí dos teoremas.

El primer teorema es el de **Hilbert-Liebmann**. Dice que si  $K$  es constante y  $K > 0$  la superficie es una esfera. El teorema de Minding, visto anteriormente, nos da algo parecido, pero para pequeños trozos de superficie; sin embargo este teorema es global.

El segundo teorema es el de **Jellet-Liebmann** y aparece la curvatura media  $H$ ; no la de Gauss. Dice que si  $H$  es constante,  $M$  es una esfera.

La expresión, un tanto ambigua “ser una esfera” significa en ambos casos que  $M$  es isométrica a una esfera de radio adecuado. Ambos teoremas sugieren una idea general un tanto difusa pero cierta: La curvatura condiciona mucho la geometría de la superficie e imponerle propiedades limita su naturaleza.

El último teorema no trata sobre esferas sino sobre algo parecido: los **ovaloides**. Son aquellas superficies  $M$  tales que en cada  $p \in M$  se tiene que  $M - \{p\}$  queda enteramente en uno de los semiespacios abiertos de  $T_p M$ . Una lenteja es un ovoide; una patata posiblemente no, aunque si es “bien redonda” sí que puede serlo. Ya se comentó antes que tales superficies tienen  $K > 0$ , aunque desde luego puede no ser constante. Pues bien, nuestro último teorema dice que el recíproco es cierto:  $K > 0$  es una condición *suficiente* para ser ovoide.

## 5.3. El teorema de Gauss-Bonnet

En toda la sección, al igual que en la anterior, las superficies seguirán siendo compactas y conexas. Vamos a dar al lector una idea aproximada del significado de  $\int_M f dA$ , la integral de una función numérica  $f$  sobre la superficie  $M$ . Si  $M$  no fuera una superficie sino un intervalo  $[a, b]$  sabemos que la integral de  $f$  sobre  $M$ , tradicionalmente denotada por  $\int_a^b f(x) dx$  es un “límite” de sumas

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Con más detalle, troceamos  $[a, b]$  en subintervalos  $[x_{i-1}, x_i] = J_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  suponiendo que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

y que  $\bar{x}_i \in J_i$ . La idea de que  $\int_a^b f(x) dx$  sea límite de esas sumas (que no pueden numerarse) se define como que para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta$  tal que si las longitudes de los  $J_i$ , que son los números  $x_i - x_{i-1}$  son menores que  $\delta$ , cualquiera de las correspondientes sumas cumple

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) (x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon.$$

Con esto es fácil intuir  $\int_a^b f(x) dx$  como el área entre el grafo de  $f$  y el eje  $OX$  con un signo menos en los tramos en que  $f$  es negativa. La teoría se extiende a funciones

$$f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Describimos el caso  $n = 2$ . Troceamos el rectángulo  $M = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  en rectángulos  $J_{ik}$  en los que se eligen puntos  $\bar{x}_{ik}$  y las sumas se convierten en

$$\sum_{i,k} f(\bar{x}_{ik}) A(J_{ik})$$

representando  $A(J_{ik})$  el área del rectángulo  $J_{ik}$ . Se exige que estos rectángulos sean “casi” disjuntos pues, como mucho, se pueden cortar en parte de sus bordes. Nuevamente sucede que estas sumas “convergen” a un número denotado por  $\int_M f dA$  interpretable como el volumen entre el grafo de  $f$  y el plano  $OXY$ , con un signo menos en las zonas en que  $f$  es negativa. La convergencia resulta suponiendo que las áreas  $A(J_{ik})$  se hacen tan pequeñas como sea necesario.

La transición a una superficie  $M$  puede describirse de modo aproximado. Se trocea  $M$  en partes “casi disjuntas”  $J_\lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , se elige  $\bar{x}_\lambda \in J_\lambda$  y se tiene una suma

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} f(\bar{x}_\lambda) A(J_\lambda), \quad A(J_\lambda) \text{ es el área de } J_\lambda,$$

y se ve que estas sumas “convergen” a un número  $\int_M f dA$  cuando las áreas  $A(J_\lambda)$  son suficientemente pequeñas. No le costará mucho al lector convencerse de que si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  representa la densidad puntual de una superficie “de la vida real” (o sea,  $f(x)$  es la densidad *superficial* del material del que está hecho  $M$  cerca de  $x$ ), el número  $\int_M f dA$  representa la masa de la superficie. Como caso particular, si  $f = 1$  (constante), la integral es el área de  $M$ . Esto viene sugerido por  $dA$  en la notación de la integral. Para lo que viene es esencial convencerse de que si  $f$  mide de forma puntual una magnitud en términos de cantidad por unidad de área,  $\int_M f dA$  representará la totalidad de esa magnitud en  $M$ .

Pues bien, imaginemos que integramos la curvatura de Gauss  $K$ . ¿Qué representa  $\int_M K dA$ ? Si vemos  $K$  como una medida puntual de la curvatura, una “densidad puntual de curvatura”, la integral  $\int_M K dA$  será toda la curvatura de la superficie, la **curvatura íntegra**. De hecho, clásicamente se usa el nombre latino (por tanto sin tilde) **curvatura íntegra** para nombrarla. Hemos dicho que si  $f$  es la densidad puntual,  $\int_M f dA$  es la masa. Parece una afirmación banal remarcar que cualquier valor es posible para la masa  $\int_M f dA$ . Podemos pensar igualmente que al calcular  $\int_M K dA$  para  $M$  (recordemos: compacta y conexa) resultará cualquier número. Hay dos grandes sorpresas:

1.  $\int_M K dA$  es un múltiplo entero de  $2\pi$ ;  $\int_M K dA = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , pero ni siquiera todos los valores de  $n$  son posibles. Solo aparecen valores  $n = 2(1 - g)$ ,  $g = 0, 1, 2, 3, \dots$ .
2. Las superficies difeomorfas dan el mismo valor para la integral.

Esto es fundamental y vamos a explicarlo con cierto detalle, pero llevará tiempo.

Un difeomorfismo  $\phi : M \rightarrow \bar{M}$  es una biyección diferenciable y con inversa diferenciable (o sea, como una isometría pero quitando la condición de preservar distancias o longitudes de curvas). Se imagina el concepto como una deformación de la superficie alterando quizás las distancias pero sin rasgarla. Dos superficies difeomorfas son, en lenguaje no técnico, dos superficies deformables usando su elasticidad, una en otra. Una esfera y la superficie de una patata son difeomorfas. En todo caso, hay que tener cuidado con la intuición, como ahora mostraremos. Imaginemos una cuerda gruesa pero flexible, por ejemplo, una cuerda de escalada. Le hacemos un nudo muy complicado y pegamos los extremos de la

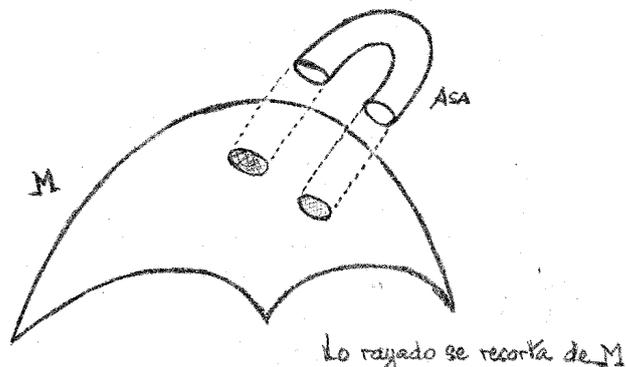


Figura 5: Pegando un asa a la superficie

cuerda llamando  $M$  a la *superficie* de la cuerda. Si no hacemos nudo alguno en la cuerda y la extendemos sobre el suelo formando un círculo, la superficie de la cuerda es un toro  $\bar{M}$ . ¿Son difeomorfas  $M$  y  $\bar{M}$ ? Podemos pensar que no, pues no podemos desanudar  $M$  cuyos extremos están pegados. Sin embargo son difeomorfas. Describimos  $\phi^{-1} : \bar{M} \rightarrow M$ . Tomamos un punto  $p$  del toro, lo marcamos con un lápiz, anudamos la cuerda y allí donde en la cuerda anudada esté la marca, ese es el punto  $\phi^{-1}(p)$ . Lo que nos ha podido llevar a pensar que  $M$  y  $\bar{M}$  eran difeomorfas es considerar una condición más fuerte: que para un parámetro  $t \in [0, 1]$  hay *difeomorfismos*  $\phi_t : M \rightarrow \bar{M}_t$  de modo que  $\phi_0 = \text{id}_M$  y  $\bar{M}_1 = \bar{M}$ . Naturalmente nuestra intuición nos dice que, al no poder cortar la cuerda, algún  $\phi_t$  no podrá ser inyectivo. Falla la condición fuerte<sup>5</sup>, pero  $M$  y  $\bar{M}$  son difeomorfas.

Las superficies<sup>6</sup> compactas y conexas de  $\mathbb{R}^3$  tienen un sencillo criterio de clasificación por difeomorfismo. Clasificar significa

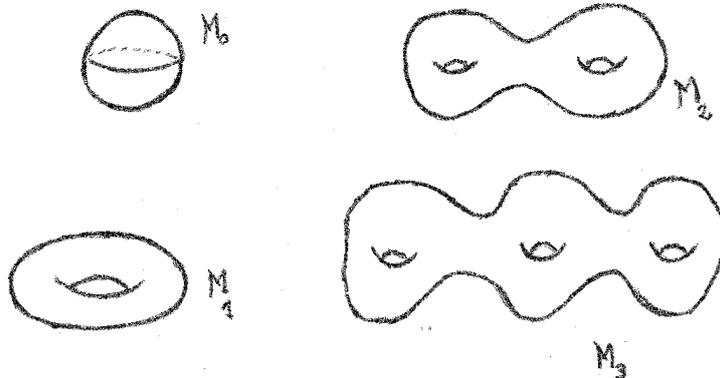
1. Dar una lista de modelos. En nuestro caso serán denotados por  $M_0, M_1, M_2, \dots$ .
2. Asignar a cada superficie, incluidos los modelos, algún ente matemático. En nuestro caso será el número de asas que, técnicamente, se llama el **género**  $g$ .
3. Conseguir que la coincidencia de estos entes para dos superficies  $M$  y  $\bar{M}$  sea equivalente a que sean difeomorfas. En nuestro caso,  $M_k$  tendrá género  $k$  y las superficies con género  $k$  son exactamente las difeomorfas a  $M_k$ .

Empezamos con **1**. Definimos  $M_0$  como la esfera y  $M_1$  como el toro (la superficie de una rosquilla). Dada cualquier superficie  $M$ , le añadimos un asa por el siguiente procedimiento: recortamos dos pequeños discos  $D_1$  y  $D_2$  en  $M$  y pegamos un cilindro  $A$  de altura finita a  $M$ , pegando cada círculo extremo de  $A$  a uno de los dos círculos que bordean los  $D_i$ . La superficie resultante es  $M$  con un asa  $A$  añadida. Por definición la esfera  $M_0$  es una superficie sin asas y si le añadimos un asa resulta una superficie difeomorfa al toro  $M_1$ . Para visualizarlo, lo mejor es centrar los discos  $D_i$  en puntos opuestos y deshinchar la esfera para que, cerrando la letra C del asa la complete a un toro. Si al toro  $M_1$  le añadimos un asa, tenemos *por definición*  $M_2$ . Podemos pintar  $M_2$  como la superficie de una doble rosquilla en forma de ocho. La definición general de  $M_0$  es pegar  $k$  asas a la esfera  $M_0$  o pegar un asa a  $M_{k-1}$ .

La parte **2** es sencilla: a cada superficie  $M$  se le asigna su género, que es el número de asas que tenga. La esfera tiene género 0 y el toro género 1. El **teorema de clasificación de superficies** dice que dos superficies compactas y conexas de  $\mathbb{R}^3$  son difeomorfas si y solo si tienen el mismo género. La **característica de Euler** de la superficie  $M$ , denotada por  $\chi(M)$ , es otro entero que suele usarse en

<sup>5</sup>Aunque sea pasarse un poco de rosca, lo que llamo “condición fuerte” es que  $\text{id}_M$  y  $\phi$  sean difeótopas, toscamente definido como ser conectables por una curva de difeomorfismos.

<sup>6</sup>La precisión  $M \subset \mathbb{R}^3$  no es tan superflua como pudiera parecer pues hay superficies en un sentido técnico avanzado que no son “expresables” en  $\mathbb{R}^3$ , como por ejemplo el plano proyectivo.

Figura 6: Modelos de superficies con  $g \leq 3$ 

lugar del género. Se relaciona con él por la fórmula  $\chi(M) = 2(1 - g)$ . Así pues, la característica de la esfera y del toro son respectivamente 2 y 0 y, más generalmente, si  $M$  tiene  $g$  asas (o sea, género  $g$ ),  $\chi(M) = 2(1 - g)$ . Vemos que  $\chi$  toma siempre valores pares y solo  $\geq 0$  para la esfera y el toro.

El **teorema de Gauss-Bonnet** puede enunciarse ahora de modo completo diciendo que

$$\int_M K dA = 2\pi\chi(M) = 4\pi(1 - g). \quad (5)$$

Se constata muy bien en la esfera de radio 1 pues ahí  $K = 1$  (constante) luego  $\int_M K dA = \int_M dA$  es su área, que vale  $4\pi$ . Por otra parte,  $g = 0$  luego  $\chi(M) = 2$  y queda  $4\pi = 4\pi$ .

Las profundas implicaciones del teorema de Gauss-Bonnet se basan en que relaciona la Geometría Diferencial y la Topología, permitiendo pasar información de uno a otro lado. Por ejemplo:

1. La curvatura  $K$ , como ya hemos visto varias veces en lo que antecede, condiciona muchísimo como puede ser la superficie  $M$ . Si es  $K \geq 0$  y no nula,  $\int_M K dA > 0$  y solo puede verificarse (5) si  $\chi(M) > 0$ ; o sea, si  $M$  es difeomorfa a una esfera.
2. Si deformamos  $M$  difeomorficamente a  $\bar{M}$ , es  $\chi(M) = \chi(\bar{M})$  luego  $\int_M K dA = \int_{\bar{M}} \bar{K} dA$ . Por supuesto  $K$  puede diferir mucho de  $\bar{K}$ , pero sus integrales valdrán lo mismo. Por ejemplo, si  $M$  es una esfera y  $\bar{M}$  una patata, que es difeomorfa a  $M$ , puede muy bien suceder que la patata tenga concavidades (o sea, deje de ser un ovaloide tal como se definió en la página 9). En estas concavidades,  $\bar{K}$  será negativa. Aun así, las integrales, las *curvatura integra*, coinciden, luego es como si la aparición de concavidades al deformarse  $M$  se viera compensada por un incremento de la convexidad en otras parte, de modo que al integral, la cantidad total de curvatura debe mantenerse constante. Es una maravillosa excepcionalidad que, por extrema que sea la variación de  $K$  a consecuencia de la deformación, se mantenga inalterada su integral.
3. Las superficies difeomorfas al toro están “equilibradas” por lo que a curvatura se refiere: las partes con curvatura negativa compensan aquellas que tienen curvatura positiva para dar  $\int_M K dA = 0$ . El cero resulta evidentemente de ser  $\chi(M) = 0$ .
4. Si excluimos a la esfera y al toro, las demás superficies tienen  $\chi(M) < 0$ , luego  $\int_M K dA < 0$ . Esto es como decir que la curvatura negativa predomina sobre la positiva. ¡Ojo! no decimos que haya una mayor área con curvatura negativa, sino que la combinación en forma de productos de áreas por valores de la curvatura negativa pesa más en la integral que combinación análoga cuando el área es positiva. De hecho, en el toro, la parte de curvatura negativa, el interior del neumático, tiene menor área que la parte de curvatura positiva, el exterior del neumático. Sin embargo, está más flexionada la parte interior que la exterior y esto da *curvatura integra* cero.

## 5.4. Geodésicas

Las curvas más importantes de una superficie son las geodésicas. Una **geodésica** de  $M$  es una curva  $\alpha : I \rightarrow M$  cuya aceleración  $\alpha''$  es siempre ortogonal a  $M$ ; con mayor precisión, para cada  $t \in I$  se tiene que  $\alpha''(t)$  es ortogonal a  $T_{\alpha(t)}M$ . La definición es adecuada para nuestra exposición, pero no es la que permite obtener de modo más natural directo las mejores propiedades de las geodésicas. En efecto, el concepto de geodésica es en apariencia extrínseco (que significa “no intrínseco”) pues hace referencia al espacio exterior a  $M$ . Sin embargo puede probarse que es en realidad *intrínseco* (en el sentido definido en la página 9) pues solo depende de las magnitudes internas de  $M$  (las distancias y ángulos medibles dentro de  $M$ ) y no de la posición de  $M$  en el espacio  $\mathbb{R}^3$ . Uno puede intuir lo dicho de la siguiente manera. Supongamos que  $M$  está formada por dos láminas sumamente próximas para ser identificadas, a efectos geométricos, como una sola. Nuestra curva  $\alpha$  es una bolita de masa 1 que se desliza en  $M$  (bajo la piel de  $M$ ) sujeta a algún tipo de fuerza  $F$ ; en realidad va entre las dos láminas y sin holgura de ningún tipo. La componente de  $F$  normal a  $M$  no influye en el movimiento pues tal fuerza es contrarrestada por la que las láminas ejercen sobre la bolita. Si descubriéramos que  $\alpha''(t)$  es siempre ortogonal a  $M$  sería como decir que  $\alpha$  no está sujeta a fuerza alguna en sentido tangencial y por tanto  $\alpha$  tendrá un movimiento uniforme. Los habitantes de  $M$  pueden detectar las geodésicas sin necesidad de conocer  $\alpha''$ ; les basta medir si el movimiento en la superficie es uniforme. Como “uniforme” significa que en intervalos constantes de tiempo se recorre la misma distancia, un habitante de  $M$  que pueda medir distancias (y, por supuesto, que tenga un reloj) puede determinar si  $\alpha$  es una geodésica sin necesidad de datos sobre el espacio exterior a  $M$ . Recordando que una isometría  $\phi : M \rightarrow \bar{M}$  es un difeomorfismo que preserva distancias, queda claro que si  $\alpha$  tiene movimiento uniforme en  $M$ ,  $\bar{\alpha} = \phi \cdot \alpha$  lo tendrá en  $\bar{M}$ . Así pues, las isometrías llevan geodésicas en geodésicas.

Hay reglas visuales sencillas para detectar las geodésicas *planas*, y advertimos que muchas lo son. Sea  $H$  un plano de  $\mathbb{R}^3$  y supongamos que  $\alpha$  se mueve con velocidad constante  $c$  en  $M \cap H$ . Llamemos  $u$  a un vector unitario perpendicular a  $H$  y supongamos que en cada  $p \in M \cap H$  los vectores  $u$  y  $N(p)$  son ortogonales (recordemos que  $N$  es la normal unitaria a  $M$ ). Resumiendo, tenemos  $\alpha : I \rightarrow M \cap H$  con velocidad constante siendo  $M$  y  $H$  perpendiculares. Afirmamos que  $\alpha$  es una geodésica. En efecto, representando por  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  al producto euclidiano de  $\mathbb{R}^3$ , derivamos  $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = c^2$  y  $\langle \alpha(t), u \rangle = k$  (constante) y vemos que  $\alpha''(t)$  es ortogonal a  $\alpha'(t)$  y  $u$ . Estos dos vectores son ortogonales y constituyen una base de  $T_{\alpha(t)}M$ , luego  $\alpha''(t)$  es ortogonal a  $T_{\alpha(t)}M$  como queríamos demostrar. Una aplicación directa de esto es tomar como  $H$  un plano de simetría de una superficie  $M$ , obteniéndose que al recorrer  $M \cap H$  con velocidad constante, se traza una geodésica. Si  $M$  es una esfera, llegamos a que los meridianos recorridos con velocidad constante son geodésicas.

No todas las geodésicas son planas. Las hélices de un cilindro son geodésicas si se recorren con velocidad constante. La descripción informal de una hélice es esta: se traza una recta sobre una hoja de papel (si se quiere, recta y hoja son infinitas) se enrolla la hoja para formar un cilindro y la recta se transforma en una hélice. Si se escribe formalmente la fórmula de  $\alpha$  y se deriva dos veces, se obtiene sin más que  $\alpha''$  es ortogonal a  $M$ , luego tenemos una geodésica.

Antes de entrar en la relación entre geodésicas y curvatura citamos propiedades fundamentales que relacionan a las geodésicas con la distancia:

1. Una curva que una  $p$  y  $q$  cuya longitud sea la distancia entre  $p$  y  $q$  debe ser una geodésica.
2. Si la superficie es compacta, podemos asegurar para todo par de puntos  $p, q$  que hay una curva como en 1. Si  $M$  es arbitraria esto sigue siendo posible con tal que  $p$  y  $q$  estén en trozos suficientemente pequeños de  $M$ .

Fijemos  $p \in M$ . Hay multitud de geodésicas  $\alpha$  en  $M$  con  $\alpha(0) = p$ . En un sentido es obvio: si  $\alpha : I \rightarrow M$  es una geodésica y  $J$  es un subintervalo de  $I$ ,  $\alpha|_J$  es una geodésica también. Para evitar estas duplicidades, se entiende por defecto que “geodésica” significa “geodésica maximal”; es decir aquella que no puede extenderse a un intervalo mayor y que  $\alpha(0)$  está definido. Aun con todo esto hay que contar con la posibilidad de que  $\alpha$  maximal no esté definida en todo  $\mathbb{R}$  sino en un intervalo menor. Nosotros, para simplificar la exposición, supondremos las geodésicas maximales definidas en  $\mathbb{R}$ . Si  $M$  es compacta, esto es cierto.

Un teorema fundamental dice que para cada  $v \in T_pM$  hay una geodésica única  $\alpha_v$  determinada por

la doble condición  $\alpha_v(0) = p$  y  $\alpha'_v(0) = v$ ; o sea, pasa en el instante cero por  $p$  llevando velocidad  $v$ . Tenemos una función llamada<sup>7</sup> la **exponencial**

$$\exp_p : T_p M \rightarrow M, \quad \exp_p(v) = \alpha_v(1).$$

Lo que hacemos con ella es tomar un vector tangente  $v$ , arrancar de  $p$  con velocidad  $v$  y paramos en  $t = 1$ . Estamos entonces en  $\exp_p(v)$ . Es como si de alguna manera  $T_p M$  fuese una hoja de papel que por medio de  $\exp_p$  acabara envolviendo  $M$ . Desde luego  $\exp_p$  no es inyectiva. Por ejemplo, en la esfera de radio 1 tomamos como  $p$  el polo norte y como  $q$  el polo sur. Todos los vectores  $v \in T_p M$  con longitud  $\pi$  cumplen  $\exp_p(v) = q$ . Podemos pensar sin embargo que si  $D_r$  es un disco de radio  $r$  centrado en  $p$  es posible que la restricción de  $\exp_p$  a  $D_r$  de un difeomorfismo sobre su imagen definida como  $\bar{D}_r$ . En la esfera de antes, esto es cierto para el disco de radio  $\pi$  (suponemos que los discos son sin borde). Pues bien, con toda generalidad podemos afirmar que, sea cual sea  $M$ , para cada  $p \in M$  existe  $\varepsilon = \varepsilon(p)$  tal que si  $r \leq \varepsilon(p)$  la restricción de  $\exp_p$  da un difeomorfismo entre  $D_r$  y  $\bar{D}_r$ .

Damos ahora un paso más: ¿podrá conseguirse que el difeomorfismo  $\exp_p : D_r \rightarrow \bar{D}_r$  sea además una isometría? En general, no, aunque no quedamos demasiado lejos. Imaginemos dibujadas en  $T_p M$  las líneas radiales  $L$  y los círculos  $C$  centrados en  $p$ . Las curvas  $L$  y  $C$  son ortogonales en los puntos de corte. Digamos lo que  $\exp_p$ , en una superficie *general*, cumple y deja de cumplir con vistas a ser una isometría:

1.  $\exp_p$  lleva las líneas radiales  $L$  en las geodésicas  $\alpha_v$  y se preserva la distancia. Dos puntos distan lo mismo en  $L$  que sus imágenes bajo  $\exp_p$  en  $M$ .
2. las imágenes  $\exp_p(L)$  y  $\exp_p(C)$  se siguen cortando ortogonalmente. Esto refuerza el posible carácter isométrico de  $\exp_p$  pues una isometría debe preservar los ángulos.
3. Sin embargo, las longitudes de los círculos  $C$  y  $\exp_p(C)$  difieren. (En realidad  $\exp_p(C)$  no es un círculo sino una curva cerrada en  $M$ ; una especie de círculo deformado.)

Vemos pues que la exponencial aplica las superficies en forma radial separando las líneas  $L$  de una manera más o menos acentuada de lo que lo están en  $T_p M$ . Para explicarlo mejor, nos imaginamos un abanico puesto plano sobre  $T_p M$  cuyas varillas confluyen en  $p$  y por tanto forman las líneas radiales  $L$ . La exponencial dobla las varillas pegándolas sobre la superficie siendo cada varilla doblada trayectoria de una  $\alpha_v$  (las trayectorias de  $v$ 's proporcionales se superponen). El apartado **3** de arriba nos dice *aproximadamente* que las varillas dobladas pueden estar más o menos separadas que sus correspondientes en  $T_p M$ .

Esta idea de mayor o menor separación de las varillas tras aplicar la exponencial se puede explicar de un modo más preciso. Supongamos que  $\exp_p : D_r \rightarrow \bar{D}_r$  sea un difeomorfismo, elijamos  $s < r$  y sea  $C$  el círculo en  $T_p M$  de radio  $s$  centrado en  $p$ . Lo parametrizamos por

$$\sigma_s(t) = s[(\cos t)u_1 + (\sin t)u_2], \quad t \in [0, 2\pi],$$

siendo  $\{u_1, u_2\}$  una base ortonormal. Es fácil ver que la velocidad a la que se recorre  $C_s$  es  $V_s = s$  (el radio). Necesitamos por tanto a esa velocidad  $2\pi$  segundos para dar una vuelta al círculo  $C_s$ . Pues bien, se puede probar que la velocidad a la que se recorre  $\bar{C}_s$  por medio de

$$\bar{\sigma}_s(t) = \exp_p(\sigma_s(t)) = \exp_p(s[(\cos t)u_1 + (\sin t)u_2]), \quad t \in [0, 2\pi]$$

es, con un pequeño error de aproximación,

$$\bar{V}_s \approx s - \frac{1}{6}K(p)s^3 = V_s - \frac{1}{6}K(p)s^3, \text{ equivalente a } V_s - \bar{V}_s \approx \frac{1}{6}K(p)s^3 \quad (6)$$

siendo  $K(p)$  la curvatura de Gauss en  $p$ . Recordemos que  $\bar{V}_s$  es la velocidad necesaria para dar una vuelta a  $\bar{C}_s$  en  $2\pi$  segundos. Si tenemos que  $\bar{V}_s < V_s$  es porque las geodésicas están más “apretadas”, más “cercanas” en  $M$  que en  $T_p M$ . Es lo que sucede si  $K(p) > 0$ . Al contrario, si  $\bar{V}_s > V_s$  es porque las varillas están más “separadas” en  $M$  que en  $T_p M$ . Se puede comprobar de modo tosco el signo de

<sup>7</sup>El nombre “exponencial” se debe al papel que la exponencial de matrices juega en cierto ejemplos relevantes.

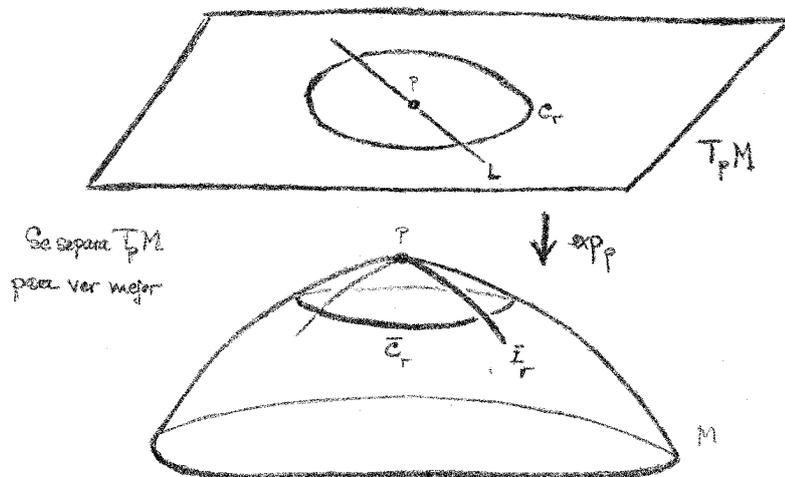


Figura 7: La exponencial

$K(p)$  tomando una pequeña etiqueta adhesiva de papel no elástico como la que llevan muchas naranjas e intentándola pegar *perfectamente* en la superficie. En general será imposible. Sin embargo, si para conseguirlo, siquiera *imperfectamente*, debemos rasgar la etiqueta, es porque la superficie tiene curvatura negativa y si hay que arrugarla es porque la curvatura es positiva. Hay otra explicación un poco más abajo.

De un modo más riguroso podemos interpretar (6) diciendo que  $V_s$  es la velocidad de separación de las geodésicas radiales en el plano, que se toma como patrón. Por otra parte  $\bar{V}_s$  es la velocidad de separación de las geodésicas en  $M$ . El valor  $K(p)$  da una medida de la diferencia de ambas velocidades.

Hay otra fórmula que relaciona la curvatura con los círculos  $\sigma_s$  y  $\bar{\sigma}_s$ . Sean  $L_s$  y  $\bar{L}_s$  sus respectivas longitudes. Para  $s$  suficientemente pequeño se tiene que

$$L_s - \bar{L}_s \approx \frac{\pi s^3}{3} K(p). \quad (7)$$

Queda claro que si  $K(p) > 0$ , la longitud en el plano tangente supera la longitud del círculo enviado a  $M$  por  $\exp_p$ . Esto es intuitivo, pues si la exponencial dobla el disco plano  $D_s$  a  $\bar{D}_s$  *preservando las distancias radiales*, de modo que nuestro disco se convierte en una copa de vino, los círculos  $C_s$  pasan a ser círculos horizontales en la copa, necesariamente más cortos. Si  $K(p) < 0$ , la exponencial alarga las longitudes de círculos al enviarlos al plano tangente. Esto da una explicación de por qué para pegar una etiqueta de papel perfectamente en una superficie, ha de solaparse si la curvatura es positiva y rasgarse si es negativa.

## 6. Un mundo más abstracto y general

La teoría de curvas y superficies es generalizable en muchos aspectos. La disciplina matemática que de ella ha surgido se llama la **Geometría Riemanniana** pues su primer gran impulsor fué Riemann en 1854 con una famosa disertación ante Gauss sobre los fundamentos de la Geometría. Nosotros nos limitaremos a ir señalando lo que un conocedor de la teoría clásica de curvas y superficies va descubriendo según lee obras más generales.

1. Las superficies se transforman en las llamadas **variedades diferenciables**. Son como superficies de dimensión  $m$  arbitraria. La generalización del concepto es superior a la que se observa en Álgebra o Análisis al pasar de  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^m$ . Para empezar, en muchos casos la variedad  $M$  está contenida en cierto  $\mathbb{R}^{m+k}$  con  $k \geq 2$  (las superficies hasta ahora estudiadas están en  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{2+1}$ ). ¿Podemos imaginar una superficie pero formada por puntos de  $\mathbb{R}^5$ ? La definición formal de variedad solo

tiene en cuenta el que cada  $p \in M$  tenga un entorno que sea como un disco de  $\mathbb{R}^m$ , sin referencia alguna a que los puntos de  $M$  estén en un  $\mathbb{R}^q$  específico. Es más, el plano proyectivo  $M$  tiene como puntos las rectas de  $\mathbb{R}^3$  pero no puede decirse  $M \subset \mathbb{R}^3$  ya que una recta no es un punto de  $\mathbb{R}^3$ . Las variedades no flotan en un espacio ambiente  $\mathbb{R}^q$  sencillamente porque la definición no hace referencia a él.

2. El concepto de plano tangente es mucho más complejo. Siempre imaginamos el plano tangente a una superficie o la recta tangente a una curva como parte del espacio  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$  que contiene a la superficie o curva. Pero ya dijimos que ese espacio ambiente ha desaparecido. ¿Qué hacemos entonces? Vamos a indicar muy someramente la solución al problema. Fijemos un punto  $p \in \mathbb{R}^m$  (puede pensarse si se quiere en  $m = 2$ ) y una función  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . La función  $f$  actúa sobre los vectores  $v \in \mathbb{R}^m$  con su derivada en la forma

$$v \rightarrow Df(p)(v) = \frac{\partial f(p)}{\partial x^1} v^1 + \dots + \frac{\partial f(p)}{\partial x^m} v^m.$$

El número  $Df(p)(v)$  es la **derivada direccional** en la dirección de  $v$ . El nombre proviene de que si  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  es una curva tal que  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = v$  obtenemos

$$Df(p)(v) = (f \cdot \alpha)'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \{f(\alpha(t))\}.$$

Esta segunda expresión nos dice que  $Df(p)(v)$  es la variación de  $f$  a lo largo de  $\alpha$  en  $t = 0$ , apuntando ahí  $\alpha$  en la dirección  $v$ . Nuestra descripción está enfocada en el sentido que una  $f$  actúa sobre múltiples  $v$ . No obstante, la situación es reversible: podemos fijar un  $v \in \mathbb{R}^m$  que actúa sobre una función variable  $f$  según

$$v_p(f) = Df(p)(v) = \frac{\partial f(p)}{\partial x^1} v^1 + \dots + \frac{\partial f(p)}{\partial x^m} v^m = (f \cdot \alpha)'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \{f(\alpha(t))\}.$$

La nueva notación es para hacer énfasis sobre quien es el sujeto activo y quien el pasivo de la acción. Tenemos pues un operador  $v_p$  que es la derivada direccional en  $p$  según  $v$ . Las derivadas direccionales en  $p$  pueden sumarse y multiplicarse por números como los vectores ordinarios. Forman de hecho un espacio vectorial que llamaremos  $T\mathbb{R}^m(p)$  y es isomorfo a  $\mathbb{R}^m$ , correspondiendo  $e_i$ , el  $i$ -ésimo vector de la base natural de  $\mathbb{R}^m$  a la derivada parcial  $\partial/\partial x^i$  en  $p$ . Pues bien, si estamos en una variedad abstracta  $M$ , la idea de vector tangente como en las superficies de  $\mathbb{R}^3$  se pierde, pero la idea de derivada direccional no. Los vectores tangentes en  $p \in M$  se definen como las derivadas direccionales en  $p$  y constituyen el espacio tangente<sup>8</sup>  $TM(p)$ .

3. Se pueden multiplicar escalarmente vectores tangentes; es decir, es posible tener en cada  $TM(p)$  un producto euclidiano  $g(p)$  con idénticas propiedades al familiar producto euclidiano en  $\mathbb{R}^m$ . A diferencia de lo que sucede en superficies, donde hay una definición natural por restricción del producto euclidiano de  $\mathbb{R}^3$ , en el caso abstracto puede que no haya ninguna que se imponga a las demás. Es posible elegir algunas llenas de propiedades interesantes. El conjunto de métricas  $g(p)$ ,  $p \in M$ , que abreviaremos a  $g$ , es la **métrica de Riemann** y es un dato fundamental de la variedad. Muchos de los objetos matemáticos interesantes, derivan de  $g$  y variar  $g$ , manteniendo  $M$ , supone entrar en una geometría diferente. Si una propiedad o magnitud permanece invariante al modificar  $g$ ; es decir, solo depende de  $M$ , se celebra como una excepcionalidad maravillosa, pues tiene gran trascendencia. Más adelante citaremos una de estas magnitudes.
4. Muchos de los objetos que permiten estudiar una superficie son funciones  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . El aumento de la dimensión obliga a considerar objetos más complejos llamados **tensores**, dando la teoría un fuerte giro algebraico<sup>9</sup>. Un tensor  $A$  de  $M$  es una colección de funciones  $A(p)$ ,  $p \in M$ . Las

<sup>8</sup>Hemos usado la notación  $TM(p)$ , distinta de  $T_pM$  para distinguir los vectores “visibles” de  $T_pM$  de los mucho más abstractos en  $TM(p)$ . Aparte de esto, al tratar de superficies, dijimos que convenía ver  $T_pM$  como un espacio afín y en el caso abstracto,  $TM(p)$  es un espacio vectorial.

<sup>9</sup>No es que los tensores no existan en las superficies de  $\mathbb{R}^3$ . Simplemente, se puede exponer lo más relevante sin tener que hacer una exposición amplia y general de lo que son los tensores y sus propiedades.

funciones  $A(p)$  no son funciones sobre  $M$  sino sobre productos de copias de  $TM(p)$  y son lineales en cada variable. En resumen

$$A(p) : TM(p) \times \dots \times TM(p) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v \rightarrow A(p)(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_r) \text{ lineal.}$$

Para entender lo que sigue no hay que dominar esta definición, basta quedarse con la idea general de que las propiedades geométricas del par  $(M, g)$  quedan codificadas en funciones que actúan sobre vectores tangentes, no meramente sobre puntos de  $M$ .

5. En una variedad se derivan todo tipo de objetos, principalmente tensores, y, con frecuencia, más de una vez. El espacio  $\mathbb{R}^m$  tiene suficiente riqueza de propiedades para que podamos derivar funciones  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . Una variedad  $M$ , por sí sola, no tiene suficiente riqueza de propiedades para que se puedan definir *todas* las derivadas interesantes<sup>10</sup>. Sin embargo, con la métrica  $g$ , sí que se tienen muchas más posibilidades de derivar.
6. Para funciones  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  se tiene el **teorema de Schwarz**, que dice que las derivadas (parciales) se pueden reiterar en cualquier orden sin que varíe el resultado. En una variedad con su métrica  $g$  esto es falso. El resultado verdadero es imposible de formalizar al nivel de estas notas, pero sí que puede explicarse con sencillez la esencia del asunto: La diferencia de resultado según se elijan en uno u otro orden las dos derivaciones, está determinado por un tensor que llamamos la **curvatura**, y que, como simple abreviatura, llamaremos  $R$ . Aquí  $R$  no es interpretable como una medida del retorcimiento o alabeamiento de  $M$ , porque estas ideas llevan consigo el que  $M$  esté dentro de un espacio más grande, que sabemos no existe. Sin embargo, sí que  $R$  es interpretable como la diferencia entre el espacio  $\mathbb{R}^m$  y nuestra variedad  $(M, g)$  desde una perspectiva algebraica. En efecto, el énfasis precedente es esencial pues  $\mathbb{R}^m$ , donde el orden de derivación es irrelevante, tiene  $R = 0$  mientras que esto no pasa en  $(M, g)$ . Por cierto,  $R$  depende de  $g$ . Puede darse el caso de que una variedad sea “euclidiana” con una métrica y “no euclidiana” con otra. Hemos puesto comillas pues usamos las palabras en un sentido nada convencional<sup>11</sup>. Al decir “euclidiana” queremos decir que  $R = 0$  y que, como en el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^m$ , el orden de derivación no importa. Y al decir “no euclidiana” queremos decir lo contrario, sin referencia alguna a las geometrías no euclidianas, si bien es cierto que al estudiar estas geometrías desde el punto de vista de la Geometría Diferencial resultan tener curvatura no nula.

¿Qué lugar ocupa la curvatura de Gauss  $K$  de una superficie en todo esto? Dejando de lado la precisión técnica, es sencillo contar lo esencial: hay un tensor  $A$ , *el mismo para todas las superficies*, tal que  $R = KA$ . O sea, conocido  $K$  se conoce  $R$  (luego  $K = 0$  implica  $R = 0$ ) y conocido  $R$  se conoce  $K$ . El que la curvatura  $K$  sea próxima a cero indica que nuestra superficie, desde un punto de vista algebraico, se parece mucho a un plano. En las frases anteriores nos referimos a todo tipo de superficies, estén o no dentro de un espacio euclidiano y sea cual sea su métrica, si bien es cierto que el tensor universal  $A = A_g$  depende de la métrica  $g$ . En la fórmula  $R = KA_g$  hay otra cosa muy relevante: La curvatura de Gauss es uno de los pocos conceptos supervivientes, en el paso al mundo abstracto. Le acompañan las geodésicas y las isometrías, cosa algo previsible por su proximidad como concepto a la idea de distancia. En efecto, estos conceptos dependen esencialmente de la distancia, la distancia de las longitudes de curvas, y la longitud de una curva sale integrando la velocidad de la curva. Todo ello se mantiene gracias a  $g$ . Pero hemos perdido las curvaturas principales, la curvatura media y la transformación de Weingarten (u operador forma). Extrañamente,  $K$  sobrevive a pesar de ser un concepto derivado de ellos y, además, en una posición central. El teorema egregio de Gauss sigue siendo cierto sin modificación. Y el teorema de Gauss-Bonnet toma una forma aún más fuerte que ahora exponemos.

En una superficie, abstracta o no, las funciones pueden integrarse. Tomando una métrica  $g$  cualquiera tenemos la correspondiente ecuación  $R_g = K_g A_g$ , poniéndose el subíndice  $g$  para indicar que todo depende de la métrica. Pues bien, se tiene nuevamente que

$$\int K_g dA = 2\pi\chi(M) \tag{8}$$

<sup>10</sup>Para el lector instruido, se puede definir la derivada exterior o la derivada de Lie (en función de un campo) pero no se pueden definir las derivadas que permite la conexión de Levi-Civita.

<sup>11</sup>Las métricas o variedades con  $R = 0$  se llaman planas o llanas.

no importa cual sea la métrica  $g$  elegida. O sea, esta fórmula no depende de que se haya tomado en  $M$  una métrica más o menos natural. No, incluso si en una superficie de  $\mathbb{R}^3$  hubiésemos elegido otra métrica, por rara que fuera, la relación (8) seguiría siendo válida. Pero (8) tiene mucha más información. La característica de Euler  $\chi(M)$ , ligada al número de agujeros (el género) puede definirse en una superficie abstracta, incluso aunque no esté en  $\mathbb{R}^3$  y solo depende de ella (de su topología, para ser exactos). Se sigue entonces de (8) que en  $M$  habrá diversas métricas  $g$  que den distintas curvaturas  $K_g$ , pero todas tendrán la misma integral, ligada a un factor esencial de la superficie: el número  $\chi(M)$ .

## 7. Dos apuntes más

### 7.1. La teoría de la Relatividad

En nuestro paso al mundo general y abstracto de la sección anterior, hemos supuesto siempre que la métrica  $g$  era “como un producto euclidiano” dando a entender entre otras cosas que, igual que en  $\mathbb{R}^m$  sucede que un vector  $v \neq 0$  tiene  $\langle v, v \rangle = \|v\|^2 > 0$ , en una variedad, al multiplicar  $v \in TM(p)$  por sí mismo con  $g(p)$  saldrá también un número  $> 0$ . Hay un tipo de métricas *no riemannianas*  $g$  en las que al multiplicar  $v \neq 0$  por sí mismo con ellas, salen números  $\leq 0$ . Se pierde el concepto de distancia y muchos teoremas de la Geometría Riemanniana. Sin embargo queda una teoría con sus propios métodos y problemas y muy rica en resultados. Digamos, porque luego se usará, que sigue habiendo geodésicas e isometrías, derivadas y tensores, así como curvatura. La curvatura permanece como la medida de cómo influye el orden de derivación. Las geodésicas no están ligadas a una distancia, pues no existe; sin embargo pueden tener una interpretación intuitiva sorprendente que pronto daremos.

Se llegó a esta geometría por un motivo muy diferente del puro afán de generalidad. La gran impulsora fue la Física; más concretamente, la **teoría de la Relatividad**. De hecho esta Geometría no Riemanniana se denomina con frecuencia **Geometría Lorentziana**, siendo A. Lorentz<sup>12</sup> uno de los grandes creadores de la teoría de la Relatividad.

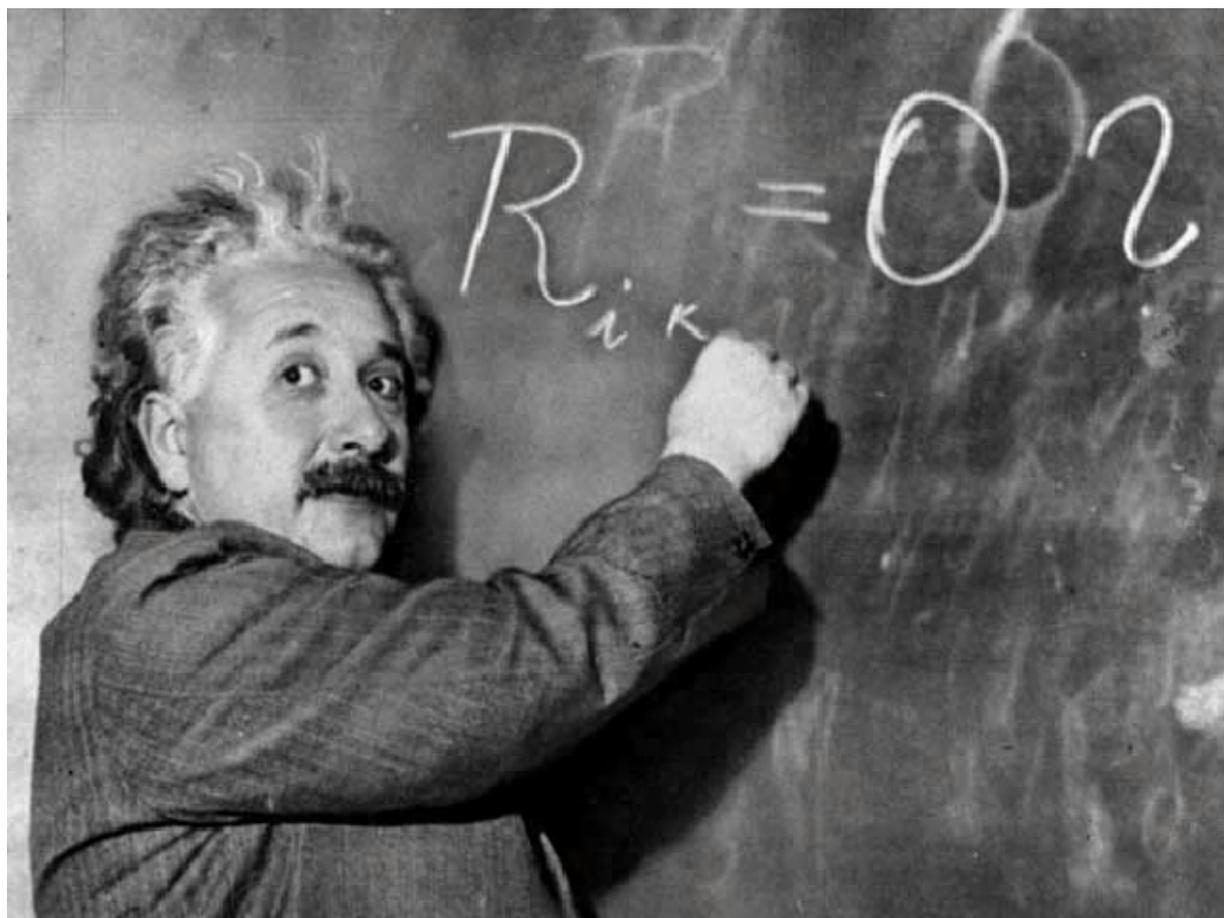
El modelo matemático subyacente a esta teoría dice que los sucesos son puntos de un espacio tiempo  $M$  representando posiciones en el espacio y el tiempo. Se requieren cuatro parámetros, tres espaciales y uno temporal, luego  $M$  es una variedad pero de dimensión cuatro. La métrica  $g$  no tiene una interpretación física directa sino indirecta, ya que es la manera de encapsular los datos físicos en lenguaje geométrico. Una de estas variedades  $(M, g)$  puede ser modelo del universo, del sistema solar o de un agujero negro. El caso sencillo, que en Geometría Riemanniana era el espacio euclidiano, pasa aquí a ser un universo o parte de él, sin materia y sin gravedad. En todo caso, una curva  $\alpha$  en  $M$  representa la evolución de una partícula en ese particular modelo físico. Las geodésicas, que son un caso particular de curva, son ahora las evoluciones de las partículas sujetas en exclusiva a la acción de la gravedad. Al hablar de Relatividad se suele decir frecuentemente que el espacio es curvo. Esto no significa que el espacio esté doblado o retorcido sino que la curvatura no es cero y que por tanto nuestro modelo se aparta de una situación “de espacio euclidiano”.

La curvatura aparece en Relatividad en una ecuación similar a la que se tiene que usar en la Geometría Riemanniana para determinar si las geodésicas que arrancan de  $p$  se separan a mayor o menor velocidad que en el espacio euclidiano. Esta ecuación, llamada **ecuación de Jacobi**, nos indica cómo la gravedad, que se manifiesta a través de  $g$  y de la curvatura  $R_g$  que ella determina, impone una evolución entre las partículas diferente a la que se produciría si no existiese gravedad.

### 7.2. La curvatura de Ricci

Hemos hablado de la curvatura  $R$  diciendo tan solo que es un tensor y que, en dimensión 2, es proporcional a un tensor fijo  $A_g$  con la curvatura de Gauss como factor de proporcionalidad. Con el lenguaje clásico de índices se suele representar la curvatura por  $R_{ijkl}$ , aunque pueden elegirse otros índices o, representando otro tensor ligeramente distinto, poner un superíndice, quedando  $R^i_{jkl}$ . Aunque  $R$  contiene toda la información sobre la curvatura, y para nosotros “curvatura” significa la diferencia que hay con  $\mathbb{R}^m$  al permutar el orden de derivación, hemos de decir que hay otros objetos derivados de  $R_{ijkl}$

<sup>12</sup>No confundir con el matemático y meteorólogo Edward Lorenz (sin t) que acuñó el término “efecto mariposa” y lo estudió.

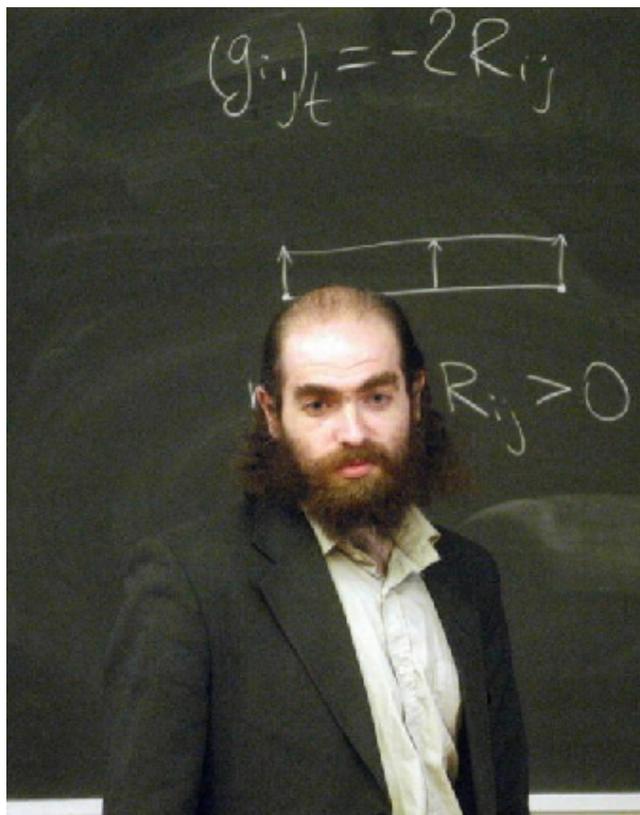


más sencillos y que contienen muchísima información relevante. Nos limitamos<sup>13</sup> a la llamada **curvatura de Ricci** o **tensor de Ricci**, que con la notación clásica se denota por  $R_{ij}$ . Nosotros elegiremos Ric como notación moderna.

Desde luego, al considerar  $R_{ij}$  en lugar de  $R_{ijkl}$  se pierde información, pero mucho de lo fundamental de la variedad y su métrica queda fijado por  $R_{ij}$ . Pondremos a veces  $R_{ij}(g)$  o  $\text{Ric}(g)$  para resaltar que la curvatura o tensor de Ricci dependen de  $g$ . Comentamos dos puntos esenciales donde aparece este tensor.

1. Ya hemos dicho más arriba que, en Relatividad, la métrica  $g$  es la manifestación geométrica de la energía y la materia. Sin embargo, no hay por qué dar  $g$  directamente. Hay un tensor  $T$  llamado **tensor tensión-energía** y un **tensor de Einstein**  $E$  que depende de la aún no conocida  $g$ . La situación física sugiere una definición de  $T$  y la **ecuación de Einstein**  $E(g) = 8\pi T$  nos da, con  $g$  como incógnita, la ecuación que  $g$  tiene que satisfacer. Pues bien, conocido  $E(g)$  se conoce  $\text{Ric}(g)$  y viceversa. Esto coloca al tensor de Ricci en primera línea de nuestro interés. En la foto que incluimos de Einstein, vemos que está escribiendo  $R_{ik} = 0$  (eligió  $i, k$  en vez de  $i, j$ ). Suponemos que esta ecuación se refiere al modelo de Schwarzschild, y representa en todo caso una situación física en la que las fuentes gravitatorias son externas al modelo.
2. En dimensión 2 ya señalamos que  $R_g = K_g A_g$  siendo  $K_g$  la curvatura de Gauss y  $A_g$  un tensor con la misma estructura para todas las métricas. Por ello,  $K_g$  y  $R_g$  contienen la misma información. Hay otra manera de expresar esto haciendo intervenir la curvatura de Ricci Ric (en lugar de la curvatura  $R$ ) y que es mucho más explícita. Se tiene que  $\text{Ric}(g) = K_g$ . Verbalmente: en dimensión 2, el tensor de Ricci es proporcional a la métrica siendo la curvatura de Gauss el factor de proporcionalidad.

<sup>13</sup>Están también por ejemplo la curvatura escalar y la curvatura seccional.



Concluimos con un breve apunte sobre la **conjetura de Poincaré**. Escribimos “conjetura” por pura inercia, pues ha dejado de serlo desde hace tiempo para todas las dimensiones  $m$ , siendo  $m = 3$  el caso que más se ha resistido. Perelman es quien ha demostrado<sup>14</sup> lo que debería llamarse el teorema de Poincaré en el bienio 2002-2003 para  $m = 3$ . Imaginemos en la esfera  $\mathbb{S}^m$  una curva cerrada sin autointersecciones (curva cerrada simple) que pasa por el polo norte  $p$ . Esta curva puede deformarse a lo largo del tiempo y reducirse al punto  $p$ ; es como si se apretara un lazo corredizo que reduce el lazo de cuerda a un punto. Poincaré conjeturó en 1904 que una variedad  $M$  compacta y conexa en la que toda curva cerrada simple fuese deformable a un punto debía de ser una esfera<sup>15</sup>. Fué Poincaré quien primero probó su conjetura para  $m = 2$  y más adelante se hizo para otras dimensiones en el orden  $m = 5$ ,  $m \geq 7$ ,  $m = 6$ ,  $m = 4$  y  $m = 3$ . Lo que nos importa es que el caso  $m = 3$  requirió unas ideas diferentes a las antes usadas que estas tienen que ver con la curvatura de Ricci. Explicamos algunas en el caso  $m = 2$ , aplicables en parte a  $m = 3$ .

Observemos para empezar que en la foto de Perelman aparece la curvatura de Ricci  $R_{ij}$ . La idea esencial es la de deformar la métrica. Supongamos que en  $M$  tenemos una familia de métricas dependiendo de un parámetro  $t \in \mathbb{R}$ . En cada instante  $t$  tenemos una métrica  $g_t$  y nos imaginamos que la métrica varía con el tiempo. Es quizás mejor imaginarse que  $M$  se deforma en el espacio  $\mathbb{R}^3$  a lo largo del tiempo y que esto hace que la métrica cambie. Por ejemplo, si tomamos un balón y lo deformamos apretándolo entre dos tablas paralelas, la nueva superficie  $M_t$  al cabo de  $t$  segundos ya no tendrá  $K$  constante sino que será no constante. Es lo que corresponde a una superficie en forma de lenteja; lo que resulta al aplastar el balón. Nosotros no partimos de un balón; al contrario, queremos llegar a un balón. Partimos de una superficie  $M_0$  con métrica  $g_0$  y queremos deformar  $g_0$  a través de una curva  $g_t$  en el conjunto de métricas con el propósito de que, al avanzar el tiempo, las métricas se vayan redondeando hasta llegar a una métrica redonda. Esto es, dicho con más formalidad, que para cierto  $T > 0$  tengamos que  $g_T$  es una métrica con curvatura de Gauss positiva y constante. Llegando ahí hemos acabado pues se sabe (al

<sup>14</sup>No debe olvidarse que los primeros resultados que hicieron sospechar que el flujo de Ricci (ver más adelante) era un concepto sumamente prometedor fueron de Hamilton en los años 80.

<sup>15</sup>La expresión exacta es “homeomorfa a una esfera” siendo los homeomorfismos biyecciones continuas con inversa continua.

menos para superficies en  $\mathbb{R}^3$ , basta el teorema de Hilbert-Liebmann antes citado o si no, le teorema de Gauss-Bonnet) que  $M$  debe ser una esfera.

La pregunta es ¿cómo deformar la métrica  $g_0$ ? La respuesta es: en la dirección opuesta a su curvatura de Ricci. Miremos de nuevo la foto de Perelman. Sobre su cabeza está  $(g_{ij})_t = -2R_{ij}$ . En realidad faltan<sup>16</sup> dos cosas en esta ecuación; debe decir, quitando los índices  $i, j$ ,

$$\frac{d}{dt}(g_t) = -2\text{Ric}(g_t).$$

Esta es la **ecuación del flujo de Ricci**. Verbalmente: al derivar la métrica, su variación ha de ser opuesta al doble de su curvatura de Ricci, que también depende de  $g_t$ . (El factor 2 es irrelevante y se pone por razones técnicas.) Lo único que podemos hacer es dar un argumento que parece indicar que esta ecuación es una buena elección, al menos en el caso  $m = 2$ . En este caso tenemos  $\text{Ric}(g) = Kg$ , con  $K$  la curvatura de Gauss. La ecuación de Ricci pasa a ser

$$\frac{d}{dt}(g_t) = -2K(g_t)g_t, \quad (9)$$

indicando  $K(g)$  que la curvatura depende de  $g$ . Tomemos un punto  $p$  y un vector tangente  $v \in TM(p)$  y consideremos la función  $f(t) = g_t(p)(v, v)$ , observando que es la raíz de esta función la que se integra al calcular longitudes de curvas. En efecto, la longitud de  $\alpha$  entre  $t = a$  y  $t = b$  es

$$L(\alpha; a, b) = \int_a^b g(\alpha(t))(\alpha'(t), \alpha'(t))^{1/2} dt.$$

La ecuación (9) nos da

$$\frac{df(t)}{dt} = -2K(g_t)(p)f(t).$$

La función  $f$  es siempre  $\geq 0$ . Si la curvatura es negativa, el lado derecho es negativo luego  $f$  es decreciente con  $t$  ya que su derivada es negativa. Al incrementarse  $t$ , las curvas, y en particular los círculos  $\bar{C}_s$ , tratados para las ecuaciones (6) y (7) ven su longitud disminuida, y (suponemos) aproximarán su longitud al valor  $2\pi s$ , del que no pueden bajar. Dualmente, si  $K < 0$ , los círculos  $\bar{C}_s$  ven su longitud incrementada y (suponemos) aproximarán su longitud al valor  $2\pi s$ , del que no pueden subir. Lo más que se puede decir con este débil argumento es que, al evolucionar  $g_t$  bajo la ecuación de Ricci (9) para  $m = 2$ , la superficie tiende a *redondearse*. Queremos decir con esta palabra que donde  $K$  es negativa tiende a subir y donde es positiva tiende a bajar. Aun con todo esto, está por ver que haya estabilidad en un valor constante y positivo de  $K$ , que es lo que sucede con las esferas.

<sup>16</sup>Con seguridad, para Perelman el subíndice  $t$  indica la derivación respecto a  $t$  y no ha olvidado nada.