

# Una introducción a la curvatura

por

**Eduardo García Río, Universidade de Santiago de Compostela**

Un aspecto central en geometría de Riemann es el estudio de la curvatura y su relación con la topología. Si pretendiésemos hacer un desarrollo riguroso de este concepto (sobre todo en dimensión arbitraria) necesitaríamos una serie de herramientas matemáticas que fácilmente nos harían perder el significado geométrico de la misma. Así pues nuestro objetivo será, en lugar de intentar llegar a una definición precisa de la curvatura, derivar nuestra atención hacia otros aspectos más bien relacionados con la influencia de la misma.

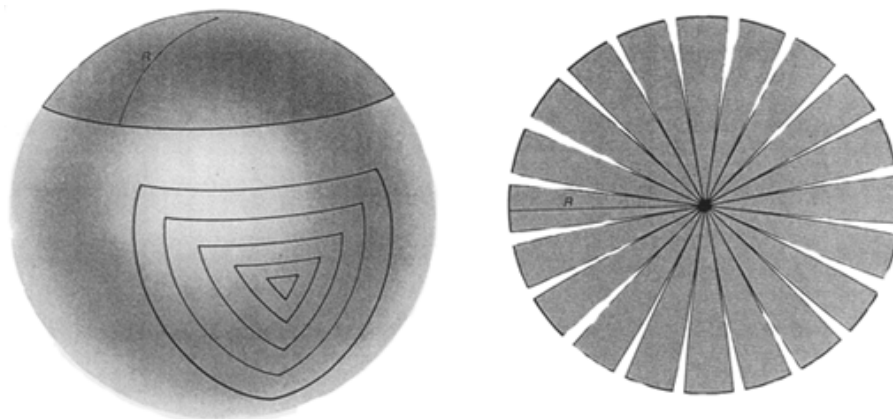
## 1. Introducción

Nuestra experiencia cotidiana nos dice que la geometría está relacionada con problemas relativos a mediciones de distancias, longitudes, ángulos, áreas, volúmenes, etc. A fin de poder hacer estas mediciones, hemos de disponer de las herramientas básicas para desarrollar dicha tarea. Esta herramienta nos la proporciona la teoría de variedades Riemannianas: variedades diferenciables equipadas con productos interiores en sus espacios tangentes, lo que nos permite medir magnitudes como distancias, ángulos, áreas, etc.

Dado que la forma del producto escalar considerado podrá variar de unos puntos a otros, es esperable que lo mismo suceda con las magnitudes que pretendemos medir.

Así, “un mismo segmento” podrá tener distinta longitud dependiendo de su posición en la variedad considerada o un “mismo parche” encerrará distinta área dependiendo del lugar en que lo situemos. A fin de entender estas variaciones estudiaremos la *curvatura* del espacio. Como veremos, este objeto es el responsable último de las variaciones mencionadas.

Un experimento sencillo nos permite confirmar las afirmaciones anteriores. Imaginemos una rosquilla (o un donut) y cortemos un trozo pequeño de su porción exterior convexa. Si lo aplastamos sobre una mesa. El trozo se agrieta y abre conforme se le va aplastando, de modo muy parecido a como lo hace la corteza de una naranja.

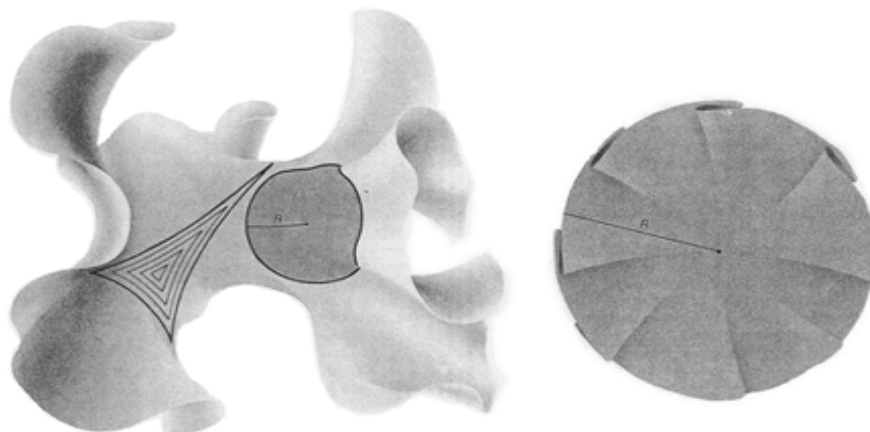


*Un disco geodésico sobre la esfera y su correspondencia plana.*

Este hecho nos permite confirmar experimentalmente que dicha región de la rosquilla encierra un área menor que la correspondiente región del plano.

Del proceso inverso saben mucho los sastres, que recurren a él cuando han de formar una parte de una prenda que haya de adaptarse a una forma convexa, como el busto de un vestido. Se corta del tejido un trozo puntiagudo, llamado sisa, y se cosen los dos lados de la abertura que queda.

La situación opuesta se produce cuando se corta un trozo pequeño de la superficie de una rosquilla próximo al agujero. Al aplastarlo sobre una mesa, se arruga y se solapa consigo mismo, mostrando que el área de dicha región es mayor que el de la región correspondiente en el plano.



*Un disco geodésico sobre una superficie de curvatura negativa y su correspondencia plana.*

De nuevo esta situación es familiar a los sastres: un sastre puede invertir el proceso haciendo un corte en el tejido y cosiendo en el mismo un parche o remiendo puntiagudo. (Este recurso se usa a menudo para hacer una falda que sea ajustada por debajo de las rodillas y con vuelo en la parte inferior).

## 2. Curvaturas extrínsecas e intrínsecas

En general, existen dos tipos importantes de curvaturas: la extrínseca y la intrínseca. La curvatura extrínseca de una curva (en el espacio 3-dimensional) fue la primera en ser estudiada, dando lugar a las fórmulas de Frenet, que describen completamente una curva en el espacio en términos de su “curvatura”, torsión, el punto inicial y la dirección.

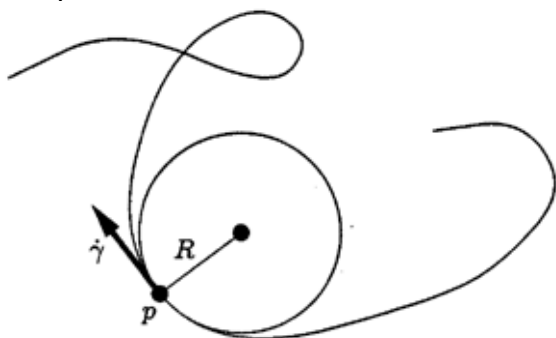
Tras haber sido abordado el estudio de las curvas en el espacio, le tocó el turno a las superficies. Las principales curvaturas que surgieron de este estudio fueron la curvatura media y la curvatura de Gauss. Inicialmente, la curvatura media fue la más estudiada, siendo Gauss el primero en reconocer la importancia de la curvatura que lleva su nombre.

### 2.1. Curvas en el plano Euclídeo

La *curvatura* de una curva  $\gamma$  está definida por  $\kappa(t) := \|\ddot{\gamma}(t)\|$ , la longitud de su vector aceleración cuando  $\gamma$  se considera de velocidad unitaria.

Geométricamente, la curvatura tiene la siguiente interpretación para curvas

planas: Dado un punto  $p = \gamma(t)$ , existen muchos círculos tangentes a  $\gamma$  en  $p$  - los círculos cuya velocidad en  $p$  sea la misma que la de  $\gamma$ , o equivalentemente, aquellos círculos cuyo centro se encuentre en la recta que pasa por  $p$  y es ortogonal a  $\dot{\gamma}$  en  $p$ . Entre estos círculos hay exactamente uno cuya aceleración en  $p$  es la misma que la de  $\gamma$  (si  $\ddot{\gamma}(t) = 0$ , consideramos una recta en vez del círculo y lo interpretamos como un círculo con radio infinito).



La curvatura es entonces  $\kappa(t) = \frac{1}{R}$ , donde  $R$  es el radio del círculo osculador.

A veces es conveniente asignar un signo a la curvatura como sigue. Se elige un vector unitario normal  $N$  a lo largo de la curva y se asigna a la curvatura un valor positivo si la curva gira hacia  $N$  y signo negativo si gira en dirección contraria. La función resultante  $\kappa_N$  se llama la “curvatura con signo” y determina la curva en el plano.

**Teorema 1:** Sean  $\gamma, \bar{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  curvas diferenciables, parametrizadas con velocidad unidad y con vectores normales unitarios  $N$  y  $\bar{N}$ . Entonces

$$\kappa_N(t) = \kappa_{\bar{N}}(t), \quad \forall t \in [a, b],$$

si y sólo si  $\gamma$  y  $\bar{\gamma}$  son congruentes (por una congruencia que preserve la dirección).

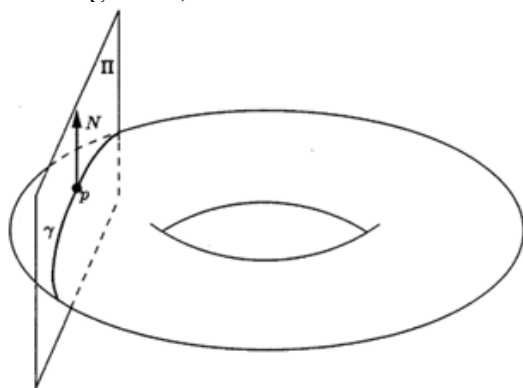
La situación para las curvas en el espacio es más compleja, ya que estas pueden retorcerse fuera de un plano sin cambiar su curvatura. Así aparece “otra curvatura” que denominamos *torsión*. La relación entre las distintas curvaturas aparece reflejada en el triedro de Frenet-Serret y el Teorema Fundamental de la Teoría de Curvas, que esencialmente asegura que la curvatura y la torsión determinan la curva en el espacio.

## 2.2. Superficies en el espacio

Cuando uno considera subvariedades 2-dimensionales embebidas en  $\mathbb{R}^3$ , el invariante básico es de nuevo la curvatura, pero resulta un poco más complicado que

para curvas planas dado que una superficie puede curvarse de modo diferente para distintas direcciones.

La curvatura de una superficie en el espacio se describe por dos números llamados las “curvaturas principales”. Supongamos que  $S$  es una superficie en  $\mathbb{R}^3$ ,  $p \in S$  y  $N$  es un vector unitario y normal a  $S$  en  $p$ . Elegido un plano  $\Pi$  pasando por  $p$  y que contenga a  $N$ , la intersección de  $\Pi$  con  $S$  es una curva plana  $\gamma \subset \Pi$  que pasa por  $p$ .



Así, calculamos la curvatura con signo  $\kappa_N$  de  $\gamma$  en  $p$  con respecto al vector unitario normal considerado. Repitiendo este proceso para todos los planos normales  $\Pi$ , se definen las curvaturas principales de  $S$  en  $p$ , denotadas por  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ , como el mínimo y el máximo de las curvaturas con signo obtenidas.

Aunque las curvaturas principales proporcionan mucha información sobre la geometría de  $S$ , no permiten discernir la geometría intrínseca de la misma. (Una propiedad es intrínseca si es preservada por isometrías -aplicaciones de una superficie en otra que preservan las longitudes de las curvas-).

De un modo algebraico, expresando las curvaturas principales como autovalores de la diferencial de la aplicación de Gauss, es posible construir dos funciones invariantes algebraicos de la misma: la traza y el determinante. Así surge la definición de las dos curvaturas esenciales para superficies:

- La *curvatura de Gauss*, definida como el determinante de la diferencial de la aplicación de Gauss, o equivalentemente

$$K = \kappa_1 \kappa_2 .$$

- La *curvatura media*, definida como un múltiplo de la traza de la diferencial de la aplicación de Gauss, o equivalentemente

$$H = \frac{1}{2} (\kappa_1 + \kappa_2) .$$

Aunque las curvaturas principales no son intrínsecas, Gauss (1827) hizo el descubrimiento sorprendente de que una combinación particular de las mismas  $K = \kappa_1 \kappa_2$ , sí es intrínseca. Lo que habitualmente conocemos como *Teorema*

*Egregium de Gauss.* El hecho de que la curvatura media no es intrínseca es inmediatamente comprobable sin más que considerar dicha función sobre el cilindro que, siendo localmente isométrico al plano tiene curvatura media no nula.

Una vez introducidas las curvaturas de Gauss y media, se presenta de forma natural la clasificación de las superficies donde ambas curvaturas sean constantes. Sin embargo, el hecho de ser las curvaturas principales constantes es una condición muy restrictiva, ya que una superficie cumpliendo tal condición ha de ser localmente isométrica a un plano, una esfera, o un cilindro (circular recto).

La esfera, el plano, el cilindro y el cono son los ejemplos más conocidos de superficies con curvatura de Gauss constante, pero existen muchos otros ejemplos de tales superficies.

Además del plano ( $K = H = 0$ ), el cilindro y el cono, como superficies desarrollables, presentan curvatura de Gauss cero. Sin embargo, sus curvaturas medias no son constantes. De hecho, utilizando la parametrización del cilindro cuyo radio de la base es  $R$  dada por

$$(u, v) \mapsto (R \cos v, R \sin v, u)$$

la curvatura media resulta  $H = \frac{1}{2R}$ .

Describiendo el cono de altura  $h$  y radio de la base  $R$  como

$$(u, v) \mapsto \left( \frac{h-u}{h} R \cos v, \frac{h-u}{h} R \sin v, u \right)$$

su curvatura media resulta no constante  $H = \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + R^2}(2hR - 2Ru)}$ .

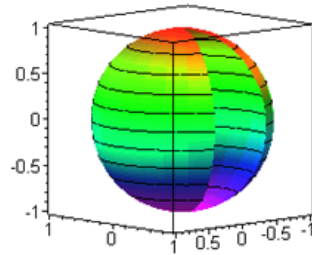
Al igual que en los casos anteriores, es posible construir ejemplos de superficies con curvatura de Gauss constante positiva o negativa a partir de las superficies de revolución. Variando la curva generatriz se consigue obtener ejemplos para cualquier valor deseado de la curvatura. Así, para el caso de curvatura positiva aparecen, además de las esferas, otros tipos de superficies, del mismo modo que para superficies de curvatura de Gauss negativa donde existen otras superficies distintas de la pseudoesfera.

### 2.3. Algunas superficies de curvatura constante positiva

A continuación, pondremos de manifiesto algunos ejemplos de superficies con curvatura de Gauss constante positiva. Como se observará, tan sólo en el caso de la esfera la curvatura media es asimismo constante.

## La esfera

Si el radio de la esfera es  $R$ , entonces la curvatura de Gauss viene dada por  $K = \frac{1}{R^2}$  y la curvatura media  $H = \frac{1}{R}$ .



## La superficie de Sievert

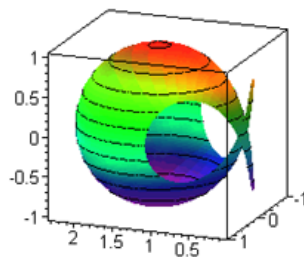
Parametrizada por  $(u, v) \rightarrow \left( r \cos \varphi, r \sin \varphi, \frac{1}{\sqrt{C}} \ln \left[ \tan \left( \frac{1}{2} v \right) \right] + a(C+1) \cos v \right)$ ,  
donde

$$\varphi = -\frac{u}{\sqrt{C+1}} + \tan^{-1}(\tan u \sqrt{C+1})$$

$$a = \frac{2}{C+1-C \sin^2 v \cos^2 u}$$

$$r = \frac{a \sqrt{(C+1)(1+C \sin^2 u) \sin v}}{\sqrt{C}}$$

estando  $(u, v)$  limitados por  $|u| < \pi/2, 0 < v < \pi$ .



En el caso representado arriba la curvatura de Gauss es  $K = 1$  y la curvatura media viene dada por  $H = \frac{1}{1+(a+1) \tan^2 u}$ .

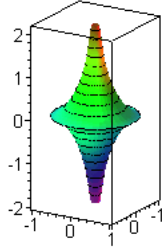
## 2.4. Algunas superficies de curvatura constante negativa

### La pseudoesfera

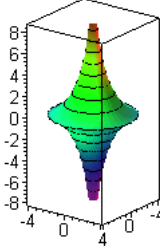
Es la superficie de revolución obtenida al girar una tractriz. Para el valor de  $K = -1$  viene dada por la parametrización

$$(u, v) \rightarrow (\cosh(v) \operatorname{sech}(u), \operatorname{sech}(u) \sin(v), u - \tanh(u))$$

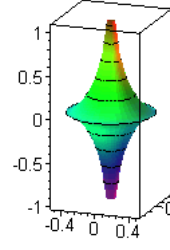
pudiendo modificarse fácilmente para obtener otros valores para su curvatura seccional:



$$K = -1$$



$$K = -\frac{1}{16}$$



$$K = -4$$

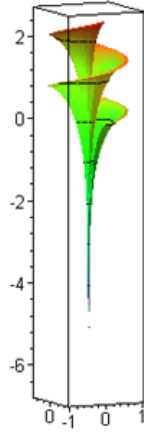
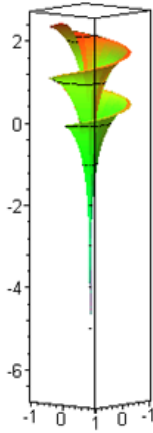
Es importante señalar que, si bien la curvatura de Gauss es constante, no sucede así con la curvatura media que toma el valor  $H = \frac{1}{2}(\sinh u - \cosh u)$ .

### La superficie de Dini

Consideramos la superficie definida por la parametrización

$$(u, v) \rightarrow (a \cos(u) \sin(v), a \sin(u) \sin(v), a\{\cos(v) + \ln(\tan(v/2))\} + bu)$$

en el dominio  $(0, 4\pi) \times (0, 2)$  y para los valores de  $a = 1, b = 0.2$ .



La curvatura de Gauss es

$$K = \frac{-1}{a^2 + b^2}$$

y la curvatura media

$$H = -\frac{\cot(2v)}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

### La superficie de Kuen

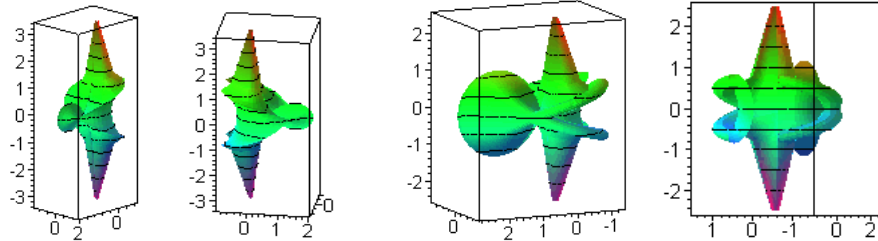
Viene parametrizada por

$$x(u, v) = \frac{2a(\cos(u) + u \sin(u)) \sin(v)}{u^2 \sin^2(v) + 1}$$

$$y(u, v) = \frac{2a(\sin(u) - u \cos(u)) \sin(v)}{u^2 \sin^2(v) + 1}$$

$$z(u, v) = a\left(\frac{2 \cos(v)}{u^2 \sin^2(v) + 1} + \ln(\tan(v/2))\right)$$

en el dominio  $(0, \pi) \times (0, 2\pi)$ . La curvatura de Gauss es constante  $K = -\frac{1}{a^2}$ .



Superficies de Kuen con curvatura de Gauss  $K = -1$ ,  $K = -\frac{1}{2}$

La curvatura media viene dada por

$$H = -\frac{\csc v}{4au} + \frac{1}{4a}u \sin v \left[ 1 + \frac{8}{2 - u^2 + u^2 \cos(2v)} \right].$$

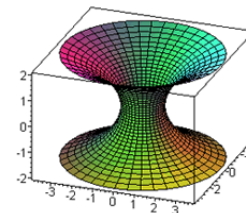
## 2.5. Curvatura extrínseca: el catenoide

Cuando se considera una variedad inmersa en otra, la curvatura extrínseca se corresponde con las curvaturas de la variedad que dependen del embebimiento utilizado. Los ejemplos más básicos de curvaturas extrínsecas son la curvatura y la torsión de una curva en el espacio 3-dimensional.

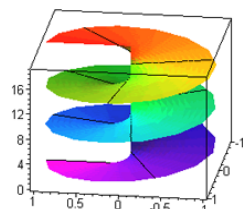
En el caso de superficies, la curvatura media es extrínseca, al igual que las curvaturas principales. El estudio de las superficies con curvatura media constante sigue unos métodos y conclusiones muy distintos al estudio de la geometría de la curvatura de Gauss.

Simplemente a modo de ejemplo, señalaremos que la única superficie de revolución *minimal* (curvatura media cero) junto con el plano es el catenoide. Claramente su curvatura de Gauss ha de ser negativa y viene dada por  $K = -\frac{1}{c^2} \operatorname{sech}^4\left(\frac{v}{c}\right)$  cuando el catenoide se parametriza como

$$(u, v) \mapsto \left( c \cosh\left(\frac{v}{c}\right) \cos u, c \cosh\left(\frac{v}{c}\right) \sin u, v \right).$$



Si parametrizamos el helicoides como



$$(u, v) \mapsto (u \cos v, u \sin v, cv)$$

resulta asimismo una superficie minimal con curvatura de Gauss  $K = -\frac{c^2}{(c^2+u^2)^2}$ . Además, esta superficie resulta ser isométrica al catenoide.

Existe una gran cantidad de superficies minimales con importantes propiedades: la superficie de Costa, la superficie minimal de Enneper, la superficie de Scherk, etc.

### 3. Curvatura en dimensiones superiores

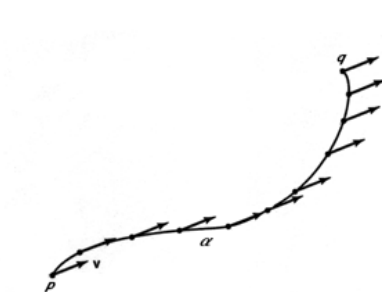
A partir de Riemann, con el desarrollo de la geometría de variedades, la curvatura de Gauss fue generalizada a otras muchas, dando lugar a la curvatura seccional, curvatura escalar, el tensor de Riemann, la curvatura de Ricci, etc. En general, las curvaturas no se reflejarán ya como números, sino que tomarán formas más complejas como grupos, aplicaciones, campos de tensores, etc.

En esta sección describiremos brevemente la curvatura desde estos tres puntos de vista: como grupo (holonomía), como función (curvatura seccional) y como campo de tensores (tensor de curvatura).

#### 3.1. Expresión de la curvatura como un grupo: holonomía

En esta sección describiremos una forma de trasladar un vector a lo largo de una curva sobre una superficie. Este procedimiento revelará una forma de expresar la desviación de una superficie con respecto al espacio euclídeo.

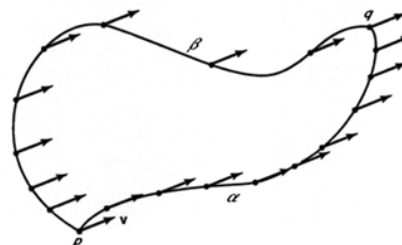
Antes de nada consideremos el proceso de mover un vector a lo largo de una curva en el plano. Dados dos puntos distintos  $p$  y  $q$ , los unimos por una curva  $\alpha$ .



Tomamos un vector arbitrario  $v$  en  $p$  y consideramos un vector igual a lo largo de los puntos de la curva  $\alpha$ . Esto siempre es posible, ya que en cada punto de la curva el paralelismo euclídeo garantiza la existencia de una única recta con la dirección de  $v$ . Ahora es posible extraer de dicha recta una copia de  $v$  en cada punto de la curva.

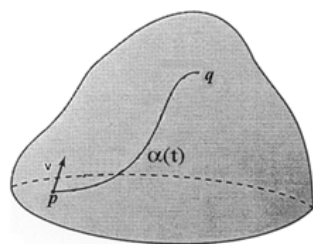
Este proceso se denomina *transporte paralelo de un vector a lo largo de una curva*.

Es importante tener en cuenta que si elegimos cualquier otra curva  $\beta$  uniendo  $p$  y  $q$  el vector resultante de trasladar  $v$  desde  $p$  hasta  $q$  es el mismo. (Equivalentemente, el transportado paralelo de un vector a lo largo de una curva cerrada en el plano coincide con él mismo cuando se recupera el punto de partida).



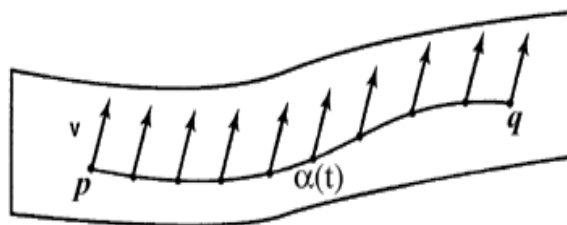
La extensión de este procedimiento para el transporte de vectores sobre curvas en superficies se debe a Levi Civita quien, en 1917 desarrolló una estrategia que puede ser descrita como sigue:

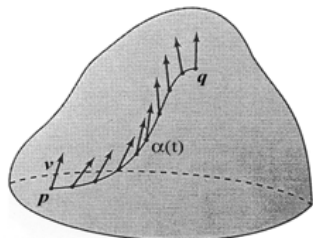
Tomemos dos puntos  $p$  y  $q$  sobre una superficie  $S$  y  $\alpha(t)$  una curva que los une. Sea ahora  $v$  un vector tangente a la superficie en el punto  $p$ .



Cortamos una tira estrecha de papel de forma que podamos cubrir la curva considerada y la representamos sobre el papel, dibujando el vector  $v$  en el mismo. (Aquí es importante señalar que, si bien siempre podrá ser recubierta la traza de la curva, no sucede así con la superficie, ya que en tal caso necesitaríamos una deformación no-isométrica de la tira de papel).

Retiramos la tira de papel de la superficie y la dejamos sobre el plano, con lo que la curva  $\alpha(t)$  dará lugar a una curva sobre el mismo. Transportamos ahora la imagen de  $v$  paralelamente de  $p$  a  $q$  utilizando el paralelismo euclídeo.

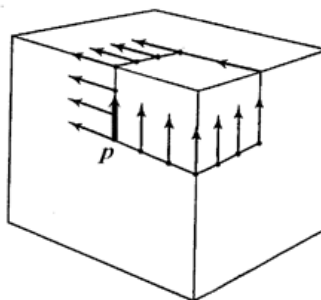
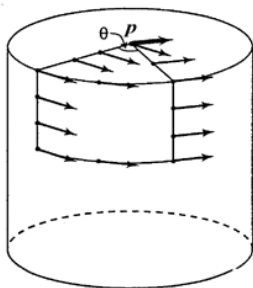




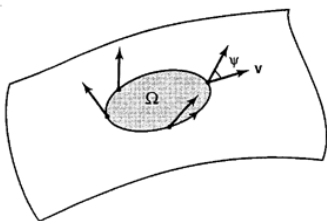
Colocamos de nuevo la tira de papel sobre la superficie, lo que dará lugar a un conjunto de vectores tangentes a la superficie a lo largo de la curva  $\alpha(t)$ .

Ahora no es complicado observar que el resultado de desplazar paralelamente un vector de un punto a otro de una superficie depende de la curva elegida. Esto es, el proceso depende del camino. Este fenómeno geométrico se denomina *holonomía*.

En la siguiente figura puede observarse como el desplazamiento paralelo es independiente del camino en la superficie lateral del cilindro (que tiene curvatura de Gauss cero) pero no así cuando pasando a través del borde del mismo nos movemos en la cara superior. Lo mismo sucede cuando cambiamos de cara en el cubo al traspasar una de las aristas.



En realidad, existe una relación entre la curvatura de la superficie considerada y la desviación en el desplazamiento paralelo con respecto a la posición inicial. Consideremos un vector  $v$  desplazado paralelamente (como en la figura siguiente) a lo largo de la frontera de  $\Omega$  en sentido contrario a las agujas del reloj.



El ángulo de holonomía será el ángulo formado por el vector  $v$  y su imagen por el transporte paralelo. Medido este ángulo  $\psi$  en radianes se tiene que

$$\psi = \int_{\Omega} K da,$$

por lo que el ángulo de holonomía nos da la medida de la curvatura total de la región  $\Omega$ .

De una forma más general, en el globo de la siguiente figura puede observarse como la curvatura de Gauss toma valores positivos, negativos y cero.



En consecuencia el desplazamiento paralelo no sólo depende del camino, sino que el grado de variación (ángulo de holonomía) depende de los diferentes caminos elegidos.

La noción de holonomía se extiende a variedades de Riemann. Teniendo en cuenta que el desplazamiento paralelo proporciona un isomorfismo entre los espacios tangentes a la variedad en los puntos considerados, un camino cerrado con origen  $p \in M$  da lugar a una aplicación li-

neal inversible de  $T_p M$ . Es posible combinar caminos recorriendo uno a continuación de otro e invertir su sentido de recorrido, por lo que las transformaciones lineales resultantes del desplazamiento paralelo constituyen un grupo denominado *grupo de holonomía*.

Dado que el transporte paralelo preserva la métrica, el grupo de holonomía está contenido en el grupo ortogonal  $O(n)$ . Además, si la variedad es orientable, es un subgrupo del grupo ortogonal especial  $SO(n)$ . Existen métricas Riemannianas para las que su grupo de holonomía es un subgrupo distinguido del grupo ortogonal especial: variedades Kähler (grupo de holonomía contenido en  $U(n)$ ), hiper-Kähler (grupo de holonomía contenido en  $Sp(n)$ ), variedades cuaterniónicas Kähler (holonomía en  $Sp(n) \cdot Sp(1)$ ), etc.

### 3.2. Expresión de la curvatura como función: curvatura seccional

Sea  $M$  una variedad  $n$ -dimensional equipada con una métrica de Riemann  $g$ . Del mismo modo que sucedía para las superficies, el invariante básico sigue siendo la curvatura. Sin embargo, y dado que una variedad puede curvarse en muchas direcciones, la curvatura misma no es un objeto tan sencillo de estudiar.

El primer problema a considerar es que, en general, las variedades de Riemann no suelen ser presentadas como subvariedades embebidas en el espacio Euclídeo. Por tanto, la idea de cortar curvas al intersectar nuestra variedad con planos normales como hicimos para superficies debe ser abandonada. En su lugar, necesitamos un modo más intrínseco de singularizar subvariedades.

Calcularemos algunas curvaturas en un punto dado del siguiente modo: Selec-

cionamos un subespacio 2-dimensional  $\Pi$  del espacio tangente a  $M$  en  $p$ . Consideramos todas las geodésicas que pasan por  $p$  con velocidad contenida en el plano  $\Pi$ . Todas estas geodésicas (mientras no nos alejemos demasiado de  $p$ ) dan lugar a una subvariedad 2-dimensional  $S_\Pi$  de  $M$ , la cual hereda la estructura Riemanniana de  $M$ . Calculamos la curvatura de Gauss de  $S_\Pi$  en  $p$ , (que, en virtud del Teorema Egregium de Gauss puede ser calculada a partir de la métrica Riemanniana). Esto da lugar a un número, denotado  $K(\Pi)$ , que llamaremos “curvatura seccional” de  $M$  en  $p$  asociada al plano  $\Pi$ .

Esta curvatura puede ser interpretada como una aplicación

$$K : \text{2-planos en } T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

De nuevo tenemos tres espacios modelos de curvatura seccional constante. Estos se corresponden con la esfera  $n$ -dimensional (para curvatura seccional positiva), el espacio Euclídeo (para curvatura seccional cero) y el espacio hiperbólico (para curvatura seccional negativa) [7].

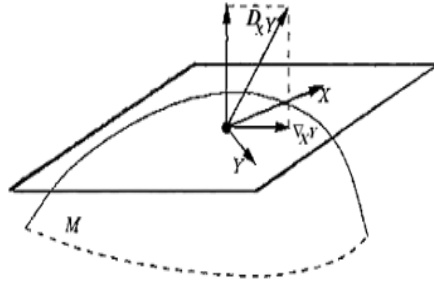
Utilizando estos modelos, las variedades de curvatura seccional constante pueden ser descritas de modo bastante explícito.

**Teorema 2:** Una variedad de Riemann completa y conexa de curvatura seccional constante es isométrica a  $\tilde{M}/\Gamma$ , donde  $\tilde{M}$  es uno de los modelos de curvatura seccional constante  $\mathbb{R}^n$ ,  $S_R^n$  o  $H_R^n$ , y  $\Gamma$  es un grupo discreto de isometrías de  $\tilde{M}$ , isomorfo a  $\pi_1(M)$ , y actuando libre y propiamente discontinuamente en  $\tilde{M}$ .

### 3.3. Expresión tensorial de la curvatura

Motivados por la idea anterior de estudiar la desviación que se produce en el desplazamiento paralelo entre dos puntos de una variedad en función de la curva elegida, se introduce el tensor curvatura que, de alguna manera, mide la falta de conmutatividad en las derivadas de orden dos.

A efectos de introducir la formulación tensorial de la curvatura es necesario recordar el concepto de *derivada covariante* de campos de vectores. Cuando se trabaja sobre superficies en  $\mathbb{R}^3$  se introduce la derivada covariante de campos de vectores recurriendo a la estructura del espacio ambiente. Para ello, dados dos campos de vectores  $X$  e  $Y$  tangentes a la superficie  $S$ , se derivan en  $\mathbb{R}^3$  y, el vector resultante se proyecta sobre la superficie.



En el intento de construir una derivación de campos de vectores adaptado a la estructura Riemanniana y que generalice satisfactoriamente se obtiene el siguiente

**Teorema 3 (Teorema Fundamental de la Geometría de Riemann):**

Sea  $(M, g)$  una variedad de Riemann. Entonces existe una única derivación covariante  $\nabla$  en  $M$  verificando

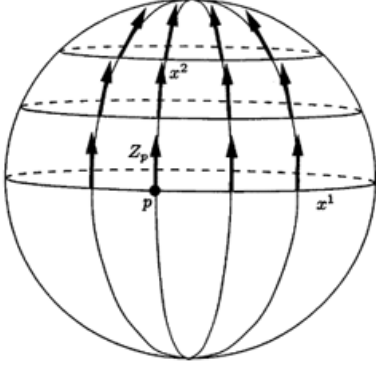
- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ , i.e.,  $\nabla$  es simétrica
- $X[g(Y, Z)] = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ , i.e., el desplazamiento paralelo asociado a  $\nabla$  se realiza por isometrías.

Además, dicha conexión está descrita como:

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} \{ Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X) + g([X, Y], Z) \}.$$

Es importante señalar que la conexión descrita en el teorema anterior es intrínseca a la variedad y coincide con la proyección en la variedad de la derivada usual de  $\mathbb{R}^3$  considerada para superficies.

Ahora es posible introducir el tensor curvatura como la obstrucción natural en el intento de construir referencias paralelas sobre la variedad. Formulando el problema sobre superficies, si  $Z_p \in T_p M$  y  $(x^1, x^2)$  es un sistema de coordenadas en un entorno de  $p$ , primeramente trasladamos  $Z_p$  paralelamente a lo largo del eje coordenado  $x^1$  y, posteriormente desplazamos paralelamente los vectores obtenidos a lo largo de las curvas coordenadas paralelas al eje  $x^2$ .



El campo de vectores resultante  $Z$  es paralelo a lo largo de cualquier curva  $x^2$ -paramétrica y a lo largo del eje  $x^1$ . El problema es decidir ¿cuándo es este vector paralelo a lo largo de las curvas  $x^1$ -coordenadas?. En otras palabras,

$$\text{¿es } \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} Z = 0 \text{ ?}.$$

Ahora bien, dado que  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} Z|_{x^2=0} = 0$ , por la unicidad del desplazamiento paralelo sería suficiente probar que  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} Z = 0$  siempre y cuando las derivadas covariantes conmutasen, i.e.,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} Z = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} Z \quad (5.1)$$

(ya que  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} Z = 0$  por construcción).

Expresando la conmutatividad (o su defecto) en (5.1), se define el *tensor de curvatura de una variedad Riemanniana*  $(M, g)$  como

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

donde  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

Varios aspectos relativos al tensor curvatura introducido merecen ser destacados:

- El tensor de curvatura mide la desviación respecto al espacio Euclídeo  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , donde  $R \equiv 0$ .
- El tensor de curvatura es intrínseco a la variedad Riemanniana considerada. Así, si  $\varphi : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$  es una isometría local ( $\varphi^* g_2 = g_1$ ), entonces  $\varphi^* R^{(2)} = R^{(1)}$ , i.e.,

$$\varphi_*(R^{(1)}(X, Y)Z) = R^{(2)}(\varphi_* X, \varphi_* Y)\varphi_* Z$$

para todo  $X, Y, Z$  campos de vectores en  $M_1$ .

- El tensor curvatura determina por completo la función curvatura seccional como

$$K(\Pi) = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}$$

donde  $\{X, Y\}$  es una base arbitraria del plano  $\Pi$ . Recíprocamente, el conocimiento de la función curvatura seccional permite recuperar el tensor curvatura (ver, por ejemplo, [2]).

En este momento es posible plantear el problema inverso:

**Problema. (Central en Geometría de Riemann)** *Determinar la métrica a partir de la curvatura.*

Son muy numerosos los intentos y los resultados conseguidos en relación al anterior problema, si bien este sigue abierto en la actualidad. A modo ilustrativo, señalaremos dos aspectos relacionados donde se pone de manifiesto dicho problema.

### Sistema de Ecuaciones en Derivadas Parciales

Sea  $(U, (x^1, \dots, x^n))$  un sistema local de coordenadas en la variedad  $(M, g)$ . Expresando la conexión en términos de sus símbolos de Christoffel  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ , estos toman la forma

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} g_{lj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right\}$$

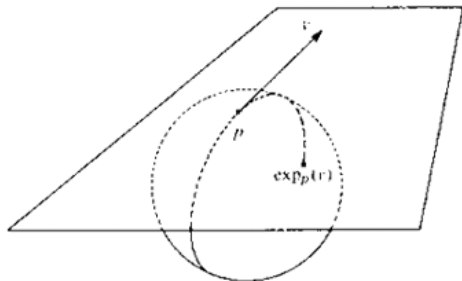
y así las componentes del tensor de curvatura  $R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} = R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x^l}$  resultan dadas por

$$\begin{aligned} R_{kl ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} g_{il} + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^l} g_{jk} - \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^l} g_{ik} - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} g_{jl} \right. \\ \left. + g_{rs} \Gamma_{jk}^r \Gamma_{il}^s - g_{rs} \Gamma_{jl}^r \Gamma_{ik}^s \right\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Teniendo en cuenta que los símbolos de Christoffel se corresponden con derivadas de primer orden de la métrica, (5.2) define un sistema de ecuaciones no lineal de segundo orden en derivadas parciales. La posibilidad de resolver dicho sistema resultaría equivalente al problema anteriormente mencionado.

### Desarrollos en serie de Taylor

Considerado  $(U, (x^1, \dots, x^n))$  un sistema de coordenadas normales en un entorno de un punto  $p \in M$



tenemos la siguiente expresión para las funciones componentes de la métrica (la primera forma fundamental)

$$\begin{aligned}
 g_{\alpha\beta} = & \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} R_{i\alpha j\beta}(p) x^i x^j \\
 & - \frac{1}{6} \{ \nabla_i R_{j\alpha k\beta} \} (p) x^i x^j x^k \\
 & + \frac{1}{360} \{ -18 \nabla_{ij} R_{k\alpha l\beta} \\
 & \quad + 16 \sum_s R_{i\alpha js} R_{k\beta ls} \} (p) x^i x^j x^k x^l \\
 & + \text{términos de orden superior}
 \end{aligned}$$

Así, si la variedad considerada es analítica el conocimiento del tensor de curvatura  $R$  y todas sus derivadas covariantes  $\nabla^{(k)} R$  determina por completo la estructura Riemanniana de la misma.

## 4. Influencia de la curvatura

El objetivo de esta última sección es poner de manifiesto algunos aspectos de la influencia de la curvatura, tanto a nivel geométrico como topológico. Más que enumerar estas propiedades, hemos decidido centrar nuestra atención en dos que nos parecen especialmente significativas: el Teorema de Gauss-Bonnet como el resultado por excelencia que relaciona la curvatura y la topología y el hecho de que la curvatura hace variar el volumen de las esferas geodésicas, propiedad esta que, a su vez, permite determinar la curvatura.

### 4.1. Consecuencias topológicas: el Teorema de Gauss-Bonnet

Pondremos de manifiesto algunos resultados que relacionan la curvatura con la topología de la variedad subyacente. Además del Teorema de Gauss-Bonnet existen numerosos resultados con este carácter local-global en geometría de Riemann. Por brevedad, simplemente mencionaremos dos de ellos: el Teorema de Cartan-

Hadamard, que caracteriza topológicamente las variedades simplemente conexas con curvatura seccional no positiva y el Teorema de Bonnet-Myers que asegura que la curvatura seccional estrictamente positiva fuerza la variedad a ser compacta.

Existen muchos resultados que, de una forma u otra intentan generalizar los anteriores. Sin embargo, su simple enunciado se escapa de los propósitos de esta introducción. Una buena referencia es el trabajo de Berger [1].

El Teorema de Gauss-Bonnet es un resultado puramente de geometría diferencial (señalado como el más fundamental e importante de todos ellos) nos dice que la integral de la curvatura de Gauss de una superficie compacta es un invariante topológico de la superficie.

**Teorema 4 (Gauss-Bonnet):** Sea  $S$  una superficie compacta, orientada con una métrica de Riemann. Entonces

$$\int_S K dA = 2\pi\chi(S)$$

donde  $\chi(S)$  es la característica de Euler de  $S$ .

Este resultado, junto con otros relativos a la clasificación topológica de superficies compactas orientables, impone fuertes restricciones sobre los tipos de métricas que pueden ocurrir en una superficie dada. A modo de ejemplo, una consecuencia del teorema de Gauss-Bonnet es que

- La única superficie compacta, conexa y orientable que admite una métrica con curvatura de Gauss estrictamente positiva es la esfera.
- Si una superficie compacta, conexa y orientable tiene curvatura de Gauss no positiva, el género ha de ser al menos uno y, el recubrimiento universal de la superficie es topológicamente equivalente al plano.

Existen numerosos teoremas que pueden ser interpretados como generalizaciones del teorema de Gauss-Bonnet. Son consecuencia del hecho de que la curvatura positiva hace converger las geodésicas, mientras que la curvatura negativa las hace separarse.

**Teorema 5 (Cartan-Hadamard):** Sea  $M$  una variedad completa y conexa con curvatura seccional  $K_M \leq 0$ . Entonces el recubrimiento universal de  $M$  es difeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 6 (Bonnet-Myers):** Sea  $M$  una variedad completa y conexa con

curvatura seccional  $K_M \geq \delta > 0$ . Entonces  $M$  es compacta y tiene grupo fundamental finito.

Entre los resultados en geometría diferencial encaminados a obtener una generalización del Teorema de Gauss-Bonnet, destacaríamos el Teorema de Chern-Gauss-Bonnet, probado por Chern en 1944. Este resultado asegura que para cualquier variedad de Riemann compacta de dimensión par

$$\int_M \mathcal{P}(R) dv = \frac{1}{2} Vol(S^n) \chi(M)$$

donde  $\mathcal{P}$  es una función del tensor curvatura  $R$  denominado Pfaffiano y  $\chi(M)$  es la característica de Euler de  $M$ .

En cierto sentido, podríamos considerar este resultado como una generalización muy satisfactoria del Teorema de Gauss-Bonnet. Sin embargo, la dificultad en esta generalización radica en el hecho de que la relación entre el Pfaffiano y la curvatura seccional no es clara en dimensiones altas. De hecho, no se ha conseguido todavía una interpretación geométrica satisfactoria de dicho resultado. Por ejemplo, no se ha conseguido todavía determinar si el hecho de ser la curvatura seccional estrictamente positiva fuerza la característica de Euler a  $\chi(M) > 0$ . (Véase, por ejemplo [5] para una discusión del Pfaffiano y una relación entre la característica de Euler y el volumen de tubos).

## 4.2. Consecuencias geométricas: volumen de esferas geodésicas

El hecho de que la curvatura de Gauss sea intrínseca la hace detectable a los “habitantes” de la superficie, sin embargo, la curvatura media y la aplicación de Weingarten no pueden ser observadas directamente por alguien que no sea capaz de observar el espacio 3-dimensional en el que vive la superficie. La influencia de la curvatura de Gauss para un habitante de la superficie se pone de manifiesto en el hecho de que esta controla el área de las distintas regiones consideradas sobre la superficie, y por tanto, el tamaño de la región en la que reside el habitante de la misma.

Así, si  $R$  es una región sobre una superficie  $S$  como las consideradas al inicio, es posible medir la influencia de la curvatura en el tamaño de su perímetro. Una *esfera geodésica de centro*  $p \in M$  *y radio*  $r > 0$  es el conjunto de los puntos de  $M$  que se encuentran a distancia  $r$  del punto  $p$ . Para valores del radio suficientemente pequeño, es posible describir estos conjuntos como las imágenes por la aplicación exponencial  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  de la correspondiente esfera en  $(T_p M, \langle \cdot, \cdot \rangle_p)$ .

A modo de ejemplo, si pensamos en las superficies de curvatura de Gauss constante, es sencillo describir el área de un disco geodésico en función del radio. Esta viene dada por [6]

$$\begin{aligned} \pi r^2 \left[ \frac{1}{c}(1 - \cos r\sqrt{c}) \right] & \quad \text{si } c > 0 \\ \pi r^2 & \quad \text{si } c = 0 \\ \pi r^2 \left[ \frac{1}{-c}(\cosh r\sqrt{-c} - 1) \right] & \quad \text{si } c < 0. \end{aligned}$$

Es ahora sencillo observar como el área aumenta cuando la curvatura es negativa y disminuye cuando esta es positiva. De hecho, esto se pone de manifiesto si consideramos el desarrollo en serie de Taylor de la función área de los discos geodésicos

$$\text{vol}(S_p(r)) = \pi r^2 \left\{ 1 - \frac{K}{12}r^2 + \text{términos de orden superior} \right\}$$

donde  $K$  es la curvatura de Gauss de la superficie.

Este resultado es generalizable al marco general de la geometría de Riemann. Así, fijado un punto  $p \in M$ , el volumen de la bola geodésica  $S_p(r)$  es una función del radio de la esfera y puede ser desarrollado en serie de Taylor como

$$\begin{aligned} \text{vol}(S_p(r)) = V_0^n(r) & \left\{ 1 - \frac{\tau(m)}{6(n+2)}r^2 \right. \\ & + \frac{(-3\|R\|^2 + 8\|\rho\|^2 + 5\tau^2 - 18\tau\Delta\tau)(m)}{360(n+2)(n+4)}r^4 \\ & \left. + \text{términos de orden superior} \right\} \end{aligned}$$

donde  $V_0^n(r)$  denota el volumen de la bola de radio  $r$  en el espacio euclídeo y  $\tau$ ,  $\{\|R\|^2, \|\rho\|^2, \tau^2, \Delta\tau\}$  son los invariantes de la curvatura de orden uno y orden dos respectivamente.

Como una aplicación del desarrollo anterior se obtienen estimaciones del volumen de las esferas geodésicas en función de la curvatura y recíprocamente, ésta puede ser medida a partir del volumen de estos objetos:

**Teorema 7:** Sea  $(M, g)$  una variedad de Riemann analítica y  $p \in M$ . Entonces

(i)  $\tau(p) > 0$  si y sólo si

$$\text{vol}(S_p(r)) < V_0^n(r)$$

para todo valor de  $r$  suficientemente pequeño.

(i)  $\tau(p) < 0$  si y sólo si

$$\text{vol}(S_p(r)) > V_0^n(r)$$

para todo valor de  $r$  suficientemente pequeño.

**Observación:** De hecho, es posible caracterizar muchas clases de variedades Riemannianas en términos del volumen de sus esferas geodésicas. Aunque en dimensiones bajas (2 y 3) los resultados son bastante concluyentes, este tipo de problemas permanece abierto en dimensiones superiores.

## Bibliografía

- [1] M. Berger, *Riemannian Manifolds: From Curvature to Topology (A brief historical overview)* en S. S. Chern. A great geometer of the twentieth century. Expanded edition. (S.-T. Yau, Ed.). International Press, Cambridge, MA, 1998.
- [2] W. M. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, Academic Press, Inc., New York, 1975.
- [3] M. P. do Carmo, *Geometría diferencial de curvas y superficies*, Alianza Universidad Textos, Madrid, 1990.
- [4] J. Casey, *Exploring Curvature*, Vieweg Mathematics, Göttingen, 1996.
- [5] A. Gray, *Tubes*, Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1990.
- [6] A. Gray, *Modern Differential Geometry of curves and surfaces with Mathematica*. Second edition. CRC Press, Boca Raton, FL, 1998.
- [7] J. M. Lee, *Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature*, Graduate Texts in Math. 176, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [8] S. Montiel, A. Ros, *Curvas y superficies*, Proyecto Sur de Ediciones, S.L., Granada, 1997.

Algunas páginas web con información interesante sobre superficies:

<http://mathworld.wolfram.com/topics/Surfaces.html>

<http://mathworld.wolfram.com/topics/Constant-CurvatureSurfaces.html>

<http://mathworld.wolfram.com/topics/MiscellaneousSurfaces.html>

<http://mathworld.wolfram.com/topics/MinimalSurfaces.html>