

GRÁFICA DE CURVAS EN FORMA PARAMÉTRICA

Una curva $\mathcal{C}$ se dice definida paramétricamente por medio de un parámetro t , si las coordenadas afines de sus puntos M se expresan en función de este parámetro y, cuando t varía en un cierto intervalo, el punto M describe dicha curva:

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Así, a un valor del parámetro le corresponde un único punto M de la curva, pero M puede ser imagen de más de un valor de t ; si se verifica esto último diremos que M es un **punto múltiple** de la curva.

El dominio de definición de la curva queda determinado por la condición de que las dos funciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$ estén definidas y sean reales en todos sus puntos.

Cuando existe periodicidad o simetrías el dominio puede subdividirse en partes tal que conociendo el arco de curva correspondiente a una de ellas se puede obtener la totalidad de la curva por medio de traslaciones o simetrías.

1 Periodicidad

Si x e y son funciones periódicas de período común T , es decir, si

$$x(t+T) = x(t), \quad y(t+T) = y(t), \quad \forall t,$$

se limita el estudio a un intervalo de amplitud T , incluido en el dominio de definición. Una vez construida la curva en este intervalo, el resto se construye efectuando sucesivas traslaciones.

Si los períodos T_1 y T_2 de las funciones x e y fueran distintos entonces el mínimo común múltiplo entre ellos constituye un período común.

2 Simetrías

- El eje OX es eje de simetría si $\forall t$ corresponde otro t' , tal que $x(t) = x(t'), \quad y(t) = -y(t')$.
- El eje OY es eje de simetría si $\forall t$ corresponde otro t' , tal que $x(t) = -x(t'), \quad y(t) = y(t')$.
- La recta $y = x$ es eje de simetría si $\forall t$ corresponde otro t' , tal que $x(t) = y(t'), \quad y(t) = x(t')$.
- La recta $y = -x$ es eje de simetría si $\forall t$ corresponde otro t' , tal que $x(t) = -y(t'), \quad y(t) = -x(t')$.
- El origen de coordenadas es centro de simetría si $\forall t$ existe t' , tal que $x(t) = -x(t'), \quad y(t) = -y(t')$.

3 Estudio en el entorno de un punto

Sea $\mathcal{C}$ la curva plana definida por:

$$\vec{x}(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a, b].$$

Si la función vectorial $\vec{x}$ es derivable de orden n en un entorno de t_0 , a partir de la fórmula de Taylor se puede estudiar la existencia de una tangente a la curva en el entorno de t_0 :

$$\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0) = (t - t_0) \frac{d\vec{x}}{dt} \Big|_{t_0} + \frac{(t - t_0)^2}{2} \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \Big|_{t_0} + \cdots + \frac{(t - t_0)^n}{n!} \left(\frac{d^n\vec{x}}{dt^n} \Big|_{t_0} + \vec{\epsilon} \right),$$

con $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\epsilon} = 0$.

PRIMER CASO:

Si la derivada $\vec{x}'(t_0) \neq 0$, la curva admite una **tangente**, que es la recta definida por el punto M_0 y el vector $\vec{x}'(t_0)$:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}.$$

El punto M_0 se dice **ordinario**.

Posición de una curva paramétrica respecto a la tangente:

- Si la derivada $\vec{x}''(t_0)$ no es colineal con $\vec{x}'(t_0)$, tomamos la referencia afín $\{M_0, \vec{x}'(t_0), \vec{x}''(t_0)\}$, poniendo

$$\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0) = (t - t_0) \frac{d\vec{x}}{dt} \Big|_{t_0} + \frac{(t - t_0)^2}{2} \left(\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \Big|_{t_0} + \vec{\epsilon} \right),$$

y si ξ, η son las componentes el vector $\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)$ en esta referencia se tiene la siguiente aproximación

$$\xi \simeq t - t_0, \quad \eta \simeq \frac{(t - t_0)^2}{2}.$$

En un entorno de t_0 , η es positivo: *la curva está situada localmente del mismo lado de la tangente, en el semiplano al que apunta el vector $\vec{x}''(t_0)$* (Figura 11 (A)).

■ Si $\vec{x}''(t_0)$ es colineal con $\vec{x}'(t_0)$ y si $\vec{x}'''(t_0)$ es no lineal con $\vec{x}'(t_0)$, se tiene

$$\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0) = (t - t_0) \frac{d\vec{x}}{dt} \Big|_{t_0} + \frac{(t - t_0)^2}{2} \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \Big|_{t_0} + \frac{(t - t_0)^3}{3!} \left(\frac{d^3\vec{x}}{dt^3} \Big|_{t_0} + \vec{\epsilon} \right),$$

$$\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0) = \left((t - t_0) + c \frac{(t - t_0)^2}{2} \right) \vec{x}'(t_0) + \frac{(t - t_0)^3}{3!} (\vec{x}'''(t_0) + \vec{\epsilon}).$$

de donde las componentes de $\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)$ respecto a $\{M_0, \vec{x}'(t_0), \vec{x}'''(t_0)\}$ son

$$\xi = (t - t_0) + c \frac{(t - t_0)^2}{2} + \frac{(t - t_0)^3}{3!} \epsilon_1, \quad \eta = \frac{(t - t_0)^3}{3!} + \frac{(t - t_0)^3}{3!} \epsilon_2,$$

que en un entorno de t_0 , se puede poner:

$$\xi \simeq (t - t_0), \quad \eta \simeq \frac{(t - t_0)^3}{3!}.$$

Estas componentes son del signo de $t - t_0$. *La curva atraviesa a la tangente en M_0 . Se dice entonces que M_0 es un punto de inflexión* (Figura 11 (B)).

SEGUNDO CASO

Supongamos ahora que $\vec{x}'(t_0) = 0$. En este caso $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$ y M_0 se dice un **punto singular**.

Si $\vec{x}^{(p)}(t_0)$ es la primera derivada que no se anula en M_0 , la ecuación de la **tangente** en este punto es

$$\frac{x - x(t_0)}{x^{(p)}(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y^{(p)}(t_0)}.$$

Posición de la curva respecto a la tangente:

Si $\vec{x}^{(p)}(t_0)$ y $\vec{x}^{(q)}(t_0)$ son las primeras derivadas no colineales ($q > p$), se tiene

$$\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0) = \left(\frac{(t - t_0)^p}{p!} + c \frac{(t - t_0)^{p+1}}{(p+1)!} + \dots \right) \vec{x}^{(p)}(t_0) + \frac{(t - t_0)^q}{q!} (\vec{x}^{(q)}(t_0) + \vec{\epsilon})$$

Si ξ, η son las componentes de $\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)$ respecto a $\{M_0, \vec{x}^{(p)}(t_0), \vec{x}^{(q)}(t_0)\}$, en un entorno de t_0 :

$$\xi \simeq \frac{(t - t_0)^p}{p!}, \quad \eta \simeq \frac{(t - t_0)^q}{q!}.$$

La forma de la curva depende de la paridad de p y q :

- Si p es impar y q es impar, ξ y η cambian de signo. Punto de inflexión (Figura 11 (C)).
- Si p es par y q es impar, $\xi > 0$ y η cambia de signo. Punto de retroceso de primera especie (Figura 11 (D)).
- Si p es impar y q es par, ξ cambia de signo y $\eta > 0$. Punto ordinario (Figura 11 (E)).
- Si p es par y q es par, $\xi > 0$ y $\eta > 0$. Punto de retroceso de segunda especie (Figura 11 (F)).

EJEMPLOS

- Para obtener los puntos singulares de la curva

$$x = 2t + \frac{1}{t^2}, \quad y = t^2 + \frac{2}{t},$$

se calculan las primeras derivadas:

$$x' = 2 - \frac{2}{t^3}, \quad y' = 2t - \frac{2}{t^2}; \quad x'' = \frac{6}{t^4}, \quad y'' = 2 + \frac{4}{t^3}; \quad x''' = -\frac{24}{t^5}, \quad y''' = -\frac{12}{t^4}.$$

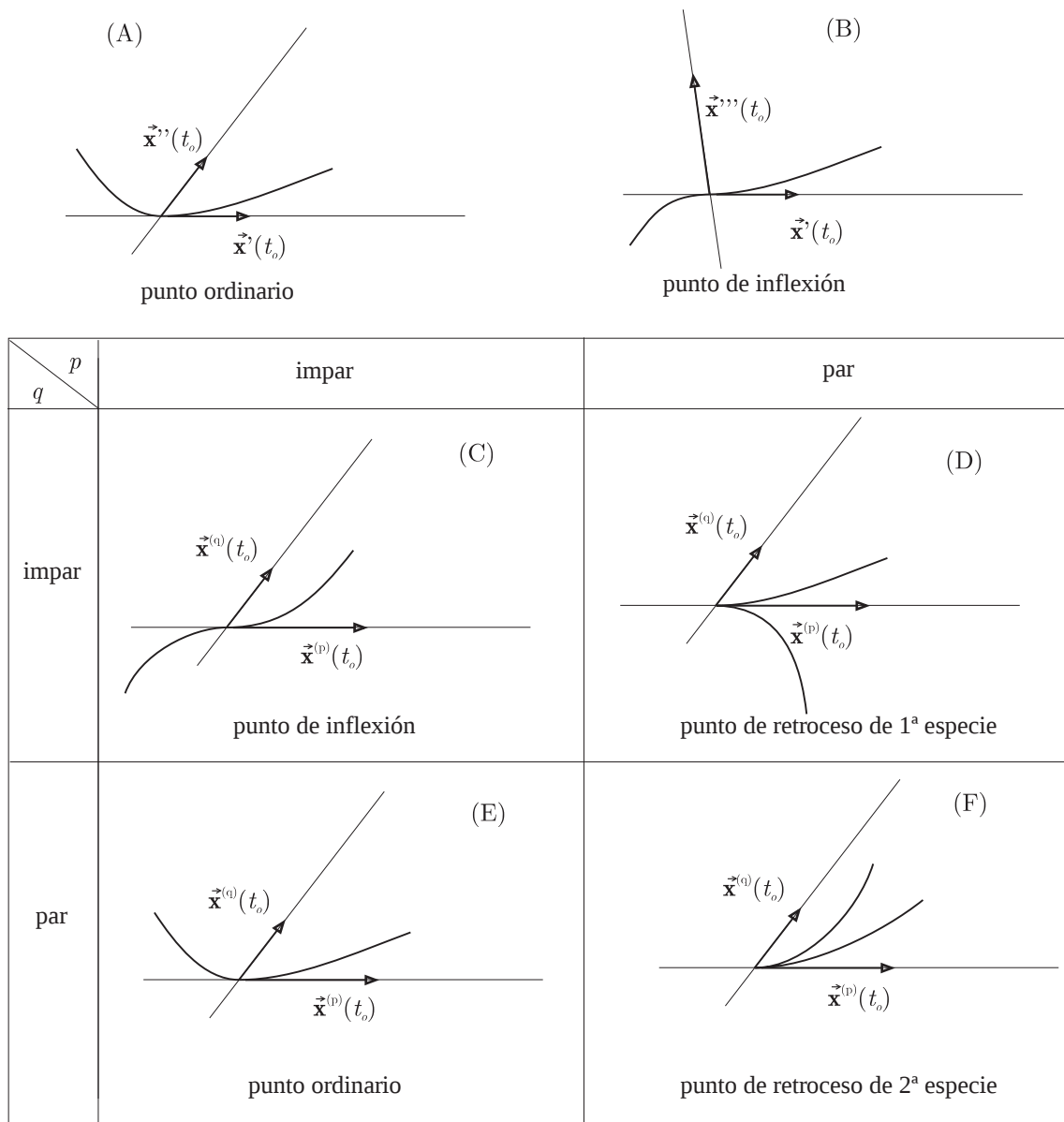


Figura 11: Posición de una curva paramétrica respecto a su tangente

Se tiene que $x'(1) = y'(1) = 0$ y, por tanto, el punto $M_0(3,3)$ de parámetro $t = 1$ es un punto singular. Como además $x''(1) = 6, y''(1) = 6; x'''(1) = -24, y'''(1) = -12$, la tangente tiene la dirección el vector $\vec{x}''(1) = (6, 6)$ y M_0 es un punto de retroceso de primera especie ($p = 2$, par y $q = 3$, impar).

- Considérese la curva

$$\vec{x}(t) = \left(t(3 - 2t)(t - 1)^2, t - 1 + \frac{1}{t} \right).$$

$\vec{x}'(t) = (3 - 16t + 21t^2 - 8t^3, 1 - t^{-2})$, $\vec{x}'(1) = (0, 0)$, con lo que el punto $M_0(0, 1)$ es singular.

$\vec{x}''(t) = (-16 + 42t - 24t^2, 2/t^3)$ y $\vec{x}''(1) = (2, 2)$.

$\vec{x}'''(t) = (42 - 48t, -6/t^4)$, $\vec{x}'''(1) = (-6, -6)$.

$\vec{x}^{(iv)}(t) = (-48, 24/t^5)$, $\vec{x}^{(iv)}(1) = (-48, 24)$.

Con lo que $\vec{x}''(1)$ y $\vec{x}'''(1)$ son colineales, $\vec{x}''(1)$ y $\vec{x}^{(iv)}(1)$ no. Se trata de un punto de retroceso de segunda especie ($p = 2, q = 4$) y la tangente en él tienen la dirección del vector $\vec{x}''(1) = (2, 2)$.

4 Puntos múltiples

Sea $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, la representación paramétrica de una curva plana. Cuando a dos valores distintos t_1 y t_2 del parámetro corresponde el mismo punto, es decir, cuando se verifica, $\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2)$, resulta un **punto doble** por estar contenido en dos ramas distintas de la curva.

En general, en estos puntos las dos ramas tendrán tangentes distintas; la posición de cada rama respecto a su tangente se determina como en el párrafo §3

Si existen valores del parámetro, $t_1, t_2, t_3, \dots$ todos distintos y tales que $\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2) = \vec{x}(t_3) = \dots$, se tiene un punto múltiple.

EJEMPLOS

- Puntos dobles de la curva de ecuaciones:

$$x = \frac{5t^2 - 2t}{4t^2 - 1}, \quad y = \frac{4t^3 - 7t^2 + 8t + 4}{2t + 1}.$$

Para t_1, t_2 se debe verificar:

$$\frac{5t_1^2 - 2t_1}{4t_1^2 - 1} = \frac{5t_2^2 - 2t_2}{4t_2^2 - 1}, \quad \frac{4t_1^3 - 7t_1^2 + 8t_1 + 4}{2t_1 + 1} = \frac{4t_2^3 - 7t_2^2 + 8t_2 + 4}{2t_2 + 1}.$$

Quitando denominadores y sacando factor común se obtiene:

$$5(t_2^2 - t_1^2) - 8t_1t_2(t_2 - t_1) - 2(t_2 - t_1) = 0,$$

$$8t_1t_2(t_2^2 - t_1^2) + 4(t_2^3 - t_1^3) - 14t_1t_2(t_2 - t_1) - 7(t_2^2 - t_1^2) = 0,$$

llamando $t_1 + t_2 = s$ y $t_1t_2 = p$ y simplificando, resulta:

$$5s - 8p - 2 = 0, \quad 4s^2 + 8sp - 7s + 18p = 0.$$

Cuyas soluciones son:

$$s = 2, \quad p = 1, \quad t^2 - 2t + 1 = 0, \quad t_1 = t_2 = 1.$$

Luego $\vec{x}(1) = (1, 3)$ es un punto de retroceso de primera especie, pues $\vec{x}'(1) = (0, 0), \vec{x}''(1) = (2/3, 10/3)$ y $\vec{x}'''(1) = (-16/3, 4/3)$

$$s = \frac{1}{4}, \quad p = -\frac{3}{32}, \quad 32t^2 - 8t - 3 = 0, \quad t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{8}.$$

Luego $(-\frac{3}{4}, \frac{55}{16})$ es un punto doble.

- Puntos dobles de la curva:

$$x = \frac{t^2}{t - 1}, \quad y = \frac{t}{t^2 - 1}.$$

$$\frac{t_1^2}{t_1 - 1} = \frac{t_2^2}{t_2 - 1}, \quad \frac{t_1}{t_1^2 - 1} = \frac{t_2}{t_2^2 - 1};$$

$$t_1^2t_2 - t_1^2 = t_1t_2^2 - t_2^2, \quad t_1t_2^2 - t_1 = t_1^2t_2 - t_2;$$

$$t_1t_2(t_1 - t_2) - (t_1 + t_2)(t_1 - t_2) = 0, \quad t_1t_2(t_1 - t_2) + (t_1 - t_2) = 0,$$

dividiendo por $t_1 - t_2$ y llamando a $t_1 + t_2 = s$, $t_1t_2 = p$ resulta:

$$p - s = 0, \quad p + 1 = 0,$$

$$s = -1, \quad p = -1, \quad t^2 + t - 1 = 0, \quad t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Sustituyendo en las ecuaciones de la curva, resulta el punto doble $(-1, -1)$.

$$\vec{x}'\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) = (-5.88, -3, 68), \quad \vec{x}'\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right) = (0.85, -1, 58).$$

5 Ramas infinitas. Asíntotas y curvas asíntóticas

Una curva definida por $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$ posee una rama infinita si la distancia $|\vec{x}(t)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow t_0$ (finito o infinito).

Casos que se pueden presentar:

Asíntotas y curvas asíntóticas					
$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0, \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$		asíntota vertical: $x = x_0$			
$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty, \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0$		asíntota horizontal: $y = y_0$			
$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \infty$ $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \infty$	$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$	$\pm\infty$	Rama parabólica en la dirección del eje OY		
		0	Rama parabólica en la dirección del eje OX		
		a finito $a \neq 0$	$\lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - ax(t))$	b finito	$y = ax + b$
				No existe	Dirección asíntótica sin asíntota.
				$\pm\infty$	Rama parabólica en la dirección a .

- Si $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0$ y si $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$, entonces $x = x_0$ es **asíntota vertical** de la curva.
- Si $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$ y si $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0$, entonces $y = y_0$ es **asíntota horizontal** de la curva.
- Si $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$ y si $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$, se estudia el límite de $y(t)/x(t)$ para saber si la curva admite una dirección asíntótica.

Si $y(t)/x(t)$ tiende a $+\infty$ o $-\infty$, la curva tiene una **rama parabólica** en la dirección de OY .

Si $y(t)/x(t) \rightarrow 0$, la curva tiene una **rama parabólica** en la dirección de OX .

Si $y(t)/x(t)$ tiene un límite finito no nulo a , se halla el límite de $y(t) - ax(t)$, si es finito e igual a b , entonces la recta $y = ax + b$ es **asíntota** de la curva. Desarrollando $y(t) - ax(t) - b$ en un entorno de t_0 , se puede determinar la posición de la curva respecto de la asíntota. Si el límite $y(t) - ax(t)$ no existe, la curva posee una dirección asíntótica sin asíntota.

Si el límite $y(t) - ax(t)$ es infinito, la curva admite una rama parabólica en la dirección a . Para determinar una **parábola asíntótica**, podemos proceder de forma análoga al primero de los ejemplos siguientes:

EJEMPLOS

- Parábola asíntótica a la curva

$$x = \frac{t^7 + t + 1}{t^2} = t^{-2} + t^{-1} + t^5, \quad y = \frac{t^2 + 1}{t} = t^{-1} + t$$

Se elimina primeramente el sumando de potencia -2 ,

$$x - y^2 = t^{-1} - 2 - t - t^2 + t^5.$$

Se elimina a continuación el sumando de potencia -1 ,

$$x - y^2 - y = -2 - t - t^2 + t^5.$$

La expresión $x - (y^2 + y - 2)$ tiende a cero cuando t tiende a cero, y se tiene una parábola asíntótica de ecuación

$$x = y^2 + y - 2.$$

- Asíntotas de la curva (Figura 12 (C')):

$$x = \frac{1}{t-1}, \quad y = \frac{t^2+1}{t-1}.$$

Es claro que x e y tienden a infinito cuando $t \rightarrow 1$.

Ahora bien,

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} (t^2 + 1) = 2,$$

luego existe una dirección asintótica paralela a la recta $y = 2x$, y

$$\lim_{t \rightarrow 1} (y - 2x) = \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{t^2 + 1}{t - 1} - \frac{2}{t - 1} \right) = \lim_{t \rightarrow 1} (t + 1) = 2.$$

Por lo tanto la curva tiene como asíntota la recta $y = 2x + 2$.

Además, cuando t tiende a más infinito (o a menos infinito), x tiende a cero e y tiende a más infinito (o a menos infinito); entonces la curva tiene como asíntota vertical la recta $x = 0$.

• Ramas infinitas de la curva (Figura 12 (B)):

$$x = \frac{t^2}{t^2 - 1}, \quad y = \frac{t}{t - 1}.$$

Si $t \rightarrow 1$, entonces $x \rightarrow \infty$ e $y \rightarrow \infty$,

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t + 1}{t} = 2; \quad \lim_{t \rightarrow 1} y - 2x = -\frac{t}{t + 1} = -\frac{1}{2}$$

luego $y = 2x - 1/2$ es la asíntota y su posición respecto a la curva se determina estudiando el signo de $y - (2x - 1/2) = (1 - t)/(2(1 + t))$:

$$\text{Si } t \rightarrow 1_+, \quad x \rightarrow +\infty, \quad y \rightarrow +\infty, \quad y - (2x - \frac{1}{2}) \rightarrow 0_-$$

$$\text{Si } t \rightarrow 1_-, \quad x \rightarrow -\infty, \quad y \rightarrow -\infty, \quad y - (2x - \frac{1}{2}) \rightarrow 0_+$$

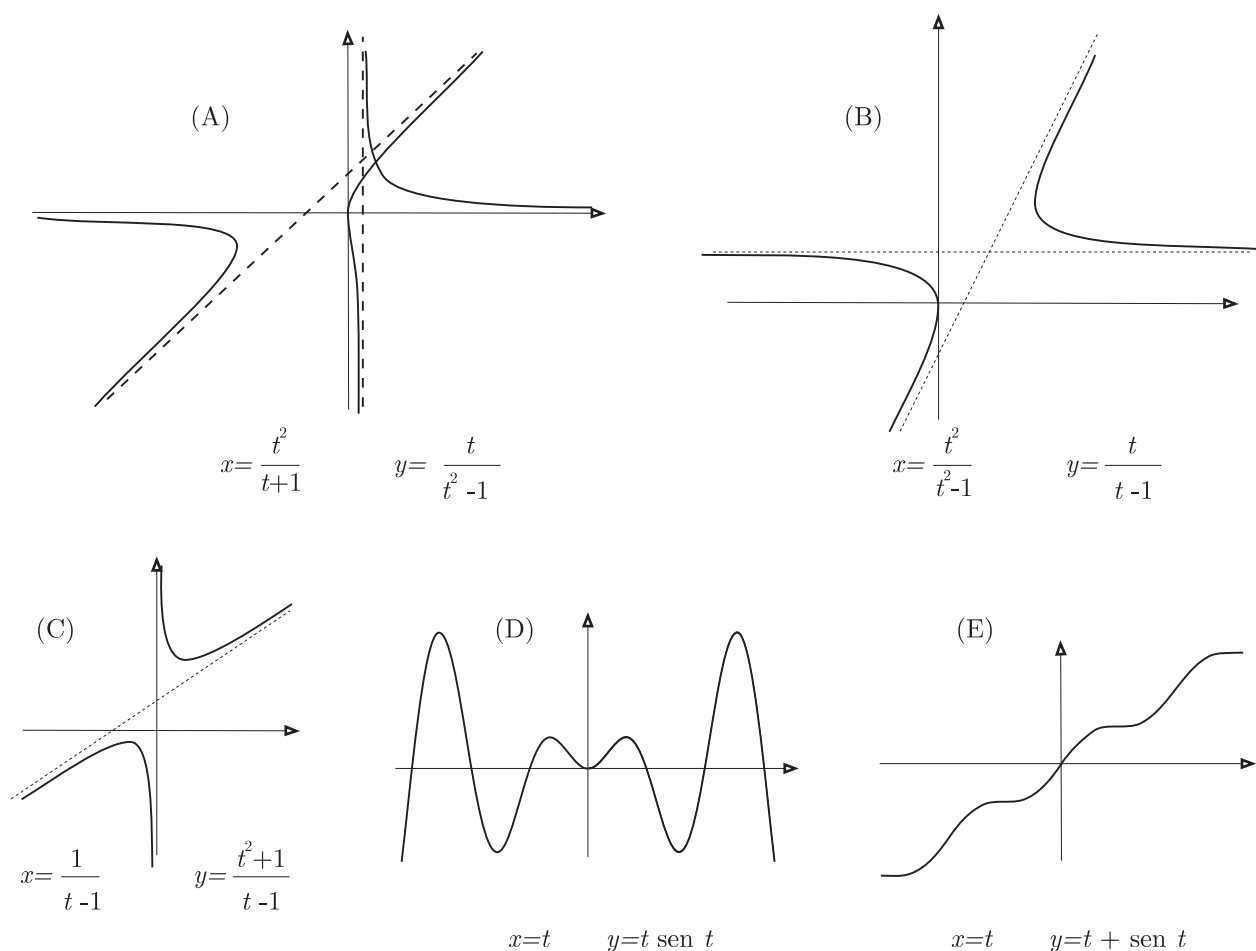


Figura 12: Ramas infinitas

Si $t \rightarrow -1$, entonces $x \rightarrow \infty$ e $y = 1/2$ es una asíntota horizontal.

- Dada la curva (Figura 12 (A)):

$$x = \frac{t^2}{t+1}, \quad y = \frac{t}{t^2-1},$$

veamos sus asíntotas

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y = 0; \quad y = 0, \text{ asíntota horizontal.}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} x = \frac{1}{2}, \quad \lim_{t \rightarrow 1} y = \infty; \quad x = \frac{1}{2}, \text{ asíntota vertical.}$$

$$\lim_{t \rightarrow -1} x = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow -1} y = \infty; \quad a = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{1}{t(t-1)} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{t \rightarrow -1} y - ax = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t(2-t)}{2(t-1)} = \frac{3}{4}, \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}, \text{ asíntota oblicua.}$$

- Para la curva (Figura 12 (D)):

$$x = t, \quad y = t \operatorname{sen} t,$$

se tiene que para $t \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \infty$ e $y \rightarrow \infty$, pero el

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t \operatorname{sen} t}{t},$$

no existe. Por lo tanto, no tiene dirección asintótica.

- Puede ocurrir que una rama infinita admita dirección asintótica sin tener asíntota. Sea la curva (Figura 12 (E)):

$$x = t, \quad y = t + \operatorname{sen} t,$$

si $t \rightarrow \infty$, entonces $x \rightarrow \infty$ e $y \rightarrow \infty$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t + \operatorname{sen} t}{t} = 1,$$

pero el

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\operatorname{sen} t + t - t)$$

no existe. Por lo tanto, admite dirección asintótica pero no tiene asíntota.

6 Cuadro de variaciones

Se construye un cuadro de variaciones en donde figuran los signos de $x'(t)$, $y'(t)$, las variaciones de $x(t)$, $y(t)$, así como los valores de x e y en los t que anulan $x'(t)$, $y'(t)$, límites o valores en los extremos de los intervalos que constituyen el campo de variación de t , etc.

Se tienen así los parámetros de los puntos singulares (aquellos en que $x'(t) = y'(t) = 0$), de los puntos de tangente paralela a los ejes (a OY , si $x'(t) = 0$ e $y'(t) \neq 0$, a OX , si $y'(t) = 0$ y $x'(t) \neq 0$). En ocasiones, conviene anotar en el cuadro las variaciones de $\mu(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$, que es el coeficiente angular de la tangente.

El crecimiento y decrecimiento de la curva se observará también en el cuadro de variaciones, pues al conocer las variaciones de $x'(t)$ e $y'(t)$, se tiene la variación de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \mu.$$

EJEMPLO

Dada una curva en coordenadas paramétricas veremos su periodicidad, simetrías, y construiremos el cuadro de variaciones. Sea la curva llamada **nefroide** (Figura 13)

$$x = 3 \cos t - \cos 3t, \quad y = 3 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t = 4 \operatorname{sen}^3 t.$$

$T = 2\pi$ es el período. Es simétrica respecto al eje OY : $x(t) = -x(\pi - t)$, $y(t) = y(\pi - t)$; y simétrica respecto al eje OX : $x(t) = x(-t)$, $y(t) = -y(-t)$. Luego el estudio lo podemos limitar al intervalo $[0, \pi/2]$.

Para expresar en factores las derivadas, podemos usar MATHEMATICA:

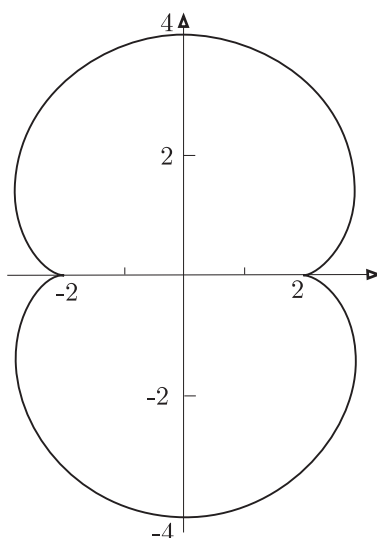


Figura 13: Nefroide

```

In[1]:= f[t_]:= {3Cos[t]-Cos[3t], 3Sin[t]-Sin[3t]}
In[2]:= Factor[f'[t], Trig->True]
Out[2]:= {6 (Cos[t] - Sin[t]) Sin[t] (Cos[t] + Sin[t]), 12 Cos[t] Sin[t]^2}

```

$$x' = -3 \sin t + 3 \sin 3t = 6 \sin t \cos 2t, \quad y' = 3 \cos t - 3 \cos 3t = 12 \sin^2 t \cos t; \quad \frac{y'}{x'} = \tan 2t.$$

Tenemos el siguiente cuadro de variaciones:

t	0		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	
x'	0	+	0	−	−6
x	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	4
y'	0	+	$3\sqrt{2}$	+	0
y'/x'	0		∞		0

7 Diagrama cartesiano.

A veces es conveniente representar por separado la curva $x = x(t)$, respecto a un sistema de coordenadas x, t ; y la curva $y = y(t)$, respecto a un sistema de coordenadas y, t . Dibujadas estas curvas se ve como varían x e y cuando t toma todos los valores posibles.

EJEMPLO:

- Para representar la curva de ecuaciones paramétricas:

$$x = \frac{1}{t+1}, \quad y = t^2 + 1,$$

obtenemos previamente las representaciones de la hipérbola $x = x(t) = 1/(t+1)$ en el plano Otx y de la parábola $y = y(t) = t^2 + 1$ en el plano Oty , (Figura 14), observando como varían x e y en función de t , para ayudar a deducir la representación pedida.

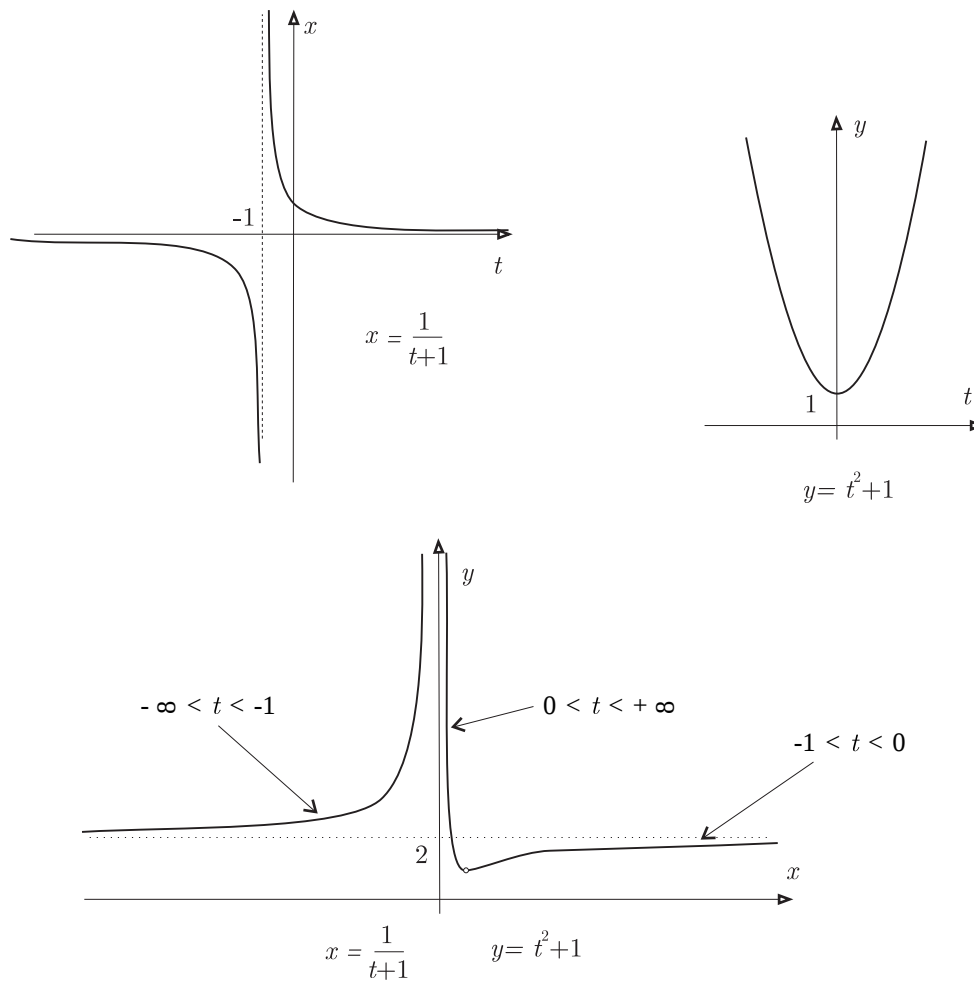


Figura 14: Diagrama cartesiano

t	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x	0	$\frac{-\infty}{+\infty}$	1	0
y	$+\infty$	2	1	$+\infty$

8 Curvas racionales

Una curva es racional si las coordenadas de cualquiera de sus puntos se expresan mediante polinomios o cociente de polinomios en el parámetro t .

$$x = \frac{P_1(t)}{Q_1(t)}, \quad y = \frac{P_2(t)}{Q_2(t)}, \quad P_i, Q_i \text{ polinomios, } i = 1, 2.$$

La eliminación de t entre estas dos ecuaciones da como resultante un polinomio en x_1, x_2 , es decir, la curva es algebraica. El recíproco no es cierto en general (ver curvas unicursales, pág. 18).

La representación de una curva racional es **propia** si a cada punto de la curva corresponde un sólo valor del parámetro, excepto para un número finito de puntos singulares.

Veamos un método para investigar si una representación de una curva racional es propia o no.

Se investiga si es posible obtener todo punto para dos valores distintos de t y t' del parámetro:

$$\frac{P_1(t)}{P_0(t)} = \frac{P_1(t')}{P_0(t')}, \quad \frac{P_2(t)}{P_0(t)} = \frac{P_2(t')}{P_0(t')},$$