

## EL TEOREMA DE HAWKING

Javier Lafuente López  
Departamento de Geometría y Topología  
Facultad de Matemáticas  
Universidad Complutense de Madrid

### §1.-INTRODUCCIÓN

Estas notas están basadas en un seminario impartido por el autor durante el curso 89-90 en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

El seminario iba dirigido a alumnos del Curso de Doctorado del Departamento de Geometría y Topología, y a profesores de la Facultad, con una formación básica en Geometría Diferencial, pero no necesariamente especialistas en temas de Cosmología.

El tema central del seminario, y de estas notas, gira en torno a uno de los más famosos teoremas de Hawking, que de forma coloquial podríamos enunciarlo así:

*En cualquier modelo matemático físicamente razonable del Universo, el pasado de cualquier partícula siempre es finito.*

Tomando como punto de referencia esta afirmación, nuestra idea es presentar a un lector matemático de nivel equivalente a postgraduado, las ideas básicas de la Cosmología moderna y algunas de las herramientas de la Geometría Diferencial que aquí entran en juego.

En primer lugar, se trata de expresar en un lenguaje geométrico preciso el significado de la afirmación anterior, para transformarla en el enunciado matemático clásico y riguroso. Para ello será necesario inicialmente explicar qué objeto geométrico es un modelo del universo, según la Teoría General de la Relatividad (Espacios de Lorentz), y que se entiende en este contexto por un modelo *razonable*. Es decir, qué restricciones geométricas se deben imponer a nuestro modelo para que reflejen determinadas propiedades físicamente plausibles del Universo. Estos requerimientos físicos pueden esquematizarse de la siguiente forma:

- 1.- Buenas propiedades de Causalidad.
- 2.- El Universo está en expansión.
- 3.- La gravedad atrae.

En segundo lugar presentaremos una panorámica general de las herramientas y técnicas geométricas en espacios de Lorentz involucradas en la demostración del Teorema de Hawking.

Finalmente, mostraremos la línea argumental que nos conduce a la demostración del Teorema.

## §2.- CAUSALIDAD EN ESPACIOS DE LORENTZ

Los espacios de Lorentz, constituyen según la teoría General de la Relatividad, el objeto geométrico adecuado para representar los modelos cosmológicos del Universo. En éste epígrafe, se analizarán un primer grupo de propiedades que debemos exigir a nuestro modelo, para que resulte "razonable" desde el punto de vista Causal. Propiedades tales como que "Nadie puede influir en su propio pasado (ni siquiera en sus proximidades)"... etc. Se corresponderán con determinados requerimientos geométricos a nuestro modelo.

### 2.1 APROXIMACION A LA TEORIA GENERAL DE LA RELATIVIDAD

En relatividad especial un suceso viene determinado por un punto de un espacio afín  $M$  de dimensión 4, en cuyo espacio vectorial subyacente  $\vec{M}$  está definida una forma bilineal simétrica con signatura  $-+++$ . Esta estructura, denominada espacio de Minkowski, constituye el modelo adecuado para el estudio de la dinámica de partículas en un universo carente de masas gravitatorias.

Desde el punto de vista de la Geometría Diferencial, podemos considerar el espacio de Minkowski  $M$  como una variedad diferenciable de dimensión 4, en donde para cada suceso  $p \in M$  el espacio tangente  $T_p M$  está canónicamente identificado con  $\vec{M}$ , via el isomorfismo lineal:  $T_p M \ni c'(0) \rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{c(0)c(t)}{t} \in \vec{M}$ , siendo  $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  una curva diferenciable con  $c(0)=p$ .

En consecuencia, queda inducida en cada espacio tangente  $T_p M = \vec{M}$  una forma bilineal simétrica  $g_p: T_p M \times T_p M \ni (v, w) \rightarrow g(v, w) \in \mathbb{R}$ .

El espacio de Minkowski  $(M, g)$ , es pues, un espacio de Lorentz, según la siguiente definición:

#### 2.1.1 Espacio de Lorentz

Un espacio de Lorentz, es una variedad diferenciable  $M$ , real, conexa de dimensión cuatro, dotada de un tensor métrico  $g$  que asigna (de forma diferenciable) a cada espacio tangente  $T_p M$ , una métrica con signatura  $-+++$ , que denotamos por  $g_p: T_p M \times T_p M \ni (v, w) \rightarrow g(v, w) = \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ .

Se denomina a  $g$ , métrica Lorentziana de  $M$ .

El espacio de Lorentz, es el objeto geométrico, que la Teoría General de la Relatividad elige para representar modelos cosmológicos.

En una primera aproximación podríamos pensar que un espacio de Lorentz, viene a ser un como un espacio de Minkowski "distorcionado" desde el punto de vista métrico y topológico.

La idea geométrica central de la Relatividad General, es que esta distorsión (determina y) viene determinada por la presencia de las fuerzas gravitatorias, que son las únicas que gobiernan el Universo a gran escala. De esta

forma, toda la información relevante a nivel "cosmológico" debe quedar descrita en la geometría de  $M$ .

## 2.2 CARACTER CAUSAL Y ORIENTACION TEMPORAL.

### 2.1.1 Carácter Causal de vectores.

Cada espacio tangente  $T_p M$  al espacio de Lorentz  $M$ , reproduce el modelo de Minkowski, como aproximación lineal de  $M$  en  $p$ , y podemos trasladar a él la terminología habitual de los espacios lineales de Lorentz. Así por ejemplo, el carácter causal de un vector no nulo  $v \in T_p M$  se dirá temporal, espacial o luz si  $\langle v, v \rangle < 0$ ,  $\langle v, v \rangle \leq 0$  o  $\langle v, v \rangle = 0$  respectivamente. De forma análoga un campo de vectores  $X \in \mathcal{X}(M)$  se dirá temporal, causal o luz, si  $X(p)$  mantiene el mismo carácter causal en todo punto  $p \in M$ .

El conjunto  $\mathcal{E}_p$  de vectores causales en  $T_p M$ , tiene exactamente dos componentes conexas que denotamos arbitrariamente por  $\mathcal{E}_p^+$  y  $\mathcal{E}_p^-$  y denominamos conos causales. Si por ejemplo  $v \in \mathcal{E}_p^+$ , podemos escribir  $\mathcal{E}_p^+ = \{w \in \mathcal{E}_p : \langle v, w \rangle < 0\}$ .

### 2.1.2 Orientación temporal.

Una orientación tiempo en el espacio de Lorentz  $M$ , es una asignación que hace corresponder a cada  $p \in M$  un cono causal  $\mathcal{E}_p^+$  de  $T_p M$ , que llamamos cono causal futuro en  $p$ . Esta asignación debe ser diferenciable en el sentido de que en cierto entorno  $\mathcal{U}$  de cada punto  $p \in M$ , pueda construirse un campo temporal  $X \in \mathcal{X}(\mathcal{U})$  con  $X(a) \in \mathcal{E}_a^+$  para todo  $a \in \mathcal{U}$ . Esta condición equivale- usando particiones diferenciables de la unidad- a la existencia de un campo temporal  $X \in \mathcal{X}(M)$ , que en cada punto señala al cono causal positivo.

Un espacio de Lorentz orientado tiempo, lo denominamos espacio orientado de Lorentz. Un vector causal de  $T_p M$  se dirá futuro, si pertenece al cono causal futuro. Caso contrario se denomina vector causal pasado.

## 2.3 CURVAS CAUSALES.

Sea  $M$  un espacio orientado de Lorentz.

Una curva diferenciable a trozos  $\alpha: [a, b] \rightarrow M$  se dirá temporal, causal, o luz, futura o pasada, si ese es el carácter de cualquier vector  $\alpha'(t)$  para todo  $t \in [a, b]$ , incluidos los vectores  $\alpha'(a^+)$ ,  $\alpha'(b^-)$  y los vectores tangentes  $\alpha'(t_1^+)$  y  $\alpha'(t_1^-)$  en los puntos de ruptura intermedios.

Si la curva  $\alpha$  está definida en un intervalo  $I$  abierto de  $\mathbb{R}$  (eventualmente no acotado)  $\alpha: I \rightarrow M$ , diremos que posee un carácter causal determinado cuando para todo  $a, b \in I$ ,  $a < b$ , la curva  $\alpha|_{[a, b]}$  sea diferenciable a trozos, y tenga el mismo carácter causal.

Finalmente, una curva digamos, causal futura  $\alpha: (a, b) \rightarrow M$ , se dirá futura-inextendible, si no existe  $\lim_{t \rightarrow b} \alpha(t)$ . Análogamente se define el concepto de pasado-inextendible;  $\alpha$  se dirá inextendible, si es futura y pasada inextendible.

### 2.3.1 Tiempo propio.

Las curvas temporales futuras  $\alpha:[a,b] \rightarrow M$ , representan trozos de las líneas del universo de las partículas materiales. Se llama longitud de  $\alpha$  a:

$L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt$ , donde  $|\alpha'(t)| = \sqrt{-\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle}$ . La longitud  $L(\alpha)$  representa el lapso de tiempo medido por un reloj que viaja con la partícula, entre los sucesos  $\alpha(a)$  y  $\alpha(b)$ .

Desde el punto de vista físico, solo interesa de una curva temporal futura, su trayectoria, y no su parametrización concreta. Sin embargo para este tipo de curvas, hay una parametrización canónica- por la longitud del arco- con claro significado físico. Esta parametrización viene determinada (salvo traslación de parámetro) por la condición:  $|\alpha'(t)|=1$ . El parámetro  $t$  se denomina entonces tiempo propio, ya que entonces  $t$  representa el tiempo marcado por un reloj que viaje con la partícula.

### 2.3.2 Partículas con pasado finito.

Una curva temporal futura inextensible  $\alpha:(a,b) \rightarrow M$  tal que  $\lim_{t \rightarrow a^+} L(\alpha|[t,b_1])$  es finito, para todo  $b_1$  con  $a < b_1 < b$  se interpreta físicamente como una partícula con pasado finito.

### 2.3.3 Caracter Causal de las geodésicas.

Dada una geodésica  $\gamma:[a,b] \rightarrow M$ , como la función  $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle$  es constante, su caracter causal, solo depende del caracter causal de  $\gamma'(a)$ . Supuesto este vector temporal futuro, y  $|\gamma'(a)|=1$ , entonces  $t$  es el tiempo propio de  $\gamma$ . Una geodésica causal futura y maximal  $\gamma:(a,b) \rightarrow M$  es inextensible en el sentido de las curvas causales. Si es luz, representa la línea del universo de un rayo de luz. Si es temporal, indica la línea del universo de una partícula material en caída libre, es decir, solo afectada por las fuerzas gravitatorias.

## 2.4 PRECEDENCIA CRONOLÓGICA Y CAUSAL. PROPIEDADES GLOBALES

En nuestro espacio orientado de Lorentz  $M$ , la línea del universo de cualquier "señal" viene determinada por una curva causal futura, de forma que si no existe tal curva entre sucesos distintos  $p$  y  $q$  de  $M$ , podemos concluir que  $p$  no tiene influencia sobre  $q$ . En el caso contrario, diremos que  $p$  precede causalmente a  $q$ , y escribimos:  $p < q$ . La notación  $p \leq q$ , indica como es habitual,  $p = q$ , o  $p < q$ .

### 2.4.1 Futuro Causal y cronológico.

El futuro causal del suceso  $p$ , viene definido por el conjunto:

$J^+(p) = \{q \in M : p \leq q\}$  e indica el conjunto de sucesos de  $M$  sobre los que el suceso  $p$  puede tener influencia.

Se dice que el suceso  $p$  precede cronológicamente al suceso  $q$ , y

escribimos  $p \ll q$ , si existe una curva temporal futura que los une. De forma análoga, se llama futuro cronológico de  $p$  al conjunto  $I^+(p) = \{q \in M : p \ll q\}$ .

Propiedades tales como:

$$p \ll q \Rightarrow p \ll q, \quad p \ll q \ll r \Rightarrow p \ll r, \quad p \ll q \ll r \Rightarrow p \ll r$$

tienen demostración trivial en un espacio orientado de Lorentz arbitrario. No así la propiedad de transitividad fuerte:

$$p \ll q \ll r \Rightarrow p \ll r, \quad \text{o} \quad p \ll q \ll r \Rightarrow p \ll r$$

cuya demostración puede verse en [ON pág 293].

## 2.5 PROPIEDADES LOCALES DE LA PRECENCIA CRONOLÓGICA Y CAUSAL.

En el espacio  $M$  de Minkowski, los conceptos de precedencia causal admiten una formulación particularmente simple. De hecho si  $p, q$  son dos sucesos, denotando por  $\gamma_{pq}(t) = p + t\vec{pq}$   $0 \leq t \leq 1$  la única geodésica en  $M$  uniendo  $p$  a  $q$  se verifican las equivalencias:

$$p \ll q \Leftrightarrow \gamma_{pq} \text{ es causal futura, y } p \ll q \Leftrightarrow \gamma_{pq} \text{ es temporal futura}$$

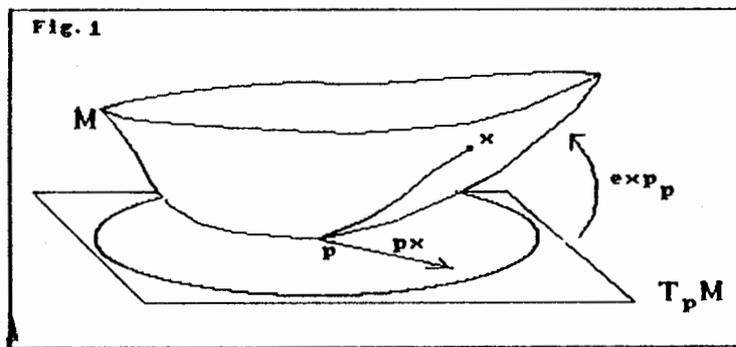
Veremos que estas "buenas" propiedades de Causalidad, son heredadas localmente en un espacio orientado de Lorentz, a través de la aplicación exponencial:

### 2.5.1 Geometría Local de Geodésicas.

Sea  $M$  un espacio de Lorentz. Si  $v \in T_p M$ , denotamos por  $\gamma_v : I_v \rightarrow M$  a la única geodésica maximal con  $\gamma'_v(0) = v$ .

Las geodésicas conservan su caracter por cambios lineales de parámetro, es decir, si  $t \in I_{sv}$  entonces  $st \in I_v$ , y se tiene  $\gamma_{sv}(t) = \gamma_v(st)$ . Así el conjunto

$\mathcal{D}_p = \{v \in T_p M : t \in I_v\}$  es un abierto estrellado respecto a  $0 \in T_p M$ , y la aplicación  $\exp_p : \mathcal{D}_p \ni v \rightarrow \gamma_v(1) \in M$  es diferenciable, y verifica  $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ).



Por otra parte, se prueba que  $\exp_p$  es no singular en  $0 \in T_p M$ , y existe  $\tilde{U}$  entorno de  $0$  en  $T_p M$  y  $U$  entorno de  $p$  en  $M$ , tal que  $\exp_p : \tilde{U} \rightarrow U$  es un difeomorfismo, denotando por  $U \ni x \rightarrow px \in \tilde{U}$ , la aplicación inversa, se tiene la identidad:

$$\gamma_{px}(t) = \exp_p(tpx) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

que expresa la propiedad de que para cada  $x \in U$  existe una única geodésica  $\gamma_{px} : [0, 1] \rightarrow U$  que une  $p$  a  $x$ . Se dice entonces que  $U$  es un entorno normal

de  $p$ . Cuando  $\mathcal{U}$  es entorno normal de cada uno de sus puntos, se llama geodésicamente convexo. La existencia de una base de entornos geodésicamente convexos en cada punto es un hecho conocido.

### 2.5.2 Causalidad Local.

Un abierto  $\mathcal{U}$  geodésicamente convexo de  $M$ , es también espacio orientado de Lorentz, y podemos hablar en él de precedencia cronológica  $\ll_{\mathcal{U}}$  y causal  $<_{\mathcal{U}}$ .

Se tienen entonces las siguientes equivalencias:

a)  $p \ll_{\mathcal{U}} q \Leftrightarrow pq$  es vector temporal futuro. Por otra parte, si  $\alpha: [0,1] \rightarrow \mathcal{U}$  es temporal futura uniendo  $p$  a  $q$ , se verifica  $L(\alpha) \leq L(\gamma_{pq}) = |pq|$ .

b)  $p <_{\mathcal{U}} q \Leftrightarrow pq$  es vector causal futuro.

Denotando por  $I^+(p, \mathcal{U}) = \{q \in \mathcal{U} : p \ll_{\mathcal{U}} q\}$  el futuro cronológico del punto  $p$  en  $\mathcal{U}$ , se verifica que  $I^+(p, \mathcal{U})$  es un conjunto abierto.

De aquí se deduce trivialmente:

c)  $I^+(p) = I^+(p, M)$  es un conjunto abierto.

## 2.6 CONDICIONES DE CAUSALIDAD.

El buen comportamiento local de la causalidad, contrasta con la presencia de todo tipo de "patologías" desde el punto de vista global, en espacios de Lorentz arbitrarios. Por ejemplo, la posible presencia de curvas causales futuras cerradas o casi cerradas, vulnera los más elementales principios filosóficos de relaciones Causa-Efecto. Es pues necesario imponer en nuestro modelo ciertas restricciones que impidan la existencia de curvas causales indeseables.

### 2.6.1 Espacios Causales.

Un espacio orientado de Lorentz,  $M$  es Causal si en él no existe una curva causal futura cerrada, es decir:  $\forall p \in M, p \notin J^+(p)$ .

Esta condición impone restricciones topológicas a la variedad  $M$  de partida. Por ejemplo, si  $M$  es compacto entonces no puede ser causal.

En efecto, la propiedad de compacidad impone que  $M$  pueda obtenerse como unión finita de conjuntos abiertos de la forma  $I^+(p_i)$   $i=1, \dots, r$ , y podemos suponer que  $I^+(p_1)$  no está contenido en  $I^+(p_i)$  para  $i=2, \dots, r$ . Pero entonces  $p_1 \notin I^+(p_i)$   $i=2, \dots, r$ , lo cual indica que  $p_1 \in I^+(p_1)$ , y existe por tanto una curva temporal futura cerrada.

La propiedad de no existencia de curvas causales futuras casi cerradas viene dada por el siguiente criterio:

### 2.6.2 Espacios Fuertemente Causales.

$M$  es Fuertemente Causal si para todo  $p \in M$ , y todo entorno  $\mathcal{U}$  de  $p$  existe  $V$  entorno de  $p$ , con  $V \subseteq \mathcal{U}$  y tal que toda curva causal futura uniendo dos puntos de  $V$  está contenida en  $\mathcal{U}$ .

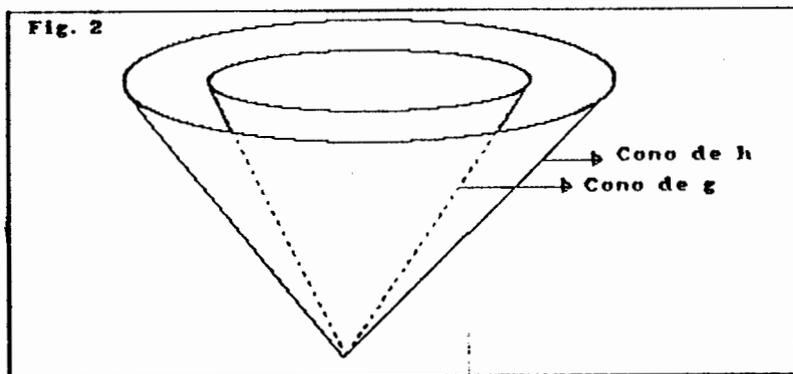
La Causalidad Fuerte implica evidentemente la propiedad de Causalidad.

### 2.6.3 Estabilidad Causal.

Otra vía para imponer la no existencia de curvas causales futuras casi cerradas, es la propiedad de estabilidad causal, que exige que el espacio permanezca causal cuando se realizan pequeñas perturbaciones de la métrica:

Sean  $g, h$  dos métricas de Lorentz en  $M$ . Decimos que  $h$  es más ancha que  $g$ , y escribimos  $g < h$  si todo vector causal en  $(M, g)$  es temporal en  $(M, h)$ , es decir:  $g(v, v) \leq 0$ , y  $v \neq 0 \Rightarrow h(v, v) < 0$ .

Se dice que  $M = (M, g)$  es establemente causal, si existe  $h$  métrica de Lorentz en  $M$  más ancha que  $g$ , tal que  $(M, h)$  es espacio causal. (Véase figura)



Un buen criterio para reconocer esta propiedad en un espacio de Lorentz  $M$  es el siguiente:

Supóngase que existe una función diferenciable  $T: M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que el campo  $-\text{grad } T$  es temporal futuro. Entonces  $M$  es causal pues si  $\alpha: [a, b] \rightarrow M$  es curva causal futura, entonces  $(T \circ \alpha)'(t) = g(\text{grad } T, \alpha'(t)) > 0$ , y por tanto  $\alpha$  no puede ser cerrada. De hecho, una sutil modificación del argumento permite probar que  $M$  es fuertemente causal.

Por otra parte, es fácil probar que la métrica  $h$  en  $M$  definida por:  $h(v, w) = g(v, w) - g(\text{grad } T, v) g(\text{grad } T, w)$ , es una métrica (orientada) de Lorentz más ancha que  $g$ , y el campo  $-\text{grad}_h T$  sigue siendo temporal futuro en  $(M, h)$ , que conserva así la propiedad de causalidad.

Una función diferenciable  $T: M \rightarrow \mathbb{R}$  se llama función tiempo global, si el vector  $-\text{grad } T$  es temporal futuro.

Se prueba que la estabilidad causal equivale a la existencia de una función tiempo global (Ver [HE] pag 198), y por lo anterior, implica la causalidad fuerte.

## 2.7 ESPACIOS GLOBALMENTE HIPERBÓLICOS

La propiedad de Estabilidad Causal es hereditaria para subconjuntos abiertos conexos de  $M$ . Este hecho constituye un indicio de que tal propiedad, no puede ser una exigencia causal suficiente. En efecto, no parece razonable suponer nuestro modelo de Universo contenido estrictamente en un modelo mas amplio. Se hace pues necesario añadir alguna exigencia más, que implique de alguna forma esta condición de maximalidad.

### 2.7.1 Función Tiempo de Cauchy

Una función tiempo  $T: M \rightarrow \mathbb{R}$ , se denomina función tiempo de Cauchy, si para cada curva temporal inextendible  $\alpha: (a, b) \rightarrow M$  se verifica:

$$\lim_{t \rightarrow a^+} T(\alpha(t)) = +\infty \quad \lim_{t \rightarrow b^-} T(\alpha(t)) = -\infty.$$

Se dice que  $M$  es globalmente hiperbólico, si admite una función tiempo global de Cauchy. En particular,  $M$  es establemente causal.

### 2.7.2 Hojas espaciales

En un espacio globalmente hiperbólico, las superficies  $S_r = T^{-1}(r)$  se denominan hojas espaciales de  $T$ . Todas las hojas espaciales son difeomorfas entre si. De hecho es fácil probar que  $M$  es difeomorfo a  $\mathbb{R} \times S_0$ . En efecto:

Si  $V = \text{grad } T$ , sea  $U = \frac{V}{\langle V, V \rangle}$ , y  $c$  una curva integral maximal de  $U$ , entonces:  $(T \circ c)'(t) = \langle c'(t), V \rangle = \langle U(c(t)), V \rangle = 1$ . Así si  $T(c(0)) = 0$ , es  $T(c(t)) = t$ , y por ser  $c$  temporal e inextendible y  $T$  tiempo de Cauchy, se concluye que el dominio de definición de  $c$  es todo  $\mathbb{R}$ . Si  $F: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  es el flujo global de  $U$ , entonces la restricción  $F: \mathbb{R} \times S_0 \rightarrow M$  es difeomorfismo.

En particular cada hoja espacial es una hipersuperficie Riemanniana cerrada y conexa de  $M$ . Además son superficies de Cauchy, según la siguiente definición:

### 2.7.3 Superficies de Cauchy

Una superficie de Cauchy en un espacio orientado de Lorentz  $M$ , es un subconjunto  $S$  de  $M$  que corta una sola vez a cada curva temporal inextendible.

Las superficies de Cauchy tienen algunas propiedades parecidas a las hojas espaciales de una función tiempo, por ejemplo:

a) *Una superficie de Cauchy es un conjunto conexo:*

En efecto: Si  $V$  es un campo temporal, entonces para  $p \in M$ ,  $S$  corta una sola vez a la curva integral maximal  $\alpha_p$  de  $V$  con  $\alpha_p(0) = p$ , y la aplicación  $\rho_S: M \ni p \rightarrow (\text{im } \alpha_p) \cap S \in S$  es continua y abierta. En consecuencia,  $S$  es conexa. Si  $S$  es diferenciable, entonces  $\rho_S$  es submersión.

b) *Dos Superficies de Cauchy son siempre homeomorfas:*

Si  $S$  y  $L$  son superficies de Cauchy, entonces para un campo temporal fijo, las aplicaciones  $\rho_S|_L: L \rightarrow S$ , y  $\rho_L|_S: S \rightarrow L$  son continuas e Inversa la una de la otra. En particular  $L$  y  $S$  son homeomorfas (o difeomorfas en caso diferen-

ciable).■

Si  $A$  es subconjunto de  $M$  se denota por  $I^+(A)$  a la unión de los futuros cronológicos  $I^+(a)$  de puntos  $a \in A$ . Se tiene entonces:

c) Si  $S$  es una superficie de Cauchy entonces  $M$  se obtiene como unión disjunta  $I^+(S)$ ,  $S$ ,  $I^-(S)$ , y  $S$  es el borde topológico común de  $I^+(S)$  y  $I^-(S)$

En particular  $S$  es un conjunto cerrado. Finalmente:

d) Una superficie de Cauchy es una hipersuperficie topológica.

#### 2.7.4 Caracterizaciones de los espacios globalmente hiperbólicos.

La condición "Globalmente Hiperbólico" desempeña en geometría Lorentziana un papel análogo al de completitud métrica en espacios Riemannianos, y ha sido ampliamente estudiada. Presentamos aquí algunas de sus caracterizaciones más importantes:

En un espacio  $M$  fuertemente Causal son equivalentes las afirmaciones:

i)  $M$  admite una superficie de Cauchy.

ii)  $M$  es fuertemente causal, y para cada  $p, q \in M$  con  $p < q$ ,  $J(p, q) = J^+(p) \cap J^-(q)$  es un conjunto compacto.

iii) Existe una función continua  $T: M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $T^{-1}(r)$  es superficie de Cauchy para todo  $r \in \mathbb{R}$ , y  $T \circ \alpha$  es estrictamente creciente para cada curva causal futura de  $M$ .

iv)  $M$  es globalmente hiperbólico.

v)  $M$  admite una superficie diferenciable (espacial) de Cauchy.

En adelante llamaremos *superficie de Cauchy*, a una superficie diferenciable espacial de Cauchy.

### §3 EXPANSIÓN DEL UNIVERSO

El desplazamiento al rojo de las ondas luminosas procedentes de objetos lejanos constituye hoy en día la única prueba experimental de la Ley de expansión del Universo formulada por Hubble en 1929, y admitida sin reservas en todas las teorías Cosmológicas modernas.

Nos proponemos en este epígrafe dar una formulación geométrica precisa de este fenómeno, que se incorpora como hipótesis en el Teorema de Hawking.

Para ello son necesarios algunos preliminares.

En lo que sigue,  $M$  es una variedad diferenciable conexa, topológicamente orientada, de dimensión cuatro, y dotada eventualmente de una métrica orientada tiempo de Lorentz.

La hipótesis de orientabilidad topológica, no es estrictamente necesaria en esta exposición. Sin embargo la adoptamos por simple cuestión de claridad expositiva.

#### 3.1 EL OPERADOR DIVERGENCIA

Para dar sentido a la idea de expansión (o contracción) de un recinto de una variedad diferenciable, son necesarios algunos ingredientes geométricos:

Por una parte es necesario disponer de una teoría de integración en la variedad  $M$  para poder medir volúmenes de recintos. Esta teoría viene determinada por una forma de volumen, que es canónica si  $M$  es semiriemanniana.

Por otra, se necesita conocer la ley de movimiento del recinto. Esta ley se determina a través del flujo de un campo de vectores.

Finalmente, se requiere de un operador- operador divergencia- que mida la "tendencia" a la expansión (o contracción) infinitesimal de regiones transportadas por el flujo del campo.

##### 3.1.1 Formas de Volumen. Orientación Topológica.

Recordamos que una forma de volumen en  $M$ , es una forma  $\omega$  de grado máximo que no se anula en ningún punto.

Una base  $(e_0, e_1, e_2, e_3)$  de  $T_p M$  se dirá positiva si  $\omega(e_0, e_1, e_2, e_3) > 0$ . El conjunto  $L^+(M)$  de bases positivas de  $M$  define una de las dos componentes conexas del fibrado de referencias  $L(M)$ . Tal elección significa una orientación topológica en  $M$ .

Es conocido que en una variedad  $M$  dotada de una forma de volumen  $\omega$ , se puede desarrollar una teoría de integración de funciones  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  con soporte compacto. Si  $D$  es un recinto medible, se llama volumen de  $D$  al número:

$$\text{vol}(D) = \int_M \chi_D \omega$$

donde  $\chi_D$  es la función característica del recinto.

### 3.1.2 Formas de Volumen canónicas.

Si  $M$  es Lorentziana (o Riemanniana), puede definirse una forma de volumen  $\omega_M$  canónica. Indicaremos cómo.

Una base ortonormal ordenada en un espacio tangente  $T_p M$  es una base  $(e_0, e_1, e_2, e_3)$  con  $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ , si  $i \neq j$ ,  $\langle e_0, e_0 \rangle = \pm 1$ , y  $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ ,  $i=1,2,3$ .

El criterio de definición de  $\omega_M$  es entonces el siguiente:

$\omega_M(e_0, e_1, e_2, e_3) = 1$ , cuando  $(e_0, e_1, e_2, e_3)$  es una base ortonormal ordenada y positiva de  $T_p M$ .

Claramente  $\omega_M$  se conserva por transporte paralelo.

Supuesto  $S$  una hipersuperficie semiriemanniana de  $M$ , con vector normal unitario  $N$ , la forma de volumen canónica  $\omega_S$  en  $S$  viene definida por el criterio:

$$\omega_S(e_1, \dots, e_n) = \omega_M(N(p), e_1, \dots, e_n) \text{ para } e_1, \dots, e_n \in T_p S.$$

### 3.1.3 Flujo local de un campo de vectores.

Si  $X \in \mathcal{X}(M)$  es un campo de vectores, recordamos que un flujo local de  $X$  por un punto  $p$  de  $M$ , viene definido por una cuaterna  $(U, U_0, \epsilon, F)$  donde  $F: I_\epsilon \times U_0 \rightarrow U$  es aplicación diferenciable verificando que  $c_x: I_\epsilon \ni t \rightarrow F(t, x) \in U$  es curva integral de  $X$  por  $x \forall x \in U_0$ , (es decir  $c_x'(t) = X(c_x(t))$ ) para todo  $t \in I_\epsilon$ . Además,  $F_t: U_0 \ni x \rightarrow F(t, x) \in F_t(U_0) \subseteq U$  es difeomorfismo  $\forall t \in I_\epsilon$ .

Si  $\omega$  es una forma de volumen en  $M$ , la expresión  $L_X \omega$  en función del flujo es:

$$L_X \omega = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(F_t)^* \omega - \omega}{t}$$

### 3.1.4 Operador Divergencia respecto a una forma de volumen.

Supongase  $\omega$  forma de volumen en  $M$ . Si  $X \in \mathcal{X}(M)$ , entonces la derivada de Lie  $L_X \omega$  define una  $n$ -forma en  $M$ , que es por tanto proporcional a  $\omega$ . Se define  $\text{div}_\omega X \in \mathcal{F}(M)$  por la identidad:  $L_X \omega = (\text{div}_\omega X) \omega$ .

El significado geométrico del operador divergencia es el siguiente:

$$(\text{div}_\omega X)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[ \lim_{D \rightarrow p} \frac{\text{vol}(D_t) - \text{vol}(D_0)}{\text{vol}(D_0)} \right] = \lim_{D \rightarrow p} \frac{1}{\text{vol } D} \left[ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(D_t) - \text{vol}(D_0)}{t} \right]$$

donde  $F_t$  es un flujo local para  $X$  en torno a  $p$ , y  $D_t = F_t(D)$ , siendo  $D$  un elemento de una familia de entornos que se contraen a  $p$ .

### 3.1.5 Operador Divergencia respecto a una conexión.

Si  $M$  está dotada de una conexión lineal  $\Gamma$  con derivada covariante  $D$ , se define el operador divergencia  $\text{div}_\Gamma$  asociado a la conexión, de la forma  $(\text{div}_\Gamma X)(p) = \text{Traza}(T_p M \ni v \rightarrow D_v X \in T_p M)$ .

En estas condiciones se tiene el siguiente resultado:

La forma de volumen  $\omega$  se preserva por transporte paralelo (i.e.

$D_X \omega = 0 \forall X \in \mathcal{X}(M)$ ), si y solo si  $\text{div}_\Gamma \omega = \text{div}_\omega$ .

### 3.2 INVARIANTES GEOMÉTRICOS DE INMERSIÓN.

En lo que sigue,  $S$  es una hipersuperficie espacial del espacio orientado de Lorentz  $M$ . En particular,  $S$  es variedad Riemanniana tridimensional.

Para cada punto  $p \in S$ , existe un único vector  $N(p) \in T_p M$  temporal, futuro, ortogonal a  $T_p S$  y unitario. El campo  $N$  a lo largo de  $S$  es diferenciable, y lo denominamos campo normal a  $S$ . En particular,  $S$  es topológicamente orientable.

#### 3.2.1 Segunda Forma Fundamental

Las conexiones de Levi-Civita  $\nabla$  de  $M$  y  $\nabla^S$  de  $S$  están relacionadas a través de la segunda forma fundamental por medio de la fórmula de Gauss:  $\nabla_V W = \nabla_V^S W + II(V, W)$ , siendo  $V, W \in \mathcal{X}(S)$ , y  $II(V, W)$  la componente normal a  $S$  de  $\nabla_V W$ .

Si  $N$  es el campo normal a  $S$ , se define el tensor "shape" en un punto  $p \in M$ :

$$\mathcal{Y}_p(v, w) = \langle II(v, w), N(p) \rangle \text{ para } v, w \in T_p S.$$

El tensor  $\mathcal{Y}$  es simétrico, y por elevación de uno cualquiera de sus índices puede interpretarse como operador lineal  $\mathcal{Y}_p : T_p S \rightarrow T_p S$  es decir:

$$\mathcal{Y}_p(v, w) = \langle \mathcal{Y}_p(v), w \rangle \text{ para todo } v, w \in T_p S$$

Si  $V$  y  $W$  son campos tangentes a  $S$  como  $\langle W, N \rangle = 0$  y  $\langle N, N \rangle = 1$  en  $S$  se verifica:  $0 = V \langle N, N \rangle = 2 \langle \nabla_V N, N \rangle$ , así  $\nabla_V N$  es tangente a  $S$ . Por otra parte:

$$0 = V \langle W, N \rangle = \langle \nabla_V W, N \rangle + \langle W, \nabla_V N \rangle = \langle II(V, W), N \rangle + \langle \nabla_V N, W \rangle = \langle \mathcal{Y}(V) + \nabla_V N, W \rangle$$

Por tanto  $\mathcal{Y}(V) = -\nabla_V N$ . Es decir, en cada punto  $p \in M$ , es  $\mathcal{Y}_p : T_p M \ni v \rightarrow -\nabla_v N \in T_p M$ .

#### 3.2.3 Subvariedades Totalmente geodésicas.

La hipersuperficie espacial  $S$ , se dice totalmente geodésica en  $p \in S$ , si las geodésicas de  $S$  que pasan por  $p$ , son también geodésicas en  $M$ .

Nótese que en estas circunstancias el tensor "Shape"  $\mathcal{Y}_p$  es idénticamente nulo, ya que si  $u \in T_p S$ , y  $\gamma(t)$  es la geodésica en  $S$  con  $\gamma(0) = p$ , y  $\gamma'(0) = u$ , por hipótesis  $\gamma$  es geodésica en  $M$ , y se verifica  $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$ . Por tanto:

$$\mathcal{Y}_p(u, u) = \langle \nabla_u \gamma', N(p) \rangle = \langle 0, N(p) \rangle = 0$$

En particular  $\nabla_u N = 0$  para todo  $u \in T_p S$ .

#### 3.2.4 Curvatura media y divergencia

Se llama curvatura media de  $S$  en  $p \in S$  a  $\mu_S(p) = -\text{traza}(\mathcal{Y}_p)$ .

El siguiente resultado ofrece una primera interpretación de la curvatura media:

**Teorema:** ([NA] pag 129)

Sea  $p \in S$ ,  $U$  entorno de  $p$  en  $M$ , y  $\tilde{N} \in \mathcal{X}(U)$  tal que  $\tilde{N}(x) = N(x)$  para todo  $x \in S = U \cap S$ . Entonces  $(\text{div } N)_p = \mu_S(p)$ . En particular  $(\text{div } N)|_S$  solo depende de  $N|_S$ .

### 3.3 INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA CURVATURA MEDIA.

En lo que sigue se supondrá que  $M$  es un espacio orientado de Lorentz, y  $S$  es una hipersuperficie espacial de  $M$ .

#### 3.3.1 Sincronización Local.

Considerese un suceso  $p = \gamma(0) \in M$  correspondiente a un observador inercial (i.e geodésica temporal futura):  $\gamma: I \rightarrow M$ . Admitamos que el observador dispone en el suceso  $p$ , de un sistema de sincronización que le permite percibir el conjunto de sucesos simultáneos a  $p$ , como una pequeña hipersuperficie espacial  $S$  ortogonal a  $N_p = \gamma'(0)$  contenida en un cierto entorno  $V$  de  $p$  geodésicamente convexo. En estas condiciones se tiene el siguiente resultado (Véase figura 4):

#### TEOREMA:

Existe entonces un entorno  $U$  contenido en  $V$ , de  $p$  en  $M$ , y  $N \in \mathcal{X}(U)$  campo temporal unitario futuro, tal que:

- i)  $N|_S$  es campo normal a  $S$  y  $N(p) = N_p$ .
- ii) El flujo  $F: I_\epsilon \times U_0 \rightarrow U$  de  $N$  en torno a  $p$ , induce un difeomorfismo entre  $I_\epsilon \times S$  y  $U$ .
- iii) Las curvas integrales de  $N$  son geodésicas temporales.
- iv)  $N$  es un vector normal a cada una de las hipersuperficies  $S_t = F_t(S)$  para  $t \in I_\epsilon$ .

#### Idea de la demostración:

Extiendase diferenciablemente  $N_p = \gamma'(0)$  como campo normal unitario en  $S$ . Para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, cada geodésica  $\gamma_{N(x)}: I_\epsilon \rightarrow M$ , está contenida en  $V$  para todo punto  $x$  de  $S$ . Tómese entonces  $U = (\exp_x(tN(x)): x \in S, t \in I_\epsilon) \subseteq V$ , y  $N(\gamma_{N(x)}(t)) = \gamma'_{N(x)}(t)$ . Aplíquese ahora el lema de Gauss ([ON pag 126]). ■

Al par  $(F_t, S)$  lo denominaremos sincronización local de  $\gamma$  en  $p$ .

Cada hipersuperficie espacial  $S_t$  del lema anterior, se interpreta como un subespacio (local) de simultaneidad, y es una hoja espacial respecto a una función tiempo (local)  $T: U \rightarrow \mathbb{R}$ , que toma por definición el valor  $t$  en cada hoja  $S_t$ . Las partículas inerciales  $\gamma_{N(x)}$ ,  $x \in S$ , son geodésicas temporales futuras ortogonales a cada  $S_t$ , cuyo tiempo propio coincide con el definido por  $T$ . Esta situación sugiere que las partículas  $\gamma_{N(x)}$  se encuentran en reposo unas respecto a otras, y el volumen que ocupan en cada instante, es el determinado por cada  $S_t$ .

Supóngase ahora que  $S = S \cap U$  siendo  $S$  una superficie de Cauchy:

### 3.3.2 La curvatura media como medida de expansión.

En las condiciones anteriores demostraremos que  $\mu_s(p)$  mide la tendencia que tiene  $S$  a expandirse ( $\mu_s(p) > 0$ ) o contraerse ( $\mu_s(p) < 0$ ) cuando se produce una deformación  $S_t$  infinitesimal de  $S$  siguiendo las líneas de campo (geodésicas) de el campo  $N$ . Más concretamente, manteniendo las notaciones anteriores, probaremos que:

$$\mu_s(p) = \lim_{s \rightarrow p} \frac{1}{\text{vol } S} \left[ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(S_t) - \text{vol}(S)}{t} \right]$$

En donde se entiende que la superficie  $\text{vo}(S_t)$  está medida con la forma de volumen canónica en cada  $S_t = F_t(S)$ , y que  $S = S_0$  pertenece a una familia contractiva de entornos de  $p$  en  $S$ .

Para ello nótese en primer lugar, que  $i_N \omega$  representa la forma de volumen canónica en cada hipersuperficie  $S_t$ , por lo que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(S_t) - \text{vol}(S_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{S_t} i_N \omega - \int_S i_N \omega}{t} = \int_S \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(F_t)^* i_N \omega - i_N \omega}{t}$$

Como  $F_t$  es el flujo de  $N$ , se tiene  $F_t^* N = N$ , por lo que  $(F_t^*) i_N \omega = i_N F_t^* \omega$ , y en  $S$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(F_t)^* i_N \omega - i_N \omega}{t} = i_N \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(F_t)^* \omega - \omega}{t} = i_N L_N \omega = (\text{div } N)|_S \omega_S = \mu_s \omega_S$$

Por tanto:

$$\lim_{s \rightarrow p} \frac{1}{\text{vol } S_0} \left[ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(S_t) - \text{vol}(S_0)}{t} \right] = \lim_{s \rightarrow p} \frac{1}{\text{vol } S} \int_S \mu_s \omega_S = \mu_s(p).$$

### 3.3.3 Formulación Geométrica de la Expansión del Universo.

Los epígrafes anteriores justifican la siguiente definición:

a) Una superficie de Cauchy en un espacio orientado de Lorentz, se dice en expansión, si existe una constante positiva  $k$  tal que  $S$  tiene curvatura media  $\mu_s(p) > k$  en cada punto  $p \in M$ .

b) Un espacio orientado de Lorentz, se dice que verifica la ley de expansión, si admite una superficie de Cauchy en expansión.

Si interpretamos una superficie de Cauchy como una hipersuperficie global de simultaneidad, respecto a una función tiempo global, la ley de expansión expresa la idea de que el universo espacial, se expande en algún momento.

#### §4 LEY DE NO REPULSIÓN.

Si  $M$  es un espacio de Minkowski, para el suceso  $p=\gamma(0)$  de un observador inercial  $\gamma:I \rightarrow M$ , el hiperplano espacial  $p+\gamma'(0)^\perp = \exp_p(\gamma'(0)^\perp)$  representa el conjunto de sucesos simultáneos con  $p$  desde el punto de vista de  $\gamma$ .

Si ahora  $M$  es un espacio orientado de Lorentz, parece natural asignar como espacio local de simultaneidad de  $\gamma$  en el suceso  $p=\gamma(0)$  la hipersuperficie  $S = \exp_p(\gamma'(0)^\perp) \cap V$ , siendo  $V$  un entorno geodésicamente convexo de  $p$ . Fijemos una sincronización local  $(F_t, S)$  de  $\gamma$  en torno a  $p$ .

Probaremos que si  $\text{Ric}(\gamma'(0), \gamma'(0))$  es negativo, entonces cuando  $S$  se contrae hacia el punto  $p$  la función  $t \rightarrow \text{vol}(S_t)$  tiene derivada segunda positiva en  $t=0$ . Esto significa que la velocidad de expansión de  $S$  crece estrictamente con el tiempo y sugiere la idea de que la gravedad en las proximidades del suceso  $p$  es repulsiva.

La ley de no repulsión, establece que la situación anterior no debe darse en ningún suceso  $p$  de ningún observador inercial  $\gamma$ , y se expresará entonces por la condición geométrica  $\text{Ric}(V, V) \geq 0$  para todo vector  $V$  temporal.

Estableceremos algunos prerequisites:

#### 4.1 VARIACIONES DE UNA CURVA.

En lo que sigue  $M$  es un espacio de Lorentz.  $I_\delta$  denota el intervalo  $(-\delta, \delta)$ .

##### 4.1.1 Concepto de Variación.

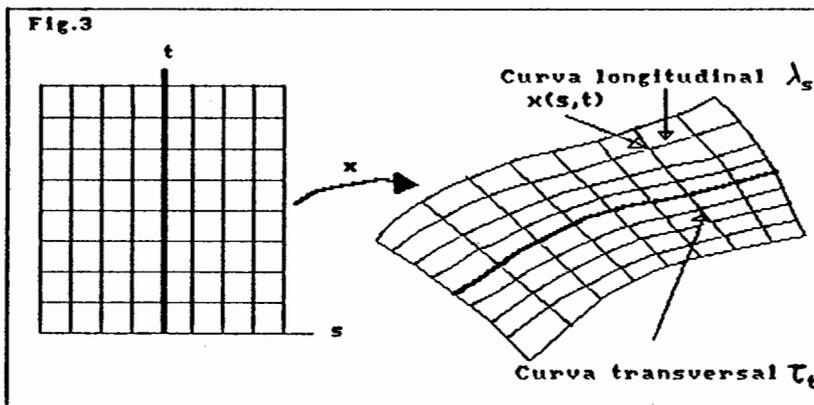
Sea  $\Omega$  el conjunto de curvas diferenciables  $\alpha:I=[a,b] \rightarrow M$ . Una variación de una curva  $\alpha \in \Omega$ , es una aplicación diferenciable:

$$x:I_\delta \times I \ni (s,t) \rightarrow x(s,t) = \lambda_s(t) = \tau_t(s) \in M$$

de forma que  $\lambda_0 = \alpha$ .

La variación  $x$  puede interpretarse como una aplicación:

$\bar{x}:I_\delta \ni s \rightarrow \bar{x}(s) = \lambda_s \in \Omega$ . El campo  $V(t) = \frac{d\bar{x}}{ds} \Big|_{s=0}(t) = x_s(0,t)$ ,  $t \in I$  define un campo a lo largo de  $\alpha$ , que se denomina campo velocidad inicial de la variación.



##### 4.1.2 Campos a lo largo de una variación.

Un campo  $X$  a lo largo de la variación  $x$  es una aplicación diferenciable  $X:I_\delta \times I \ni (s,t) \rightarrow X(s,t) \in T_{x(s,t)}M$  tal que  $X(s,t) \in T_{x(s,t)}M$  para todo  $(s,t) \in I_\delta \times I$ .

Los campos  $x_{\bullet}(s,t)=\tau'_{\bullet}(s)$  y  $x_t(s,t)=\lambda'_{\bullet}(t)$  son los campos tangentes a lo largo de la variación  $x$ .

#### 4.1.3 Derivación parcial covariante

Si  $X$  es un campo a lo largo de  $x$ , en particular es campo a lo largo de cada curva longitudinal  $\lambda_{\bullet}$ , y es posible calcular la derivada covariante:

$\nabla_{\lambda'_{\bullet}(t)} X = X_t(s,t)$  que se denomina derivada parcial covariante de  $X$  respecto a  $t$ , y da lugar a un nuevo campo a lo largo de  $x$ . De forma análoga se define  $X_t(s,t) = \nabla_{\tau'_{\bullet}(s)} X$ .

Las derivaciones parciales verifican naturalmente la regla de Leibniz:

$$\frac{\partial}{\partial s} \langle X, Y \rangle = \langle X_s, Y \rangle + \langle X, Y_s \rangle, \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle X, Y \rangle = \langle X_t, Y \rangle + \langle X, Y_t \rangle$$

para campos  $X, Y$  a lo largo de  $x$ .

En particular, escribimos  $x_{st} = (x_s)_t \dots$  etc. La diferencia  $x_{st} - x_{ts}$  viene medida por el tensor de torsión  $T(x_s, x_t)$ .

Por otra parte, si  $X$  es un campo a lo largo de  $x$  se verifica:

$$X_{st} - X_{ts} = R(x_t, x_s)X$$

siendo  $R$  el tensor de curvatura.

### 4.2 CAMPOS DE JACOBI.

Sea  $\gamma: I=[a,b] \rightarrow M$  una geodésica temporal en el espacio de Lorentz  $M$ .

#### 4.2.1 Variaciones geodésicas.

Una variación  $x: I_{\bullet} \times I \ni (s,t) \rightarrow x(s,t) = \lambda_{\bullet}(t) \in M$  de  $\gamma$  se llama variación geodésica si las curvas longitudinales  $\lambda_{\bullet}$  son geodésicas para todo  $s \in I_{\bullet}$ .

Si  $x$  es variación geodésica, entonces  $x_{tt}(s,t) = \lambda''_{\bullet}(t) = 0$ , y por las fórmulas 4.1.3 se tiene:

$$0 = x_{tts} = x_{tst} + R(x_t, x_s)x_t = x_{tts} + R(x_t, x_s)x_t$$

Así particularizando en  $s=0$ , si  $J(t) = x_{\bullet}(0,t)$  es el campo inicial de la variación, y  $J'(t)$  denota la derivada covariante de  $J$  a lo largo de  $\gamma$ , se ve que  $J$  verifica la ecuación diferencial  $J'' + R(\gamma', J)\gamma' = 0$ .

#### 4.2.2 Espacio de campos de Jacobi.

Un campo  $J$  a lo largo de  $\gamma$  se llama campo de Jacobi si verifica la ecuación de Jacobi:

$$J'' + R(\gamma', J)\gamma' = 0$$

El conjunto  $\mathcal{J}(\gamma)$  de los campos de Jacobi a lo largo de  $\gamma$ , tiene estructura evidente de  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. Tomando una base  $(E_0 = \gamma', E_1, E_2, E_3)$  paralela a lo largo de  $\gamma$  y escribiendo en componentes la ecuación de Jacobi, para un campo  $J = \sum \varphi_i E_i$  se obtiene un sistema lineal de ecuaciones de segundo orden de la forma  $\varphi_i'' = \sum a_{ij} \varphi_j$  con  $a_{ij}: I \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciables. Así la aplicación:

$$\mathcal{J}(\gamma) \ni J \rightarrow (J(0), J'(0)) \in T_p M \times T_p M$$

es un isomorfismo lineal.

### 4.2.3 Campos de Jacobi ortogonales.

Sea  $J$  un campo de Jacobi sobre  $\gamma$ . El producto escalar  $\langle J, \gamma' \rangle$  es una función  $I \rightarrow \mathbb{R}$ , y  $\langle J, \gamma' \rangle'' = 0$ . En efecto:

$$\langle J, \gamma' \rangle' = \langle J', \gamma' \rangle, \text{ y } \langle J, \gamma' \rangle'' = \langle J'', \gamma' \rangle = -\langle R(\gamma', J)\gamma', \gamma' \rangle = 0$$

Así, la condición necesaria y suficiente para que  $J$  sea ortogonal a  $\gamma$  ( es decir,  $\langle J(t), \gamma'(t) \rangle = 0$  para todo  $t$ ) es que los vectores  $J(a)$ , y  $J'(a)$  sean ortogonales a  $\gamma'(a)$ .

### 4.3 FORMULACIÓN GEOMÉTRICA DE LA LEY DE NO REPULSIÓN.

Fijemos una sincronización local  $(F_t, S)$  en torno a el suceso  $p = \gamma(0)$  del observador inercial  $\gamma: I \rightarrow M$ , siendo  $S = \exp_p(\gamma'(0)^\perp) \cap \mathcal{U}$  el espacio natural de simultaneidad por el suceso  $p$  de  $\gamma$ .

(Utilizaremos libremente las notaciones y resultados de 3.3)

Nótese que en  $\mathcal{U}$  disponemos de una función escalar "curvatura media" definida por  $\mu(F_t(x)) = \mu_t(F_t(x))$  para todo  $x \in S$ , siendo  $\mu_t: S_t \rightarrow \mathbb{R}$  la función curvatura media en  $S_t$ . Sea

$$V_S(t) = \text{Vol}(S_t) = \int_{S_t} i_N \omega.$$

En esta condiciones, se trata de demostrar el siguiente resultado:

$$\lim_{S \rightarrow p} \frac{V_S''(0)}{V_S(0)} = -\text{Ricc}(\gamma'(0), \gamma'(0))$$

(Así, si  $\text{Ricc}(\gamma'(0), \gamma'(0))$  es negativo y  $S$  es suficientemente pequeña, es  $V_S''(0)$  es positiva)

**Demostración:**

Por 3.3.2 se tiene  $V_S'(t) = \int_{S_t} \mu_t i_N \omega$ . Determinemos  $V_S''(0)$ :

$$V_S''(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_S'(t) - V_S'(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{S_t} \mu_t i_N \omega - \int_S \mu i_N \omega}{t} = \int_S \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\mu_t \circ F_t) F_t^* i_N \omega - \mu_0 i_N \omega}{t}$$

Pero:  $F_t^* i_N \omega = i_N F_t^* \omega$ , ya que  $F_t^* N = N$  por ser  $F_t$  el flujo de  $N$ . Además:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\mu_t \circ F_t) F_t^* i_N \omega - \mu_0 i_N \omega}{t} &= i_N \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\mu_t \circ F_t) F_t^* \omega - \mu_0 \omega}{t} = \\ i_N \left[ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\mu_t \circ F_t) F_t^* \omega - (\mu_t \circ F_t) \omega}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\mu_t \circ F_t) \omega - \mu_0 \omega}{t} \right] &= i_N [\mu_0 L_N \omega + N(\mu) \omega] = \end{aligned}$$

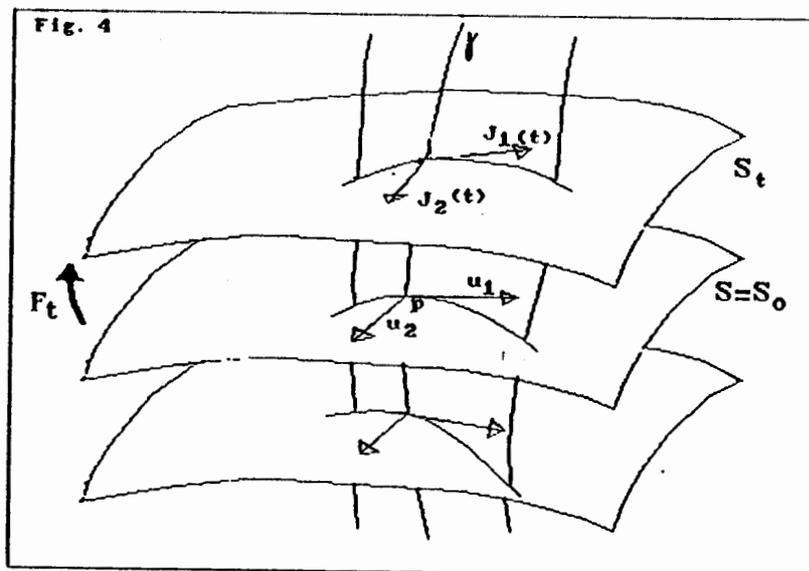
$= [\mu_0^2 + N(\mu)](i_N \omega)$ , y así:  $V_S''(0) = \int_S \mu_0^2 (i_N \omega) + \int_S N(\mu)(i_N \omega)$ . Por tanto:

$$\lim_{S \rightarrow p} \frac{V_S''(0)}{\text{vol}(S)} = \mu_0^2(p) + N(\mu)$$

Pero por ser  $S$  una hipersuperficie totalmente geodésica en  $p$ , el tensor  $\mathcal{Y}_p$  se anula idénticamente (ver 3.2.3), y por tanto:  $\mu_0(p) = \mu_S(p) = 0$ , con lo que:

$$\lim_{S \rightarrow p} \frac{V''(0)}{\text{vol}(S)} = (\mu_\gamma)'(0).$$

Nuestro propósito es ahora probar que  $(\mu_\gamma)'(0) = -\text{Ricc}(\gamma'(0), \gamma'(0))$ . (Véase figura).



Para ello, fijemos un vector unitario  $u \in T_p S = \gamma'(0)^\perp$ , y sea  $\sigma_u(s) = \exp_p(su)$   $|s| < \delta$ . La variación de  $\gamma$  definida por  $x(s,t) = \exp_{\sigma_u(s)}(tN_{\sigma_u(s)})$   $|t| < \epsilon$ ,  $|s| < \delta$ , define un campo inicial  $J(t) = x(0,t)$ . Como las curvas  $\lambda_s: (-\epsilon, \epsilon) \ni t \rightarrow x(s,t) \in \mathcal{U}$  son geodésicas, el campo  $J$  es de Jacobi y verifica:

$$J(0) = x_s(0,0) = \sigma'_u(s) = u, \text{ y } J'(0) = x_{st}(0,0) = x_{ts}(0,0) = \frac{\nabla}{ds} \Big|_{s=0} (x_t(s,0)) = \nabla_u N = 0$$

(La condición  $\nabla_u N = 0$  se verifica por ser  $S$  totalmente geodésica en  $p$ , y 3.2.3)

Fijemos entonces una base ortonormal  $(u_1, \dots, u_n)$  en  $T_p S = \gamma'(0)^\perp$ , y sean  $J_1, \dots, J_n$  los campos de Jacobi obtenidos a partir de cada  $u_i$  por el procedimiento anterior. Los campos  $J_k$  son ortogonales a  $\gamma$ , y para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, podemos suponer que determinan una base de  $\gamma'(t)^\perp$  para  $|t| < \epsilon$ .

Sea  $g_{ij}(t) = \langle J_i(t), J_j(t) \rangle$ . Denotando por  $g^{ij}(t)$  la matriz inversa, para  $V \in \mathcal{X}(\gamma)^\perp$  podemos escribir:  $V(t) = \sum_{j,k} \langle V, J_j \rangle g^{jk} J_k$ . Nótese que  $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ .

Denotando por  $\mathcal{Y}_t: T_{\gamma(t)} S_t \rightarrow T_{\gamma(t)} S_t$ , el operador "Shape" en el punto  $\gamma(t)$  de  $S_t$ , es  $(\mu_\gamma)(t) = -\text{Traza}(\mathcal{Y}_t)$ , se verifica (prescindiendo de  $t$ ):

$$\mathcal{Y}(J_k) = -\nabla_{J_k} N = -\nabla_{N_k} J_k = -J'_k = -\langle J'_k, J_j \rangle g^{jk} J_r, \text{ y así } \mu_\gamma = -\text{Traza}(\mathcal{Y}) = \langle J'_k, J_j \rangle g^{jk}.$$

Derivando respecto a  $t$  queda:

$\mu' = [\langle J'_k, J_j \rangle + \langle J'_k, J'_j \rangle] g^{jk} + \langle J'_k, J_j \rangle (g^{jk})'$ . y para  $t=0$ , como  $J'_k(0)=0$ , y  $J_k$  verifica la ecuación de Jacobi, queda:

$$\begin{aligned} (\mu \cdot \gamma)'(0) &= \sum_j \langle -R(\gamma'(0), J_k(0)) \gamma'(0), J_j(0) \rangle g^{kj}(0) = - \sum_{j,k} \langle R(N_p, u_k) N_p, u_j \rangle \delta^{kj} = \\ &= - \sum_k \langle R(N_p, u_k) N_p, u_k \rangle = - \text{Traza}(T M \ni v \rightarrow R(N_p, v) N_p \in T M) = - \text{Ric}(N_p, N_p) = \\ &= - \text{Ric}(\gamma'(0), \gamma'(0)) \end{aligned}$$

#### 4 EL TEOREMA DE HAWKING

Hemos introducido ya todos los ingredientes que permiten formular en el contexto de la geometría diferencial, lo que se entiende por un modelo de universo físicamente razonable que se da por hipótesis en el Teorema de Hawking. Hagamos una breve recapitulación:

0) La teoría General de la Relatividad, sugiere como modelos del Universo los espacios orientados de Lorentz  $M$ .

1) Desde el punto de vista de la causalidad, se requiere que nuestro espacio  $M$  sea Globalmente Hiperbólico.

2) La ley de expansión del Universo exige que exista una hipersuperficie de Cauchy  $S$  en  $M$ , y una constante  $k$  positiva de manera que la función curvatura media  $\mu_S: S \rightarrow \mathbb{R}$  verifique:  $\mu_S > k$ .

3) El carácter atractivo de la gravedad impone que el tensor de Ricci verifique  $\text{Ric}(V, V) \geq 0$  para todo vector  $V$  temporal.

Llamaremos Universo de Hawking a una terna  $(M, S, k)$  verificando las propiedades 1) 2) y 3) anteriores.

El Teorema de Hawking puede entonces enunciarse así:

##### TEOREMA H (de Hawking)

En un Universo de Hawking  $(M, S, k)$ , cualquier curva temporal futura e inextendible pasada  $\alpha: (a, b_1] \rightarrow M$ , tiene longitud finita.

#### 4.1 ESQUEMA DE LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE HAWKING

Para probar el teorema H es suficiente demostrar el siguiente

##### TEOREMA $H_1$

En un Universo de Hawking  $(M, S, k)$ , si  $\alpha: (a, b] \rightarrow M$  es curva temporal futura e inextendible pasada, con  $\alpha(b) \in S$ , se verifica que  $L(\alpha)$  es menor o igual que  $3/k$ .

En efecto, si el teorema  $H_1$  es cierto, y  $\alpha: (a, b_1] \rightarrow M$  es curva temporal futura e inextendible pasada, podemos encontrar  $\bar{\alpha}: (a, \bar{b}) \rightarrow M$  con  $\bar{b} > b_1$  tal que  $\bar{\alpha}|_{(a, b_1]} = \alpha$ , y  $\bar{\alpha}$  es temporal futura e inextendible, por lo que corta a la superficie de Cauchy  $S$  en un único punto  $\bar{\alpha}(b) \in S$ . El Teorema  $H_1$  afirma entonces que  $\bar{\alpha}|_{(a, b]}$  tiene longitud finita, y en consecuencia, también  $\alpha$ .

Por último, para probar  $H_1$  es claramente suficiente probar:

##### TEOREMA $H_2$

En un Universo de Hawking  $(M, S, k)$ , si  $p \in \bar{I}^-(S)$ , entonces el supremo de las longitudes de las curvas causales futuras  $\alpha_1: [a_1, b] \rightarrow M$  con  $\alpha_1(a_1) = p$ ,  $\alpha_1(b) \in S$ , es menor o igual que  $3/k$ .

Esquematzaremos la prueba de este último enunciado, mediante las tres siguientes proposiciones, que delimitan las técnicas geométricas empleadas:

**PROPOSICION A: "Teorema de existencia"**

Sea  $M$  Globalmente Hiperbólico,  $S$  superficie de Cauchy y  $p \in I^-(S)$ . Existe entonces una geodésica temporal futura  $\lambda: [0,1] \rightarrow M$  con  $\lambda(0)=p$ ,  $\lambda(1)=q \in S$ , y longitud mayor o igual que la longitud de cualquier otra curva causal que una  $p$  con  $S$ .

**PROPOSICION B: "Condición necesaria de extremalización"**

Una curva  $\lambda$  como la de la proposición A, es necesariamente ortogonal a  $S$  (i.e.  $\lambda'(1) \in T_q S^\perp$ ).

**PROPOSICION C: "Condición suficiente de no extremalización"**

En un Universo de Hawking  $(M,S,k)$ , sea  $\gamma$  una geodésica temporal futura que una  $p \in I^-(S)$  con  $S$ , y es ortogonal a  $S$ . Entonces si  $L(\gamma) > (3/k)$ , existen curvas causales futuras de longitud mayor que  $\gamma$ , que unen  $p$  con  $S$ .

En particular como no existen curvas causales futuras de longitud mayor que  $\lambda$ , que unan  $p$  y  $S$ , se concluye que:

$$L(\lambda) = \sup \{ \text{Longitud de curvas causales futuras que unen } p \text{ con } S \} \leq 3/k$$

**4.2 EL TEOREMA DE EXISTENCIA.**

La demostración del "teorema de existencia", se basa en técnicas relacionadas con teoría de límites de curvas causales en espacios globalmente hiperbólicos.

**4.2.1 Separación temporal.**

Si  $p$  y  $q$  son puntos de  $M$ , con  $p \leq q$ , se define la separación temporal  $\tau(p,q)$  como el supremo de las longitudes de las curvas temporales futuras que unen  $p$  a  $q$ . Si no es cierto  $p \leq q$ , se conviene en asignar a  $\tau(p,q)$  el valor 0.

Si  $A$  es un subconjunto de  $M$ , y  $p \in J^-(A)$ , se define  $\tau(p,A)$  como el supremo de las longitudes de las curvas causales futuras que unen  $p$  con  $A$ .

**4.2.2 Curvas que maximizan la separación temporal.**

Si  $M$  es fuertemente causal, entonces para cada  $p \in M$ , podemos elegir  $U$  entorno convexo y causalmente convexo de  $p$ , de forma que para  $x, y \in U$   $x \leq_U y$  es equivalente a  $x \leq y$ , y en este caso existe una única geodésica causal futura  $\gamma_{xy}: [0,1] \rightarrow U$  que une  $x$  con  $y$ . Esta geodésica verifica:  $L(\gamma_{xy}) = \tau(x,y)$ .

Así, si  $p \ll q$  y  $\gamma$  es una curva temporal futura uniendo  $p$  a  $q$  con  $L(\gamma) = \tau(p,q)$ , entonces  $\gamma$  debe coincidir en un entorno convexo de cada uno de sus puntos con una geodésica. Se concluye entonces que  $\gamma$ , eventualmente reparametrizada por la longitud de arco, es una geodésica

### 4.2.3 Esquema general para la demostración del Teorema de existencia.

La existencia de una geodésica temporal futura  $\lambda$  que una el punto  $p \in I^-(S)$  con la superficie de Cauchy  $S$  del espacio globalmente hiperbólico  $M$ , tal que  $L(\lambda) = \tau(p, S)$ , queda establecida a por medio de los teoremas siguientes.

Teorema 1 ([ON] pag 411 Prop 19)

Si  $M$  globalmente hiperbólico,  $p, q \in M$ , y  $p \ll q$ , existe una curva temporal futura uniendo  $p$  a  $q$  con longitud  $\tau(p, q)$ .

Teorema 2 ([ON] pag. 410 Lema 17, y pag 412 Lema 21)

En un espacio  $M$  globalmente hiperbólico la función separación temporal  $\tau: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  y es continua.

Teorema 3 ([ON] pag 423 Lema 40)

Supongase  $M$  globalmente Hiperbólico,  $S$  superficie de Cauchy, y  $p \in I^-(S)$ . Entonces  $J^+(p) \cap S$  es compacto.

La demostración del teorema de existencia es ahora fácil. En efecto:

Si  $S$  es superficie de Cauchy en  $M$ , y  $p \in I^-(S)$ , por el teorema 3 el conjunto  $K = J^+(p) \cap S$  es compacto. Por el teorema 2 la aplicación  $M \ni x \rightarrow \tau(p, x) \in \mathbb{R}$  es continua, y toma su máximo sobre  $K$  en un punto  $q \in S$ ; este máximo, es justamente  $\tau(p, q)$ . El teorema 1 asegura ahora la existencia de una curva  $\lambda$  temporal futura uniendo  $p$  a  $q$  con  $L(\lambda) = \tau(p, q)$ , que es la curva buscada. Por 4.2.1 la curva  $\lambda$ , quizás reparametrizada, es una geodésica.

### §4.3 CONDICIÓN NECESARIA DE EXTREMALIZACIÓN.

La curva  $\lambda$  obtenida en el apartado anterior es necesariamente ortogonal a  $S$ .

La demostración de este hecho, pasa por la teoría de cálculo de variaciones para la función Longitud.

#### 4.3.1 Primera y Segunda Fórmulas de Variación.

Se denota por  $\Omega^+$  al conjunto de curvas diferenciables temporales futuras de  $M$  parametrizadas en el intervalo  $I = [0, 1]$ .

Si  $x$  es una variación de  $\alpha \in \Omega^+$ , y  $|\alpha'| = c$  constante positiva. Sea  $V(t) = x(0, t)$  el campo inicial de la variación y  $A(t) = x(0, t)$  el campo aceleración inicial. Se verifica entonces:

$$\frac{dL(\bar{x}(s))}{ds} \Big|_{s=0} = \frac{-1}{c} \int_0^1 \langle V', \alpha' \rangle dt = \frac{1}{c} \left[ \int_0^1 \langle V, \alpha'' \rangle dt + \langle V, \alpha' \rangle \Big|_0^1 \right]$$

Nótese que si  $V$  es ortogonal a  $\alpha$ , y  $\alpha$  es geodésica, entonces  $\frac{dL(\bar{x}(s))}{ds} \Big|_{s=0} = 0$ .

Si ahora  $\gamma$  es una geodésica de  $\Omega^+$ , con  $|\gamma'| = c$ , se verifica la segunda fórmula de variación:

$$\frac{d^2L(\bar{x}(s))}{ds^2} \Big|_{s=0} = \frac{-1}{c} \left[ \int_0^1 \langle \frac{1}{V}, \frac{1}{V} \rangle - \langle R(\gamma', \frac{1}{V}) \gamma', \frac{1}{V} \rangle dt + \langle A, \gamma' \rangle \Big|_0^1 \right]$$

donde  $\hat{V}$  denota la componente normal de  $V$ .

#### 4.3.2 La condición necesaria.

Sea  $S$  una hipersuperficie espacial  $pe\bar{I}(S)$ . Denotamos por  $\Omega^+(p,S)$  al conjunto de curvas de  $\Omega^+$  que unen  $p$  con  $S$ . Una variación  $x$ , se dice  $(p,S)$ -admisibles, si  $\bar{x}(s) \in \Omega^+(p,S)$  para todo  $s$ . Los campos iniciales de las variaciones  $(p,S)$ -admisibles, de  $\alpha \in \Omega^+$  constituyen el llamado espacio tangente  $T_\alpha \Omega^+(p,S)$  y viene definido por el conjunto de campos  $V \in X(\alpha)$  con  $V(0)=0_p$ , y  $V(1)$  tangente a  $S$ .

La curva  $\alpha \in \Omega^+(p,S)$ , se llama extremo local para  $L$ , si para toda variación  $(p,S)$ -admisibles  $x$ , de  $\alpha$ , la función  $s \rightarrow L(\bar{x}(s))$  tiene un extremo local en  $s=0$ .

En particular, si  $\lambda$  es geodésica temporal futura,  $\lambda \in \Omega^+(p,S)$  y  $L(\lambda)=\tau(p,S)$  entonces  $\lambda$  es máximo global para  $L$ , y por tanto para toda variación  $(p,S)$ -admisibles con  $V = \frac{d\bar{x}}{ds} \Big|_{s=0}$  se tiene:

$$0 = \frac{dL(\bar{x}(s))}{ds} \Big|_{s=0} = \frac{1}{c} \left[ \int_0^1 \langle V, \lambda'' \rangle dt + \langle V, \lambda' \rangle \Big|_0^1 \right] = \frac{1}{c} \langle V, \lambda' \rangle \Big|_0^1 = \langle V(1), \lambda'(1) \rangle$$

Como  $V(1)$  puede ser cualquier vector tangente a  $S$  por  $\lambda(1)$ , se concluye que  $\lambda$  es ortogonal a  $S$ .

#### 4.4 CONDICIÓN SUFICIENTE DE NO EXTREMALIZACIÓN.

Sea  $\gamma \in \Omega^+(p,S)$ , una geodésica, con  $\gamma(1)=q \in S$  y  $\frac{1}{c} \gamma'(1) = N_q$  vector normal a  $S$ , unitario futuro.  $\mathcal{Y}_q(v,w) = \langle II(v,w), N_q \rangle$  representa entonces el tensor "shape" en  $q$ .

Si  $x$  es una variación  $(p,S)$ -admisibles de  $\gamma$  con vector velocidad inicial  $V$  ortogonal a  $\gamma$ , y aceleración  $A$ . De la primera fórmula de variación se deduce que  $\frac{dL(\bar{x}(s))}{ds} \Big|_{s=0} = 0$ . Aplicando ahora la segunda fórmula de variación, y teniendo en cuenta que  $A(0)=0$ , y  $A(1)=\tau_1''(0)$ , queda para  $c = |\gamma'(0)| = L(\gamma)$ :

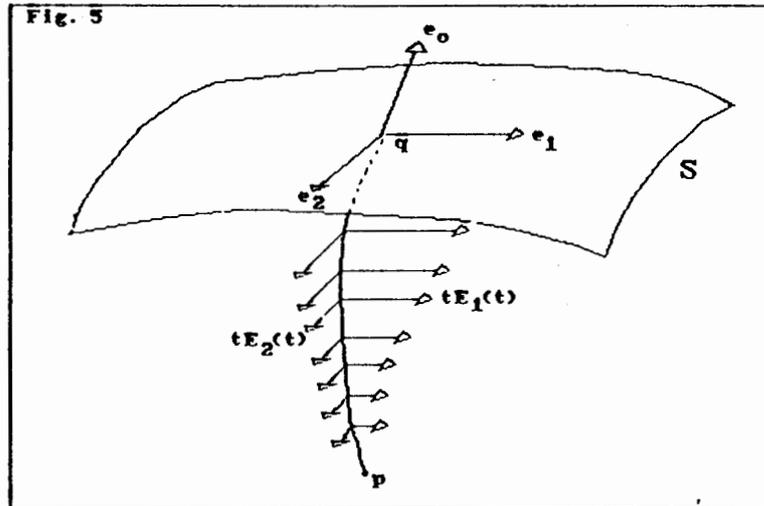
$$\frac{d^2 L(\bar{x}(s))}{ds^2} \Big|_{s=0} = \frac{-1}{c} \left[ \int_0^1 [\langle V', V' \rangle - \langle R(\gamma', V) \gamma', V \rangle] dt \right] - \mathcal{Y}_q(V, V) \Big|_{t=1}$$

Una condición suficiente para poder asegurar que existen curvas en  $\Omega^+(p,S)$  con longitud mayor estrictamente que  $\gamma$ , es que exista una variación  $x$  de  $\gamma$ , como la de arriba, tal que:  $\frac{d^2 L(\bar{x}(s))}{ds^2} \Big|_{s=0} > 0$ .

En efecto, en estas circunstancias la función  $s \rightarrow L(\bar{x}(s))$  tiene un mínimo local estricto para  $s=0$ .

Probemos en las hipótesis del teorema de Hawking, que existe una tal variación, cuando  $L(\gamma) = c > \frac{3}{k}$ .

Sea  $(e_0, e_1, e_2, e_3)$  una base ortonormal bien ordenada de  $T_p M$ , con  $e_0 = \gamma'(0)$ , y sea  $(E_0, E_1, E_2, E_3)$  el transporte paralelo de dicha base a lo largo de  $\gamma$ .



Tomando  $V_1(t) = tE_1(t)$ ,  $i=1, 2, 3$ , se ve que  $V_1 \in T_{\gamma} \Omega^*(p, S)$ , es ortogonal a  $\gamma$ , y puede construirse una variación  $x_1(p, S)$ -admisibles de  $\gamma$  con vector inicial  $V_1$ , se tiene:

$$\frac{d^2 L(\bar{x}_1(s))}{ds^2} \Big|_{s=0} = \frac{-1}{c} \left[ \int_0^1 \langle V_1', V_1' \rangle - \langle R(\gamma', V_1) \gamma', V_1 \rangle dt \right] - \mathcal{Y}_q(V_1, V_1) \Big|_{t=1}$$

Si para algún  $i$  este número es  $>0$ , hemos concluido. Caso contrario, podemos suponer

mos suponer  $\frac{d^2 L(\bar{x}_1(s))}{ds^2} \Big|_{s=0} \leq 0$ , con lo que  $\sum_{i=1}^3 \frac{d^2 L(\bar{x}_i(s))}{ds^2} \Big|_{s=0} \leq 0$ . Pero entonces

como  $V_1' = E_1$ ,  $\text{Ric}(U, V) = \text{Traza}(W \rightarrow R(U, W)V)$ ,  $\text{Ricc}(\gamma', \gamma') \geq 0$ , y  $\mu_s(q) = -\text{Traza}(\mathcal{Y}_q) > k$  queda:

$$0 \geq \sum_{i=1}^3 \frac{d^2 L(\bar{x}_i(s))}{ds^2} \Big|_{s=0} = \frac{-1}{c} \left[ 3 - \int_0^1 t^2 \text{Ric}(\gamma', \gamma') dt \right] + \mu_s(q) \geq \mu_s(q) - \frac{3}{c} \geq k - \frac{3}{c} > 0.$$

y esto es contradictorio.

## §5 BIBLIOGRAFIA

[BEEM] BEEM-EHRLICH: Global Lorentzian Geometry.

*Pure and Applied Math. Newyork (1981)*

[HE] HAWKING-ELLIS: Large scale structure Space-time.

*Cambridge University Press (1973)*

[NA] NABER, G.L.: Spacetime and Singularities.

*London Math. Society Student Cambridge University Press. (1988).*

[ON] O'NEIL, B.: Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity.

*Academic Press. Inc., Newyork (1983)*

[PEN] PENROSE R.: Thecniques of differential Topology In Relativity.

*Conference Series in applied Math. (1972)*