

ESTUDIO GENERAL DEL GRUPO DE LOS MOVIMIENTOS DIRECTOS
DE UN ESPACIO AFIN EUCLIDEO TRIDIMENSIONAL
CON APLICACIONES A LA DINAMICA DE UN SOLIDO RIGIDO

Javier Lafuente López
Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

CURSO IMPARTIDO EN LA FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DE LA UNIVERSIDAD DE CANTABRIA
DEL 17 AL 20 DE SEPTIEMBRE DE 1990

INTRODUCCION

Estas notas hablan de la Geometría -geometría lineal, geometría diferencial- que hay encerrada en el movimiento de un sólido rígido, y van dirigidas a matemáticos no necesariamente especialistas en estos temas.

La tarea no ha sido fácil, pues era necesario buscar una exposición divulgativa -para no especialistas- y al mismo tiempo profunda y capaz de aprovechar al máximo la indudable capacidad matemática del auditorio. Ellos juzgarán si he conseguido encontrar este equilibrio.

Pero detrás del sólido rígido hay también mucha física elemental (y menos elemental), que intencionadamente ha sido "escamoteada" -en beneficio del auditorio- y sustituida por alguno de lo que los físicos denominan Principios de la Mecánica, y que tienen la ventaja (para los matemáticos) de admitir una formulación estrictamente geométrica.

Las notas constan de cinco secciones. Las cuatro primeras, tienen por objetivo exponer cuales son las herramientas y técnicas geométricas básicas, que permiten analizar el movimiento libre del sólido. La última sección está dedicada a utilizarlas.

En la exposición me he dejado guiar por un "principio" (no mecánico), sin el cuál en muchas ocasiones nos sería imposible avanzar. Este principio podríamos enunciarlo así:

"Si es necesario, no importa creerse ciertas cosas, lo importante es entender lo que uno se está creyendo".

SECCION 1

LOS MOVIMIENTOS COMO GRUPO GEOMETRICO DE TRANSFORMACIONES

La referencia general para esta sección es [4] Cap XIII y XIV

Preliminar: Espacios Euclideos orientados.

P1. Espacios vectoriales euclideos orientados.

Un espacio vectorial euclideo es un espacio vectorial E dotado de una forma cuadrática definida positiva. El producto escalar inducido se denota por $E \times E \ni (u, v) \rightarrow u \cdot v \in \mathbb{R}$, y por $E \ni u \rightarrow |u| = +\sqrt{u \cdot u} \in \mathbb{R}$ la norma inducida.

Si $\varepsilon = (e_1, \dots, e_n), \varepsilon' = (e'_1, \dots, e'_n)$ son bases ortonormales de E , la matriz de cambio de base P que verifica: $\varepsilon' = \varepsilon P$, satisface la condición:

$$P^t P = I$$

El conjunto de éstas matrices se denota por $O(n)$ y tiene estructura de grupo. $SO(n) = \{P \in O(n) : \det P = 1\}$ constituye un subgrupo.

Las bases ortonormales ε y ε' se dicen que definen la misma orientación si la matriz P de cambio de base pertenece a $SO(n)$. Esta relación es de equivalencia sobre el conjunto \mathcal{B} de las bases ortonormales, y lo descompone en dos clases $\mathcal{B} = \mathcal{B}^+ \cup \mathcal{B}^-$.

Una orientación en E consiste en elegir como "positiva" una de las componentes anteriores. Se dice entonces que E está orientado.

Cuando $\dim E = 3$, fijada una base ortonormal positiva $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E , se define para $u = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$, $v = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$:

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

y se prueba que el resultado no depende de la base ortonormal positiva tomada.

Se suponen conocidas las propiedades clásicas del producto vectorial.

P2 Espacios afines euclideos orientados.

Un espacio afín euclideo orientado es un espacio afín E , cuya dirección \vec{E} es un espacio vectorial euclideo orientado.

Si $a, b \in E$, denotaremos por $\vec{ab} \in \vec{E}$ al vector "libre" definido por a y b , y llamaremos $d(a, b) = |\vec{ab}|$.

Llamaremos sistema de referencia euclideo (SR) a $\varepsilon = (e_0, \vec{e})$ donde $e_0 \in E$, y $\vec{e} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ es una base ortonormal positiva de \vec{E} .

Si ε y ε' son SR en E existe una matriz P con $\varepsilon' = \varepsilon P$ de la forma:

$P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline p & \vec{p} \end{array} \right)$ con $\vec{p} \in \text{SO}(n)$, y se denomina matriz de cambio de referencia.

El conjunto de matrices P verificando la propiedad anterior, tiene estructura de grupo, que se denota por SE(n).

P3. Modelos analíticos.

El modelo analítico con dimensión n de espacio afín euclídeo orientado que usaremos en estas notas es el siguiente:

$$\mathcal{E}_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} : a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{E}_n \right\} \quad \vec{\mathcal{E}}_n = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} : v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{E}_n \right\} \quad \overrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ b-a \end{pmatrix}$$

El producto escalar y la orientación en $\vec{\mathcal{E}}_n$ se obtienen al identificarlo con el modelo analítico habitual de espacio vectorial euclideo orientado

$$\mathbb{E}_n = \left\{ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} : v_i \in \mathbb{R} \right\}, \quad v \cdot w = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n.$$

1.1 Transformaciones ortogonales. Clasificación.

El lo que sigue \mathbb{E} y \mathbb{E}' ... etc. son espacios vectoriales euclídeos orientados con dimensión igual a $n \geq 1$.

Una biyección $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ se dice isometría si preserva el producto escalar. Se prueba entonces que f es isomorfismo lineal. De hecho, si ε y ε' son BO en \mathbb{E} y \mathbb{E}' , entonces la matriz A tal que $f(\varepsilon) = \varepsilon' A$ verifica $A^t A = I$ y $A \in O(n)$. Se denomina a A representación matricial de f y escribimos $A = M_{\varepsilon \varepsilon'}(f)$

Se dice que la isometría $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ preserva la orientación (o es isometría directa), si transforma una (toda) base ortonormal positiva de \mathbb{E} en una base ortonormal positiva de \mathbb{E}' . Esto equivale a decir que $M_{\varepsilon \varepsilon'}(f) \in \text{SO}(n)$ para ε , y ε' bases ortonormales positivas.

Una isometría f de \mathbb{E} (en sí mismo) se denomina transformación ortogonal. Denotamos por $O(\mathbb{E})$ al grupo de transformaciones ortogonales de \mathbb{E} , y por $\text{SO}(\mathbb{E})$ al subgrupo de transformaciones ortogonales directas.

Fijada una BO+ ε en \mathbb{E} , la aplicación $M_{\varepsilon} = M_{\varepsilon \varepsilon}$ establece isomorfismos:

$$M_{\varepsilon} : O(\mathbb{E}) \ni f \rightarrow f_{\varepsilon} \in O(n) \quad \text{y} \quad M_{\varepsilon} : \text{SO}(\mathbb{E}) \rightarrow \text{SO}(n)$$

Existe una identificación natural entre $O(\mathbb{E})$ y $O(n)$.

PROPOSICION:

Sean ε y ε' bases ortonormales positivas de E . Así $\varepsilon' = \varepsilon P$ con $P \in SO(n)$. Si $f \in O(E)$ y $M_{\varepsilon}(f) = A$, entonces $M_{\varepsilon'}(f) = P^{-1} A P$. ■

DEFINICION:

Si $f, f' \in O(E)$, se dicen equivalentes, ($f \approx f'$) si existen $\varepsilon, \varepsilon'$ bases ortonormales positivas en E tales que $M_{\varepsilon}(f) = M_{\varepsilon'}(f')$.

La condición $f \approx f'$ equivale a la existencia de $g \in SO(E)$ tal que $f' = g \circ f \circ g^{-1}$.

TEOREMA:

Si $f \in O(E)$, existe una base ortonormal positiva de E tal que la matriz $J = M_{\varepsilon}(f)$ es de la forma:

$$J = \text{DIAG}(-I_r, I_s, G(\vartheta_1), \dots, G(\vartheta_p))$$

donde r y s son enteros no negativos, $\vartheta_i \in (-\pi, \pi)$, I_k denota la matriz identidad de orden k y $G(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\text{sen } \vartheta \\ \text{sen } \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$.

de orden k y $G(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\text{sen } \vartheta \\ \text{sen } \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$.

Por otra parte, r, s y la sucesión $\vartheta_1 \leq \dots \leq \vartheta_p$ determinan un sistema completo de invariantes.

En particular si $f, f' \in O(E)$, es $f \approx f'$ si y solo si f y f' tienen el mismo polinomio característico.

NOTA:

Si $\dim E = 3$, puede tomarse ϑ de forma que $0 < \vartheta < \pi$.

1.2 Movimientos euclideos. Clasificación.

En lo sucesivo $E, E' \dots$ etc serán espacios afines euclideos orientados de dimensión n con direcciones los espacios vectoriales euclideos orientados $\vec{E}, \vec{E}' \dots$ etc.

Si $o \in E$ denotamos $\nabla_o : E \ni a \rightarrow \vec{oa} \in \vec{E}$ que es biyectiva.

A partir de una aplicación $f : E \rightarrow E'$ y un punto $o \in E$ puede construirse la aplicación $f_o : \vec{E} \rightarrow \vec{E}'$ que hace conmutativo el diagrama ($o' = f(o)$).

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \nabla_o \downarrow & & \downarrow \nabla_{o'} \\ \vec{E} & \xrightarrow{f_o} & \vec{E}' \end{array}$$

La aplicación f es afín cuando f_o es lineal, y en este caso $f_o = f_o$ para todo $o, \bar{o} \in E$. Se denota $\vec{f} = f_o$ y se denomina a \vec{f} aplicación lineal asociada a f .

Nótese que \vec{f} viene definida sin ambigüedad por:

$$\vec{f}: E \ni ab \vec{\rightarrow} \vec{f}(a)f(b) \in \vec{E}'$$

DEFINICION:

Una aplicación afín $f: E \rightarrow E'$ se llama isometría (directa), si $\vec{f}: \vec{E} \rightarrow \vec{E}'$ es isometría directa.

Si $\varepsilon = (e_0, \vec{\varepsilon})$ y $\varepsilon' = (e'_0, \vec{\varepsilon}')$ son SR+ en E y E' respectivamente, denotando $f(\varepsilon) = (f(e_0), \vec{f}(\vec{\varepsilon}))$ se tendrá $f(\varepsilon) = \varepsilon' A$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0^t \\ a & \vec{A} \end{pmatrix} \text{ con } a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \text{ y } \vec{A} = (a_{ij}) = M_{\vec{\varepsilon}}^{\vec{\varepsilon}'}, (\vec{f}) \in O(n)$$

Se denomina a A representación matricial de f y escribimos $A = M_{\varepsilon\varepsilon'}(f)$.

Las matrices A ($\det \vec{A} = 1$) del tipo anterior se denominan matrices afines euclídeas, y constituyen un grupo denotado por E(n).

Una isometría f de E (en sí mismo) se denomina movimiento. Denotamos por E(E) al grupo de movimientos de E, y por SE(E) al subgrupo de movimientos directos.

Fijado ε SR en E, la aplicación $M_{\varepsilon} = M_{\varepsilon\varepsilon}$ establece isomorfismos:

$$M_{\varepsilon}: E(E) \ni f \rightarrow f_{\varepsilon} \in E(n) \text{ y } M_{\varepsilon}: SE(E) \rightarrow SE(n)$$

Existe una identificación natural entre $E(E)$ y $E(n)$.

PROPOSICION:

Sean ε y ε' SR de E. Así $\varepsilon' = \varepsilon P$ con $P \in SE(n)$. Si $f \in E(E)$ y $M_{\varepsilon}(f) = A$, entonces $M_{\varepsilon'}(f) = P^{-1} A P$. ■

DEFINICION:

Si $f, f' \in E(E)$, se dicen equivalentes, ($f \approx f'$) si existen $\varepsilon, \varepsilon'$ SR+ en E tales que $M_{\varepsilon}(f) = M_{\varepsilon'}(f')$.

La condición $f \approx f'$ equivale a la existencia de $g \in SE(E)$ tal que $f' = g \circ f \circ g^{-1}$.

TEOREMA:

Sea f un movimiento de E:

Existen entonces $\mu \geq 0$, r, s enteros no negativos, y $-\pi < \theta_1 \leq \dots \leq \theta_p < \pi$ (unívocamente determinados por f) y un SR+ ε de E tal que la matriz $J = M_{\varepsilon}(f)$ es de la forma:

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ \mu & 1 & \\ \hline & & J_1 \end{array} \right) \text{ con } J_1 = \text{DIAG}(I_r, -I_s, G(\theta_1), \dots, G(\theta_p)) \text{ si } \mu > 0$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \vec{J} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \text{ con } \vec{J} = \text{DIAG}(I_r, -I_s, G(\vartheta_1), \dots, G(\vartheta_p)) \text{ si } \mu=0$$

Se denomina a $\mu = \mu(f)$ módulo de desplazamiento de f .

Por otra parte, r, s, μ y la sucesión $\vartheta_1 \leq \dots \leq \vartheta_p$ determinan un sistema completo de invariantes.

En particular si $f, f' \in E(E)$, es $f \approx f'$ si y solo si $\mu(f) = \mu(f')$ y \vec{f} y \vec{f}' tienen el mismo polinomio característico. ■

NOTA:

Desde el punto de vista geométrico, el módulo de deslizamiento $\mu = \mu(f)$ de un movimiento $f \in E(E)$ viene definido por:

$$\mu(f) = \text{MIN}\{|\overrightarrow{af(a)}| : a \in E\}$$

así $\mu(f) = 0$ equivale a que f tiene puntos fijos.

En la práctica, si f no tiene puntos fijos, entonces $\mu(f) = |v|$ siendo $v \in \vec{E}$ el único vector que verifica la propiedad (para τ_v traslación de vector v):

$$f \circ \tau_v = \tau_v \circ f \text{ es un movimiento con puntos fijos.}$$

dicho vector hay que buscarlo en $\text{Ker}(\vec{f} - \text{id})$.

1.3 Especialización en dimensión tres.

Supondremos en lo que sigue que E es un espacio afín euclídeo tridimensional orientado.

El anterior teorema de clasificación aplicado a este caso, nos proporciona la siguiente representación matricial reducida para $f \in SE(E)$:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta & -\text{sen } \vartheta \\ 0 & 0 & \text{sen } \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad -\pi < \vartheta \leq \pi, \mu \geq 0$$

respecto a cierto SR $\varepsilon = (e_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Si $\mu = 0$ denomina a f giro de eje $\Omega = e_0 + \langle \vec{e}_1 \rangle$ (orientado por \vec{e}_1) y ángulo ϑ . Lo denotamos $G(\Omega, \vartheta)$.

Si $\mu > 0$ y $\vartheta \neq 0$, se denomina a f movimiento helicoidal. Tomando $v = \mu \vec{e}_1$ se ve que:

$$f = \tau_v \circ G(\Omega, \vartheta) = G(\Omega, \vartheta) \circ \tau_v$$

v es el vector de deslizamiento.

Si $\vartheta = 0$, entonces f es una traslación.

No analizaremos el resultado del teorema de 5.2 para movimientos no directos, sin embargo para lo que sigue, conviene considerar las simetrías respecto a planos:

DEFINICION:

Un movimiento de E se llama simetría planar, si respecto a cierto SR $\varepsilon = (e_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, admite una matriz de la forma:

$$J = \text{DIAG}(1, 1, 1, -1)$$

Se denomina a $P = e_0 + \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$ plano de simetría de f. Denotamos a f por S(P). Nótese que el plano de simetría determina unívocamente a f. Además:

$$S(P)^2 = \text{id}$$

La determinación de subgrupos continuos de SE(E) requiere la utilización de la siguiente versión restringida del teorema de Cartan Dieudonné:

LEMA:

Sean P y Q dos planos de E. entonces:

- a) Si $P // Q$ entonces $S(Q) \circ S(P)$ es una traslación de vector $2\vec{pq}$ siendo $p \in P$, $q \in Q$ puntos que la mínima distancia de P a Q.
- b) En otro caso, $S(Q) \circ S(P)$ es un giro de eje orientado $P \cap Q$ y ángulo ϑ el doble del formado por P y Q. ■

Usando técnicas de descomposición de traslaciones y giros como producto de simetrías planares, puede llegarse al siguiente resultado:

TEOREMA:

- a) El producto de dos giros de ejes paralelos es un nuevo giro de eje paralelo a los anteriores.
- b) El producto de un giro de eje Ω por una traslación de vector ortogonal a Ω es un nuevo giro de eje paralelo a Ω .

1.4 Lista exhaustiva de subgrupos continuos en dimensión tres.

Sea E un espacio afín euclídeo orientado tridimensional. Se entiende por subgrupo continuo de SE(E) un subgrupo G conexo de SE(E). Se llama dimensión de G a su dimensión como variedad diferenciable, es decir, el número de parámetros independientes necesarios para determinar un elemento del grupo.

TEOREMA:

Sea G un subgrupo continuo de SE(E) con dimensión k. Entonces $0 \leq k \leq 6$, y existe un SR ε en E tal que las representaciones matriciales de los elementos de G se expresan en la forma: (todos los parámetros varían en R)

$$k=0: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k=1: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta & -\text{sen } \vartheta \\ 0 & 0 & \text{sen } \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k=2: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta & -\text{sen } \vartheta \\ 0 & 0 & \text{sen } \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k=3: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & \cos \vartheta & -\text{sen } \vartheta \\ \gamma & 0 & \text{sen } \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 1 & 0 \\ \nu & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix} \tilde{A} \in \text{SE}(3)$$

$$k=4: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & \cos \vartheta & -\text{sen } \vartheta \\ \gamma & 0 & \text{sen } \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$k=6: \text{SE}(3)$$

Para ver que esta lista es exhaustiva, consúltese [7].

SECCION 2

LOS MOVIMIENTOS COMO GRUPO TOPOLOGICO

Preliminar: El cuerpo de los cuaternios.

La referencia general para este apartado es [8].

Sea \vec{H} un espacio vectorial euclídeo orientado tridimensional, denominamos conjunto de cuaternios al producto cartesiano $H = \mathbb{R} \times \vec{H}$.

Un elemento $a \in H$, se escribirá de la forma: $a = (a_0, \vec{a})$ con $a_0 \in \mathbb{R}$ y $\vec{a} \in \vec{H}$.

Para $a, b \in H$, se define:

$$a+b = (a_0 + b_0, \vec{a} + \vec{b}), \quad ab = (a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}, a_0 \vec{b} + b_0 \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b})$$

- 1) H con las operaciones antes definidas es un cuerpo (no conmutativo).
- 2) La inclusión $\mathbb{R} \ni a_0 \rightarrow (a_0, 0) \in H$ es un monomorfismo de cuerpos.
- 3) La inclusión $\vec{H} \ni \vec{a} \rightarrow (0, \vec{a}) \in H$ es un monomorfismo de grupos. ■
- 4) Los monomorfismos anteriores permiten identificar $a_0 = (a_0, \vec{0})$ y $\vec{a} = (0, \vec{a})$, de forma que para todo $a \in H$ se tiene $a = a_0 + \vec{a}$. Se denomina a a_0 parte real de a , y a \vec{a} parte imaginaria. Si $a_0 = 0$, se dice que a es puro.
- 5) Un cuaternio es real si y solo si conmuta con todo cuaternio.

6) Si $e = (i, j, k)$ es base ortonormal positiva de \vec{H} se verifica:

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j, \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad (1)$$

Así un cuaternio a puede escribirse de forma única como:

$$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \quad \text{con} \quad \vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

7) Si $a = a_0 + \vec{a} \in H$ al cuaternio $\bar{a} = a_0 - \vec{a}$ se le denomina conjugado. La aplicación conjugación $H \ni a \rightarrow \bar{a} \in H$ es un isomorfismo de cuerpos.

8) Si $a = a_0 + \vec{a} \in H$, se llama módulo de a al real positivo $|a|$ que verifica:

$$|a|^2 = a_0^2 + |\vec{a}|^2$$

Se prueba que $|a|^2 = a\bar{a} = \bar{a}a$. En particular se tiene para $a \neq 0$: $a^{-1} = \frac{\bar{a}}{|a|}$.

9) Un cuaternio es puro, si y solo si su cuadrado es un real negativo.

Concretamente, se tiene la equivalencia: $a \in \vec{H} \Leftrightarrow a^2 = -|a|^2$.

10) El conjunto $S^3 = \{a \in H : |a| = 1\}$ es un subgrupo multiplicativo de $H^* = H - \{0\}$.

1.1 El grupo topológico S^3 como recubridor doble de $SO(3)$.

Un grupo topológico es un grupo G , dotado de una topología que hace continuas las aplicaciones producto, e inversa. Así S^3 como subespacio de H , y $SO(3)$ como subespacio de \mathbb{R}^9 , tienen estructura natural de grupos topológicos.

Identificaremos de manera obvia $SO(3)$ con $SO(\vec{H})$ en cuanto se haya fijado

en \vec{H} una base ortonormal positiva $e=(i,j,k)$.

TEOREMA:

Si $q \in H^*$, entonces para cada $x \in \vec{H}$ es $qxq^{-1} \in \vec{H}$ y la aplicación:

$$\rho_q : \vec{H} \ni x \rightarrow qxq^{-1} \in \vec{H}$$

es una TO+ de \vec{H} . Por otra parte, la aplicación:

$$\rho : H^* \ni q \rightarrow \rho_q \in SO(\vec{H})$$

es un epimorfismo con núcleo R^* . Finalmente, la restricción:

$$\rho : S^3 \ni q \rightarrow \rho_q \in SO(\vec{H})$$

es un epimorfismo con núcleo $\{-1,1\}$.

Demostración:

Nótese que para $q \in H^*$, $x \in \vec{H}$ es $(qxq^{-1})^2 = qx^2q^{-1} = x^2 = -|x|^2$. Así ρ_q define una transformación ortogonal en \vec{H} que es homomorfismo. Además $\rho_q = id \Leftrightarrow q \in R^*$ (ver propiedad 5)).

Analicemos para $q \in S^3$, la TO $\rho_q : \vec{H} \rightarrow \vec{H}$, veamos que es un giro:
Como $|q|^2 = q_0^2 + |\vec{q}|^2$, existe un único ángulo θ con $q_0 = \cos \theta$, $|\vec{q}| = \sin \theta$.

Probaremos que ρ_q es un giro de eje orientado $\langle \vec{q} \rangle$ y ángulo 2θ .

Sea $i \in \vec{H}$ un vector unitario en la dirección de \vec{q} . Se tiene entonces:

$$q = \cos \theta + i \sin \theta$$

construyamos $e=(i,j,k)$ base ortonormal positiva de \vec{H} . Entonces:

$$\rho_q(i) = qi q^{-1} = i \text{ (identidad en } \mathbb{C})$$

$$\rho_q(j) = qj q^{-1} = (\cos \theta + i \sin \theta)j(\cos \theta - i \sin \theta) = j \cos 2\theta + k \sin 2\theta$$

$$\rho_q(k) = qk q^{-1} = (\cos \theta + i \sin \theta)k(\cos \theta - i \sin \theta) = k \cos 2\theta - j \sin 2\theta$$

que corresponde a la representación matricial del giro anunciado. ■

COROLARIO: (Tómese $\vec{H} = R^3$)

a) La aplicación $\rho : S^3 \rightarrow SO(3)$ es un recubridor de dos hojas para $SO(3)$.

Denotando por $P(R^4) = P(H)$ el espacio proyectivo real de dimensión 3:

b) La aplicación $\rho : H^* \rightarrow SO(3)$ induce un homeomorfismo entre $P(R^4)$ y $SO(3)$. ■

En consecuencia, $SO(3)$ es conexo, compacto y tiene a Z_2 como primer grupo de homotopía.

2.2 El grupo topológico SE(3).

La aplicación $E_3 \times SO(3) \ni (a, \vec{A}) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & \vec{A} \end{pmatrix} \in SE(3)$ define un homeomorfismo que permite identificar $a = (a, \vec{1})$, y $\vec{A} = (0, \vec{A})$. La aplicación es un isomorfismo de grupos si se dota a $E_3 \times SO(3)$ del producto:

$$(a, \vec{A})(b, \vec{B}) = (a + \vec{A}b, \vec{A}\vec{B})$$

Por otra parte, las restricciones:

$$(E_3, +) \ni a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & I \end{pmatrix} \in SE(3), \quad SO(3) \ni \vec{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{A} \end{pmatrix} \in SE(3)$$

definen monomorfismos de grupos, que permiten "sumergir" en $SE(3)$ el grupo aditivo E_3 , que constituye así el grupo de las traslaciones T_3 de $SE(3)$, y el grupo (multiplicativo) $SO(3)$ que determina el grupo $G_0(3)$ de movimientos que dejan fijo el origen de E_n . Nótese que $SE(3) = T_3 \cdot G_0(3)$, y $T_3 \cap G_0(3) = \{id\}$, pero este producto no es directo.

La versión no analítica de este resultado es la siguiente:

TEOREMA

Sea $T(E)$ el subgrupo de las traslaciones del espacio afin euclideo E .

Fijado $o \in E$, la aplicación:

$$\Psi_o: SO(\vec{E}) \ni \vec{f} \rightarrow \Psi_o(\vec{f}) \in SE(E) \text{ con } \Psi_o(\vec{f}): E \ni a \rightarrow o + \vec{f}(\vec{o}\vec{a}) \in E$$

es un monomorfismo de grupos, cuya imagen $G_o(E)$ está formada por los movimientos que dejan al punto o fijo.

Por otra parte, $T(E) \cap G_o(E) = \{id\}$, $T(E) \cdot G_o(E) = SE(E)$ y la aplicación:

$$\vec{E} \times SO(\vec{E}) \ni (v, \vec{f}) \rightarrow \tau_v \circ \Psi_o(\vec{f}) \in SE(E)$$

es un homeomorfismo.

SECCION 3

LOS MOVIMIENTOS COMO GRUPO DE LIE

Supondremos conocida la teoría de torsores expuesta en el apéndice. Las referencias útiles para esta sección son [3], [5], y [6].

1.1 Parametrizaciones de los grupos SO(3) y SE(3).

Un grupo de Lie, es un grupo G con una estructura de variedad diferenciable, que hace diferenciable a la aplicación: $G \times G \ni (a,b) \rightarrow ab^{-1} \in G$

Los grupos SO(3) y SE(3) tienen estructura de variedad diferenciable como subvariedades regularmente inmersas de \mathbb{R}^9 y \mathbb{R}^{12} respectivamente, y respecto a esta estructura, son grupos de Lie.

Por otra parte, la estructura diferenciable para SO(3) puede deducirse también a partir de la estructura diferenciable de \mathbb{S}^3 , por medio del recubridor de dos hojas $\rho: \mathbb{S}^3 \rightarrow \text{SO}(3)$ establecido en 2.1, y la de SE(3) como variedad producto $\mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$. Estamos interesados aquí en establecer algunas "cartas" o parametrizaciones locales más o menos estandar de estos grupos.

Como es sabido, una carta de una variedad diferenciable M de dimensión n , puede verse como una terna $(U, \mathcal{U}, \varphi)$ donde U es abierto de M , \mathcal{U} es un abierto de \mathbb{R}^n (o de un espacio vectorial euclideo n -dimensional), y $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow U$ es un difeomorfismo. La aplicación inversa $\bar{\varphi} = \varphi^{-1}: U \rightarrow \mathcal{U}$ se denomina parametrización local.

Como cuestión previa puede establecerse el siguiente:

LEMA:

A partir de una carta $(U, \mathcal{U}, \varphi)$ de SO(3) puede obtenerse otra carta $(\bar{U}, \bar{\mathcal{U}}, \bar{\varphi})$ de SE(3), donde $\bar{U} = \mathbb{E}_3 \times U$, $\bar{\mathcal{U}} = \mathbb{E}_3 \times \mathcal{U}$ y

$$\bar{\varphi}: \bar{\mathcal{U}} \ni (a, \vec{A}) \rightarrow (a, \varphi(\vec{A})) \in \bar{U}$$

la aplicación inversa $\bar{\varphi}^{-1}$ establece una parametrización. ■

Curiosamente, todas las cartas que aquí vamos a establecer sobre SO(3) tienen por dominio $U = \text{SO}(3) - \{\text{simetrías respecto a ejes}\}$. Una carta (U, φ) de estas características puede "trasladarse" a un entorno de una simetría σ respecto a recta, teniendo en cuenta que $L_\sigma: \text{SO}(3) \ni g \rightarrow \sigma.g \in \text{SO}(3)$ es diferenciable, y definiendo $\varphi_\sigma: \sigma U \rightarrow \varphi(U) = \mathcal{U}$ mediante el diagrama: ($\sigma^2 = \text{id}$!)

$$\begin{array}{ccc} & L_\sigma & \\ \sigma U & \xrightarrow{\varphi_\sigma} & U \\ & \searrow \varphi_\sigma & \downarrow \rho \\ & & \mathcal{U} \end{array}$$

Partiendo de la aplicación $\rho: \mathbb{S}^3 \rightarrow \text{SO}(3)$ establecida en 2.1 se pueden

construir algunas parametrizaciones geoméricamente interesantes de $SO(3)=SO(\mathbb{H})$ (Tómese $\mathbb{H}=\mathbb{E}_3$). En efecto, la aplicación "parte pura"

$$p: \mathbb{H} \ni a = (a_0, \vec{a}) \rightarrow \vec{a} \in \mathbb{H}$$

induce un difeomorfismo de $S^3_+ = \{q \in S^3 : q_0 > 0\}$ sobre la bola $D^3 = \{v \in \mathbb{H} : |v| < 1\}$. La composición Φ definida por:

$$\begin{array}{ccc} D^3 & \xrightarrow{p^{-1}} & S^3_+ \\ & \searrow \Phi & \downarrow \rho \\ & & U \subset SO(\mathbb{H}) \end{array}$$

establece una parametrización siendo $U = SO(\mathbb{H}) - G(\pi)$, donde $G(\pi)$ denota al cerrado de $SO(\mathbb{H})$ de las simetrías respecto a ejes. Se tiene así:

Parametrización Φ :

La aplicación $\Phi: D^3 \rightarrow SO(\mathbb{H}) - G(\pi)$ tal que:

$$\Phi(0) = \text{id}, \text{ y } \Phi(\vec{\omega}) = G(\langle \vec{\omega} \rangle, 2 \arcsen(|\vec{\omega}|)) \text{ si } \vec{\omega} \in D^3 - \{0\} \left(\arcsen: (0,1) \rightarrow (0, \frac{\pi}{2}) \right)$$

es una parametrización local de $SO(\mathbb{H})$. ■

Sea $H_1 = \{(1, \vec{a}) : \vec{a} \in \mathbb{H}\} \subset H$. Entonces H_1 es espacio afín euclideo con dirección \mathbb{H} , y su extensión proyectiva $\tilde{H}_1 = H_1 \cup P(\mathbb{H}) = P(H)$.

Componiendo Φ con la proyección estereográfica de $S^3_+ \rightarrow H_1$, se obtiene:

Parametrización Ψ

La aplicación $\Psi: H_1 \rightarrow SO(\mathbb{H}) - G(\pi)$ definida por:

$$\Psi(1, \vec{0}) = \text{id}, \text{ y } \Psi(1, \vec{a}) = G(\langle \vec{a} \rangle, 2 \arctg(|\vec{a}|)) \text{ si } \vec{a} \in \mathbb{H} - \{\vec{0}\} \left(\arctg: (0, +\infty) \rightarrow (0, \frac{\pi}{2}) \right)$$

es una parametrización local de $SO(\mathbb{H})$.

Difeomorfismo $\tilde{\Psi}$:

Por otra parte, la aplicación $\tilde{\Psi}: \tilde{H}_1 = P(H) \rightarrow SO(\mathbb{H})$ que coincide con Ψ sobre H_1 , y $\tilde{\Psi}([\vec{\omega}]) = \text{Simetría de eje } \langle \vec{\omega} \rangle$ para todo $[\vec{\omega}] \in P(\mathbb{H})$, define un difeomorfismo.

EJERCICIO: Analícese geoméricamente la parametrización $\tilde{\Psi}$ de $SE(H_1)$ obtenida de Ψ a través del LEMA 1.

Analizaremos ahora otro tipo de parametrización que involucra el espacio de torsores $\mathcal{T}or(E)$ del espacio afín euclideo E , y tiene más interés de cara al estudio de la cinemática del sólido rígido.

Parametrización exponencial:

Si $V \in \mathcal{T}or(E)$, entonces $V: E \rightarrow \vec{E}$. Se define $V^0 = \text{id}_E$, $V^1 = V$, y por inducción para $k > 1$ $V^k = \vec{V}^{k-1} \circ V$. Nótese que $V^k: E \rightarrow \vec{E}$ es una aplicación afín que no tiene porqué ser torsor. Considérese la serie:

$$T = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{k!} V^k \quad (3.1.1)$$

y nótese que de ser convergente, definiría un endomorfismo afín de E.

PROPOSICION 1:

La serie anterior define un elemento T de SE(E) que denotamos por exp(V).

Demostración:

Fijado $\varepsilon = (\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ SR en E, V admite una representación matricial de la forma: $V_\varepsilon = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline u & S \end{array} \right)$, donde S es una matriz cuadrada de orden tres hemisimétrica. Es decir $S+S^t=0$. Es claro que la convergencia de (3.1.1)

depende de la convergencia de la serie: $\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{k!} (V_\varepsilon)^k$ pero:

$$(V_\varepsilon)^0 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right), (V_\varepsilon)^1 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline u & S \end{array} \right), (V_\varepsilon)^2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline S^k u & S^2 \end{array} \right), \dots, (V_\varepsilon)^{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline S^{k+1} u & S^{k+1} \end{array} \right).$$

Denotando por $e^S = \exp(S) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{k!} S^k$, se tiene entonces: $T_\varepsilon = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline e^S u & e^S \end{array} \right)$, y

para ver que T es movimiento, es suficiente ver que e^S es matriz ortogonal.

Como las matrices S y S^t conmutan, se tiene: $e^S (e^S)^t = e^S e^{(S^t)} = e^{S+S^t} = e^0 = I$.

Por otra parte, $\det(e^S) = e^{\text{tr}(S)} = e^0 = 1$, por lo que T es movimiento directo. ■

Analícemos ahora el significado geométrico de la aplicación exponencial:

PROPOSICION 2

Si $V \in \mathcal{T}or(E)$ es un torsor de vector $\vec{\omega}$, eje central Ω , y módulo de deslizamiento λ , entonces $T = \exp(V)$, es un movimiento helicoidal de eje Ω (orientado por $\vec{\omega}$), ángulo $|\vec{\omega}|$, y vector de deslizamiento $\lambda \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$.

Demostración:

Tómese un SR ε en E, de forma que la matriz V_ε sea de la forma:

$$V_\varepsilon = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1 \\ 0 & 0 & \omega_1 & 0 \end{array} \right), \text{ así se tiene: } \exp(V_\varepsilon) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \omega_1 & -\text{sen } \omega_1 \\ 0 & 0 & \text{sen } \omega_1 & \cos \omega_1 \end{array} \right)$$

Denotando por $\mathcal{E}(\pi)$ al conjunto de torsores de E cuyo vector asociado

$\vec{\omega}$, verifica $|\vec{\omega}| < \pi$, se demuestra el siguiente

TEOREMA:

La aplicación $\exp: \mathcal{T}or(E) \rightarrow SE(E)$ es suprayectiva, e induce un difeomorfismo de $\mathcal{C}(\pi)$ sobre el complementario de las simetrías respecto a rectas.

3.2 Una nota sobre el espacio tangente.

Sea A un espacio afín de dimensión m , con dirección \vec{A} . Si $\gamma: (a,b) \rightarrow A$ es una curva diferenciable, entonces para $\tau \in (a,b)$, $\overline{\gamma(t)\gamma(\tau)} \in \vec{A}$, y se define:

$$\left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_{t=\tau} = \gamma'(\tau) = \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{\overline{\gamma(t)\gamma(\tau)}}{t-\tau} \in \vec{A}$$

se denomina a $\gamma'(\tau)$ vector tangente a la curva γ en $t=\tau$. Cuando $\tau=0$, se dice que γ es una curva por $p=\gamma(0) \in A$ que define el vector tangente $\gamma'(0)$.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n , regularmente inmersa en A . Fijado $p \in M$, el espacio $T_p M$ tangente a M en p , se puede interpretar como el conjunto de todos los vectores $\gamma'(0)$, cuando γ es una curva por p contenida en M . Así $T_p M$ puede considerarse un subespacio vectorial de \vec{A} con dimensión n .

Si M y N son dos variedades, y $f: M \rightarrow N$ es aplicación diferenciable, entonces para cada $p \in M$, la aplicación $df(p)$, diferencial de f en p , es una aplicación lineal de $T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$, que puede definirse de la siguiente forma:

$$df(p)(\gamma'(0)) = (f \circ \gamma)'(0)$$

para toda curva γ por p .

3.3 Algebra de Lie del grupo de movimientos directos.

Sea E espacio afín euclideo orientado. Estamos interesados en conocer cual es el carácter geométrico de los elementos del espacio tangente $T_1 G$ en la identidad 1 del grupo de Lie $G=SE(E)$ de los movimientos directos de E .

El conjunto A de endomorfismos afines de E , tiene estructura de espacio afín sobre el espacio vectorial \vec{A} de las aplicaciones afines de E en \vec{E} . Esta estructura viene definida por la igualdad:

$$\overline{f g(p)} = \overline{f(p)g(p)} \quad \text{para todo } f, g \in A, \text{ y todo } p \in E$$

Como $G=SE(E)$ es una subvariedad de A , es de esperar que los elementos de $T_1 G$ se puedan representar como aplicaciones afines de E en \vec{E} :

TEOREMA: $T_1 G = \mathcal{T}or(E)$.

Demostración:

Si $V \in \mathcal{T}or(E)$, entonces la curva $\gamma: \mathbb{R} \ni t \rightarrow e^{tV} \in G$ es diferenciable, y $\gamma(0)=1$. Además, $\gamma'(\tau) = V \circ e^{\tau V}$ y en particular $\gamma'(0) = V \circ e^0 = V \circ 1 = V \in T_1 G$. Así $\mathcal{T}or(E) \subseteq T_1 G$.

Recíprocamente, sea $g:(-\delta,\delta)\ni t \rightarrow g_t \in G$ curva diferenciable con $g_0=1$, y sea $V = \left. \frac{dg_t}{dt} \right|_{t=0} = g'(0): E \rightarrow \vec{E}$. Si $\vec{g}_t: \vec{E} \rightarrow \vec{E}$ es la lineal asociada a g_t , se tiene:

$\vec{V} = \left. \frac{d\vec{g}_t}{dt} \right|_{t=0}: \vec{E} \rightarrow \vec{E}$. Veamos que \vec{V} es hemisimétrica. En efecto: si $u, v \in \vec{E}$, la

aplicación $(-\delta,\delta)\ni t \rightarrow (\vec{g}_t u) \cdot (\vec{g}_t v) \in \mathbb{R}$ es constante. Calculando su derivada en $t=0$ queda:

$$0 = \left(\left. \frac{d(g_t u)}{dt} \right|_{t=0} \right) \cdot (\vec{g}_0 v) + (\vec{g}_0 u) \cdot \left(\left. \frac{d(g_t v)}{dt} \right|_{t=0} \right) = \vec{V}(u) \cdot v + u \cdot \vec{V}(v) \quad \blacksquare$$

(*) Fijado $g \in G$ la traslación a la izquierda $L_g: G \ni a \rightarrow ga \in G$ define un difeomorfismo que induce un isomorfismo lineal

$$dL_g(1) = (L_g)_*: T_1 G \rightarrow T_g G$$

así fijado $V \in T_1 G$, puede construirse un campo V en \mathcal{G} con $V(1) = V$ definida por:

$$V(g) = (L_g)_*(V)$$

Denotando por $\mathcal{L}(G)$ al espacio de campos vectorial de G invariantes por todas las traslaciones a la izquierda, se ve que $V \in \mathcal{L}(G)$, y que la aplicación:

$$T_1 G \ni V \rightarrow V \in \mathcal{L}(G)$$

es un isomorfismo lineal. Como $\mathcal{L}(G)$ tiene estructura natural de algebra de Lie respecto al corchete de Lie $[\cdot, \cdot]$ de campos en G , entonces $T_1 G$ admite una única estructura de algebra de Lie que hace al isomorfismo anterior, isomorfismo de algebras de Lie, y viene definida por:

$$[V, W] = [V, W](1) \text{ para toda } V, W \in T_1 G$$

Al algebra de lie $T_1 G$ así construida se le denota por \mathfrak{g} que se identifica mediante el isomorfismo anterior con $\mathcal{L}(G)$.

Si $V \in \mathfrak{g}$ se define la aplicación adjunta ad_V por:

$$\text{ad}_V: \mathfrak{g} \ni W \rightarrow [V, W] \in \mathfrak{g}$$

que resulta ser un endomorfismo lineal de \mathfrak{g} . Por otra parte, se prueba que el campo V es completo, y se denota $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(tV) \in G$ la curva integral de V que pasa por 1. La aplicación: $\exp: \mathfrak{g} \ni V \rightarrow \exp(V) \in G$ resulta ser diferenciable y define un difeomorfismo en un entorno de $0 \in \mathfrak{g}$

(*) Lo que sigue a continuación escrito en letra "a mano" es válido en un grupo de Lie G arbitrario. Su comprensión requiere quizás de conocimientos algo más profundos de Geometría Diferencial, no obstante su lectura no es estrictamente necesaria para la comprensión de estas notas.

TEOREMA:

Si $V, W \in \mathcal{T}or(E)$, entonces $\vec{V}_o W - W_o \vec{V} \in \mathcal{T}or(E)$, y la aplicación:

$$\mathcal{T}or(E) \times \mathcal{T}or(E) \ni (V, W) \rightarrow \vec{V}_o W - W_o \vec{V} \in \mathcal{T}or(E)$$

define en $\mathcal{T}or(E)$ una estructura de álgebra de Lie.

Por otra parte, esta estructura coincide con la definida por G , cuando se considera a $\mathcal{T}or(E)$ espacio tangente a G en 1 , y $\exp(V) = e^V$ para todo $V \in \mathcal{T}or(E)$.

Daremos una descripción explícita de este álgebra de Lie $\mathcal{T}or(E)$ usando un sistema estandar de generadores:

Si $e = (o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ es un SR de E , construimos (I, J, K, i, j, k) base de $\mathcal{T}or(E)$, de la siguiente forma: (se identifica $V \in \mathcal{T}or(E)$ con su matriz respecto a e)

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obteniendo la siguiente tabla para el corchete: (el primer factor, es el horizontal)

| | i | j | k | I | J | K |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| i | 0 | 2k | -2j | 0 | 2K | -2J |
| j | -2k | 0 | 2i | -2K | 0 | 2I |
| k | 2j | -2i | 0 | 2J | -2I | 0 |
| I | 0 | 2K | -2J | 0 | 0 | 0 |
| J | -2K | 0 | 2I | 0 | 0 | 0 |
| K | 2J | -2I | 0 | 0 | 0 | 0 |

A partir de aquí se pueden obtener todas las subálgebras de \mathfrak{g} salvo isomorfismos:

$$\{0\}, \langle i \rangle, \langle I \rangle, \langle i, I \rangle, \langle I, J \rangle, \langle i, j, k \rangle, \langle i, J, K \rangle, \langle i, I, J, K \rangle, \mathfrak{g}$$

que se corresponden con los subgrupos continuos de $SE(E)$ establecidos en la sección 1, gracias al siguiente resultado:

PROPOSICION:

Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie \mathfrak{g} . Existe una correspondencia biyectiva entre las subálgebras de Lie de \mathfrak{g} y los subgrupos continuos de G . Esta correspondencia viene dada a través de la aplicación exponencial mediante la siguiente regla:

A la subálgebra \mathfrak{h} de \mathfrak{g} le corresponde el subgrupo H generado por $\exp \mathfrak{h}$

SECCION 4

LOS MOVIMIENTOS COMO GRUPO RIEMANNIANO

La referencia para este apartado es [6]

4.1 Breve apunte sobre variedades riemannianas.

Una variedad riemanniana, es una variedad M , dotada de una métrica riemanniana, entendiéndose por tal, una estructura euclídea en cada espacio tangente $T_p M$, que varía diferenciablemente respecto al punto. Si $u, v \in T_p M$, $\langle u, v \rangle$ denota su producto escalar.

Sea $\sigma: [a, b] \rightarrow M$ una curva diferenciable. Se llama energía de σ a:

$$E(\sigma) = \frac{1}{2} \int_a^b \langle \sigma'(t), \sigma'(t) \rangle dt$$

El siguiente problema tiene una profunda relación con el análisis geométrico del movimiento inercial de los sistemas mecánicos:

"Dados dos puntos $p, q \in M$ se plantea la cuestión de determinar las curvas σ en M (parametrizadas en un intervalo fijo) que minimizan el valor de la energía".

La solución de este problema, que involucra complicadas técnicas de cálculo de variaciones, a grandes rasgos puede expresarse así:

Si los puntos p y q son "próximos", la solución γ es única.

Las curvas γ que minimizan localmente la energía se denominan geodésicas de M , y se obtienen como solución de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Geométricamente esto significa lo siguiente:

TEOREMA Para cada $p \in M$ y cada $v \in T_p M$, existe una única geodésica γ_v por p que define el vector v . (es decir, $\gamma_v(0) = p$ y $\gamma_v'(0) = v$) ■

Sea $f: M \rightarrow N$ es un difeomorfismo entre variedades riemannianas. Se dice que f es isometría, si en cada punto $p \in M$ la aplicación $df(p)$ define isometría (lineal). Si γ es una curva en M , entonces $f \circ \gamma$ es una curva en N , con la misma energía que γ . Por tanto las isometrías preservan las geodésicas.

4.2 Métricas invariantes en un grupo de Lie.

Un grupo riemanniano es un grupo de Lie G que es variedad riemanniana. Se dice que la métrica es invariante por traslaciones a la izquierda, si las aplicaciones:

$$L_g: G \ni a \rightarrow ga \in G$$

definen isometrías. La métrica se llama biinvariante, si además son isometrías las traslaciones a la derecha:

$$R_g: G \ni a \rightarrow ag \in G$$

Sea G un grupo de Lie ^(*) con álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_1 G$. Fijado en \mathfrak{g} un producto escalar euclideo, podemos dotar a cada $T_x G$ de una métrica, imponiendo que la aplicación $(L_x)_* : \mathfrak{g} \rightarrow T_x G$ sea isometría lineal. La métrica así obtenida es invariante por traslaciones a la izquierda. Se plantea entonces el problema de determinar un criterio para reconocer cuando una métrica en \mathfrak{g} da lugar a una métrica biinvariante en G . Los resultados en este sentido que nos van a interesar en estas notas están resumidos en el siguiente

TEOREMA:

Supóngase G conexo, y \langle, \rangle una métrica en su álgebra de Lie \mathfrak{g} . Entoces la métrica extendida a G es biinvariante, si y solo si para todo $V \in \mathfrak{g}$ la aplicación $\text{ad}_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ es hemisimétrica.

Por otra parte, si la métrica es biinvariante, entonces para cada $V \in \mathfrak{g}$ la aplicación $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(tV) \in G$ es una geodésica.

4.4 Una clase de métricas biinvariantes en $SE(3)$.

Considérese $SE(E)$ el grupo de movimientos directos en el espacio afín euclideo E .

LEMA:

Si $\mathcal{G} = (I, J, K, i, j, k)$ es un sistema generador de $\mathcal{T}or(E)$ cuyo corchete de lie verifica la tabla 3.2, entonces la métrica en $\mathcal{T}or(E)$ que hace a \mathcal{G} base ortonormal, se extiende a una métrica biinvariante en $SE(E)$.

Demostración:

Por el Teorema final de 4.3, es suficiente comprobar que para todo $V \in \mathcal{T}or(E)$, $\text{ad}_V : \mathcal{T}or(E) \rightarrow \mathcal{T}or(E)$ es hemisimétrica respecto a esta métrica, o de forma equivalente, que su matriz respecto a \mathcal{G} es una matriz hmisimétrica.

Pero esta comprobación es suficiente hacerla sobre los elementos de \mathcal{G} . Una inspección inteligente a la tabla concluye la demostración. ■

Supóngase ahora fijado el SR $e = (o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, y sea $\mathcal{G} = (I, J, K, i, j, k)$ el sistema generador de $\mathcal{T}or(E)$ establecido en 3.2.

Nótese que para $\lambda > 0$, el sistema $\mathcal{G}_\lambda = (\lambda I, \lambda J, \lambda K, i, j, k)$ verifica también la tabla de 3.2 y por el lema, la métrica \langle, \rangle_λ en $\mathcal{T}or(E)$ que hace ortonormal a \mathcal{G}_λ , también es biinvariante. Por supuesto, también son biinvariantes todas las

^(*) En lo que sigue, puede suponerse si se quiere que $G = SE(E)$ y $\mathfrak{g} = \mathcal{T}or(E)$

del tipo $\mu\langle, \rangle_\lambda$ con $\mu > 0$.

Concretamente una de estas métricas viene definida por la fórmula:

$\langle V, W \rangle = \text{Traza} [(V_e)(W_e)^t]$ para todo $V, W \in \mathcal{T}or(E)$, siendo V_e, W_e las representaciones matriciales de V y W respecto a la base e de E .

NOTA FINAL:

Considérese el recubridor de dos hojas $\rho: S^3 \rightarrow SO(\mathbb{H})$ establecido en 2.1. La estructura riemanniana natural de S^3 puede trasladarse a $SO(\mathbb{H})$ mediante ρ .

Pues bien, la métrica así inducida en $SO(\mathbb{H})$ es métrica biinvariante. Esto proporciona cierta intuición geométrica sobre la proximidad en distancia riemanniana entre dos elementos de $SO(\mathbb{H})$.

Por otra parte en $\mathbb{H} = T_1 S^3$ hay definido un operador exponencial natural: Si $a \in \mathbb{H}$, e^a se corresponde con la suma en el cuerpo \mathbb{H} de los cuaternios de la serie $\sum \frac{a^k}{k!}$. Como era de esperar, e^a coincide con $\exp(a)$ en el sentido de los grupos de Lie, y en el sentido de las variedades riemannianas:

La aplicación $t \rightarrow \exp(ta)$ define la geodésica por $1 \in S^3$ que determina el vector tangente $a \in T_1 S^3$, que describe un círculo máximo en S^3 .

Es un interesante ejercicio, el tratar de analizar el significado geométrico de estas afirmaciones en $SO(\mathbb{H})$ a través de ρ .

SECCION 5

DINAMICA DEL SOLIDO RIGIDO

La referencia general para esta sección es [1] Cap 6. Otras referencias aparecerán a lo largo del texto.

5.1 Descripción geométrica del espacio de posiciones de un sólido.

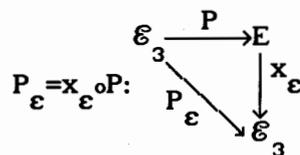
Desde un punto de vista formal, un sólido rígido puede considerarse como un par (\mathcal{E}, ρ) donde \mathcal{E} es un espacio afín euclídeo tridimensional orientado, y $\rho: \mathcal{E} \rightarrow]0, +\infty[\subset \mathbb{R}$ es una función acotada, integrable y con soporte compacto \mathcal{P} , tal que $\langle \mathcal{P} \rangle$ (subespacio generado por \mathcal{P}) es igual a \mathcal{E} . Se denomina a ρ función densidad de masa.

En la práctica, una vez fijado un sistema de referencia cartesiano euclideo positivo (brevemente, SR), $e = (o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un sólido rígido siempre puede "representarse" en la forma (\mathcal{E}_3, ρ) siendo $\mathcal{E}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} : a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$ el espacio afín euclideo canónico de las coordenadas cartesianas.

Fijemos E un espacio afín euclídeo tridimensional orientado, que interpretaremos como el espacio en reposo. Una posición del sólido en E, es por definición una isometría directa $P: \mathcal{E}_3 \rightarrow E$. Si $a \in \mathcal{E}_3$ es un punto del sólido, entonces $P(a)$ se interpreta como la posición del punto a en E. Nótese que $a \in \mathcal{E}_3$ representa también las coordenadas de $P(a)$ respecto a P_e .

Al conjunto de todas las posibles posiciones P del sólido, lo denotamos por M y lo llamaremos espacio de posiciones.

El espacio M de posiciones tiene estructura canónica de variedad diferenciable. En efecto, si $\varepsilon = (e_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ es un SR en E y $x_\varepsilon: E \rightarrow \mathcal{E}_3$ son las coordenadas cartesianas inducidas, para cada posición $P \in M$ se define $P_\varepsilon \in SE(3)$ por:



La aplicación $\mathcal{M}_\varepsilon: M \ni P \rightarrow P_\varepsilon \in SE(3)$ es una biyección que da estructura de variedad diferenciable a M. Esta estructura no depende del SR en E tomado, pues si $\bar{\varepsilon} = \varepsilon Q$ ($Q \in SE(3)$) es otro SR en E, entonces: $x_{\bar{\varepsilon}} = Q \circ x_\varepsilon$ y por tanto $P_{\bar{\varepsilon}} = x_{\bar{\varepsilon}} \circ P = Q \circ x_\varepsilon \circ P = Q P_\varepsilon$. Así denotando por $L_Q: SE(3) \ni A \rightarrow QA \in SE(3)$ la traslación por la izquierda en $SE(3)$ se verifica la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\mathcal{M}_\varepsilon} & SE(3) \\
 & \searrow \mathcal{M}_\varepsilon & \downarrow L_Q \\
 & & SE(3)
 \end{array}$$

Otro planteamiento que no involucra a priori el SR ε es el siguiente:

El grupo de movimientos directos de E, $SE(E)$ actúa de forma natural en M como grupo de difeomorfismos de la siguiente manera:

$$\lambda: SE(E) \times M \ni (\Phi, P) \longrightarrow \lambda_\Phi(P) = \Phi \circ P \in M:
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{E} & \xrightarrow{P} & E \\
 \Phi \circ P \searrow & & \downarrow \Phi \\
 & & E
 \end{array}$$

Esta actuación es simplemente transitiva, es decir, Si $A, B \in M$ existe un único $\Phi \in SE(E)$ tal que $\Phi \circ A = B$. Así, Si $O \in M$ es una posición, el difeomorfismo:

$$\Xi_0: M \ni A \longrightarrow O^{-1} \circ A \in SE(\mathcal{E})$$

da a M estructura de grupo de Lie que denotamos por M_0 .

Si $\bar{O} \in M$ es otra posición, sea $\bar{\Phi} \in SE(E)$ con $\bar{\Phi} \circ O = \bar{O}$, entonces para cada $P \in M$ se tiene: $\Xi_{\bar{O}}(P) = (\bar{\Phi} \circ O^{-1}) \circ P = O^{-1} \circ (\bar{\Phi}^{-1} \circ P) = \Xi_0(\lambda_{\bar{\Phi}^{-1}}(P))$ y por tanto el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\lambda_{\bar{\Phi}}} & M \\
 \Xi_0 \searrow & & \downarrow \Xi_{\bar{O}} \quad (\bar{O} = \bar{\Phi} \circ O) \\
 & & SE(\mathcal{E})
 \end{array}$$

es conmutativo, y $\lambda_{\bar{\Phi}}$ establece un isomorfismo entre los grupos M_0 y $M_{\bar{O}}$.

Supuesto fijado ahora el SR ε en \mathcal{E} que identifica \mathcal{E} y \mathcal{E}_3 , tomando $\varepsilon = O(e)$, se tiene entonces la identificación $\Xi_0 = \mathcal{M}_\varepsilon: M \longrightarrow SE(3) = SE(\mathcal{E})$.

Nótese por otra parte, que M es una variedad sumergida en el espacio afín A de las aplicaciones afines de \mathcal{E}_3 en E, que tiene por espacio vectorial asociado el espacio \vec{A} de las aplicaciones afines de \mathcal{E}_3 en \vec{E} .

5.2 Descripción geométrica del espacio de estados de un sólido rígido.

Un movimiento del sólido, viene dado por una curva diferenciable $P: I \ni t \longrightarrow P(t) \in M$. El parámetro $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ representa el tiempo, $P(t)$ es la posición del sólido en el instante t, siendo para cada $a \in \mathcal{E}_3$, $P(t)a$ la posición del punto a del sólido en el instante t. Supuesto que $0 \in I$, se dice que P es un movimiento del sólido por $P = P(0) \in M$, y $\left. \frac{dP}{dt} \right|_{t=0} = P'(0)$ representa un vector tangente de M en P que se denomina velocidad inicial del sólido.

Los elementos de $T_P M$ (como $P'(0)$) son aplicaciones afines de \mathcal{E}_3 en \vec{E} , estudiaremos cuál es la propiedad geométrica que los caracteriza y cuál es su significado cinemático:

El movimiento $P(t)$ del sólido hace describir a cada punto $p \in E$ la trayectoria $p(t) = P(t) \circ P^{-1}(p)$, y en el instante $t=0$ tiene por velocidad $v(p) = P'(0) \circ P^{-1}(p)$. Como $P(t) \circ P^{-1} = \phi(t)$ es una isometría de E , se concluye que $\phi'(0) = v: E \rightarrow \vec{E}$ es un torsor que describe la velocidad instantánea de cada punto. Se obtiene así el siguiente:

TEOREMA 1

Fijado $P \in M$, se verifica que los vectores $V \in T_P M$ son aplicaciones afines $V: \mathcal{E}_3 \rightarrow \vec{E}$ tales que $v = V \circ P^{-1}$ es un torsor de E , que representa el campo de velocidades instantaneas de un movimiento P del sólido por P con $P'(0) = V$.

En particular, usando la teoría de torsores, se deduce la existencia de un único vector $\vec{\Omega} \in \vec{E}$ de forma que para todo $p, q \in E$ se verifica:

$$v(q) = v(p) + \vec{\Omega} \times p\vec{q}$$

Se denomina a $\vec{\Omega}$ velocidad angular instantánea de giro definida por V en P .

Por otra parte, el conjunto Ω de puntos $p \in E$ tales que $v(p)$ es paralelo a $\vec{\Omega}$ constituye una recta afín de E con dirección $\vec{\Omega}$. Se denomina a Ω eje instantaneo de rotación.

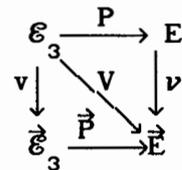
Finalmente, se sabe que existe $\lambda \in \mathbb{R}$, de forma que $v(p) = \lambda \frac{\vec{\Omega}}{|\vec{\Omega}|}$ para todo $p \in \Omega$.

Denominamos a λ módulo de desplazamiento.

El par (Ω, λ) los denominamos invariantes geométricos de V en P , y caracterizan geoméricamente (como veremos) al movimiento helicoidal del sólido que produce sobre E la distribución $v = V \circ P^{-1}$ de velocidades puntuales inducida por V .

El siguiente diagrama esquematiza esta situación, y permite definir el torsor cinemático v en \mathcal{E}_3 :

$$v = \vec{P}^{-1} \circ V = \vec{P}^{-1} \circ v \circ P = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline u_1 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ u_2 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ u_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline u & \omega \end{array} \right)$$



Observese que la matriz v es la representación matricial de v en el

sistema de referencia Pe , y describe analíticamente en dichas coordenadas la distribución de las velocidades de las partículas puntuales del sólido. Es decir, si $a \in \mathcal{E}_3$, $v(a)$ son las coordenadas de la velocidad de Pa respecto a Pe .

NOTACION: Cuando se considera $V: \mathcal{E}_3 \rightarrow \vec{E}$ como vector tangente a M en P escribimos $V=V_P$.

COROLARIO

Las aplicaciones $TM \ni V_P \rightarrow (P, V \circ P^{-1}) \in M \times \mathcal{T}or(E)$ $TM \ni V_P \rightarrow (P, \vec{P}^{-1} \circ V) \in M \times \mathcal{T}or(\mathcal{E}_3)$ determinan trivializaciones globales de TM , y escribimos:

$$V=V_P \cong (P, V \circ P^{-1}) \cong (P, \vec{P}^{-1} \circ V)$$

Por otra parte, si $\Phi \in SE(E)$ es $(\lambda_\Phi)_*(V_P) \cong (\Phi \circ P, \vec{P}^{-1} \circ V)$. Es decir, la actuación de $(\lambda_\Phi)_*$ en TM puede verse sobre $M \times \mathcal{T}or(\mathcal{E}_3)$ así:

$$(\lambda_\Phi)_*: M \times \mathcal{T}or(\mathcal{E}_3) \ni (P, v) \rightarrow (\Phi \circ P, v) \in M \times \mathcal{T}or(\mathcal{E}_3)$$

La demostración de esta última afirmación puede hacerse así:

Sea $P(t)$ un desplazamiento que define el vector V en P . Entonces $\Phi \circ P(t)$ es un desplazamiento que define el vector $W = (\lambda_\Phi)_*(V)$ en $Q = \Phi \circ P$, y así $W = \vec{\Phi} \circ P'(0) = \vec{\Phi} \circ V$, por tanto: $W_Q \cong (Q, \vec{Q}^{-1} \circ W) = (Q, \vec{P}^{-1} \circ \vec{\Phi}^{-1} \circ \vec{\Phi} \circ V) = (\Phi \circ P, \vec{P}^{-1} \circ V)$. ■

Existe un desplazamiento canónico que define el vector V en P . Es el denominado desplazamiento helicoidal, que viene definido de la forma que sigue: Tomando $v = \vec{P}^{-1} \circ V: \mathcal{E}_3 \rightarrow \vec{\mathcal{E}}_3$, entonces para cada t la aplicación $e^{tv}: \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_3$ es una isometría positiva. Se define $P(t)$ mediante:

$$P(t) = P \circ e^{tv} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{E}_3 & \xrightarrow{P} & E \\ & \nwarrow e^{tv} & \uparrow P(t) \\ & & \mathcal{E}_3 \end{array} \quad \text{Así } P'(0) = \vec{P} \circ v = V.$$

TEOREMA 2

En las condiciones anteriores la aplicación $H(t) = P(t) \circ P^{-1}: E \rightarrow E$ define para cada t un movimiento helicoidal de eje Ω , ángulo (orientado según el sentido de $\vec{\Omega}$) igual a $|\vec{\Omega}|t$ y módulo de desplazamiento igual a λt .

Demostración:

Sean (Ω, λ) los invariantes geométricos de $V \in T_P M$. Fijemos un SR en E , $\epsilon = (e_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, tal que $e_0 \in \Omega$ y $\langle \vec{e}_1 \rangle = \vec{\Omega}$. La matriz respecto a este sistema del

torsor cinemático $\nu = V \circ P^{-1}$ en E será $\nu_\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1 \\ 0 & 0 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $P(e)=\varepsilon$ y por tanto $P_{\varepsilon}=I$,

$$\text{con lo que } \nu_{\varepsilon}=\nu, \text{ y } P(t)_{\varepsilon}=e^{t\nu}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \omega_1 t & -\text{sen } \omega_1 t \\ 0 & 0 & \text{sen } \omega_1 t & \cos \omega_1 t \end{pmatrix} \blacksquare$$

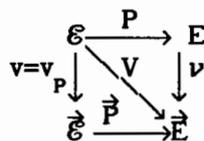
Se obtiene otra demostración más elegante (sin usar la referencia e) teniendo en cuenta que: $H(t)=P(t) \circ P^{-1}=P \circ (e^{t\nu}) \circ P^{-1}=\exp(t\nu):E \rightarrow E$ cuya matriz asociada respecto a ε es justamente la última que hemos escrito, y representa para cada t el movimiento helicoidal anunciado.

5.3 Significado geométrico de la energía cinética.

Sea (\mathcal{E}, ρ) un sólido rígido. Si \mathcal{Y} es el soporte (compacto) de ρ , y dv es el volumen canónico de \mathcal{E} , se llama masa del sólido $m=\int_{\mathcal{Y}} dm$, siendo $dm=\rho dv$.

Supóngase que V es un vector tangente a M por la posición P .

Se trata de determinar la energía cinética del sólido en el estado definido por V_P . Para ello debemos recordar como se deducen los torsores cinemáticos ν y $\nu=v$ de V_P a partir del diagrama:



La energía cinética del estado V_P tiene el valor:

$$W(V)=\frac{1}{2} \int_{P(\mathcal{Y})} \nu(p) \cdot \nu(p) (\rho \circ P^{-1}(p)) dv_E$$

Teniendo en cuenta que (una vez fijado e SR en \mathcal{E}), ν representa la matriz de ν respecto a $P(e)$ y que cada $a \in \mathcal{E}$ ($=\mathcal{E}_3$) representa las coordenadas de $P(a)$ respecto a $P(e)$, el cálculo de la anterior integral, se reduce a calcular en el espacio analítico \mathcal{E}_3 la integral:

$$W(V)=\frac{1}{2} \int_{\mathcal{Y}} \nu(a) \cdot \nu(a) dm$$

(Se obtiene un argumento más elegante, sin usar el SR e , aplicando el teorema del cambio de variable).

TEOREMA La energía cinética $W:TM \rightarrow \mathbb{R}$ es invariante por la acción del grupo $SE(E)$

sobre M . Por otra parte, W induce una única métrica Riemanniana \langle , \rangle en M de

forma que para todo $V \in T_P M$ se verifica que:

$$W(V) = \frac{1}{2} \langle V, V \rangle$$

Finalmente \langle, \rangle induce a través de $\Xi_0: M \rightarrow SE(\mathcal{E})$ una métrica en $SE(\mathcal{E})$ invariante por traslaciones a la izquierda, que es independiente de la posición inicial O elegida. En particular, la métrica en M es invariante por traslaciones a la izquierda en el grupo M_0 para todo $O \in M$.

Demostración:

La identificación $TM \cong M \times \mathcal{T}or(\mathcal{E})$ definida por $TM \ni V_P \rightarrow (P, \vec{P}^{-1} \circ V) \in M \times \mathcal{T}or(\mathcal{E}_3)$ permite escribir la acción de $SE(E)$ sobre TM en la forma: $(\Phi \in SE(3))$

$$(\lambda_\Phi)_*: M \times \mathcal{T}or(\mathcal{E}) \ni (P, v) \rightarrow (\lambda_\Phi(P), v) \in M \times \mathcal{T}or(\mathcal{E})$$

y la energía cinética $W: M \times \mathcal{T}or(\mathcal{E}) \ni (P, v) \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \langle v(x), v(x) \rangle dx \in \mathbb{R}$.

Esto prueba la invariancia de W por la acción de $SE(E)$.

Por otra parte, la aplicación:

$$\mathcal{T}or(\mathcal{E}) \times \mathcal{T}or(\mathcal{E}) \ni (u, v) \rightarrow \langle u, v \rangle = \int_{\mathcal{V}} \langle u(x), v(x) \rangle dx \in \mathbb{R},$$

define en $\mathcal{T}or(\mathcal{E})$ una forma bilineal definida positiva, y $W(P, v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle$.

Tomando para $U, V \in T_P M$ $\langle U, V \rangle = \langle \vec{P}^{-1} \circ U, \vec{P}^{-1} \circ V \rangle$, queda inducida en M la métrica invariante por $SE(E)$ pedida.

Si $O, \bar{O} \in M$ y $\Phi = \bar{O} \circ O^{-1} \in SE(E)$ entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\lambda_\Phi} & M \\ & \searrow \Xi_0 & \downarrow \Xi_{\bar{O}} \\ & & SE(\mathcal{E}) \end{array} \text{ es}$$

conmutativo. Así si dotamos a $SE(\mathcal{E})$ de la métrica que hace a Ξ_0 isometría, entonces como λ_Φ es isometría, también lo es $\Xi_{\bar{O}}$.

Finalmente, la aplicación $SE(E) \ni \Phi \rightarrow \Phi_0 = O^{-1} \circ \Phi \circ O \in SE(\mathcal{E})$ es un isomorfismo de grupos, y el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\lambda_\Phi} & M \\ \Xi_0 \downarrow & & \downarrow \Xi_0 \\ SE(\mathcal{E}) & \xrightarrow{L_{\Phi_0}} & SE(\mathcal{E}) \end{array}$$

es conmutativo. Esto prueba que la métrica en $SE(\mathcal{E})$ es invariante por traslaciones a la izquierda, al igual que la definida en M_0 . ■

5.4 Cálculo de la energía cinética: Elementos dinámicos de un sólido.

Fijado $V \in T_P M$, $v = \vec{P}^{-1} \circ V \in \mathcal{T}or(\mathcal{E})$, nos proponemos hacer un cálculo explícito

tensor tipo \mathfrak{I}_1^1 , métricamente equivalente al tensor \mathfrak{I} tipo \mathfrak{I}_2^0 definido por:
 $\mathfrak{I}: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \ni (\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2) \rightarrow \mathfrak{I}(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2) = \vec{\omega}_1 \cdot \tilde{\mathfrak{I}}(\vec{\omega}_2) \in \mathbb{R}$, y que también llamamos tensor de inercia.

Teniendo en cuenta que $\int_{\mathcal{V}} \vec{o}\vec{a} \, dm = 0$ por ser o el centro de gravedad, queda:

$$\mathfrak{E}_2 = \frac{1}{2} \mathfrak{I}(\vec{\omega}, \vec{\omega})$$

Se denomina a $I(\omega_o) = \frac{\mathfrak{I}(\vec{\omega}, \vec{\omega})}{\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}}$, momento de inercia del sólido respecto del eje ω_o , que pasa por o y es paralelo a $\vec{\omega}$. Tenemos así finalmente:

$$W(V) = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 = \frac{1}{2} m |v(o)|^2 + \frac{1}{2} I(\omega_o) |\vec{\omega}|^2 = \frac{1}{2} m |v(o)|^2 + \frac{1}{2} \mathfrak{I}(\vec{\omega}, \vec{\omega}) \quad (5.4.1)$$

El primer sumando \mathfrak{E}_1 representa la energía cinética de traslación, y es la energía cinética que tendría un sólido que tuviera su masa m concentrada en (el centro de gravedad) o y se moviera con velocidad $v(o)$.

El segundo sumando \mathfrak{E}_2 se interpreta como la energía cinética de rotación con velocidad angular instantánea $\vec{\omega}$ alrededor del eje ω_o .

OBSERVACIONES:

Fijada una posición $P \in M$ del sólido, la aplicación $M = \vec{P} \circ m$ es el momento cinético (respecto al centro de gravedad) en el espacio en reposo E .

De hecho, si $P_o = e_o$, y V es un vector de $T_P M$ y $v = \vec{P}^{-1} \circ V \in \mathcal{T}or(\mathcal{E})$ se verifica:

$$M(v) = \vec{P}(m(v)) = \vec{P} \left(\int_{\mathcal{V}} \vec{o}\vec{a} \times v(a) \rho \, dvol_{\mathcal{E}} \right) = \int_{P(\mathcal{V})} \vec{e}_o \vec{p} \times v(p) (\rho \circ P^{-1}) \, dvol_E$$

El momento cinético $m(v)$ respecto al centro de gravedad o solo depende de el vector $\vec{\omega}$ asociado al torsor y tiene por valor $\tilde{\mathfrak{I}}(\vec{\omega})$, escribiremos por abuso de notación $m(v) = m(\vec{\omega})$, e identificaremos por tanto $\tilde{\mathfrak{I}}$ con m . Análogamente escribiremos $M(v) = M(\vec{\omega})$. Se tiene así el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{P} & E \\ m \downarrow & \searrow M & \downarrow \mu \\ \mathcal{E} & \xrightarrow{\vec{P}} & E \end{array}$$

Finalmente estableceremos una fórmula útil para el cálculo $\langle V, F \rangle$ siendo $V, F \in T_P M$. Considerense los diagramas:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{P} & E \\ f \downarrow & \searrow F & \downarrow \varphi \\ \mathcal{E} & \xrightarrow{\vec{P}} & E \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{P} & E \\ v \downarrow & \searrow V & \downarrow \nu \\ \mathcal{E} & \xrightarrow{\vec{P}} & E \end{array}$$

Si $\vec{\omega}$ y $\vec{\Omega}$ son los vectores de rotación de v y φ respectivamente, usando (5.4.1)

queda: $2 W(V) = \langle V, V \rangle = \langle v, v \rangle = m v(o) \cdot v(o) + m(\vec{\omega}) \cdot \vec{\omega}$.

Como el vector asociado a el tursor f es $\vec{P}^{-1}(\vec{\Omega})$ (véase proposición 7 del Apéndice), se obtiene la fórmula:

$$\langle V, F \rangle = \langle v, f \rangle = m v(o) \cdot f(o) + m(\vec{\omega}) \cdot \vec{P}^{-1}(\vec{\Omega})$$

Aplicando \vec{P} a cada sumando y teniendo en cuenta que \vec{P} es isometría queda:

$$m v(o) \cdot f(o) = m V(o) \cdot F(o) \quad m(\vec{\omega}) \cdot \vec{P}^{-1}(\vec{\Omega}) = (\vec{P} \circ m)(\vec{\omega}) \cdot \vec{\Omega} = M(\vec{\omega}) \cdot \vec{\Omega}$$

y por tanto se tiene:

$$\langle V, F \rangle = m V(o) \cdot F(o) + M(\vec{\omega}) \cdot \vec{\Omega} \quad (5.4.2)$$

5.5 Análisis geométrico del Tensor de Inercia.

El tensor de inercia \mathfrak{J} junto con el valor m de la masa y el centro de gravedad $o \in \mathcal{E}$, proporcionan toda la información necesaria y suficiente para la descripción del movimiento inercial del sólido.

Es de esperar pues, que las propiedades geométricas del tensor \mathfrak{J} se traduzcan en propiedades dinámicas del sólido.

TEOREMA 1

El tensor de inercia \mathfrak{J} es simétrico. Es decir:

$$\tilde{\mathfrak{J}}(\vec{\omega}_1) \cdot \vec{\omega}_2 = \tilde{\mathfrak{J}}(\vec{\omega}_2) \cdot \vec{\omega}_1 \quad \text{para todo } \vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2 \in \mathcal{E}$$

Demostración:

Teniendo en cuenta la identidad $a \times (b \times c) = (c \cdot a)b - (b \cdot a)c$ para $a, b, c \in \mathcal{E}$ se tiene:

$$(\vec{o}\vec{a} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{o}\vec{a})) \cdot \vec{\omega}_2 = [(\vec{o}\vec{a} \cdot \vec{o}\vec{a})\vec{\omega}_1 - (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{o}\vec{a})\vec{o}\vec{a}] \cdot \vec{\omega}_2 = (\vec{o}\vec{a} \cdot \vec{o}\vec{a})(\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2) - (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{o}\vec{a})(\vec{o}\vec{a} \cdot \vec{\omega}_2)$$

y la última expresión es simétrica. ■

Usando un resultado clásico de álgebra lineal se tiene:

COROLARIO 2

Existe una base ortonormal positiva $\vec{e} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en \mathcal{E}_3 , formada por autovectores de $\tilde{\mathfrak{J}}$. Es decir, si $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k}$ entonces:

$$\mathfrak{J}(\vec{\omega}, \vec{\omega}) = I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2$$

Donde $I_1 = \mathfrak{J}(\vec{i}, \vec{i})$, $I_2 = \mathfrak{J}(\vec{j}, \vec{j})$, $I_3 = \mathfrak{J}(\vec{k}, \vec{k})$ son las momentos de inercia de los ejes que pasando por o tienen direcciones \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} . A estos ejes se les denomina ejes principales de inercia, siendo I_1, I_2, I_3 los momentos principales de inercia.

Llamaremos a $e = (o, \vec{e})$ SR principal del sólido (brevemente SRP) y denotaremos por x, y, z a las coordenadas respecto a este sistema.

DEFINICION 3

Se denomina elipsoide de inercia Θ al conjunto de puntos $a \in \mathcal{E}$ tales que $\mathfrak{J}(\vec{oa}, \vec{oa}) = 1$. Respecto a las coordenadas principales tiene por ecuación:

$$I_1 x^2 + I_2 y^2 + I_3 z^2 = 1$$

Si $a \in \Theta$ entonces el momento de inercia respecto al eje oa definido por o y a se escribe $I(oa) = \frac{\mathfrak{J}(\vec{oa}, \vec{oa})}{\langle \vec{oa}, \vec{oa} \rangle}$. Así $|\vec{oa}| = \frac{1}{\sqrt{I(oa)}}$.

El elipsoide de inercia, junto con la masa total caracterizan totalmente las propiedades dinámicas del sólido.

NOTA:

En la práctica, el cálculo del momento de inercia del sólido respecto de un eje ω se obtiene mediante la integral: $\int_{\mathcal{V}} r^2 dm$, donde $r: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ denota la función distancia a ω .

COROLARIO 3.

Sea $V \in T_P M$, y $v = \vec{P}^{-1} \circ V \in \mathcal{T}or(\mathcal{E})$. Entonces si la matriz de v respecto al SRP e

$$\text{es } v_e = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline u_1 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ u_2 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ u_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline u & \omega \end{array} \right) \text{ se tiene: } \begin{cases} v(o) = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k} \\ \vec{\omega} = \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k} \end{cases} \text{ y}$$

$$W(V) = \frac{1}{2} \left(m (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 \right)$$

■

En particular si el sólido es dinámicamente simétrico, es decir:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \mathbb{I}$$

entonces la expresión de la energía cinética es:

$$W(V) = \frac{1}{2} \left(m (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + \mathbb{I} (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \right)$$

5.6 Significado geométrico del principio de mínima energía.

Sea (M, \langle, \rangle) la variedad Riemanniana obtenida a partir del sólido rígido (\mathcal{E}, ρ) . Nuestro problema es el siguiente:

Supuesto que sobre el sólido no actúan fuerzas exteriores, y dado $V_P \in T_P M$, determinar el movimiento $P(t)$ del sólido (compatible con las leyes de la dinámica de Newton) tal que $P'(0) = V_P$. Se denomina a $P(t)$ movimiento inercial del sólido.

La solución geométrica a este problema se obtiene a partir del principio de mínima energía:

Dado un movimiento del sólido $Q:[t_0, t_1] \rightarrow M$ llamamos energía de Q a:

$$\int_{t_1}^{t_0} \langle Q'(t), Q'(t) \rangle dt$$

TEOREMA 1: (Principio de mínima Energía): Ver [3]

Fijada una posición $P \in M$ del sólido, existe un entorno \mathcal{U} de P en M , tal que para todo $P_0, P_1 \in M$, se verifica la siguiente propiedad:

De entre la familia de todos los movimientos $Q(t)$ del sólido tales que: $Q:[t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{U} \subseteq M$, $Q(t_0) = P_0$ y $Q(t_1) = P_1$, existe uno y solo uno $P:[t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{U}$ que hace mínima la energía. Este movimiento es exactamente el único inercial de la familia. ■

Dicho de otra forma: Los movimientos inerciales se caracterizan por la propiedad de minimizar localmente la energía.

COROLARIO 2: Ver [5]

Las curvas de M que minimizan localmente la energía (y por tanto los movimientos inerciales del sólido rígido), son exactamente las geodésicas de la conexión de Levi-Civita asociada a la variedad Riemanniana (M, \langle, \rangle) ■

Para el caso de un sólido rígido dinámicamente simétrico, la solución a nuestro problema viene dada por:

TEOREMA 3

Si se verifica $I_1 = I_2 = I_3 = \mathbb{1}$, entonces, fijado $V_p \in T_p M$, entonces el movimiento inercial $P(t)$ del sólido con $P(0) = P$ y $P'(0) = V_p$, es el movimiento helicoidal definido por:

$$P(t) = P \circ e^{tv}$$

siendo $v = \vec{P}^{-1} \circ V$ el torsor cinemático inducido por V en \mathcal{E} .

Demostración:

Fijada una posición de referencia inicial $O \in \mathcal{E}$ y un SR principal e en \mathcal{E} ($= \mathcal{E}_3$), la aplicación:

$$\Xi_0: M \ni A \rightarrow O^{-1} \circ A \in SE(\mathcal{E}_3)$$

identifica a M con el grupo de Lie de matrices $SE(\mathcal{E}_3)$, y $T_0 M$ con el álgebra de Lie $\mathcal{Tor}(\mathcal{E}_3)$. La métrica \langle, \rangle en M induce sobre $T_0 M = \mathcal{Tor}(\mathcal{E}_3)$ un producto escalar euclideo que viene definido por:

$$\langle v, v' \rangle = m (u_1 u_1' + u_2 u_2' + u_3 u_3') + \mathbb{1} (\omega_1 \omega_1' + \omega_2 \omega_2' + \omega_3 \omega_3') = m (u^t \cdot u') + \frac{1}{2} \mathbb{1} \text{Trz}(\omega^t \cdot \omega)$$

donde:

$$v = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ u_2 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ u_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline u & \omega \end{array} \right), \quad v' = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ u'_1 & 0 & -\omega'_3 & \omega'_2 \\ u'_2 & \omega'_3 & 0 & -\omega'_1 \\ u'_3 & -\omega'_2 & \omega'_1 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline u' & \omega' \end{array} \right)$$

Usando la teoría clásica de métricas en grupos de Lie, el resultado se sigue de forma inmediata después de comprobar que para todo $v \in \mathcal{T}or(\mathcal{E}_3)$ la aplicación: $ad_v : \mathcal{T}or(\mathcal{E}_3) \ni v' \rightarrow [v, v'] = v \cdot v' - v' \cdot v \in \mathcal{T}or(\mathcal{E}_3)$ es hemisimétrica respecto a este producto escalar, es decir:

$$\langle ad_v(v'), v'' \rangle + \langle v', ad_v(v'') \rangle = 0, \text{ para todo } v, v', v'' \in \mathcal{T}or(\mathcal{E}_3)$$

En efecto, la condición anterior implica que la métrica \langle, \rangle en M , invariante por traslaciones a la izquierda, también lo es por traslaciones a la derecha, y para este tipo de métricas, las curvas $t \rightarrow e^{tv}$ son geodésicas.

5.7 Teoremas de conservación.

A partir de un estado $V_p \in T_p M$ del sólido, se pueden definir ciertas magnitudes físicas tales como energía cinética, momento cinético...etc. Se dice que una magnitud es conservativa, si para todo movimiento inercial $P(t)$ del sólido, el valor de la magnitud en $P'(t)$ permanece constante respecto al tiempo. Por ejemplo, como consecuencia del corolario 2 anterior se tiene:

TEOREMA

La energía cinética es una magnitud conservativa.

Demostración:

Nótese si $P(t)$ es una geodésica de M , entonces $W(P'(t)) = \frac{1}{2} \langle P'(t), P'(t) \rangle$ es constante.

Todos los demás teoremas de conservación pueden obtenerse a partir del siguiente resultado válido en una variedad Riemanniana M cualquiera:

TEOREMA (de Noheter): Ver [6] pag 252 Lema 26.

Sea $\Phi_s, s \in (-\delta, \delta)$ una familia uniparamétrica de isometrías de M , y $\Phi_0 = id_M$. Supóngase que para todo $P \in M$, $s \rightarrow \Phi_s(P)$ es una curva diferenciable. Entonces:

Si $P(t)$ es una geodésica, la función:

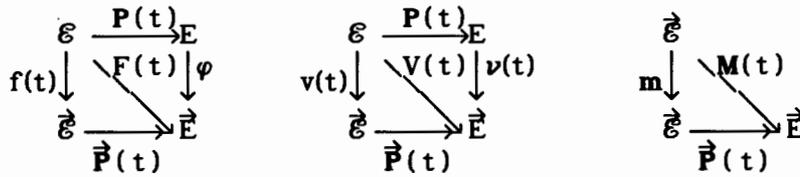
$$t \rightarrow \langle P'(t), \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\Phi_s(P(t))) \rangle$$

permanece constante. ■

Consideremos en particular una familia uniparamétrica dada por una aplicación diferenciable $(-\delta, \delta) \ni s \rightarrow \Phi_s \in SE(E)$, $\Phi_0 = Id$, y apliquemos el

teorema anterior a λ_{Φ_s} :

Expresaremos ahora el teorema de Noheter de forma más explícita con ayuda de los siguientes diagramas: $(P(t))$ es un movimiento inercial del sólido)



donde $\varphi = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\Phi_s) \in \mathcal{T}or(E)$, y $F(t) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \Phi_s \circ P(t) = \varphi \circ P(t) \in T_P M$.

En el segundo diagrama $V(t) = P'(t)$, y en el tercero, $M(t) = \vec{P}(t) \circ m$ es la aplicación momento cinético en el espacio en reposo para el instante t .

El teorema de Noheter afirma entonces que $\langle V(t), F(t) \rangle$ es constante.

Si $\vec{\Omega} \in \vec{E}$ es el vector rotación asociado a φ , y $\vec{\omega}(t)$ es el vector rotación asociado a $v(t)$, usando la fórmula (5.4.2) se verifica:

$$\langle V(t), F(t) \rangle = m V(t)(o) \cdot F(t)(o) + M(t)(\vec{\omega}(t)) \cdot \vec{\Omega} = \text{cte} \quad (5.7.1)$$

COROLARIO: Ley de conservación de la velocidad del centro de gravedad.

Supuesto $P(t)$ un movimiento inercial del sólido, entonces la velocidad $P'(t)(o)$ del centro de gravedad permanece constante.

Demostración:

Manteniendo las notaciones anteriores, tomemos $u \in \vec{E}$ un vector arbitrario, y sea $\Phi_s: E \ni x \rightarrow x + su \in E$, entonces $\varphi = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\Phi_s): E \rightarrow \vec{E}$ es el tursor constante $\varphi: E \ni x \rightarrow u \in \vec{E}$, cuyo vector rotación asociado es $\vec{\Omega} = 0$. Por (5.7.1) queda:

$$m V(t)(o) \cdot F(t)(o) = m V(t)(o) \cdot \varphi(P(t)(o)) = m V(t)(o) \cdot u = \text{cte}$$

Como $u \in E$ es arbitrario se concluye que $P'(t)(o) = V(t)(o)$ es constante. ■

COROLARIO: Ley de conservación del momento cinético.

En un movimiento inercial $P(t)$ el momento cinético respecto al centro de gravedad en el espacio de reposo, permanece constante.

Demostración:

Por el resultado anterior, $V(t)(o) = u \in \vec{E}$ es constante. En consecuencia el centro de gravedad describe una trayectoria en E de la forma:

$$P(t)(o) = e_0 + tu, \text{ con } e_0 = P(0)(o) \in E \quad (5.7.2)$$

Fijemos un vector $\vec{\Omega} \neq 0$ arbitrario de \vec{E} y sea Ω_0 el eje de E que pasando por e_0 tiene la dirección de $\vec{\Omega}$. Tomando $\varepsilon = (e_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un SR en E tal que $\vec{e}_1 = \frac{\vec{\Omega}}{|\vec{\Omega}|}$ tomemos Φ_s de forma que:

$$(\Phi_s)_\varepsilon = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cos|\vec{\Omega}|s & -\text{sen}|\vec{\Omega}|s \\ 0 & 0 & \text{sen}|\vec{\Omega}|s & \cos|\vec{\Omega}|s \end{array} \right). \text{ Si } \varphi = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\Phi_s) \text{ es } \varphi_\varepsilon = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -|\vec{\Omega}| \\ 0 & 0 & |\vec{\Omega}| & 0 \end{array} \right)$$

con lo que $\varphi: E \rightarrow \vec{E}$ es un torsor de vector de rotación $\vec{\Omega}$ que verifica $\varphi(e_0) = 0$.

Manteniendo las notaciones previas por 5.7.1 se tiene:

$$m \text{ u.F(t)(o)} + M(t)(\vec{\omega}(t)) \cdot \vec{\Omega} = \text{cte}$$

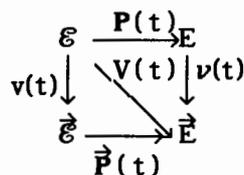
Usando ahora (5.7.2) analicemos el primer sumando:

$$u.F(t)(o) = u.\varphi(P(t)o) = u.\varphi(e_0 + tu) = u.(\varphi(e_0) + t\vec{\Omega} \times u) = t[u.(\vec{\Omega} \times u)] = 0$$

Queda entonces $M(t)(\vec{\omega}(t)) \cdot \vec{\Omega} = \text{cte}$, y como $\vec{\Omega}$ es un vector arbitrario, necesariamente $M(t)(\vec{\omega}(t))$ es constante. ■

5.8 Ecuaciones de Euler.

Sea $P(t)$ un movimiento inercial del sólido. Considere el diagrama:



sea $\vec{\omega}(t)$ el vector rotación asociado a $v(t)$, $m(t) = m(\vec{\omega}(t))$ y $M(t) = \vec{P}(t)(m(t))$.

Por la ley de conservación del momento cinético se tiene: $M'(t) = 0$. Así:

$$0 = (\vec{P}(t)m(t))' = \vec{P}'(t)m(t) + \vec{P}(t)m'(t) = \vec{v}(t)(m(t)) + \vec{P}(t)m'(t)$$

Aplicando a los dos miembros la isometría $\vec{P}^{-1}(t)$ queda:

$$0 = \vec{v}(t)(m(t)) + m'(t) = \vec{\omega}(t) \times m(t) + m'(t)$$

y se tiene así el siguiente resultado:

TEOREMA

Si $P(t)$ es movimiento inercial, y $\vec{\omega}(t)$ es el vector de rotación de $v(t) = P'(t) \circ P(t)^{-1}$, entonces se verifica la identidad:

$$\frac{dm(\vec{\omega}(t))}{dt} = m(\vec{\omega}(t)) \times \vec{\omega}(t) \text{ o más brevemente: } m' = m \times \vec{\omega}$$

COROLARIO: Ecuaciones de Euler.

En las hipótesis anteriores, fijado en ε un SR principal $e = (o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, y siendo $v(t) = \vec{P}^{-1}(t) \circ P'(t)$, entonces para $\omega_i = \omega_i(t) \dots$ etc la matriz:

$$v(t)_e = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline u_1 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ u_2 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ u_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline u & \omega \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} v(t)(o) = u = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k} \\ \vec{\omega}(t) = \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k} \end{array} \right.$$

satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \quad I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \quad I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \quad (5.8.1)$$

$$\frac{du_1}{dt} = u_2\omega_3 - u_3\omega_2 \quad \frac{du_2}{dt} = u_3\omega_1 - u_1\omega_3 \quad \frac{du_3}{dt} = u_1\omega_2 - u_2\omega_1 \quad (5.8.2)$$

Demostracion:

La base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ es una base de autovectores de $\mathbf{m} = \tilde{\mathbf{J}}$ con autovalores respectivos los momentos principales de inercia I_1, I_2, I_3 . Así:

$$\mathbf{m}(\vec{\omega}) = (I_1\omega_1)\vec{i} + (I_2\omega_2)\vec{j} + (I_3\omega_3)\vec{k}$$

El primer grupo de ecuaciones se obtiene como consecuencia de la igualdad $\mathbf{m}' = \mathbf{m} \times \vec{\omega}$.

El segundo grupo de ecuaciones se obtiene derivando los dos miembros de:

$$\vec{P}(t)u(t) = V(t)(o)$$

Por el teorema de conservación de la velocidad del centro de masas, la derivada del segundo miembro es idénticamente nula, y la del primero:

$$0 = (\vec{P}u)' = \vec{V}(u) + \vec{P}u'$$

Aplicando a los dos miembros \vec{P}^{-1} queda:

$$0 = \vec{V}(u) + u' = \vec{\omega} \times u + u'$$

$$u' = u \times \vec{\omega}$$

que equivale a las ecuaciones referidas. ■

OBSERVACION:

Nótese que pueden resolverse primero las ecuaciones (5.8.1) y con los valores $\omega_i(t)$ obtenidos, se resuelven las (5.8.2).

En particular si $I_1 = I_2 = I_3 = I$, entonces las ω_i son funciones constantes, y las ecuaciones (5.8.2) son lineales. El movimiento obtenido es de tipo helicoidal tal como se adelantaba en 5.6.

APENDICE

TEORIA DE TORSORES

En lo que sigue, E es un espacio afín tridimensional euclídeo orientado con dirección \vec{E} . El producto $u.v$, representará el producto escalar de los vectores $u, v \in \vec{E}$

DEFINICION 1: Torsores

Un torsor en E, es una aplicación afín $V: E \rightarrow \vec{E}$ tal que su aplicación lineal asociada $\vec{V}: \vec{E} \rightarrow \vec{E}$ es hemisimétrica, es decir:

$$\vec{V}(u).v + u.\vec{V}(v) = 0$$

PROPOSICION 2: Algebra de Lie de los torsores.

El conjunto $\mathcal{T}(E)$ de todos los torsores de E tiene estructura natural de álgebra de Lie.

Demostración:

La suma de torsores, y el producto de un escalar por un torsor, se definen de forma natural.

Si V, W son torsores, entonces se prueba que:

$$[V, W] = \vec{V} \circ W - \vec{W} \circ V$$

es un torsor, y define un corchete de Lie. ■

PROPOSICION 3: Vector $\vec{\omega}$ asociado a un torsor.

Si $V \in \mathcal{T}(E)$, existe un único vector $\vec{\omega} \in \vec{E}$ tal que se verifica:

$$V(p) = V(o) + \vec{\omega} \times \vec{op}$$

para todo $o, p \in E$.

Demostración:

Fijamos $\vec{e} = (e_1^{\rightarrow}, e_2^{\rightarrow}, e_3^{\rightarrow})$ un SR en \vec{E} . Se tiene:

$$\vec{V}(\vec{e}_1) = (\vec{V}(\vec{e}_1).e_1^{\rightarrow})e_1^{\rightarrow} + (\vec{V}(\vec{e}_1).e_2^{\rightarrow})e_2^{\rightarrow} + (\vec{V}(\vec{e}_1).e_3^{\rightarrow})e_3^{\rightarrow}$$

Por tanto, la matriz de \vec{V} respecto a \vec{e} será de la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomando $\vec{\omega} = \omega_1 e_1^{\rightarrow} + \omega_2 e_2^{\rightarrow} + \omega_3 e_3^{\rightarrow}$ se comprueba mediante un simple cálculo que si

$u = u_1 e_1^{\rightarrow} + u_2 e_2^{\rightarrow} + u_3 e_3^{\rightarrow}$ se tiene la identidad:

$$\vec{V}(u) = (e_1^{\rightarrow}, e_2^{\rightarrow}, e_3^{\rightarrow}) \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \vec{\omega} \times u$$

Evidentemente el vector $\vec{\omega}$ es único verificando tal propiedad, y se tiene para $o, p \in E$: $V(p) = V(o) + \vec{V}(\vec{op}) = V(o) + \vec{\omega} \times \vec{op}$. ■

PROPOSICION 5: Eje central Ω y módulo de deslizamiento λ .

Dado un torsor $V \in \mathcal{T}or(E)$ con vector $\vec{\omega} \neq 0$, entonces el conjunto Ω de puntos $a \in E$ tales que $V(a)$ es proporcional a $\vec{\omega}$ constituye una recta afín de E con dirección $\langle \vec{\omega} \rangle$ que se denomina eje central del torsor.

Por otra parte, existe un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in \Omega$ se tiene:

$$V(a) = \alpha \vec{\omega}$$

y la expresión de V , cuando se toma $a \in \Omega$ como punto de referencia es:

$$V(p) = \alpha \vec{\omega} + \vec{\omega} \times \vec{ap}$$

Se denomina a $\lambda = \alpha |\vec{\omega}|$ módulo de deslizamiento.

Demostración:

Si $\Omega \neq \emptyset$, veamos que existe un $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $V(a) = \alpha \vec{\omega}$ para todo $a \in \Omega$. En efecto, si $a, b \in \Omega$ y $V(a) = \alpha \vec{\omega}$, $V(b) = \beta \vec{\omega}$, entonces $\vec{V}(\vec{ab}) = (\beta - \alpha) \vec{\omega} = \vec{\omega} \times \vec{ab}$. Así $\alpha = \beta$.

Por otra parte, (si $\Omega \neq \emptyset$) esto prueba que Ω es necesariamente una recta afín con dirección $\langle \vec{\omega} \rangle$, ya que si $a, b \in \Omega$:

$$\vec{V}(\vec{ab}) = V(b) - V(a) = \alpha \vec{\omega} - \alpha \vec{\omega} = 0 = \vec{\omega} \times \vec{ab}$$

Luego \vec{ab} es proporcional a $\vec{\omega}$. Recíprocamente, si $a \in \Omega$, $\mu \in \mathbb{R}$ entonces $a + \mu \vec{\omega} \in \Omega$.

Probemos finalmente que $\Omega \neq \emptyset$:

Fijado un punto $o \in E$ de referencia, buscamos un punto $a \in E$ tal que $V(a) = V(o) + \vec{\omega} \times \vec{oa} = \alpha \vec{\omega}$ para algún valor de $\alpha \in \mathbb{R}$, es decir,

$$\vec{oa} \times \vec{\omega} = V(o) - \alpha \vec{\omega}$$

Usando la fórmula $(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$ queda:

$$(\vec{\omega} \times V(o)) \times \vec{\omega} = |\vec{\omega}|^2 V(o) - (\vec{\omega} \cdot V(o)) \vec{\omega}$$

que puede escribirse en la forma:

$$\left(\frac{1}{|\omega|^2} (\vec{\omega} \times V(o)) \right) \times \vec{\omega} = V(o) - \left(\frac{\vec{\omega} \cdot V(o)}{|\omega|^2} \right) \vec{\omega}$$

De donde se deduce: $\vec{oa} = \frac{1}{|\omega|^2} (\vec{\omega} \times V(o))$ y $\alpha = \frac{\vec{\omega} \cdot V(o)}{|\omega|^2}$. ■

Dado un torsor $V \in \mathcal{T}or(E)$ y $\varepsilon = (e_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un SR en E , llamamos

representación matricial de V respecto a ε a la matriz:

$$V_{\varepsilon} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline u_1 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ u_2 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ u_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} V(e_0) = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3 \\ \vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3 \end{array}$$

Las ecuaciones de V en las coordenadas (x_i) inducidas por ε serán:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline u_1 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ u_2 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ u_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

COROLARIO 6: Expresión matricial reducida.

Dado un torsor $V \in \mathcal{T}or(E)$, existe un SR $\varepsilon = (e_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ en E de forma que la representación matricial V_{ε} de V respecto a ε es:

$$V_{\varepsilon} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1 \\ 0 & 0 & \omega_1 & 0 \end{array} \right)$$

Demostración:

Tómese $e_0 \in \Omega$ eje central \vec{e}_1 unitario en la dirección de $\vec{\omega}$. ■

PROPOSICION 7:

Supongase \mathcal{E} otro espacio afin euclideo orientado, y $\Phi: \mathcal{E} \rightarrow E$ una isometría. Si V es un torsor de E con vector $\vec{\omega}$, parámetro λ , y eje central Ω , entonces $\Phi^{-1} \circ V \circ \Phi$ es un torsor en \mathcal{E} con vector $\Phi^{-1}(\vec{\omega})$ eje $\Phi^{-1}(\Omega)$ y parámetro λ .

BIBLIOGRAFIA

- [1] ARNOLD, V.I. *Mathematical methods of classical mechanics.*
Springer-Verlag, New York (1978).
 - [2] ANNEQUIN & BOUTIGNY *Curso de ciencias físicas. Mecánica 2.*
Reverté (1978).
 - [3] CURTIS MILLER *Differenttial manifolds and theoretical physic*
Academic Press Inc. (1985)
 - [4] LAFUENTE, J. *Geometrías lineales y grupos de transformaciones.*
Cuadernos de la UNED 040.2 (1989).
 - [5] MILNOR, J. *Morse Theory.*
Annals of Math. Studies Princenton University Press. (1969)
 - [6] O'NEIL, B. *Semi-Riemannian Geometry whit applications to relativity.*
Academic Press Inc., New York (1983).
 - [7] PATERA & WINTERNITZ *Continuous subgroups of the fundamental groups of
physics. I. General method and the Poincaré group.*
Journal of Math. Phys. Vol 17 N.6 (1976).
 - [8] PORTEOUS, R. *Topological Geometry.*
Van Nostrand Reinhold Company London (1969)
-
-