

UN CUENTO PARA NIÑAS DESORIENTADAS

Por Javier Lafuente

Erase una vez un mundo¹ M formado por un conjunto de *pueblos*², en donde vivían gentes de dos tipos:

- La *clase dirigente*³, $\Omega^m(M)$.
- Los ciudadanos de a pie (o de bici), denominados *bases*⁴ de M , que viven en los distintos pueblos $p \in M$.

Dos bases e , y \bar{e} , del mismo pueblo $p \in M$, están relacionadas por una matriz cuadrada no singular P de forma que $\bar{e} = eP$. Se dice que e , y \bar{e} son *amigas* si $\det(P) > 0$. Caso contrario (i.e. $\det(P) < 0$) se dicen *enemigas*.

En la clase dirigente se distinguen a los *líderes* $\Omega_*^m(M)$ ⁵.

Si $\Omega_*^m(M) \neq \emptyset$ se dice que M es orientable

Supuesto M orientable, los líderes se distribuyen en dos *orientaciones*⁶ (o facciones políticas) *izquierdas* I y *derechas* D , de forma que cada líder $\omega \in \Omega_*^m(M)$ de una determinada orientación, tiene su opuesto $-\omega \in \Omega_*^m(M)$ que está en la otra. Por ejemplo $Rajoy = -Rubalcaba$.

Se dice que una base e es de la misma orientación que el líder $\omega \in \Omega_*^m(M)$ si $\omega(e) > 0$. Si por ejemplo $\omega \in I$ diremos que e tiene la orientación I . Naturalmente si $\bar{\omega} \in I$ entonces también $\bar{\omega}(e) > 0$, y por tanto la frase *e tiene la orientación I* es consistente pues no depende del líder en I elegido.

Obsérvese que dos bases e , y \bar{e} , del mismo pueblo $p \in M$ son amigas si y solo si tienen la misma orientación.⁷

Orientar M , significa *elegir* como *bueno* (+) alguna de las dos facciones políticas I o D es decir, elegir $+ \in \{I, D\}$ la otra facción (−) sería entonces calificada como *mala*.

En $(M, +)$ podemos distinguir bases e buenas (con la orientación +) y las malas (con la orientación −). La situación es la siguiente:

Todas las bases buenas del mismo pueblo son amigas. Y las malas también son amigas. Pero no hay posible amistad entre una mala y una buena.

¹ M es variedad diferenciable conexa de dimensión m .

²Son los puntos p de M .

³ $\Omega^m(M)$ son las m -formas en M

⁴Son las bases $e = (e_1, \dots, e_m)$ en cada $T_p M$ para $p \in M$

⁵Los líderes son las formas de volumen. es decir $\Omega_*^m(M) = \{\omega \in \Omega^m(M) : \omega(p) \neq 0 \forall p \in M\}$

⁶ $\omega, \bar{\omega} = f\omega \in \Omega_*^m(M)$ están en la misma orientación si $f > 0$. Esto da lugar a una relación de equivalencia que induce una partición de $\Omega_*^m(M)$ en dos subconjuntos I y D .

⁷La clave está en que $\omega(eP) = \omega(e) \det P$

...Y AHORA HABLANDO MAS EN SERIO...

Dos cartas $(\mathcal{U}, \varphi = (u_1, \dots, u_m))$, $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi} = (\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_m))$ de M se dicen *amigas* si para cada $p \in \mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}} \neq \emptyset$, las bases $\left((\partial/\partial u_i)_p \right)$ y $\left((\partial/\partial \overline{u}_i)_p \right)$ son amigas. Como

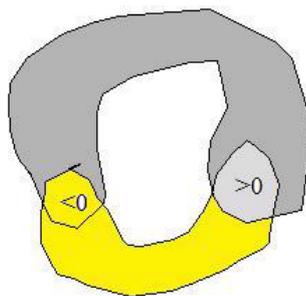
$$(\partial/\partial u_1, \dots, \partial/\partial u_m) = (\partial/\partial \overline{u}_1, \dots, \partial/\partial \overline{u}_m) \left(\frac{\partial(\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_m)}{\partial(u_1, \dots, u_m)} \right)$$

se concluye que ambas son amigas si y solo si

$$\det \frac{\partial(\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_m)}{\partial(u_1, \dots, u_m)} > 0 \quad \forall u \in \varphi(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}})$$

De forma análoga se define cuándo las dos cartas son *enemigas*.

Observese que aunque sea $\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}} \neq \emptyset$ las cartas correspondientes pueden no ser amigas ni ser enemigas.



Supóngase ahora $(M, +)$ orientada. Se dice que $(\mathcal{U}, \varphi = (u_1, \dots, u_m))$ es $+$ (es decir, buena) si lo es $\left((\partial/\partial u_1)_p, \dots, (\partial/\partial u_m)_p \right)$ en cada $p \in \mathcal{U}$. Análogamente se define cuándo (\mathcal{U}, φ) es $-$ (o mala).

Podría suceder que (\mathcal{U}, φ) no fuera ni buena ni mala. Pero si \mathcal{U} es conexo entonces (\mathcal{U}, φ) está obligada a ser *buena* o *mala*, ya que si $\omega \in +$ la función $\omega(\partial/\partial u_1, \dots, \partial/\partial u_m)$ toma valores en $\mathbb{R} - \{0\}$, y por tanto es siempre positiva (buena) o siempre negativa (mala).

Supóngase (\mathcal{U}, φ) y $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$ con $\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}} \neq \emptyset$. Si ambas son $+$ o ambas son $-$, entonces son amigas (¿porqué?). Si una es $+$ y otra es $-$ entonces son enemigas. Hemos probado por tanto que:

Si existen dos cartas (\mathcal{U}, φ) y $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$ con $\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}} \neq \emptyset$ y dominios conexos que no sean amigas ni sean enemigas entonces M no puede ser orientable.

...Yo personalmente prefiero vivir en sitios no orientables, sobre todo desde que conocí la historia de Cristobalina...

PARA TERMINAR... LA HISTORIA DE CRISTOBALINA.
(Un cuento para niñas desorientadas)

En un pueblecito llamado Palos, vivía una base llamada Cristobalina.

Cristobalina estaba harta del ambiente tan cerrado que se respiraba en su pueblo. En el fondo le gustaría ser amiga de todos, pero sabía que allí había dos bandos irreconciliables, que ni siquiera tenían amigos comunes.

Además en el mismo Palos estaba Cristobalona⁸, una base con la que nunca le habían permitido estar (pues tenía otra orientación), pero que Cristobalina sentía como su alma gemela.

Un día Cristobalina decidió emprender una excursión desde su pueblo natal para ver que pasaba en otros lugares cercanos. Cuando las demás la veían pasar decían ¡anda por ahí va una base móvil!⁹.

Cual fue su disgusto cuando descubrió que en los pueblos vecinos ocurría lo mismo que en el suyo....., pero ella decía: ¡Yo soy Cristobalina! y quiero ser amiga de todos. Eso es imposible -le contestaban- para eso tendrías que pasar por ser una degenerada¹⁰, y entonces dejarías de ser una base como Dios manda.

Cuando Cristobalina regresó a Palos se sentía muy desgraciada. Le costaba mucho admitir que su mundo se comportara de esa manera tan radical. De sobra sabía que aunque ella fuera base móvil, jamás podría dejar de ser una base, y esto le impediría para siempre poder estar con las *otras*.

Después de darle muchas vueltas, a Cristobalina se le ocurrió que quizás esta situación solo se daba en los pueblos próximos a Palos, y que las cosas podrían ser diferentes más allá. Por eso decidió emprender un largo viaje para comprobarlo caminando alejándose de Palos lo más posible.

Pero en todos los pueblos que visitaba seguía habiendo dos bandos enemigos, y solo le permitían estar en uno de ellos.

Visitó muchísimos lugares, y anduvo perdida unos cuantos meses. Cuando ya estaba al borde de la desesperación observó en la lejanía... ¡¡¡Su propio pueblo de Palos!!!. -Que raro... -se dijo Cristobalina- si siempre he caminado alejándome de él ¿cómo es posible que ahora esté delante de mí?

Corrió como loca hacia allí, y cual fue su sorpresa cuando al entrar en su pueblo descubrió que *estaba* en el mismísimo bando de Cristobalona, su alma gemela. Pero es que además ella (Cristobalina) era ahora idéntica a ...¡la mismísima Cristobalona!

Sus nuevas amigas le preguntaron entonces cómo se las había arreglado para cambiarse de chaqueta y Cristobalina les explicó, que lo primero que había que aprender es a ser una base móvil. ¡Hay que moverse!. Y empezó poniendo una

⁸Seguramente era como Cristobalina solo que con dos vectores permutados.

⁹En efecto, Cristobalina era una base móvil, es decir una base $e(t)$, en $T_{\gamma(t)}M$ que se mueve diferenciablemente respecto del tiempo t , $t_0 \leq t \leq t_1$. La curva γ describe el itinerario de la excursión de Cristobalina.

¹⁰Se refieren a que debería haber un instante t en donde $e(t)$ sea linealmente dependiente.

academia de baile para que hicieran prácticas. Después cuando ya todas sabían moverse bien, las animó a hacer pequeñas excursiones. Por último una vez que las consideró ya preparadas les dijo :

Si quereis confraternizar con las otras bases tendreis que cambiar vuestra orientación, sin dejar de ser vosotras mismas. Para ello tendreis que emprender un largo viaje, siempre adelante, sin vuelta atrás, hasta que os volvais a encontrar en el pueblo de Palos.

Pronto las ideas de Cristobalina se extendieron a todas partes. Y fue así como gracias a ella, a su inconformismo, a su espíritu viajero, pero sobre todo gracias a la *no orientabilidad*¹¹ de M , tuvieron todas las bases la posibilidad de reconciliarse. Y aprendieron -viajando- que lo bueno y lo malo son solo cuestiones relativas...

Y colorín colorado¹²....

¹¹En efecto, si $e(t)$ $t_0 \leq t \leq t_1$ es Cristobalina en el instante t visitando el pueblo $\gamma(t)$, entonces $\gamma(t_0) = \gamma(t_1) = Palos$. Si M fuera orientable, tendría algún *lider* ω que impone su ley. Si Cristobalina (por ejemplo) es *buena* para el lider ω al principio del viaje (es decir $\omega(e(t_0)) > 0$) lo será también al final ($\omega(e(t_1)) > 0$) ya que $\omega(e(t))$ es una función continua en t y nunca nula. Así Cristobalina nunca podría haberse encontrado con Cristobalona.

¹²¿No os habeis dado cuenta de que nuestro mundo no es tan distinto del de Cristobalina?
... Los *otros* podrían estar al otro lado del espejo...

Imágenes del viaje de Cristobalina a lo largo de una
banda de Möbius y de su feliz encuentro con Cristobalona.
Proporcionadas por David Gigoso.

