Ejercicios de Álgebra Lineal

Las coordenadas de puntos y vectores las escribiremos en columnas SIEMPRE.

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\left.\begin{array}{rcr} 3x-2y &=& 6 \\ 9x+4y &=& 108 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{rcr} x+y-2z &=& 9 \\ 2x-y+4z &=& 4 \\ 2x-y+6z &=& -1 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{rcr} x+y+z &=& 2 \\ 2x+3y+5z &=& 11 \\ x-5y+6z &=& 29 \end{array}\right\}$

2. i) Un excursionista comprueba, tras recorrer 7 km. en la primera hora, que manteniendo ese ritmo llegaría con una hora de retraso al tren que pretende tomar. Acelera el paso, y durante el resto del camino recorre 10 km. cada hora, por lo que llega con media hora de adelanto a la estación. ¿Qué distancia recorrió? ¿Cuánto tiempo estuvo andando?

   ii) Un comerciante de telas vende cada metro un 30'2% más caro que el precio al que lo compra. Desea aumentar sus ganancias sin aumentar los precios, para lo cual decide emplear un *metro falso* al medir la tela delante de sus clientes. ¿Cuánto ha de medir este metro falso para que sus ganancias pasen a ser del 40%?

3. Hallar la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ de la parábola que pasa por los puntos $P_1 = (-1, -10)^t$, $P_2 = (1, -6)^t$ y $P_3 = (2, -13)^t$. Hallar la ecuación $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ de la circunferencia que pasa por los puntos P_1, P_2, P_3.

4. Discutir los siguientes sistemas en función del parámetro m:

a) $\left.\begin{array}{rcr} x+2y+z &=& 1 \\ -x+2z &=& 3 \\ 3x+2y+mz &=& 1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{rcc} x+my+z &=& 1 \\ mx+y+(m-1)z &=& m \\ x+y+z &=& m+1 \end{array}\right\}$

5. Resolver, si es posible, los siguientes sistemas lineales:

a) $\left.\begin{array}{rcr} -x+z &=& -2 \\ 2x-y+z &=& 1 \\ -3x+2y-2z &=& -1 \\ x-2y+3z &=& -2 \\ 5x+2y+6z &=& -1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{rcr} x_1+2x_3-2x_4 &=& 1 \\ -x_1+x_2+x_4 &=& -2 \\ x_2+2x_3-x_4 &=& 1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{rcr} x+2y+2z-s+3t &=& 0 \\ x+2y+3z+s+t &=& 0 \\ 3x+6y+8z+s+5t &=& 0 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{rcr} 3x_2-6x_3-4x_4-3x_5 &=& -5 \\ -x_1+3x_2-10x_3-4x_4-4x_5 &=& -2 \\ 2x_1-6x_2+20x_3+2x_4+8x_5 &=& -8 \end{array}\right\}$

6. Resolver la siguiente ecuación matricial:
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

7. Hallar las matrices A y B que son soluciones del siguiente sistema:
$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}; \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Obtener las matrices A y B que verifiquen el sistema:
$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A - 3B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. Hierón, rey de Siracusa, había dado a un platero 7465 gramos de oro para hacer una corona que quería ofrecer a Júpiter. Para conocer si el orfebre había reemplazado parte del oro por plata, le pidió a Arquímedes que lo averiguara sin dañar la corona. Arquímedes sumergió la corona en agua, la cual desalojó 467 g. de líquido. Se sabe que el oro desaloja agua por valor de 52 milésimas de su peso, mientras que la plata lo hace por valor de 95 milésimas. Hallar los gramos de oro y plata de la corona real.

10. Bajo ciertas condiciones se puede mezclar tolueno con ácido nítrico para obtener trinitrotolueno (también conocido como TNT) y agua. Ajustar la correspondiente reacción química: $x\,C_7H_8 + y\,HNO_3 \rightarrow z\,C_7H_5O_6N_3 + w\,H_2O$. ¿Qué ocurre si reemplazamos el agua por agua oxigenada H_2O_2? ¿Cómo se interpreta ese resultado?

11. ¿Tiene solución el sistema $\left.\begin{array}{rcl} 2\sin\alpha - \cos\beta + 3\tan\gamma & = & 3 \\ 4\sin\alpha + 2\cos\beta - 2\tan\gamma & = & 10 \\ 6\sin\alpha - 3\cos\beta + \tan\gamma & = & 9 \end{array}\right\}$?

12. Resolver, si es posible, los siguientes sistemas lineales:

a) $\left.\begin{array}{rcl} x + y & = & 1 \\ x - y & = & 199 \end{array}\right\}$ a') $\left.\begin{array}{rcl} x + y & = & 1 \\ \frac{101}{99}x - y & = & 199 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{rcl} x + y & = & 1 \\ 1'01x + y & = & 2 \end{array}\right\}$ b') $\left.\begin{array}{rcl} x + y & = & 1 \\ 1'005x + y & = & 2 \end{array}\right\}$ b") $\left.\begin{array}{rcl} x + y & = & 1 \\ 1'01x + 1'01y & = & 2 \end{array}\right\}$

13. Determinar el valor de a en el siguiente sistema para que: a) tenga una única solución, b) tenga más de una solución y c) no tenga solución.
$$\left.\begin{array}{rcl} x + y - z & = & 1 \\ 2x + 3y + az & = & 3 \\ x + ay + 3z & = & 2 \end{array}\right\}$$

14. Hallar la inversa de las siguientes matrices planteando un sistema de ecuaciones y resolviéndolo por el método de Gauss:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

15. a) Encontrar todas las matrices escalonadas reducidas por filas en $M_{1\times 3}(\mathbb{K})$, $M_{2\times 3}(\mathbb{K})$, $M_{3\times 3}(\mathbb{K})$, $M_{3\times 1}(\mathbb{K})$ y $M_{3\times 2}(\mathbb{K})$.

    b) En los mismos conjuntos del apartado anterior encontrar todas las matrices escalonadas reducidas por columnas.

    c) Encontrar todas las matrices escalonadas por filas en $M_{3\times 3}(\mathbb{K})$ y decir en cada caso cuál es su forma escalonada reducida.

16. Demostrar que si dos matrices escalonadas por filas son equivalentes (por filas) entonces tienen el mismo número de pivotes.

17. Comprobar que $(M_{m\times n}(\mathbb{K}), +)$ es un grupo abeliano, es decir, que se cumplen las propiedades:

    1. Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$, $\forall A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$.
    2. Conmutativa: $A + B = B + A$, $\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$.
    3. Elemento neutro: $\exists 0 \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A + 0 = A = 0 + A$, $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$.
    4. Elemento simétrico (u opuesto): $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\exists(-A) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A + (-A) = 0 = (-A) + A$.

18. a) Decir cuáles de las siguientes matrices son equivalentes por filas hallando su forma escalonada reducida por filas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & -4 \\ -1 & 3 & -10 & -4 \\ 2 & -6 & 20 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & -4 \\ 1 & -3 & 10 & 4 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -16 & -8 \\ 1 & -3 & 10 & -2 \\ -1 & 3 & -10 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

    b) Encontrar una matriz E_A producto de matrices elementales de forma que $H_A = E_A A$. Hacer lo mismo para las restantes matrices.

    c) Encontrar la forma escalonada reducida por columnas de las anteriores matrices y decir cuáles son equivalentes por columnas.

    d) Encontrar una matriz E'_A producto de matrices elementales de forma que $H_A^c = AE'_A$, donde H_A^c representa la forma escalonada reducida por columnas de A. Hacer lo mismo para las restantes matrices.

    e) Encontrar la forma escalonada reducida por filas de las traspuestas de las anteriores matrices.

f) Hallar, si existen, las soluciones de los sistemas cuyas matrices ampliadas son las anteriores.

19. Si $H \in M_n(\mathbb{K})$, se define la *traza* de H como $\operatorname{tr}(H) = \sum_{i=1}^{n} h_{ii}$. Sean $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, demostrar que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

20. Una matriz A se dice *idempotente* si verifica que $A^2 = A$. Probar que si A idempotente, entonces también lo es la matriz $B = I - A$ y además $AB = 0 = BA$.