Ejercicios de Álgebra Lineal

41. Escribir $E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

42. En $\mathbb{K}^3$ se consideran los subespacios $E_1 = L((1,2,1)^t, (1,3,2)^t)$ y $E_2 = L((1,1,0)^t, (3,8,5)^t)$. Comprobar que $E_1 = E_2$.

43. Consideremos un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, \dots, x_n$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$:
$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ \cdots & & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right\}$$
Mostrar que el conjunto W de soluciones es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$.

44. Sean u, v y w tres vectores linealmente independientes, en un espacio vectorial sobre un cuerpo de característica distinta de dos. Mostrar que $u+v, u-v$ y $u-2v+w$ son linealmente independientes.

45. Supongamos que en el $\mathbb{K}$-espacio vectorial V el sistema $\{v_1, \dots, v_n\}$ es libre pero que $\{v_1, \dots, v_n, v\}$ es ligado. Demostrar que v es combinación lineal de $v_1, \dots, v_n$.

46. Sean $n \geq 3$ y u_1, u_2, u_3 y u_4 cuatro vectores distintos de $\mathbb{K}^n$ tales que los sistemas
$$\{u_1, u_2, u_3\},\ \{u_1, u_2, u_4\},\ \{u_1, u_3, u_4\} \text{ y } \{u_2, u_3, u_4\}$$
son libres. ¿Se puede asegurar que también $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es libre? Demostrarlo si es cierto y mostrar un contraejemplo en caso contrario.

47. Determinar los valores de a y b para que el vector $(1,4,a,b)^t$ sea combinación lineal de los vectores $(1,2,-1,2)^t$ y $(0,1,2,1)^t$.

48. Demostrar que para cada terna de escalares a, b y c los vectores $(1,a,b)^t$, $(0,1,c)^t$ y $(0,0,1)^t$ son linealmente independientes.

49. ¿Para qué valores de los escalares a y b son linealmente independientes los vectores
$$(1,1,0,a)^t, (3,-1,b,-1)^t \text{ y } (-3,5,a,-4)^t?$$

50. $L \subset \mathbb{K}^3$ está generado por $(1,1,-1)^t, (2,2,-2)^t, (1,3,2)^t, (4,6,-1)^t$, hallar una base del subespacio L. Hallar unas ecuaciones implícitas de L. Dibujar L.

51. Sean $H = \{(x, y, z, t)^t \in \mathbb{K}^4 \mid x+y = z+t = 0\}$ y $M = L((1, 1, 0, 0)^t, (1, 0, 1, 0)^t, (1, 0, 0, 1)^t)$ subespacios vectoriales de $\mathbb{K}^4$. Hallar una base y la dimensión de H, M, $H \cap M$ y $H + M$.

52. Estudiar si los vectores $(1, 0, -1, 2)^t$, $(2, 3, 1, 1)^t$, $(1, 3, 2, -1)^t$ y $(1, 1, 0, 1)^t$ de $\mathbb{K}^4$ son linealmente independientes. Extraer de ellos el mayor número posible que lo sean y construir una base de $\mathbb{K}^4$ que contenga a esos vectores elegidos.

53. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Probar que el conjunto $H = \{X \in M_2(\mathbb{K}) \mid XA = AX\}$ es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ y calcular su dimensión.

54. En $\mathbb{K}^4$ se consideran los subespacios vectoriales $U = \{(x, y, z, t)^t \in \mathbb{K}^4 | y + z + t = 0\}$ y $W = \{(x, y, z, t)^t \in \mathbb{K}^4 | x+y = z-2t = 0\}$. Hallar bases, dimensiones y ecuaciones implícitas y paramétricas de: U, W, $U \cap W$ y $U + W$.

55. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica distinta de 2. En $M_n(\mathbb{K})$, ¿es subespacio el conjunto $M_n^s(\mathbb{K})$ formado por las matrices simétricas de orden n? ¿Y el conjunto $M_n^a(\mathbb{K})$ formado por las matrices antisimétricas? Demostrar que
$$M_n(\mathbb{K}) = M_n^s(\mathbb{K}) \oplus M_n^a(\mathbb{K})$$
y calcular las dimensiones de los sumandos.

56. Sea $W = L(v_1, v_2, v_3, v_4)^t \subset \mathbb{K}[t]$, donde $v_1 = t^3 - 2t^2 + 4t + 1$, $v_2 = 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1$, $v_3 = t^3 + 6t - 5$ y $v_4 = 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5$. Hallar una base y la dimensión de W.

57. Hallar una base, la dimensión y unas ecuaciones implícitas del subespacio H cuyas ecuaciones paramétricas son:
$$H : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ y & = & \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 \\ z & = & 3\alpha_1 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 \\ t & = & -\alpha_1 + 5\alpha_2 + 4\alpha_3 + \alpha_4 \end{array} \right.$$
Ampliar la base de H a una base de $\mathbb{K}^4$.

58. Sean los subespacios vectoriales de $\mathbb{K}^4$:
$$U = L((1, 1, 0, -1)^t, (1, 2, 3, 0)^t, (2, 3, 3, -1)^t)$$
$$W = L((1, 2, 2, -2)^t, (2, 3, 2, -3)^t, (1, 3, 4, -3)^t)$$
Hallar las dimensiones de $U + W$ y $U \cap W$.

59. Para cada $a \in \mathbb{K}$ se considera el subespacio vectorial de $\mathbb{K}^3$ definido por
$$H_a = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{K}^3 \mid ax - y + z = 0\}.$$
Sea $u = (1, 1, 1)^t$. ¿Para qué valores de a se cumple la igualdad $\mathbb{K}^3 = H_a \oplus L(u)$?

60. En $\mathbb{K}^3$ se considera el subespacio vectorial S formado por los vectores cuya tercera componente es la suma de las dos primeras. Hallar una base $\mathcal{B}$ de S y una base de $\mathbb{K}^3$ que contenga a $\mathcal{B}$.