Ejercicios de Álgebra Lineal

81. Emplear el método de Gram-Schmidt para construir una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$, respecto del producto escalar usual, a partir de cada una de las siguientes bases:

    a) $\mathcal{B}_1 = (v_1 = (1,0,0,0)^t,\ v_2 = (1,1,0,0)^t,\ v_3 = (1,1,1,0)^t,\ v_4 = (1,1,1,1)^t)$.

    b) $\mathcal{B}_2 = (v_1 = (2,1,0,0)^t,\ v_2 = (-1,0,1,0)^t,\ v_3 = (1,-2,1,0)^t,\ v_4 = (0,0,0,1)^t)$

    c) $\mathcal{B}_3 = (v_1 = (1,-1,-1,-1)^t,\ v_2 = (1,1,0,0)^t,\ v_3 = (1,0,1,0)^t,\ v_4 = (1,0,0,1)^t)$

82. En el espacio vectorial $M_n(\mathbb{R})$ se define el producto escalar $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^t)$. Hallar la matriz de Gram respecto de la base de $M_3(\mathbb{R})$ formada por las matrices A_{ij} $(i,j = 1,2,3)$ cuyos elementos son todos 0 excepto el ij, que vale 1. Generalizar a $M_n(\mathbb{R})$.

83. a) Hallar la matriz de Gram del producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$ respecto de la base $\mathcal{B} = ((1,0,0)^t, (1,1,0)^t, (1,1,1)^t)$.

    b) Ídem respecto de la base $\mathcal{B}' = ((1,1,2)^t, (3,1,1)^t, (-2,-1,2)^t)$.

84. Si u y v son vectores de un espacio vectorial euclídeo tales que $\| u \| = \| v \|$, probar que los vectores $u+v$ y $u-v$ son ortogonales. Concluir que *las diagonales de un rombo son perpendiculares.* (Rombo es un paralelogramo con todos los lados de la misma longitud).

85. En $\mathbb{R}[x]_2$ se considera el producto escalar definido por $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$. Hallar la matriz de Gram este producto escalar respecto de la base estándar $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$.

    Comprobar que $p = x - 1$ y $q = 3x - 1$ son ortogonales.

    Hallar todos los polinomios de $\mathbb{R}[x]_2$ que son ortogonales a p.

86. Hallar una base ortogonal del subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido por la ecuación implícita $2x + 4y - z + 3t = 0$.

87. Descomponer el vector $(1,3,-1,4)^t$ en suma de dos vectores, uno perteneciente al subespacio generado por $(2,1,0,1)^t, (0,3,1,1)^t$ y el otro ortogonal a dicho subespacio.

88. Encontrar una base ortogonal, respecto del producto escalar usual, del subespacio

    $$H = \{(x,y,z,t)^t \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - 2t = 0,\ y + z = 0\}.$$

    Hallar su complemento ortogonal $H^\perp$. Obtener las proyecciones ortogonales sobre H y $H^\perp$ del vector $v = (1,1,1,1)^t$.

89. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, se considera $U = L((2,1,5,-1)^t, (-1,1,1,2)^t)$. Calcular una base de $U^\perp$.

90. En un espacio vectorial euclídeo de dimensión 3, el producto escalar tiene matriz de Gram $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ respecto de cierta base $\mathcal{B}$. Sea U el subespacio de V que respecto de la base $\mathcal{B}$ tiene ecuaciones implícitas $\{x - y = 0\,,\ x + z = 0\}$. Calcular $U^\perp$.

91. Comprobar que $u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w$, para todo $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Dar un ejemplo en el que $u \wedge (v \wedge w) \neq (u \wedge v) \wedge w$. El producto vectorial NO es asociativo.

92. Hallar la matriz de Gram respecto de la base canónica del producto escalar dado por

$$\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2.$$

¿Es $\mathcal{B}_c$ una base ortogonal respecto de este producto escalar? En caso negativo, hallar una base ortogonal a partir de $\mathcal{B}_c$.

93. Sean $v, w \in \mathbb{R}^3$, siendo $v \neq 0$.

a) Demostrar que existe un vector $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $w = u \wedge v$ si y sólo si $\langle v, w\rangle = 0$.

b) Suponiendo que $\langle v, w\rangle = 0$, encontrar todos los vectores $u \in \mathbb{R}^3$ que cumplen que $w = u \wedge v$.

94. Sean $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ y $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ bases, respectivamente, de los $\mathbb{K}$–espacios vectoriales V y V', y $f : V \to V'$ la aplicación lineal que cumple

$$f(v_1) = 2u_1 + u_2 - u_3;\ f(v_2) = u_1 - u_2 - 2u_3;\ f(v_3) = 2u_1 - 2u_2 + 4u_3;\ f(v_4) = u_1 - u_3$$

1. Si car$\mathbb{K} \neq 2, 3$, comprobar que $\mathcal{B}'' = (f(v_1), f(v_2), f(v_3))$ es una base de V'.

2. Hallar las matrices de f respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$, de f respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}''$, y la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}''$ a $\mathcal{B}'$. ¿Qué relación cumplen estas tres matrices?

95. a) Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfismo tal que $f(1,0,1,0)^t = (2,1,-1,0)^t$, $f(0,1,-1,0)^t = -(0,1,-1,0)^t$ y Ker$f = \{x + z = 0,\ x - y + t = 0\}$. Hallar la matriz de f respecto de la base canónica y escribir la expresión matricial de f.

b) Hallar una base y la dimensión de $\mathbb{R}^4/\text{Ker}f$ y describir las clases de equivalencia.

96. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por $y_1 = 3x_1 + 2x_2 + x_3$, $y_2 = -x_1 + 4x_2 - 2x_3$, $y_3 = 2x_1 + 6x_2 - x_3$. Se pide:

a) Calcular Ker$f$. b) Calcular una base de un subespacio W de $\mathbb{R}^3$ suplementario de Ker$f$, es decir, Ker$f \oplus W = \mathbb{R}^3$. c) Comprobar que la imagen por f de la base calculada en b) es una base de Imf.

97. a) Demostrar que $\mathcal{B} = (1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3)$ es una base de $\mathbb{R}[x]_3$.

    b) Hallar, respecto de $\mathcal{B}$, la matriz del endomorfismo f que a cada polinomio de $\mathbb{R}[x]_3$ le hace corresponder su derivada segunda.

    c) Hallar los subespacios Ker$f$ e Imf y su dimensión.

    d) Resolver, con y sin ayuda del cálculo integral, la ecuación $f(q) = 6x + 8$, donde $q \in \mathbb{R}[x]_3$.

98. Obtener una base de Imf y la matriz en la base canónica de un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que cumple:

    1. Ker$f = L(e_1 + e_2 - 2e_3)$.
    2. $f(e_1 + e_2) = e_2$.
    3. $e_1 - e_2 \in f^{-1}(2e_1)$. Hallar además el conjunto $f^{-1}(2e_1)$.

99. Hallar la matriz de cada una de las siguientes aplicaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ respecto de la base canónica: a) $f(x,y)^t = (2y, 3x - y)^t$; b) $f'(x,y)^t = (3x - 4y, x + 5y)^t$; c) hallar la matriz de f y f' respecto de la base $\mathcal{B} = ((1,3)^t, (2,5)^t)$.

100. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Un endomorfismo $f : V \to V$ se dice *proyector* (o *proyección*) si es idempotente, i.e., si $f^2 = f$ (donde f^2 significa $f \circ f$, que también se escribe ff). Si $U = \text{Ker}f$ y $W = \text{Im}f$, se dice que f es la *proyección sobre W en la dirección de U*.

     (a) Si f es un proyector $\Rightarrow V = \text{Ker}f \oplus \text{Im}f$.

     (b) f es un proyector y $g = id - f$, entonces g es un proyector.

     (c) Si f es un proyector, entonces Ker$f$ = Img e Imf = Ker$g$. Así pues, $g = id - f$ es la *proyección sobre U en la dirección de W*.

     (d) Si f y ϕ son proyectores, determinar condiciones necesarias y suficientes para que $f + \phi$ sea un proyector. En particular, si f es un proyector, ¿es $f + g$ un proyector?

     (e) Si V es un espacio vectorial euclídeo y U es un subespacio de V, entonces p_U, la proyección ortogonal sobre U, es un proyector.