Ejercicios de Álgebra Lineal

101. Sean $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^3$ y $g : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^4$ las aplicaciones lineales definidas por

$$f(x, y, z, t)^t = (x + y, x + 3y + 2z, x + y)^t \quad \text{y}$$

$$g(x, y, z)^t = (x + y + 2z, x + y + 2z, 2x + 2y + 4z, -3x - 3y - 6z)^t.$$

Sean $h_1 = fg$ y $h_2 = gf$.

a) Hallar las matrices de f, g, h_1 y h_2 respecto de las bases canónicas.

b) Hallar las matrices de f, g, h_1 y h_2 respecto de las bases $\mathcal{B} = ((3, 2, 5)^t, (2, 1, 3)^t, (1, 0, 2)^t)$ y $\mathcal{B}' = ((1, 0, 2, 1)^t, (0, -1, 2, 1)^t, (0, 0, 1, 1)^t, (0, 0, 0, -1)^t)$ de $\mathbb{K}^3$ y $\mathbb{K}^4$, respectivamente.

102. Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ la aplicación lineal que a cada polinomio le hace corresponder su derivada segunda. Hallar la matriz de f y calcular matricialmente la derivada segunda de $x^3 + 3x^2 + 7x - 6$.

103. Se considera la aplicación $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^3$ dada por

$$f(x, y, z, t)^t = (x - ay + 2z + 3t, -ax + 2y - 2t, y + 2z + at)^t$$

Hallar los valores de a para los que no es sobreyectiva y calcular unas ecuaciones implícitas de $\mathrm{Ker} f$ e $\mathrm{Im} f$ en tales casos.

104. a) Hallar el valor de α para que la aplicación $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^3$ dada por

$$f(x, y, z, t)^t = (x - y + 2z + \alpha t, x + z + 3t, 3x + \alpha y + 5z - t)^t$$

verifique que $\dim \mathrm{Ker} f \geq 2$.

b) Hallar unas ecuaciones implícitas de $\mathrm{Im} f$ para dicho α.

105. Sea $g : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ un endomorfismo cuyo núcleo es el subespacio $L((1, 0, -3)^t, (0, 0, 1)^t)$ y verifica $g(0, 1, 2)^t = (0, 1, 2)^t$. Justificar razonadamente que existe un único endomorfismo g que verifica las condiciones anteriores y obtener la matriz de g en la base canónica.

106. Sea f endomorfismo de un $\mathbb{K}$–espacio vectorial V de dimensión finita.

a) Demostrar que $\mathrm{tr}(M(f; \mathcal{B})) = \mathrm{tr}(M(f; \mathcal{B}'))$, siendo $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de V. El valor común de las trazas de las matrices de f respecto a las bases de V se denomina *traza del endomorfismo* f, y se denota $\mathrm{tr}(f)$.

b) Demostrar que $\det(M(f;\mathcal{B})) = \det(M(f;\mathcal{B}'))$. El valor común de los determinantes de las matrices de f respecto a las bases de V se denomina *determinante del endomorfismo* f, $\det(f)$.

c) Si f y g son endomorfismos de V y $a \in \mathbb{K}$, verificar que se cumplen:

(a) $\mathrm{tr}(f+g) = \mathrm{tr}(f) + \mathrm{tr}(g)$,

(b) $\mathrm{tr}(a\,f) = a\,\mathrm{tr}(f)$,

(c) $\mathrm{tr}(f \circ g) = \mathrm{tr}(g \circ f)$,

(d) $\mathrm{tr}(I_V) = n$ donde $n = \dim_{\mathbb{K}} V$,

(e) $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g) = \det(g \circ f)$,

(f) $\det(af) = a^n \det(f)$,

(g) $\det(I_V) = 1$.

d) Demostrar que f es un isomorfismo $\Leftrightarrow$ f es un monomorfismo $\Leftrightarrow$ f es un epimorfismo $\Leftrightarrow \det(f) \neq 0$.

e) Demostrar que si f es un isomorfismo entonces f^{-1} es lineal (y, por tanto, también f^{-1} es un isomorfismo). Hallar, en ese caso, $\det(f^{-1})$ en función de $\det(f)$.

f) De modo análogo, definir $\mathrm{rg}(f)$ y demostrar sus propiedades.

107. Sean $\phi : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ y $\sigma : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ dos formas lineales definidas por $\phi(x,y)^t = x + 2y$ y $\sigma(x,y)^t = 3x - y$. Hallar y expresar en la base dual canónica las formas $\phi + \sigma$, 4ϕ y $2\phi - 5\sigma$.

108. Sea $\mathcal{B} = ((1,-1,3)^t, (0,1,-1)^t, (0,3,-2)^t)$ una base de $\mathbb{K}^3$. Hallar su base dual.

109. Si $\mathrm{car}\mathbb{K} \neq 2, 7$, ¿ constituyen las formas lineales $f_1(x,y,z)^t = 2x-y+3z$, $f_2(x,y,z)^t = 3x - 5y + z$, $f_3(x,y,z)^t = 4x + 7y + z$ una base del espacio dual de $\mathbb{K}^3$? En caso afirmativo, hallar las coordenadas en esta base de $f(x,y,z)^t = x + y + z$.

110. Expresar en la base dual canónica la forma lineal f tal que $f(4,2,0)^t = 2$, $f(1,2,-3)^t = -7$ y $f(0,2,5)^t = -1$.

111. En $\mathbb{K}^4$ determinar la forma lineal que hace corresponder a los vectores $v_1 = (2,1,0,-1)^t$, $v_2 = (3,2,1,0)^t$, $v_3 = (1,1,-2,0)^t$ y $v_4 = (2,3,2,1)^t$ los escalares 0, 5, -1 y 6, respectivamente.

112. En $\mathbb{R}^2$ sea $\mathcal{B}$ la base formada por los vectores $v_1 = e_1$ y $v_2 = e_2 - e_1$. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el endomorfismo que cumple que $f(v_1) = v_1 + v_2$, $f(v_2) = -2v_1 - v_2$. ¿Es f una isometría?

113. En $\mathbb{R}^2$ determinar las isometrías f que verifican

1. $f^2 = id$ ($f = -id$ es apl. antipodal y $f = id$ es apl. identidad).
2. $f^2 = -id$ (rotación (o giro) de amplitud $90°$ (resp. $270°$) y sentido positivo).

114. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación dada por

$$f(x, y, z)^t = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z, 2x - y + 2z, 2x + 2y - z)^t.$$

Probar que f es una isometría y describirla geométricamente. ¿ Es $f^2 = id$?

115. Hallar la matriz de la rotación de amplitud $\pi/2$ alrededor de la recta $x = y = z$ y sentido positivo, respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Idem. sentido negativo.

116. Calcular la matriz de la simetría de $\mathbb{R}^3$ respecto del plano $x = y$, respecto de la base canónica.

117. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual se considera el subespacio $U : x + t = y + z$.

a) Hallar una base ortogonal de U.

b) De todos los vectores unitarios u que forman un ángulo de $\pi/3$ con e_1 y con e_2, hallar aquellos cuya proyección sobre U tiene la menor norma posible.

118. Sean V un espacio euclídeo de dimensión finita y $f : V \to V$ un endomorfismo. Se dice que f es *simétrico* si $\langle u, f(v)\rangle = \langle f(u), v\rangle$, $\forall u, v \in V$. Sea f simétrico.

a) Probar que $(\mathrm{Ker} f)^\perp = \mathrm{Im} f$.

b) Para cualquier base ortonormal $\mathcal{B}$ de V, probar que la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ es simétrica.

c) *Una isometría involutiva es una simetría*, es decir, probar que una isometría s de $\mathbb{R}^n$ tal que $s^2 = \mathrm{id}$ es un endomorfismo simétrico. En tal caso, demostrar que $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_{-1}$. Sean $\mathcal{B}_1$ una base de V_1, $\mathcal{B}_{-1}$ una base de V_{-1} y $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_{-1}$. ¿Cómo es la matriz de s respecto de $\mathcal{B}$?

119. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{-\sqrt{2}-2}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Comprobar que f es una isometría y describirla en términos de rotaciones y simetrías.

120. Sea W subespacio de un espacio vectorial euclídeo V de dimensión finita. Comprobar que si $f : V \to V$ es una isometría entonces $f(W^\perp) = f(W)^\perp$.