Ejercicios de Álgebra Lineal

121. Sea V un espacio vectorial euclídeo tridimensional y sea $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ una base de la que se sabe que

$\langle u_1, u_1\rangle = \langle u_2, u_2\rangle = 1$, $\langle u_3, u_3\rangle = 2$, $\langle u_1, u_2\rangle = 0$, $\langle 2u_2 - u_3, u_1\rangle = \langle 2u_2 - u_3, u_3\rangle = 0$.

a) Hallar la matriz de Gram del producto escalar en la base $\mathcal{B}$.

b) Hallar una base ortonormal $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, w_3)$ de V.

c) Sea $f : V \to V$ el endomorfismo definido por

$3f(w_1) = 2w_1 - 2w_2 + w_3$, $3f(w_2) = aw_1 + w_2 - 2w_3$, $3f(w_3) = bw_1 + cw_2 + 2w_3$.

Hallar a, b y c, sabiendo que f es isometría. Hallar el ángulo que forman los vectores $f(u_1)$ y $f(u_2)$ y la matriz de f en la base $\mathcal{B}$.

122. Sea V un espacio vectorial euclídeo y sean U_1 y U_2 subespacios de V. Demostrar:

(a) $V = V^{\perp\perp}$,

(b) $(U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$,

(c) $U_1 \perp +U_2^{\perp} \subseteq (U_1 \cap U_2)^{\perp}$,

123. Sean V y V' espacios vectoriales euclídeos y sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Demostrar que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) f es una isometría.

b) f transforma cualquier base ortonormal de V en un sistema ortonormal de V'.

c) f transforma una base ortonormal de V en un sistema ortonormal de V'.

124. Sea V el espacio vectorial de las funciones reales definidas y continuas en el intervalo $[-\pi, \pi]$, dotado del producto escalar $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$. Considérense las funciones

$f_0(x) = a_0$, $f_1(x) = a_1 \operatorname{sen} x$, $f_2(x) = a_2 \cos x$, $f_3(x) = a_3 \operatorname{sen} 2x$, $f_4(x) = a_4 \cos 2x$, $\ldots$, $f_{2n-1}(x) = a_{2n-1} \operatorname{sen} nx$, $f_{2n}(x) = a_{2n} \cos nx$, $(a_p \neq 0, p = 0, 1, \ldots, 2n)$.

a) Comprobar que estas funciones forman una familia ortogonal (i.e., son ortogonales dos a dos) y hallar los coeficientes a_p para que sea una familia ortonormal (i.e., además de ortogonales dos a dos tienen norma 1).

b) Hallar la proyección ortogonal sobre el subespacio que engendran dichas funciones de cada una de las dos funciones siguientes: $\phi(x) = x$ y $\psi(x) = x^2$.

125. Sea el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz es $M = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

    a) Comprobar que f es una isometría, y determinar si f conserva la orientación ($\det f = 1$) o la invierte ($\det f = -1$).

    b) Comprobar que $f(w) = -w$, donde $w = (\sqrt{3}-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}-\sqrt{6}, 1-\sqrt{2})^t$.

    c) Comprobar que f es una roto–simetría (i.e., f es composición de una rotación axial con una simetría respecto del plano ortogonal al eje de rotación); hallar la simetría y la rotación.

126. Sabiendo que la matriz $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & a & x \\ 1/2 & 1/6 & b & y \\ 1/2 & 1/2 & 0 & z \\ 1/2 & -5/6 & 0 & t \end{pmatrix}$ es ortogonal y que a y x son positivos, completar dicha matriz.

127. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una isometría. Probar que si la ecuación $f(v) = v$ solo tiene la solución trivial, entonces f no es una rotación, pero sí lo es f^2 y describir f^2 en función de f. Analizar si, para algún $n \in \mathbb{N}$ la transformación f^n puede ser la identidad.

128. En un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3 se considera la rotación (o giro) f alrededor de la recta generada por un cierto vector unitario u y de ángulo θ. Se pide:

    a) Hallar la imagen de un vector $v \in V$ ortogonal a u.

    b) Hallar la imagen de un vector $v \in V$ arbitrario.

    c) Si $V = \mathbb{R}^3$, $\theta = \pi/4$ y $u = \frac{1}{3}(2, 1, -2)^t$, hallar $f(v)$, para $v \in \mathbb{R}^3$.

129. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. a) Hallar todos los valores propios de A y los vectores propios correspondientes. b) Hallar una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal. c) Hallar A^m, para $m \in \mathbb{N}$, y $\exp(A)$.

130. Encontrar los valores propios del endomorfismo f de $\mathbb{R}^2$ cuya matriz respecto a la base canónica es $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

131. Hallar el polinomio característico, los valores propios y los vectores propios de los siguientes endomorfismos:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{c)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}; \qquad \text{d)} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

¿Qué matrices pueden diagonalizarse?

132. Hallar los valores propios y los vectores propios correspondientes de las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, consideradas como: a) matrices sobre $\mathbb{R}$; b) matrices sobre $\mathbb{C}$.

133. ¿Para qué valores de a y b es diagonalizable la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 2 & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$? Para los valores de a y b tales que A no es diagonalizable, ¿es A semejante a una matriz J de Jordan? En caso afirmativo, hallar J y la matriz de paso.

134. ¿Para qué valores del parámetro a es diagonalizable la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$?

135. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$. Encontrar la expresión de la potencia n–ésima de la matriz A en función de n. Hallar $\exp(A)$.

136. Hallar el polinomio característico, los valores propios y los vectores propios de las siguientes matrices. Determinar si son diagonalizables y hallar las correspondientes matrices de Jordan y matrices de paso. ¿Existe alguna relaciaón entre los valores propios de estas matrices?

a) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

137. Hallar la matriz respecto de la base canónica de un homomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(1,0,1,0)^t = (2,1,-1,0)^t$, $L((0,1,-1,0)^t)$ sea el subespacio de vectores propios de f para el valor propio -1 y $H = \{x + z = x - y + t = 0\}$ sea el subespacio de vectores propios de f para el valor propio 2.

138. Se dan las expresiones recurrentes $\left.\begin{array}{rcl} u_n & = & 3u_{n-1} + 3v_{n-1} \\ v_n & = & 5u_{n-1} + v_{n-1} \end{array}\right\}$ con $u_0 = v_0 = 1$. Hallar u_n y v_n en función de n.

139. En un criadero de conejos se denota por y_n e x_n el número de machos y hembras al cabo de n años, respectivamente. Sabiendo que $\left.\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & 5x_n - 3y_n \\ y_{n+1} & = & 6x_n - 4y_n \end{array}\right\}$ y que $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, hallar el número total de conejos al cabo de 20 años.

140. Hallar los autovalores de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. ¿ Es $v = (1,1)^t$ un autovector de A? Hallar $A^k v$ para $k = 1, \ldots, 8$. Ídem si $v = (2,-1)^t$.