Ejercicios de Álgebra Lineal

141. Hallar los valores de a y b para que sea diagonalizable la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$.

¿Existe alguna matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal con $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

142. Diagonalizar las siguientes matrices simétricas mediante una matriz ortogonal:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -4 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

143. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Encontrar C ortogonal tal que C^tAC sea diagonal.

b) Calcular A^n y $\exp(A)$.

c) Generalizar lo anterior a la matriz $A = I + aB$, con $a \in \mathbb{R}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

144. Hallar una matriz ortogonal C que diagonalice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

145. a) Sea f un endomorfismo no diagonalizable de $\mathbb{C}^2$ de traza 2. Calcular $\det f$.

b) ¿Es diagonalizable una matriz A de orden dos con traza 5 y determinante 4?

146. Se considera el endomorfismo de $\mathbb{C}^3$ definido por $f(x, y, z)^t = (ax - y - z, x - z, by)^t$. ¿Para qué valores de $a, b \in \mathbb{C}$ el núcleo de f tiene dimensión 1 y, además, f es no diagonalizable?

147. Probar que las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ no son semejantes, si bien tienen los mismos valores propios.

148. Calcular $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{15}$.

149. Sea $A \in M_3(\mathbb{C})$ una matriz no diagonalizable con un único autovalor λ y que verifica que $(A - \lambda I)^2 = 0$. Calcular la matriz de Jordan de A.

150. Calcular la matriz de Jordan de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & -12 & 4 \end{pmatrix}$.

151. Dadas las siguientes parejas de matrices estudiar si son o no semejantes.

    a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

    b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

152. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los endomorfismos dados por las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

    a) matriz canónica de Jordan y matriz de paso de ambos.

    b) ¿Son las matrices A y B semejantes? En caso afirmativo encontrar una matriz P tal que $B = PAP^{-1}$.

153. Calcular la matriz de Jordan así como una matriz de paso para las siguientes matrices: $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

154. Calcular la matriz canónica de Jordan de las siguientes matrices en función del parámetro a.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ -1+a & -a & a & 0 \\ 1-a & a & -a & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & a & -2a+1 & -2a+1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

155. Encontrar la matriz canónica de Jordan y la matriz de paso para la siguiente matriz:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

156. Sea V un espacio vectorial real bidimensional y $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que $f(x, y)^t = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_2$.

    a) Probar que f es una forma bilineal y expresar f como suma de una forma bilineal simétrica y otra antisimétrica.

    b) Dar la expresión matricial de la forma cuadrática asociada a f y clasificarla.

157. Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y sean ϕ, ψ dos formas lineales de V en $\mathbb{K}$. Probar que la aplicación $f : V \times V \to \mathbb{K}$ dada por $f(x, y)^t = \phi(x)\psi(y)$ es una forma bilineal.

158. Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una aplicación. Probar que f es una forma bilineal si y sólo si para cada par de vectores $u, v \in V$, la aplicación $f_u : V \to \mathbb{K}$ definida por $f_u(v) = f(u, v)$ y la aplicación $f^v : V \to \mathbb{K}$ definida por $f^v(u) = f(u, v)$ son formas lineales.

159. Dada la forma bilineal $f : \mathbb{R}_1[x] \times \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}$ de la que se sabe que es simétrica y que $f(x + 1, x + 1)^t = 8$, $f(x + 2, x + 2)^t = 11$, $f(x, x)^t = 3$, calcular su matriz respecto de la base usual $\{1, x\}$.

160. Probar que la matriz asociada a una forma cuadrática Φ respecto de una base $\mathcal{B}$ es diagonal si y sólo si los vectores de $\mathcal{B}$ son conjugados dos a dos respecto de Φ.