Ejercicios de Álgebra Lineal

162. ¿A qué intervalo debe pertenecer el parámetro a para que la forma cuadrática $\Phi(x,y)^t = 2x^2 + axy + 6y^2$ sea definida positiva?

163. Clasificar las siguientes formas cuadráticas sobre $\mathbb{R}^3$
    a) $\Phi(x,y,z)^t = x^2 - z^2 - 2xy + xz$
    b) $\Phi(x,y,z)^t = 2x^2 + y^2 + 5z^2 - 2xy - 2yz + 6xz$
    c) $\Phi(x,y,z)^t = -x^2 - 2y^2 - z^2 + 2xy + 2yz$.

164. Dada la familia de formas cuadráticas $\Phi_a(x,y,z)^t = x^2+y^2+(a+1)z^2+2ayz+2xz$, clasificar Φ_a según los valores del parámetro a.

165. ¿Tiene solución no nula en $\mathbb{R}$ la ecuación $x^2+y^2+z^2+2xy=0$? ¿Y la ecuación $2x^2+2y^2+z^2+2xy=0$?

166. Dada la forma bilineal $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)^t = x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 - x_3y_1 + 2x_3y_3$$

hallar su forma cuadrática asociada Φ, la forma polar, la matriz asociada y la signatura de Φ.

167. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, ¿pueden representar la misma forma cuadrática en distintas bases?

168. Probar que las siguientes expresiones definen productos escalares en $\mathbb{R}^3$.
    1. $\langle x,y\rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2$.
    2. $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2$.

169. Estudiar, según los valores de a, el carácter de la forma cuadrática real

$$g(x,y,z)^t = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2ayz.$$

170. Sea f la forma bilineal en $\mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x,y)^t = x_1y_1 - 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 - 2x_2y_3 + x_3y_1 - 2x_3y_2.$$

    1. Dar la forma cuadrática Φ asociada a f y su matriz.

2. Encontrar una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ que verifique

$$f(v_i, v_j) = 0,\ si\ i \neq j, \quad f(v_i, v_i) = 1, i = 1, 2 \quad \text{y } f(v_3, v_3) = -1.$$

3. ¿Cuál es la signatura de Φ?

4. ¿Cuál es el subespacio conjugado de $U = L((1,0,1)^t)$ respecto de f? ¿Es autoconjugado el vector $(1,0,1)^t$?

171. Consideremos la familia de formas cuadráticas sobre $\mathbb{R}^3$

$$\Phi_a = x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2xy + 2axz,$$

donde $a \in \mathbb{R}$.

1. Hallar la matriz A_a asociada a Φ_a.

2. Hallar los valores de b y c para que $\{(1,0,0)^t, (1,b,0)^t, (-4a, a, c)^t\}$ sea una base de vectores conjugados respecto de Φ_a, para $a \neq 0$.

3. Encontrar una matriz P_a regular tal que $P_a^t A_a P_a$ sea diagonal.

4. Clasificar Φ_a según los valores de a.

172. Sea $L \subset \mathbb{R}^5$ la variedad afín cuyas ecuaciones paramétricas respecto del sistema de referencia canónico son:

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & 1 + \alpha + \beta + 3\gamma \\ y & = & 6 + 2\beta + 2\gamma \\ z & = & -\alpha - \beta - 3\gamma \\ t & = & 1 + \alpha + 2\gamma \\ u & = & \beta + \gamma \end{array}\right\}.$$

Hallar la dimensión, el espacio de dirección y unas ecuaciones implícitas de L.

173. Hallar unas ecuaciones paramétricas de la variedad afín $L \subset \mathbb{R}^4$ definida por

$$\left.\begin{array}{rcl} x - y + z - t & = & 1 \\ x + y + 2z + t & = & 2 \\ x - 3y - 3t & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Hallar $\dim L$ y la dirección de L. Encontrar un conjunto de puntos afínmente independientes que generen L.

174. En un espacio afín de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$, se tienen los sistemas de referencia $R = \{O; u_1, u_2\}$ y $R' = \{A, B, C\}$ (en R' se entiende que el origen es el punto A y la base está formada por los vectores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$) con $A = (2,1)^t_R$, $B = (3,3)^t_R$ y $C = (1,4)^t_R$. Hallar la expresión del cambio de referencia y la ecuación en el sistema R' de la recta r cuya ecuación respecto de R es $3x - 5y = 7$.

175. En un espacio afín de dimensión 3 sobre $\mathbb{R}$, se tienen los sistemas de referencia $R = \{O; u_1, u_2, u_3\}$ y $R' = \{O', A_1, A_2, A_3\}$, donde $O' = (1,2,1)^t_R$, $A_1 = (2,3,1)^t_R$, $A_2 = (2,2,2)^t_R$ y $A_3 = (4,3,1)^t_R$. Hallar la expresión del cambio de sistema de referencia.

176. Se consideran las rectas de $\mathbb{R}^4$

$$r : \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - z & = & 0 \\ 2x - y + 2z - 3t & = & -1 \\ y + z - t & = & -2 \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{rcl} y + z & = & 1 \\ 2x + y + z - t & = & -2 \\ 2x + 2y + z + t & = & 0 \end{array} \right.$$

Hallar la mínima variedad afín que contiene a r y s. Dar un conjunto de puntos afínmente independientes que generen esta variedad.

177. Hallar unas ecuaciones paramétricas, la dimensión y la dirección de la intersección de los planos de $\mathbb{C}^3$ siguientes:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 - \alpha - \beta \\ y & = & 2 - \alpha + 2\beta \\ z & = & \alpha \end{array} \right. \qquad \pi' : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 + 2\alpha - \beta \\ y & = & 1 + \beta \\ z & = & 1 - \alpha \end{array} \right.$$

178. Dados los planos π, π' del ejercicio anterior, y el plano π'' de ecuación $x - y - z = 1$, hallar la intersección de los tres planos. ¿Cuál es la ecuación del plano paralelo a $\pi \cap \pi'$ y $\pi \cap \pi''$ que pasa por el punto $(1, 1, -1)^t$? Hallar la distancia entre este plano y las variedades afines $\pi \cap \pi'$, $\pi \cap \pi''$ y $\pi \cap \pi' \cap \pi''$.

179. En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ se considera una referencia afín R, en la que las coordenadas de un punto X son $(x, y, z)^t_R$. Se considera otra referencia cartesiana $R' = \{O'; B\}$, donde $O' = (-2, 1, -1)^t$ y $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$, con $u_1 = (1, 2, 3)^t$, $u_2 = (0, 1, 1)^t$ y $u_3 = (2, -3, 0)^t$. Hallar las coordenadas $(x', y', z')^t_{R'}$ de X.

180. ¿Cuál es la recta paralela a los planos $\pi : x + y + 2z = 4$, $\pi' : x - y - z = 1$ que pasa por el punto $(0, 1, 0)^t$?