Ejercicios de Álgebra Lineal

181. En $\mathbb{R}^3$ se consideran el punto $P = (-1, 1, 2)^t$, el plano $\pi : 3x + y - z = 9$ y las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{rcl} x + y - z & = & -2 \\ 2x - 2y + z & = & -1 \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{rcl} x + y - 2z & = & 2 \\ x - y + z & = & -4 \end{array} \right.$$

a) Hallar la recta que pasa por P y corta a r y s.

b) Hallar la recta que pasa por P, corta a r y es paralela a π. Hallar también la distancia de esta recta al plano π.

182. a) Estudiar la posición relativa de las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z & = & 0 \\ 2x + y + z & = & 1 \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 - \alpha \\ y & = & 2 + \alpha \\ z & = & \alpha \end{array} \right.$$

b) Demostrar que no existe una recta que pase por el punto $(0, 1, 0)^t$ y corte a r y s.

c) Hallar las ecuaciones de una recta paralela a los planos $\pi : 2x + y + 3z = 4$, $\pi' : x + y + 2z = 4$ y que corte a r y s.

183. Sean a y b números reales y consideremos en $\mathbb{R}^3$ las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{rcl} x + y - 3z & = & -2 \\ x - y - z & = & -4 \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2 + a\alpha \\ y & = & 1 + b\alpha \\ z & = & 2\alpha \end{array} \right.$$

a) Hallar los valores de a y b para los que r y s se cortan.

b) Hallar los valores de a y b para los que r y s son paralelas.

c) Para $a = 3$ y $b = 1$ hallar el plano paralelo a r que pasa por s.

184. En $\mathbb{R}^5$ se consideran las variedades afines $M : x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0$ y $N : x_1 = 0, x_2 = 1, x_5 = 5$.

a) Hallar la posición relativa de M y N.

b) Hallar unas ecuaciones implícitas de la variedad afín $M + N$.

c) Determinar la recta que pasa por el punto $R = (2, -1, 0, 0, 0)^t$ y corta a M y a N.

185. Dadas las rectas $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{4}$, $s : \frac{x}{3} = y + 3 = \frac{z-1}{2}$ y $t : \frac{x+2}{-1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{2}$ comprobar que son paralelas a un mismo plano, y calcular el plano incidente con el origen que es paralelo a las tres rectas.

186. Hallar la proyección ortogonal del punto $B = (-3, -7, 0)^t$ sobre el plano que pasa por los puntos $A_1 = (2, 0, 1)^t$ $A_2 = (3, -1, 2)^t$ y $A_3 = (2, 1, 3)^t$. Hallar también la distancia de B al plano.

187. a) Hallar el simétrico de $A = (-2, 6, 2)^t$ respecto del plano $\pi : 3x - 5y + z = 1$.

     b) Hallar el simétrico de $B = (1, -2, 0)^t$ respecto de la recta $r : \frac{x+1}{5} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-2}{3}$.

188. En el espacio afín tridimensional euclídeo, respecto de un sistema de referencia rectangular, se dan las rectas:

$$r : x = \frac{y-1}{3} = \frac{z-4}{7} \quad \text{y} \quad s : x - 2 = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}.$$

     a) Comprobar que se cruzan y hallar una recta perpendicular a r y a s que corte a ambas.

     b) Calcular la distancia entre r y s.

189. Sea un espacio afín euclídeo tridimensional con un sistema de referencia rectangular. Se dan los planos

$$\pi_1 : x + y + z = 3; \; \pi_2 : 2x + 3y - 5z = -1$$

     y el punto $A = (1, 1, 1)^t \in \pi_1$.

     a) Hallar unas ecuaciones de la recta r tal que $A \in r$, $r \subset \pi_1$ y $r \perp (\pi_1 \cap \pi_2)$.

     b) Hallar la proyección ortogonal de r sobre π_2.

190. Dadas las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 9 - 3\alpha \\ y & = & -1 + 4\alpha \\ z & = & 4 + \alpha \end{array} \right. ; \quad s : \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2z & = & 1 \\ y + z & = & 3 \end{array} \right. ; \quad t : \left\{ \begin{array}{rcl} x + 3z & = & 2 \\ y - 4z & = & 0 \end{array} \right.$$

     y los planos $\pi_1 : -x + 2y - 3z = -2$, $\pi_2 : 3x - 6y + 9z = 5$.

     a) Determinar el punto de corte de r y s y la ecuación del plano que determinan.

     b) Probar que r y t son paralelas y calcular la distancia entre ellas.

     c) Demostrar que s y t se cruzan. Hallar la distancia entre ellas y las ecuaciones de la recta perpendicular común a ambas.

     d) Probar que π_1 y π_2 son planos paralelos y hallar la distancia entre ellos.

191. En $\mathbb{R}^3$ se da la aplicación afín f de matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, el punto $P = (0, 2, 1)^t$ y las variedades afines $M : x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $N : x_1 = 0, x_2 + x_3 = 0$.

     a) Hallar unas ecuaciones implícitas de la variedad de puntos fijos de f.

     b) Hallar unas ecuaciones implícitas de las variedades afines $f(M)$, $f^{-1}(N)$, $f^{-1}(P)$ y la variedad imagen de f.

192. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación afín cuya matriz respecto del sistema de referencia canónico es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular la imagen del plano $\pi : x - y + 2z = 1$.

193. Sea t_v la traslación de vector v y $h_{C,a}$ la homotecia de centro C y razón a (con $a \neq 0, 1$). Probar que $t_v \circ h_{C,a}$ y $h_{C,a} \circ t_v$ son homotecias y hallar sus centros y razones.

194. Sea $\mathcal{Z}$ un espacio afín de dimensión finita n.

    (a) Demostrar que una aplicación afín $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}'$ queda totalmente determinada cuando se conocen las imágenes de $n + 1$ puntos $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{Z}$ afínmente independientes.

    (b) Determinar si existe una aplicación afín $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que verifique $f(1,3)^t = (2,7)^t$, $f(-1,1)^t = (2,-1)^t$ y $f(2,2)^t = (-4,5)^t$ y, en caso afirmativo, estudiar si f tiene puntos fijos.

    (c) Ídem para $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que verifica $g(1,3)^t = (2,7)^t$, $g(-1,1)^t = (2,-1)^t$ y $g(2,2)^t = (2,-2)^t$.

    (d) Ídem para $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que verifica $h(1,3)^t = (2,7)^t$, $h(-1,1)^t = (2,-1)^t$ y $h(2,4)^t = (-4,5)^t$.

195. Hallar la expresión matricial de la aplicación afín $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que deja fijas las rectas que pasan por el punto $(2,1)^t$ y tal que $f(1,0)^t = (4,3)^t$.

196. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las rectas $r : x_1 = 1, x_3 = 0$, $s : x_1 = 0, x_2 = 1$ y $t : x_2 = 0, x_3 = 1$. Hallar la matriz A correspondiente a una aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(r) = s$, $f(s) = t$ y $f(t) = r$.

197. Hallar la expresión de la aplicación afín $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que toda recta r es paralela a $f(r)$, el punto $(1,3)^t$ permanece fijo y $f(2,1)^t = (4,-3)^t$.

198. En el plano afín euclídeo,

    a) hallar la exprsión matricial de la aplicación afín que asocia a cada punto del plano su proyección sobre la recta $y = 2x$,

    b) ídem para la simetría respecto de dicha recta.

199. Hallar la expresión del movimiento helicoidal que consiste en una rotación o giro de 60° alrededor de la recta $E : x = 1, y = -1$ seguido de una traslación de vector $w = (0,0,1)^t$.

200. Sea f un movimiento de $\mathbb{R}^2$ que transforma la recta $r_1 : x + y = 1$ en una paralela suya, la recta $s_1 : x = 1$ en la recta $s_2 : x = 0$ y el origen en el punto $(1,0)^t$. Calcular la matriz de f respecto del sistema de referencia canónico. ¿De qué movimiento se trata?