Algebra Lineal. Clasificación de movimientos en $\mathbb{R}^2$

En $\mathbb{R}^2$ consideremos un producto escalar $\langle , \rangle$ y una base $\mathcal{B}$ ortonormal respecto de $\langle , \rangle$ (p.e., el producto escalar usual y la base canónica). Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un movimiento y la matriz de f respecto del sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$ es

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & \mid & 0 \\ - & & - \\ C & \mid & A \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & \mid & 0 \\ - & & - \\ C & \mid & I \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 1 & \mid & 0 \\ - & & - \\ 0 & \mid & A \end{array}\right), \qquad f = t_C \circ \overrightarrow{f}, \qquad t_C \text{ traslación de vector } C,$$

donde $O \in \mathbb{R}^2$ es un punto cualquiera. Sabemos que la columna C corresponde a las coordenadas de $f(O)$ y que $A \in M_2(\mathbb{R})$, la matriz de $\overrightarrow{f}$ respecto de $\mathcal{B}$, es ortogonal. En general, $f \neq \overrightarrow{f} \circ t_C$.

Sabemos que el conjunto de los puntos fijos $\mathrm{Fix}(f)$ está dado por ecuaciones implícitas $C + (A - I)X = 0$ (y puede ser vacío) y que la variedad invariante (más relevante) $\mathrm{Inv}(f)$ está dada por ecuaciones implícitas $(A - I)C + (A - I)^2 X = 0$. Además $\mathrm{Inv}(f) \neq \emptyset$, para dimensión $n = 2$.

$\det(A)$	$\mathrm{rg}(A-I)$	$\mathrm{rg}(A-I\mid C)$	$\mathrm{Fix}(f)$	$\mathrm{Inv}(f)$	vector	nombre y descripción
1 $A \neq I$	2	2	punto F : $x_0 = \det\begin{pmatrix} -c_1 & -\operatorname{sen}\alpha \\ -c_2 & \cos\alpha - 1 \end{pmatrix} / 2(1-\cos\alpha)$, $y_0 = \det\begin{pmatrix} \cos\alpha - 1 & -c_1 \\ \operatorname{sen}\alpha & -c_2 \end{pmatrix} / 2(1-\cos\alpha)$			rotación (o giro) centro F ampl. $\alpha \in [0, 2\pi)$, sent. pos.
-1	1	2	$\emptyset$ $\cos\frac{\alpha}{2}(c_2 - 2y) = 0$	recta E : $-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}(c_1 - 2x) +$	$w =$ $(A+I)C/2$	simetría deslizante, i.e., compos. simetría y trasl. $s_E \circ t_w = t_w \circ s_E$, con $w \parallel E$
-1	1	1	recta E : $-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}(c_1 - 2x) + \cos\frac{\alpha}{2}(c_2 - 2y) = 0$			s_E, simetría en recta E
$A = I$	0	1	$\emptyset$	$\mathbb{R}^2$	$C \neq 0$	t_C, traslación vect. $C \neq 0$
$A = I$	0	0	$\mathbb{R}^2$		$C = 0$	identidad

Caso particular: si $A = -I$, entonces $f = r_{E,\pi} = h_{F,-1}$ es la aplicación antipodal de centro F (caso $\mathrm{rg}(A-I) = \mathrm{rg}(A-I\mid C) = 2$) y es también homotecia y $F = C/2$.