Algebra Lineal. Clasificación de movimientos en $\mathbb{R}^3$

En $\mathbb{R}^3$ consideremos un producto escalar $\langle , \rangle$ y una base $\mathcal{B}$ ortonormal (p.e., el producto escalar usual y la base canónica). Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un movimiento y

$$\begin{pmatrix} 1 & | & 0 \\ -- & & -- \\ C & | & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 \\ -- & & -- \\ C & | & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & | & 0 \\ -- & & -- \\ 0 & | & A \end{pmatrix}$$

la matriz de f respecto del sistema de referencia rectangular $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$ de $\mathbb{R}^3$, donde $O \in \mathbb{R}^3$ es un punto cualquiera. Sabemos que la columna C corresponde a las coordenadas de $f(O)$ y que $A \in M_3(\mathbb{R})$, la matriz de $\overrightarrow{f}$ respecto de $\mathcal{B}$, es ortogonal.

Sabemos que $f = t_C \circ g$, donde $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es el movimiento que fija O tal que $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$. En general, $f \neq g \circ t_C$.

Sabemos que el **conjunto de los puntos fijos** $\mathrm{Fix}(f)$ está dado por ecuaciones implícitas $C + (A - I)X = 0$ y que la **variedad invariante principal** $\mathrm{Inv}(f)$ está dada por ecuaciones implícitas $(A - I)C + (A - I)^2 X = 0$. Además $\mathrm{Inv}(f) \neq \emptyset$, para dimensión $n = 3$.

$\mathrm{rg}(A - I)$	$\mathrm{rg}(A - I\|C)$	$\mathrm{Fix}(f)$	$\mathrm{Inv}(f)$	vector	nombre y descripción
3	3	punto F			roto–simetría $s_{E^\perp} \circ r_{E,\alpha} = r_{E,\alpha} \circ s_{E^\perp}$ amplitud $\alpha \in [0, 2\pi)$, sent. pos. $\{F\} = E \cap E^\perp$
2	3	$\emptyset$	recta E	$w = \langle \overrightarrow{OC}, e\rangle e / \\|e\\|^2$ e genera $dir E$	movimiento helicoidal (o rotación deslizante), i.e., compos. de rotación y translación $r_{E,\alpha} \circ t_w = t_w \circ r_{E,\alpha}$, con $w \parallel E$
2	2	recta E			$r_{E,\alpha}$, rotación o giro de eje E amplitud $\alpha \in [0, 2\pi)$, sent. pos.
1	2	$\emptyset$	plano H	$w = (A + I)C/2$	simetría deslizante, i.e., compos. de simetría y translación $s_H \circ t_w = t_w \circ s_H$, con $w \parallel H$
1	1	plano H			s_H, simetría sobre plano H
0	1	$\emptyset$	$\mathbb{R}^3$	$C \neq 0$	t_C, traslación de vector $C \neq 0$
0	0	$\mathbb{R}^3$		$C = 0$	identidad

Casos particulares:

a. si $A = -I$, entonces f es la aplicación antipodal de centro F (caso $\mathrm{rg}(A - I) = \mathrm{rg}(A - I|C) = 3$). Además, $f = h_{F,-1}$ homotecia.

b. la rotación $r_{E,\pi}$ también se llama simetría sobre la recta E, y conserva la orientación..