Ejercicios de Álgebra Lineal sobre diagonalización. ¿Verdadero o Falso?

Si es verdadero, es necesario dar una demostración y si es falso, un contraejemplo.

En general, las respuestas dependen del cuerpo sobre el que se trabaje. Se debe contestar a las preguntas 1 a 9 en los siguientes tres casos: $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1. A es diagonalizable por semejanza sobre $\mathbb{K}$.

2. A es diagonalizable por congruencia sobre $\mathbb{K}$.

3. A es diagonalizable por semejanza y por congruencia sobre $\mathbb{K}$, con la misma matriz de paso P; i.e., existen $D, P \in M_n(\mathbb{K})$ con D diagonal y P regular tales que $D = P^{-1}AP = P^tAP$.

4. A es diagonalizable por semejanza sobre $\mathbb{K}$, con matriz de paso P ortogonal.

5. A es diagonalizable por congruencia sobre $\mathbb{K}$, con matriz de paso P ortogonal.

6. Si A es simétrica real, entonces A es diagonalizable por semejanza y por congruencia sobre $\mathbb{K}$, con la misma matriz de paso P; i.e., existen $D, P \in M_n(\mathbb{K})$ con D diagonal y P regular tales que $D = P^{-1}AP = P^tAP$.

7. Si A es simétrica real, entonces A es diagonalizable por semejanza sobre $\mathbb{K}$, con matriz de paso P ortogonal.

8. Si A es simétrica real, entonces A es diagonalizable por congruencia sobre $\mathbb{K}$, con matriz de paso P ortogonal.

9. Existe matriz de Jordan $J \in M_n(\mathbb{K})$ semejante a A.

10. Sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalor de A y consideremos la cadena de subespacios

$$E^1(\lambda) \subset E^2(\lambda) \subset \cdots \subset E^m(\lambda) = E^{m+1}(\lambda) = M(\lambda)$$

con dimensiones $t_j = \dim E^j(\lambda)$, donde $E^j(\lambda) = \ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^j$. Entonces

a. la caja de Jordan correspondiente a λ es de orden m
b. la caja de Jordan correspondiente a λ consta de $t_m - t_{m-1}$ subcajas de Jordan.

Más ejercicios

1. Sea $N = (n_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ con

$$n_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = i+1 \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Para $k \in \mathbb{N}$, calcula N^k y demuestra que $N^k = 0$, siempre que $n \leq k$. Se dice que N es *nilpotente*.

Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ y $J = \lambda I + N$. Para $k \in \mathbb{N}$, calcula J^k, demuestra que es triangular superior y describe sus superdiagonales.

2. Sea $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ m_{k+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_k \\ m_k \end{pmatrix}$, con $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$. Hallar la iteración décima, es decir, a_{10} e m_{10}, cuando $-1 = a_0 = -m_0$.

3. CLASES SOCIALES. Consideramos la población de cierto país dividida en tres clases: alta, media y baja. Las probabilidades de que una persona cambie de clase o no al cabo de un año dependen solo de la clase a la que ha pertenecido durante el año y son las mismas todos los años. Concretamente

- la probabilidad de seguir siendo de clase alta es $1/2$;
- la probabilidad de pasar a ser de clase media si se era de clase alta es $1/2$;
- la probabilidad de pasar a ser de clase baja si se era de clase alta es 0;
- la probabilidad de pasar a ser de clase alta si se era de clase media es $1/4$;
- la probabilidad de seguir siendo de clase media es $1/2$;
- la probabilidad de pasar a ser de clase baja si se era de clase media es $1/4$;
- la probabilidad de pasar a ser de clase alta si era de clase baja es 0;
- la probabilidad de pasar a ser de clase media si se era de clase baja es $1/2$;
- la probabilidad de seguir siendo de clase baja es $1/2$.

La *matriz de transición* para esta *cadena de Markov* es

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

y sirve para estudiar la evolución de la distribución de la población del país. Si el número de habitantes de clase alta en el año n es a_n, el de clase media es m_n y el de clase baja es b_n, entonces

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ m_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ m_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Observa que las entradas de cada columna de A son probabilidades y suman 1. Se dice que A es una matriz *estocástica*.

a. Calcula los autovalores y los autovectores de A. ¿ Es A diagonalizable?
b. Halla A^n para todo $n \in \mathbf{N}$.
c. Supongamos que este año el país tiene 16 millones de habitantes, de los cuales $0,5$ millones son de clase alta, 13 millones son de clase media y $2,5$ millones son de clase baja. ¿Cuál será el número de habitantes pertenecientes a cada clase al cabo de 20 años?
d. Con los mismos datos iniciales del apartado anterior, cuando pase mucho, mucho tiempo, ¿a qué cantidades tenderá el número de habitantes pertenecientes a cada clase?
e. ¿Existe alguna distribución de la población (expresada como un vector con coordenadas entre 0 y 1, ya que lo que nos interesan son los porcentajes) que no varíe a lo largo del tiempo? Si existe, ¿cuál es?