Ejercicio 125

María Jesús De la puente

Departamento de Álgebra
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense
28040 Madrid, Spain
mpuente@ucm.es

Sea el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz es

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

a) Comprobar que f es una isometría, y determinar si f conserva la orientación (i.e., $\det f = 1$) o la invierte (i.e., $\det f = -1$).

b) Comprobar que $f(w) = -w$, donde $w = (\sqrt{3} - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2} - \sqrt{6}, 1 - \sqrt{2})^t$.

c) Demostrar que f es composición de una rotación y una simetría respecto del plano ortogonal al eje de la rotación; hallar la simetría y la rotación.

Solución basada en el ejercicio 29 de NUEVOS EJERCICIOS 29: Escribamos

$$M = \frac{1}{pq} \begin{pmatrix} 0 & -p & 2 \\ q & p & 1 \\ q & -p & -1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

donde $p = \sqrt{2}$ y $q = \sqrt{3}$.

a) Como $\det f = \det M = -1$, sabemos que f invierte la orientación. Se trata bien de una simetría respecto de un plano o de una roto–simetría (i.e, rotación alrededor de un eje E compuesta con simetría respecto del plano $E^{\perp}$). La traza

$$\mathrm{tr} M = \frac{p-1}{pq} = \frac{q}{3} - \frac{pq}{6}$$

no es 1, luego M no representa una simetría respecto de un plano (pues la matriz de f respecto de otra base sería $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, de traza 1). Así pues, M representa una ROTO–SIMETRÍA. Sean E el eje de rotación y $\alpha \in [0, 2\pi)$ la amplitud del giro, en sentido positivo.

b) El vector $w = (q - p, 1 + p - pq, 1 - p)^t$ satisface $Mw = -w$, i.e., w es autovector de M asociado al autovalor -1. La norma de w vale $n = \sqrt{17 - 4q - 4pq}$, luego un vector unitario que genere E es $u = (a, b, c)^t = w/n$, con

$$a = \frac{-p+q}{n}, \quad b = \frac{1+p-pq}{n}, \quad c = \frac{1-p}{n}.$$

c) Como la traza de f es invariante, y la matriz de f respecto de otra base es $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, sabemos que

$$-1 + 2\cos\alpha = \operatorname{tr} M = \frac{q}{3} - \frac{pq}{6},$$

de donde

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} + \frac{q}{6} - \frac{pq}{12}, \quad \operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \pm\frac{pqr}{12},$$

con $r = \sqrt{15 + 2p - 4q + 2pq}$. Sustituimos estos valores en la expresión

$$SR = RS = S + (\operatorname{sen}\alpha)B + (\cos\alpha - 1)(I - A) \tag{2}$$

del ejercicio 29 de NUEVOS EJERCICIOS 29, donde

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}, \quad S = I - 2A$$

obteniendo

$$M = SR$$

cuando el signo del seno es NEGATIVO, i.e., $\operatorname{sen}\alpha = -pqr/12$. Conocidos $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$, deducimos que $\alpha \simeq 306°$.

Habitualmente, los libros de texto usan otros procedimientos para calcular α. Hallan la amplitud

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{2} + \frac{q}{6} - \frac{pq}{12}\right),$$

que tiene DOS soluciones, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 2\pi)$, con $\alpha_1 < \alpha_2 = 2\pi - \alpha_1$. En este caso, $\alpha_1 \simeq 54°$. Luego se determina, mediante algún argumento geométrico, si $\alpha = \alpha_1$ ó $\alpha = \alpha_2$. En cambio, nuestro razonamiento ha tenido lugar en la extensión algebraica $\mathbb{Q}(p, q, n, r)$ del cuerpo $\mathbb{Q}(p, q)$. Lo importante del cuerpo $\mathbb{Q}(p, q)$ es que sus elementos se expresan, de modo único, como $a_1 + a_2 p + a_3 q + a_4 pq$, con $a_j \in \mathbb{Q}$ (ver más abajo).

En nuestro caso tenemos $\cos\alpha \simeq 0{,}169101$, $\operatorname{sen}\alpha \simeq -0{,}811356$ y $\alpha = \alpha_2$.

OBSERVACIÓN: Determinante y traza son valores invariantes de f, pero NO caracterizan la isometría, pues queda por determinar el signo de $\operatorname{sen}\alpha$ (o equivalentemente, determinar si $\alpha = \alpha_1$ ó $\alpha = \alpha_2$).

Por definición, los elementos de $\mathbb{Q}(p,q)$ son las expresiones racionales en p y q con coeficientes en $\mathbb{Q}$. Por ejemplo: $7/2+3q+8p^2+pq^6$ ó

$$\frac{2p+4q^3}{7/2+3q+8p^2+pq^6}.$$

Ahora bien, toda expresión polinomial en p y q con coeficientes racionales se puede escribir, de modo único, de la forma $a_1+a_2p+a_3q+a_4pq$, con $a_j\in\mathbb{Q}$ (para ello, basta con sustituir p^2 por 2 y q^3 por 3). A continuación, observemos que el inverso de $a_1+a_2p+a_3q+a_4pq$ se expresa, de modo único, de la forma $b_1+b_2p+b_3q+b_4pq$, con $b_j\in\mathbb{Q}$ (para ello, primero multiplicamos numerador y denominador por el conjugado $b_1-b_2p-b_3q+b_4pq$, obteniendo una fracción equivalente cuyo denominador es de la forma c_1+c_2pq. Después multiplicamos numerador y denominador por el conjugado c_1-c_2pq, obteniendo una fracción equivalente con denominador racional.) En resumen, *los elementos de $\mathbb{Q}(p,q)$ son las expresiones de la forma $a_1+a_2p+a_3q+a_4pq$, con $a_j\in\mathbb{Q}$.* (Obs: cuerpos como $\mathbb{Q}(p,q)$ se estudian en la asignatura *Estructuras Algebraicas.*)

Otra forma de resolver el problema. Como antes, calculamos $\det M$ y $\mathrm{tr} M$, obteniendo que f es una roto–simetría de amplitud $\alpha\simeq 54°$ ó $\alpha\simeq 306°$. El plano $E^\perp$ queda invariante por f. Calculamos una base $\{v_2,v_3\}$ de $E^\perp$ (no necesariamente ortogonal) tal que la base $\mathcal{B}=\{u,v_2,v_3\}$ esté positivamente orientada (i.e., $det(u,v_2,v_3)>0$). Tenemos

$$E^\perp:(q-p)x+(1+p-pq)y+(1-p)z=0$$

y

$$v_2=(-2+2p+q-pq,1,0)^t,\quad v_3=(p+q,0,1+p)^t,$$

por ejemplo. A continuación expresamos

$$Mv_3=\lambda v_2+\mu v_3$$

y nos fijamos en los signos de λ y $\mu\in\mathbb{R}$. En nuestro caso, $\lambda=\frac{4+p+pq}{pq}>0$ y $\mu=\frac{2-p+pq}{pq(1+p)}>0$. Si fuese $\alpha\simeq 54°$, la matriz de f respecto de cierta base ortonormal sería

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\cos 54°&-\operatorname{sen}54°\\0&\operatorname{sen}54°&\cos 54°\end{pmatrix}$$

cuyos signos son

$$\begin{pmatrix}-&0&0\\0&+&-\\0&+&+\end{pmatrix}$$

mientras que para $\alpha\simeq 306°$, tendríamos

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\cos 306°&-\operatorname{sen}306°\\0&\operatorname{sen}306°&\cos 306°\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-&0&0\\0&+&+\\0&-&+\end{pmatrix}.$$

Los signos de λ y μ coinciden con los de la última columna del SEGUNDO CASO. Luego $\alpha\simeq 306°$.