Algebra Lineal Grupo B. Movimientos en 3D.

Trabajando en $\mathbb{R}^3$ con el sistema de referencia canónico, sea L el plano afín de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 3$ y sea s_L la simetría sobre dicho plano. Contesta las siguientes preguntas, haciendo dibujos esquemáticos.

Para clase:

1. Halla las coordenadas de la imagen del origen por la simetría s_L.

2. Halla la matriz de la simetría s_L.

3. Halla las coordenadas de la imagen del punto R de coordenadas $(1, 2, 3)^t$ por la simetría s_L.

4. Comprueba que el punto medio del segmento que une R con $s_L(R)$ pertenece al plano L.

5. Sean los vectores $u = (1, 1, -1)^t$, $v = (4, -4, 0)^t$, $w = (4, 0, 1)^t$. Cada uno de ellos, ¿es perpendicular a L, paralelo a L o ninguno de los anteriores?

6. Escribe las matrices de las traslaciones t_u, t_v, t_w.

7. Razona geométricamente y comprueba algebraicamente si son verdad las siguientes afirmaciones:

a. $s_L \circ t_u = t_u \circ s_L$
b. $s_L \circ t_v = t_v \circ s_L$
c. $s_L \circ t_w = t_w \circ s_L$.

8. Sea $\mathcal{T}$ el tetraedro de vértices $P_1 = (1, 0, 0)^t$, $P_2 = (0, 1, 0)^t$, $P_3 = (0, 0, 1)^t$, $H = (2, 4, 8)^t$. Halla la imagen de $\mathcal{T}$ mediante cada uno de los movimientos de todos los apartados anteriores.

Para casa, en verano:

9. Halla el volumen de la imagen de $\mathcal{T}$ mediante cada uno de los movimientos de todos los apartados anteriores.

10. Piensa una buena notación para denotar las caras y las aristas de $\mathcal{T}$.

11. Halla ecuaciones (implícitas y paramétricas) de las aristas y las caras de $\mathcal{T}$.

12. Halla las longitudes de las aristas y la áreas de las caras de $\mathcal{T}$.

13. Halla los ángulos de cada cara (triangular) de $\mathcal{T}$. Comprueba que la suma es 180 grados.

14. Halla los 6 ángulos diedros de $\mathcal{T}$ (es decir, ángulos entre dos caras adyacentes).

15. Demuestra $\det C = 0$, donde $C = (c_{ij}) \in M_4(\mathbb{R})$, $c_{ii} = -1$, $c_{ij} = \cos_{ij}$ denota el coseno del ángulo diedro que forman las caras i y j de $\mathcal{T}$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3, 4$. ¿Conoces una igualdad análoga en dimensión 2?