Algebra Lineal. Grupo C. 05/02/2015. Primer parcial

Duración: 3 horas.

Instrucciones: $\mathbb{K}$ denota un cuerpo. Empieza una hoja nueva con cada pregunta. Cuando uses enunciados o definiciones tratados en clase, EXPLÍCALO CONCISAMENTE. Se valorará la precisión, la claridad de los argumentos y el buen uso de la lengua. El examen está valorado en 8 puntos.

1. (1 punto) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q})$, demostrar que A se puede expresar como producto de una cantidad finita de matrices elementales y encontrar tales matrices.

2. (1 punto) Sea $a = (a_1, \ldots, a_n)^t \in \mathbb{K}^n$. Demostrar que el determinante

$$\Delta_n(a) = \begin{vmatrix} a_1+1 & a_1 & a_1 & \ldots & a_1 \\ a_2 & a_2+2 & a_2 & \ldots & a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \\ a_n & a_n & \ldots & a_n & a_n+n \end{vmatrix}$$

vale $n!\left(1 + a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n}\right)$.

3. (2.5 puntos) TEORÍA: Sea V un espacio vectorial real de dimensión $n \geq 0$ y sea $\langle , \rangle$ un producto escalar en V. Sean $0 \leq r \leq n$ y $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$ vectores no nulos perpendiculares dos a dos. Demostrar que $v_1, v_2, \ldots, v_r$ son linealmente independientes. Asimismo, demostrar que existen vectores $v_{r+1}, \ldots, v_n$ tales que $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ es base ortogonal de V.

4. (2 puntos) En $\mathbb{K}^5$ se considera el subespacio U_λ dado por

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + \frac{1}{\lambda} x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Para cada $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, hallar la dimensión de U_λ y una base del cociente V/U_λ. Hallar ecuaciones implícitas y paramétricas de $U_1 \cap U_2$ y $U_1 + U_2$.

5. (1.5 puntos) Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de la que se sabe lo siguiente:

- $f(v_1 + v_3) = 2w_1 + 2w_2 + 2w_3$,
- $f(v_2 - v_3) = 3w_1 - 3w_2 + 3w_3$,
- $f(v_3) = -w_1 + 2w_2 - w_3$,
- $f(v_4) = 0$

para ciertas bases $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de V y $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$ de V'. Hallar la matriz de f respecto de las bases B y B'. ¿Es f inyectiva? ¿Es f suprayectiva? ¿Por qué? Hallar una base del núcleo de f y ecuaciones implícitas de la imagen de f.