Nombre:

DNI:

Grado:

Algebra Lineal. Grupo B. 10/01/2019. Primer Parcial

Duración: 3 horas. Instrucciones: ***Entrega las respuestas en orden****: primero la pregunta 1, después la pregunta 2, etc.* ***Empieza*** *una hoja de papel con cada pregunta. Cuando uses enunciados o definiciones tratados en clase, EXPLÍCALO CONCISAMENTE. Se valorará la precisión, la claridad y completitud de los argumentos y el buen uso de la lengua.* ***No está permitido el uso de ningún aparato electrónico personal (móvil, calculadora, etc.)*** *El examen está valorado en 10 puntos.* ***La pregunta de teoría es a ELEGIR UN APARTADO ENTRE DOS***. $\mathbb{K}$ denota un cuerpo.

1. (TEORÍA: 3 puntos) Demuestra que

a. si $A, A', A'' \in M_n(\mathbb{K})$ son matrices tales que la fila i–sima de A es la suma de las filas i–simas de A' y A'', siendo el resto de las entradas de A' y A'' iguales a las correspondientes entradas de A, entonces $\det(A) = \det(A') + \det(A'')$, basándote en la definición recursiva de determinante (vista en clase) dada por el desarrollo de Laplace por la primera columna, o

b. si $f : V \to V'$ es una aplicación lineal entre $\mathbb{K}$–espacios vectoriales de dimensión finita, entonces $\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$. Define el núcleo y la imagen de f.

2. (2 puntos) Contesta este ejercicio en dos casos: si la característica del cuerpo $\mathbb{K}$ es distinta de 2, y si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$. Sea $A = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 6 & 2 \\ 21 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Halla el rango de A. ¿Es A el producto de una columna por una fila? En caso afirmativo, hállalas.

b. ¿Es A equivalente por filas y columnas a $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$? En caso afirmativo halla matrices regulares P, Q tales que $B = PAQ$, indicando los tamaños (u órdenes) de P y Q.

3. (1 punto) Usa el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{pmatrix}$ para calcular el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & a^2+c^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}$

4. (3 puntos) Dado $a \in \mathbb{K}$, sea U_a el subespacio vectorial generado por los vectores $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y sea W el subespacio de ecuación $x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

a. Calcula $\dim U_a$, en función de a. Exprésalo en una tabla. Calcula $\dim W$.
b. Halla ecuaciones de $U_a + W$, $U_a \cap W$ y sus dimensiones.
c. ¿Son isomorfos $\mathbb{K}^4/W$ y $\mathbb{K}$? En caso afirmativo, halla un isomorfismo $f : \mathbb{K}^4/W \to \mathbb{K}$. ¿Es $f \in (\mathbb{K}^4/W)^*$ cierto?

5. (1 punto) Sean $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $G = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de Gram de un producto escalar $\langle , \rangle$ respecto de $\mathcal{B}$. Calcula $\arccos(u_2, u_3)$ ¿Es $\mathcal{B}$ una base ortogonal? En caso negativo, halla un base ortogonal $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$.