Algebra Lineal. Grupo C. 12/06/2015

Duración: 3 horas.

Cuando uses enunciados o definiciones vistos en clase, explícalo CLARA Y CONCISAMENTE. La letra $\mathbb{K}$ denota un cuerpo. SE VALORARÁ LA PRECISIÓN, LA CLARIDAD DE LOS ARGUMENTOS Y EL BUEN USO DE LA LENGUA. El examen vale 8 puntos.

1. (2 puntos) (Teoría) Sea $n \in \mathbb{N}$. En un espacio afín $\mathcal{A}$ de dimensión finita definir posición relativa de dos variedades afines L_1 y L_2 (son paralelas, se cortan o se cruzan.) Para $\mathcal{A} = \mathbb{K}^n$ con n arbitrario, poner ejemplos concretos de los tres casos donde, además, $\dim L_1 = 1$ y $\dim L_2 = n - 2$.

2. (1 punto) Se considera la aplicación $f : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ dada por $f(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)$.

a. ¿Es f forma bilineal? ¿Es f simétrica?
b. Hallar ϕ forma cuadrática asociada a f. Hallar rango y signatura de ϕ.
c. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ¿proporciona ϕ un producto escalar? Justificar la respuesta.
d. Hallar las matrices de ϕ respecto de la base canónica y respecto de la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_1 + e_2, \ldots, e_1 + e_2 + \cdots + e_n\}$.

3. (1 punto) En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^4$, hallar la distancia entre el punto A de coordenadas $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ y la variedad afín

$$H : \begin{cases} x + y + z & = 0 \\ y + z + t & = 8 \end{cases}$$

Hallar la mínima variedad que pasa por A y contiene a H y su dimensión.

4. (1 punto) En $\mathbb{R}^3$ se considera la aplicación lineal f dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -7/25 & 24/25 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 24/25 & 7/25 \end{pmatrix}.$$

Comprobar que f es una isometría y describirla. ¿Conserva o invierte f la orientación? ¿Cuáles son los vectores fijos de f? [Indicación: $7^2 + 24^2 = 25^2$.] [Cultura general: $(2n+1, 2n(n+1), 2n(n+1)+1)$ es terna pitagórica.]

5. (1 punto) Hallar la matriz de Jordan J de A y una matriz P regular tales que $PJ = AP$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

[Indicación: puede resultar útil usar $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.] [Cultura general: Se dice que la matriz A es *sparse*.]

6. (2 puntos) Se considera la cónica real afín euclídea $\mathcal{C}$ dada por la ecuación

$$19x^2 + 49y^2 - 30\sqrt{3}xy - 64 = 0.$$

Aplicando, a lo sumo, un giro y una traslación, hallar la ecuación reducida de $\mathcal{C}$. ¿Qué tipo de cónica es? Dibujar $\mathcal{C}$ en todos los sistemas de referencia utilizados. Encontrar sus elementos geométricos: eje(s) de simetría, centro, foco(s), vértice(s), excentricidad, puntos de corte con los ejes, directriz(ces).