Algebra Lineal. Grupo B. 30/05/2019. Segundo Parcial

Duración: 3 horas. Instrucciones: Entrega las respuestas en orden: primero la pregunta 1, después la pregunta 2, etc. Empieza una hoja de papel con cada pregunta. Numera todas las hojas y anota el total de hojas que entregas. Cuando uses enunciados o definiciones tratados en clase, EXPLÍCALO CONCISAMENTE. Se valorará la precisión, la claridad y completitud de los argumentos y el buen uso de la lengua. ***No está permitido el uso de ningún aparato electrónico personal (móvil, calculadora, etc.). Se pueden usar 5 hojas–resumen que satisfagan los requerimientos publicados en el Campus Virtual.*** *El examen está valorado en 10 puntos.* $\mathbb{K}$ denota un cuerpo.

1. (1.7 puntos) Halla una matriz de Jordan de A y una matriz de paso y decide si A es diagonalizable, con $A = \begin{pmatrix} & & & a \\ & & a & \\ & a & & \\ a & & & \end{pmatrix}$, $0 \neq a \in \mathbb{C}$.

2. (TEORÍA: 3 puntos) Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ (de característica distinta de 2). Define forma bilineal simétrica $f : V \times V \to \mathbb{K}$ y forma cuadrática $\phi : V \to \mathbb{K}$ y demuestra las siguientes relaciones

$$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y) + 2f(x,y)$$

$$f(x,y) = \frac{1}{4}\left(\phi(x+y) - \phi(x-y)\right).$$

Si V tiene dimensión finita n, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ son bases de V y $A, A' \in M_n^{sim}(\mathbb{K})$ son las matrices de f respecto de $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, demuestra que las matrices A, A' son congruentes.

3. (1.6 puntos) Halla la distancia $d(P,M)$ para el punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ y el plano afín M : $\begin{cases} x_1 = 1 + \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha + \beta \\ x_4 = \beta, (\alpha, \beta \in \mathbb{R}). \end{cases}$ [Indicación: puede ser útil hallar el plano $M_P^{\perp}$.]

4. (2 puntos) Se consideran el eje E : $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 + 3\alpha \\ x_3 = 3 + 4\alpha, (\alpha \in \mathbb{R}) \end{cases}$ el ángulo α tal que $\cos\alpha = 4/5$ y sen $\alpha = 3/5$ y se pide la matriz $\begin{pmatrix} 1 & \mid & 0 \\ - & & - \\ p & \mid & \\ q & \mid & R \\ r & \mid & \end{pmatrix}$ de la rotación $r_{E,\alpha}$ en sentido positivo respecto del sistema de referencia canónico $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}_c\}$. [Para hallar la imagen $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ del origen, calcula el plano M perpendicular a E que pasa por el origen, e impón que el punto intersección $M \cap E$ quede fijo.]

5. (1.7 puntos) Sean k número real distinto de ± 1 y F_1, F_2 puntos distintos dados. Demostrar que el lugar geométirco de los puntos X del plano (real afín euclídeo) tales que el cociente de distancias $\mathrm{d}(X, F_1)/\,\mathrm{d}(X, F_2)$ vale k es una circunferencia. ¿ Coordenadas del centro?