Algebra Lineal. Grupo B. 11/06/2018. Examen Final de Junio

Duración: 3 horas. Instrucciones: Entrega las respuestas en orden. Empieza una hoja de papel nueva con cada pregunta. Cuando uses enunciados o definiciones tratados en clase, EXPLÍCALO CONCISAMENTE. Se valorará la precisión, la claridad y completitud de los argumentos y el buen uso de la lengua. ***No está permitido el uso de ningún aparato electrónico personal (móvil, calculadora, etc.) Se pueden usar 5 hojas–resumen que satisfagan los requerimientos publicados en el Campus Virtual.*** *El examen está valorado en 10 puntos.*

Los alumnos que tengan pendiente todo el curso deben contestar una y solo una pregunta de teoría, y dos del primer parcial y otras dos del segundo, a elegir.

Los alumnos que quieran subir nota pueden hacer todas las preguntas que deseen.

Los alumnos que opten a matrícula de honor deben hacer las preguntas EXTRA y, además, si quieren, pueden hacer otras.

$\mathbb{K}$ denota un cuerpo.

PARCIAL 1

1. (3 puntos: TEORIA) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$. Demostrar el **lema de prolongación:** ("para toda familia de vectores linealmente independiente de V, existe una base de V que la contiene") o demostrar el **teorema de la base:** ("dos bases cualesquiera de V tienen el mismo número de elementos"). Además, definir sistema de generadores, familia linealmente independiente y dimensión.

2. (1.75 puntos) Hallar y relacionar, en función de n, los valores de los determinantes de orden $n \in \mathbb{N}$ siguientes:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & \cdots & \cdots & 2 & 3 \end{vmatrix}, \qquad D_n = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2\cdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 3 \\ 2 & \cdots & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

Además, hallar la entrada general a_{ij}, b_{ij} de las matrices dadas.

3. (1.75 puntos) Sean $n \in \mathbb{N}$, $M_n^{ts}(\mathbb{K})$ la familia de las matrices triangulares superiores, $M_n^{tin}(\mathbb{K})$ la familia de las matrices triangulares inferiores con diagonal nula. Demuestra que $M_n(\mathbb{K}) = M_n^{ts}(\mathbb{K}) \oplus M_n^{tin}(\mathbb{K})$ y da un isomorfismo entre ambos espacios.

4. (1.75 puntos) Consideremos las formas lineales $f, g : \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}$ dadas por $f(x) = 3x_3 + 2x_5$ y $g(x) = 3x_1 + x_2 + x_3$. Dar una base del conjunto $\mathbb{K}^5/(\ker(f) \cap \ker(g))$.

5. (1.75 puntos) ¿ Existe una aplicación lineal $f : \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^3$ tal que $f(e_1) = \epsilon_1$, $f(e_2) = \epsilon_2$ y el núcleo viene dado por $x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, -2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0$? ¿ Es único? Justificar la respuesta. [Las bases canónicas se denotan $(e_1, e_2, \ldots, e_5)$ en $\mathbb{K}^5$ y $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ en $\mathbb{K}^3$.]

PARCIAL 2

6. (3 puntos: TEORIA) Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ dotado de un producto escalar $\langle , \rangle$ y sea $f : V \to V$ una isometría.

a. Demostrar que f es inyectiva.
b. Demostrar que $u, v \in V$ son ortogonales si y sólo si $f(u), f(v)$ lo son.
c. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es valor propio de f, demostrar que $\lambda = \pm 1$.

7. (1.75 puntos) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ y sean $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números tales que $A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$. Hallar u_n y v_n, en función de n, sabiendo que $u_0 = 1 = v_0$.

8. (1.75 puntos) Se considera el subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$. Sea $\phi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal dada por

$$\phi(x, y) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Determinar una base $\mathcal{B}$ de W respecto de la cual la forma bilineal $\phi_{|W\times W}$ sea diagonal.

9. (1.75 puntos) En $\mathbb{R}^4$ se consideran la recta r de ecuaciones paramétricas $x = 1 + \alpha$, $y = 2 - \alpha$, $z = 3$, $t = 5$ y el punto P de coordenadas $(1, 1, 1, 1)^T$. Halla la proyección ortogonal de P sobre r y la distancia entre r y P.

10. (1.75 puntos) Se considera la cónica $\mathcal{C}$ de ecuación $3y^2 + 3z^2 + 6yz + 2y - 2z - 7 = 0$. Mediante, a lo sumo, un giro de ejes y una traslación, hallar el tipo de cónica y su vértice o vértices en todos los sistemas de referencia utilizados.

EXTRA

11. Demostrar que el determinante de una matriz antisimétrica real $M = (m_{ij})$ de orden $n \in \mathbb{N}$ es el cuadrado de una expresión polinómica homogénea en m_{ij} con coeficientes racionales. (*Cayley*, 1847) [Indicación: usar el *complemento de Schur* de A en $M = \begin{pmatrix} A & B \\ D & C \end{pmatrix}$ que es, por definition, la matriz $C - DA^{-1}B$ y se sabe que $\det M = \det A \det(C - DA^{-1}B)$.]

12. En $\mathbb{R}^2$ se consideran los cuadrados $\mathcal{C}_1$ de vértices $(\pm 1, \pm 1)^T$ y $\mathcal{C}_2$ de vértices $(1, \pm 1)^T$ y $(2, \pm 1)^T$. Dibuja $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ y describe, verbalmente y mediante matrices, todos los movimientos de $\mathbb{R}^2$ que transforman $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$. ¿Cuántos hay? ¿Hay alguna estructura? Razona la respuesta.