Algebra Lineal. Grupo B. 14/06/2019. Examen Final de Junio

Duración: 3 horas. Instrucciones: Entrega las respuestas en orden. Empieza una hoja de papel nueva con cada pregunta. Cuando uses enunciados o definiciones tratados en clase, EXPLÍCALO CONCISAMENTE. Se valorará la precisión, la claridad y completitud de los argumentos y el buen uso de la lengua. ***No está permitido el uso de ningún aparato electrónico personal (móvil, calculadora, etc.) Se pueden usar 5 hojas–resumen que satisfagan los requerimientos publicados en el Campus Virtual.*** *El examen está valorado en 10 puntos.*

Los alumnos que tengan pendiente todo el curso deben contestar dos del primer parcial y otras dos del segundo, entre las cuales haya una y solo una pregunta de teoría, a elegir. Los alumnos que opten a subir nota o a MH deben proceder como los que tiene pendiente todo el curso y, además, pueden contestar otras preguntas.

$\mathbb{K}$ denota un cuerpo.

PARCIAL 1

1. (2.3 puntos) En función de $n \in \mathbb{N}$, halla (con demostración) el valor del determinante de orden n

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

así como la entrada general a_{ij} de la matriz dada.

2. (2.4 puntos)

a. Dadas matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, A simétrica y B antisimétrica demuestra que $\operatorname{tr}(AB) = 0$. ¿Para qué otros cuerpos es válido lo anterior? ¿Por qué?

b. ¿Qué dimensión debe tener el subespacio vectorial U para que $(\mathbb{K}^5/U)^*$ y $M_2^{sim}(\mathbb{K})$ sean isomorfos? ¿Por qué? Da, mediante ecuaciones, un ejemplo de U.

3. (2.3 puntos) Determina una aplicación lineal $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^4$ tal que $\ker f : \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ e $\operatorname{im} f : y_1 = y_2 = y_3$. ¿Hay más de una? Determina todas (dando sus matrices respecto de las bases canónicas).

4. (TEORÍA: 3 puntos) En un espacio vectorial real V de dimensión finita n, define producto escalar, norma asociada a ese producto escalar, coseno del ángulo formado por dos vectores y matriz de Gram del producto escalar respecto de una base $\mathcal{B}$ de V dada. Enuncia la *desigualdad de Cauchy–Schwarz–Bunyakovsky.*

PARCIAL 2

5. (TEORÍA: 3 puntos) Define autovalores, autovectores y polinomio caractéristico de una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, explica cuánto vale la suma de los autovalores y el producto de los mismos y por qué. Explica qué significado tiene que exista una base de $\mathbb{K}^n$ formada por vectores propios de A.

6. (2.3 puntos) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ y consideremos la matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$. Diagonaliza B (sobre el cuerpo $\mathbb{C}$) y calcula $\exp(B)$.

7. (2.3 puntos) En $\mathbb{K}^3$ se consideran las aplicaciones afines f y g asociadas, respectivamente, a las siguientes matrices

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ -4 & 5 & & \\ -4 & & 5 & \\ -4 & & & 5 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ 1 & 1 & & \\ 2 & & 1 & \\ 3 & & & 1 \end{array}\right)$$

Describe con palabras f y g y halla los puntos fijos de $f \circ g$ y de $g \circ f$.

8. (2.4 puntos) Se considera la cónica (real afín euclídea) $\mathcal{C}$ dada por la ecuación

$$3x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}xy + 2x - 2\sqrt{3}y = 0.$$

Averigua, mediante a los sumo un giro y una traslación, qué tipo de cónica es y encuentra un eje de simetría. (1 punto extra) Dibuja la cónica en todos los sistemas de referencia utilizados.