Algebra Lineal. Grupo C. EXAMEN FINAL DE JUNIO. 30/06/2015

Duración: 3 horas.

Todas las preguntas valen igual. Cuando uses enunciados o definiciones vistos en clase, explícalo clara y concisamente. La letra $\mathbb{K}$ denota un cuerpo. El examen vale 8 puntos.

Los alumnos con el primer parcial pendiente deben hacer las preguntas 1 a 4. Los alumnos con el segundo parcial pendiente deben hacer las preguntas 5 a 8. Los alumnos con toda la asignatura pendiente deben elegir tres preguntas del primer parcial y tres del segundo, haciendo, al menos una pregunta de teoría (en total). SE VALORARÁ LA PRECISIÓN, LA CLARIDAD DE LOS ARGUMENTOS Y EL BUEN USO DE LA LENGUA.

PRIMER PARCIAL

1. (Teoría) Definición de subespacio vectorial. Base y dimensión de un subespacio vectorial. Ecuaciones implícitas y paramétricas de un subespacio vectorial y paso de unas a otras y recíprocamente.

2.

a. Sean $n \in \mathbb{N}$ y U la matriz cuadrada de orden n todas cuyas entradas son unos. Sea x una indeterminada y $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n. Expresar el determinante de $A + Ux$ como polinomio en x. ¿Qué grado tiene?

b. Sea $M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$. ¿Cuánto vale el determinante de M_n? Resultado y demostración.

3. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ tal que $f^2 = f$, el núcleo está dado por $x+2y+3z+4t = 0$ y la imagen por $x = y = z = t$. Hallar la matriz de f respecto de la base canónica. Generalizar a cualquier dimensión.

4. Sea $B_c = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ la base canónica. En $\mathbb{R}^n$, consideremos las siguientes rectas vectoriales: E_j generada por e_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ y D generada por $e_1 + e_2 + \cdots + e_n$. Para $j = 1, 2, \ldots, n$, hallar el ángulo que forman E_j y D,

a. con el producto escalar usual

b. con el producto escalar cuya matriz de Gram es M_n de más arriba.

SEGUNDO PARCIAL

5. (Teoría) Clasificación de formas cuadráticas reales (definidas, semidefinidas e indefinidas.) Sea $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que si $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática definida, entonces $\Phi(v) > 0$, para todo $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ o $\Phi(v) < 0$, para todo $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$.

6. Sea $a \in \mathbb{C}$ no nulo. Hallar la matriz de Jordan J_a de la matriz $A_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$ y dos matrices regulares $P_1 \neq P_2$ tales que $P_1 J_a = A_a P_1$ y $P_2 J_a = A_a P_2$.

7. Sean E, F rectas distintas de $\mathbb{R}^2$ y consideremos las simetrías $s_E, s_F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sobre E, F resp. Hallar las matrices de s_E, s_F, $s_E \circ s_F$ y $s_F \circ s_E$ respecto de la base canónica. ¿Cómo actúan las aplicaciones $s_E \circ s_F$ y $s_F \circ s_E$ en los siguientes casos:

a. si E y F son paralelas?

b. si E y F forman un ángulo $\alpha \in [0, \pi)$?

Hacer sendas representaciones gráficas. [Indicación: podemos suponer que E tiene ecuación $y = 0$. Caso a: sea $d > 0$ la distancia entre E y F. Podemos suponer que F tiene ecuación $y = d$. Caso b: podemos suponer que F tiene ecuación $x \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha = 0$.]

8. Hallar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que la cónica $\mathcal{C}_a$ de ecuación $(x + ay)(x + y) = 1$ es una hipérbola equilátera. ¿Cuántas soluciones hay? Para dichos valores, hallar la ecuación reducida de $\mathcal{C}_a$ aplicando, a lo sumo, un giro y una traslación. Dibujar $\mathcal{C}_a$ en todos los sistemas de referencia utilizados. Encontrar sus elementos geométricos: ejes de simetría, centro, focos, vértices, excentricidad, puntos de corte con los ejes, directrices.