Algebra Lineal. Septiembre. Grupo C. 01/09/2015

Duración: 3 horas. Todas las preguntas valen igual. El examen vale 10 puntos. Debes hacer 4 ejercicios. Cuando uses enunciados o definiciones vistos en clase, explícalo clara y concisamente. La letra $\mathbb{K}$ denota un cuerpo.

SE VALORARÁ, ADEMÁS DE LA CORRECIÓN DE LOS RESULTADOS, LA CLARIDAD DE LA EXPOSICIÓN, LA JUSTIFICACIÓN DE LOS PLANTEAMIENTOS Y DE LOS CÁLCULOS Y LA UTILIZACIÓN ADECUADA DE LA LENGUA.

1. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $d_n = \det(A_n)$, donde $A_n = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

a. Calcular $a \in \mathbb{K}$ tal que $d_n = 5d_{n-1} - ad_{n-2}$. Escribir la matriz $M \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $\begin{pmatrix} d_n \\ d_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} d_{n-1} \\ d_{n-2} \end{pmatrix}$.

b. Hallar matrices $D, P \in M_2(\mathbb{K})$ tales que D diagonal, P regular y $D = P^{-1}MP$.

c. (Teoría) Explicar cómo hallar la potencia n–sima de una matriz diagonalizable M cuadrada de orden arbitrario.

d. Hallar M^n, para $n \in \mathbb{N}$.

e. Calcular d_1 y d_2. Demostrar que $d_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$, para $n \in \mathbb{N}$.

f. Generalizar. [Cultura general: se dice que la matriz A_n es *tridiagonal*.]

2. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^5$ dada por la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Comprobar que $f^2 = 0$.

b. Hallar bases de $\ker f$, $\operatorname{im} f$ y $\mathbb{K}^5/\ker f$, resp.

c. Hallar una base B' de $\mathbb{K}^5$ tal que la matriz de f respecto de B' sea $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

[Puntos extra: hallar una base B'' tal que la matriz de f respecto de B'' sea $(A')^t$.]

3. En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^4$ se consideran las variedades afines $U_1 : x_2 = x_3, x_1 + x_4 = 1, x_1 + x_2 = 0$ y $U_2 : x_1 = 2 - \lambda, x_2 = 3 + \lambda, x_3 = 6 + \lambda, x_4 = 1 + \lambda, (\lambda \in \mathbb{R})$. Hallar

a. la posición relativa de U_1 y U_2,

b. la proyección del punto $A_2 = (2, 3, 6, 1)^t$ sobre U_1 y la distancia entre U_1 y U_2,

c. las dimensiones de U_1, U_2 y unas ecuaciones implícitas de la mínima variedad afín que contiene a U_1 y U_2. ¿Qué dimensión tiene ésta?

4.

a. (Teoría) Definición de movimiento en $\mathbb{R}^n$. Enumerar los distintos movimientos de $\mathbb{R}^3$, dando una somera descripción de cada uno de ellos.

b. Determinar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la matriz $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \mid & 0 & 0 & 0 \\ -- & & -- & -- & -- \\ 3a & \mid & a+b & a & a \\ 3a & \mid & a & a+b & a \\ 3a & \mid & a & a & a+b \end{pmatrix}$ represente un movimiento en $\mathbb{R}^3$. [Indicación: salen 4 casos.] ¿Qué nos dice el hecho de que la matriz $A = \begin{pmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{pmatrix}$ sea simétrica sobre dicho movimiento?

c. Determinar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la matriz $\widetilde{A}$ represente un movimiento helicoidal (también llamado rotación deslizante), encontrando eje E, amplitud y sentido de la rotación y vector de traslación.

5. Se considera la cónica $\mathcal{C}$ de ecuación $18xy + 6x - 6y - 5 = 0$. Hallar la ecuación reducida de $\mathcal{C}$ aplicando, a lo sumo, un giro y una traslación. Dibujar $\mathcal{C}$ en todos los sistemas de referencia utilizados. Encontrar sus elementos geométricos: ejes de simetría, centro, focos, vértices, excentricidad, puntos de corte con los ejes, directrices.