Matrices de rotaciones, simetrías y roto–simetrías

María Jesús De la puente

Departamento de Álgebra
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense
28040 Madrid, Spain
mpuente@ucm.es

Dedication

Resumen

In this note we find the orthogonal matrices $R, S \in M_3(\mathbb{R})$ corresponding to the clockwise rotation r in $\mathbb{R}^3$ around the axis generated by a unit vector $u = (a, b, c)^t$ through an angle $\alpha \in [0, 2\pi)$, and to the symmetry s in $\mathbb{R}^3$ on the plane perpendicular to u. Matrix S depends on a, b, c and matrix R depends on $a, b, c, \cos\alpha$ and $\sin\alpha$. We show $SR = RS$.

2010 Mathematics Subject Classification: 15B10.
Key words: matriz ortogonal; rotación; simetría; proyección

En los libros de Álgebra Lineal al uso a nivel universitario, se encuentran diversos problemas en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ del siguiente tipo:

1. dados la recta E y el ángulo $\alpha \in [0, 2\pi)$, hallar la matriz R de la rotación (o giro) en $\mathbb{R}^3$ alrededor del eje E, de amplitud α y sentido positivo,
2. dado el plano H, hallar la matriz S de la simetría (o reflexión) en $\mathbb{R}^3$ sobre H,

donde E, α y H son datos concretos. Llamaremos a estos *problemas directos*. Bajo hipótesis adecuadas, las matrices R, S resultan ser ortogonales, i.e., $R^{-1} = R^t$ y $S^{-1} = S^t$. Asimismo encontramos los *problemas inversos*: dada la matriz ortogonal $M \in M_3(\mathbb{R})$, averiguar si M representa una rotación alrededor de un eje, o una simetría, o la composición de las anteriores, indicando en cada caso los elementos geométricos asociados (eje E, amplitud $\alpha \in [0, 2\pi)$ de la rotación, plano H de la simetría, etc.) [1]

[1]Podemos hablar también de rotación de amplitud $\alpha \in [0, \pi]$ con sentido positivo o negativo. La equivalencia es clara: la rotación de amplitud α y sentido negativo coincide con la rotación de amplitud $2\pi - \alpha$ y sentido positivo.

En esta nota abordamos las preguntas anteriores en general, lo que sirve para responder tanto problemas directos como inversos. Obtendremos $S \in M_3(F_1)$ y $R \in M_3(F_2)$, para cierta extensión de cuerpos

$$\mathbb{Q} \subseteq F \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \mathbb{R},$$

donde F es el cuerpo base del problema.

Trabajaremos en un espacio vectorial real V de dimensión 3, dotado de un producto escalar $\langle , \rangle$ y usaremos siempre bases ortonormales. Las coordenadas de los vectores de V (respecto de cualquier base) se escribirán en columna. Para fijar ideas, el lector puede tomar $V = \mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual $\langle , \rangle$, el producto vectorial usual $\wedge$ y la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$. Recordemos la conocida igualdad

$$u \wedge (v \wedge w) = v\langle u, w\rangle - w\langle u, v\rangle, \tag{1}$$

cuya demostración (usando coordenadas) es un sencillo ejercicio.

Fijemos una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V. Sean $(a, b, c)^t$ las coordenadas, respecto de $\mathcal{B}$, de un vector unitario u que genere E (i.e., $\langle u, u\rangle = a^2 + b^2 + c^2 = 1$). Denotemos por p_E la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre E. Denotemos por $r_{E,\alpha}$ y s_H la rotación y simetría descritas más arriba, donde el plano H, de ecuación $ax + by + cz = 0$, es precisamente $E^\perp$.

Lemma 0.1 *La matriz de p_E respecto de $\mathcal{B}$ es*

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}(a, b, c)). \tag{2}$$

Proof. Si $v \in V$ es un vector arbitrario, sabemos que $p_E(v) = u\langle u, v\rangle$, ya que u es unitario. Por tanto, si las coordenadas de v respecto de $\mathcal{B}$ son $(x, y, z)^t$, tenemos

$$p_E(v) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (a, b, c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Theorem 0.1 *La matriz de $r_{E,\alpha}$ es*

$$R = I + (\operatorname{sen}\alpha)B + (\cos\alpha - 1)(I - A) \in M_3(\mathbb{Q}(a, b, c, \cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)), \tag{3}$$

y la matriz de $s_{E^\perp}$ es

$$S = I - 2A \in M_3(\mathbb{Q}(a, b, c)), \tag{4}$$

donde I denota la matriz identidad de orden 3 y

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Proof. La demostración de (3) requiere varios pasos. Para empezar, observemos que la aplicación $g_u : V \to V$ tal que $v \mapsto u \wedge v$ es lineal. Además, la matriz de g_u respecto de $\mathcal{B}$ es B. Comprobamos que $-B^2 = I - A$, lo que significa que

$$-g_u^2 = \mathrm{id} - p_E = p_{E^\perp} \tag{5}$$

ya que las proyecciones sobre E y sobre $E^\perp$ son complementarias. A continuación veamos que

$$r_{E,\alpha} = \mathrm{id} + (\operatorname{sen}\alpha) g_u + (\cos\alpha - 1) p_{E^\perp}, \tag{6}$$

de donde se deducirá (3), gracias a (5) y al lema. Escribamos $f = \mathrm{id} + (\operatorname{sen}\alpha) g_u + (\cos\alpha - 1) p_{E^\perp}$ y demostremos que f y $r_{E,\alpha}$ actúan igual sobre los elementos de cierta base $\mathcal{B}'$ de V. Tomemos cualquier vector unitario v perpendicular a u y sea $\mathcal{B}' = \{u, v, u \wedge v\}$. Unos cálculos sencillos (usando $u \wedge (u \wedge v) = u\langle u, v\rangle - v\langle u, u\rangle = -v$ a partir de (1)) nos muestran que $f(u) = u$, $f(v) = (\cos\alpha)v + (\operatorname{sen}\alpha)(u \wedge v)$ y $f(u \wedge v) = -(\operatorname{sen}\alpha)v + (\cos\alpha)(u \wedge v)$, de donde se sigue la igualdad (6) y, con ella (3).

Ahora tomemos el vector $v = h^{-1}(-b, a, 0)^t$ y consideramos la base $\mathcal{B}' = \{u, v, u \wedge v\}$, donde $h = \sqrt{a^2 + b^2}$. La matriz de $s_{E^\perp}$ respecto de $\mathcal{B}'$ es $D = \operatorname{diag}(-1, 1, 1)$, ya que v y $u \wedge v$ son perpendiculares a u. Por tanto, la matriz de $s_{E^\perp}$ respecto de $\mathcal{B}'$ es $S = PDP^{-1}$, donde

$$P = \begin{pmatrix} a & -b/h & -ac/h \\ b & a/h & -bc/h \\ c & 0 & h \end{pmatrix}$$

es matriz ortogonal (i.e., $P^{-1} = P^t$). Un cálculo sencillo proporciona $S = PDP^t = I - 2A$, que es la expresión (4).

Corollary 0.1 *Llamemos* roto–simetría *a la composición* $s_{E^\perp} \circ r_{E,\alpha} = r_{E,\alpha} \circ s_{E^\perp}$. *Su matriz es*

$$SR = RS = S + (\operatorname{sen}\alpha)B + (\cos\alpha - 1)(I - A) \in M_s(\mathbb{Q}(a, b, c, \cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)). \tag{7}$$

Proof. Basta ver que rotación y simetría conmutan, y esto es cierto ya que $SB = B = BS$ y $S(I - A) = I - A = (I - A)S$, igualdades de comprobación inmediata.

Observaciones:

1. En (4) tenemos $S = I - 2A$, de donde se deduce la conocida relación (ver figura 1)

$$s_{E^\perp} = \mathrm{id} - 2p_E. \tag{8}$$

2. El rango de la matriz A es 1 y A no es ortogonal. Se verifica $A^2 = A = A^t$ e $(I - A)^2 = I - A$. La matriz B es antisimétrica y $-B^2 = I - A$. De aquí se sigue que las matrices R y S son ortogonales, i.e., $RR^t = I = SS^t = S^2$.

3. Los determinantes y las trazas valen $\det R = 1$, $\det S = \det(SR) = -1$, $\mathrm{tr} R = 1 + 2\cos\alpha$, $\mathrm{tr} S = 1$ y $\mathrm{tr}(SR) = -1 + 2\cos\alpha$. Determinante y traza son valores invariantes de una isometría de $\mathbb{R}^3$, pero NO la caracterizan en general (salvo que la traza valga 1). En efecto, el determinante nos dice si la isometría conserva o invierte la orientación y la traza proporciona el valor $\cos\alpha$. Queda, pues, por determinar el signo de $\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$.

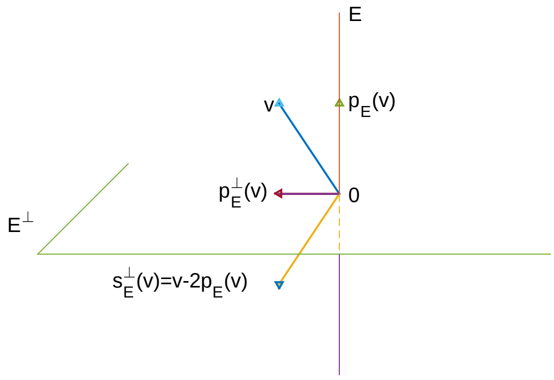

Figura 1: Simetría respecto del plano perpendicular a la recta E.

Ejemplo: Una matriz ortogonal sencilla (pero no trivial) es

$$M = \frac{1}{pq}\begin{pmatrix} p & q & 1 \\ p & -q & 1 \\ p & 0 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(F),$$

donde $p = \sqrt{2}$ y $q = \sqrt{3}$ y $F = \mathbb{Q}(p, q)$ es el cuerpo base. Como $MM^t = I$ y $\det M = 1$, sabemos que M representa una rotación alrededor de un eje E. Vamos a hallar un vector unitario $u = (a, b, c)^t$ que genere E y la amplitud de giro $\alpha \in [0, 2\pi)$ en sentido positivo. Ciertos cálculos proporcionan

$$a = \frac{p+q}{n}, \quad b = \frac{2-p-q+pq}{n}, \quad c = \frac{1}{n},$$

con $n = \sqrt{21 - 10p - 8q + 8pq}$. Como la traza es invariante sabemos, por la observación 3, que

$$1 + 2\cos\alpha = \mathrm{tr}M = \frac{-2+p-q}{pq} = -\frac{p}{2} + \frac{q}{3} - \frac{pq}{3},$$

de donde

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2} - \frac{p}{4} + \frac{q}{6} - \frac{pq}{6}, \quad \operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\frac{pqr}{12},$$

con $r = \sqrt{9 - 2p - 2pq}$. Sustituimos estos valores en (3) y obtenemos la igualdad $M = R$ cuando el signo del seno es NEGATIVO, i.e., $\operatorname{sen}\alpha = -pqr/12$. Conocidos $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$, deducimos que $\alpha \in (\pi, 2\pi/3)$; concretamente $\alpha \simeq 193°20'$.

Los libros de texto suelen usar otro procedimiento para calcular α. Hallan la amplitud

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{2} - \frac{p}{4} + \frac{q}{6} - \frac{pq}{6}\right),$$

que tiene DOS soluciones, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 2\pi)$, con $\alpha_1 \leq \alpha_2 = 2\pi - \alpha_1$. Luego determinan, mediante algún argumento geométrico, si $\alpha = \alpha_1$ ó $\alpha = \alpha_2$. En cambio, nuestro razonamiento se ha basado en las fórmulas (3), (4) y (7), trabajando en la extensión algebraica $\mathbb{Q}(p, q, n, r)$ del cuerpo base $\mathbb{Q}(p, q)$. En nuestro caso tenemos $\cos\alpha \simeq -0{,}973126$, $\operatorname{sen}\alpha \simeq -0{,}230270$ y $\alpha = \alpha_2 \simeq 193°20'$.

Agradecimientos: He tomado la matriz R (así como su obtención) de la parte debida a Roger C. Alperin en el libro [1], p. 113–114. Recomiendo vivamente este texto a todos los profesores universitarios de Algebra Lineal: en el encontrarán verdaderas joyas.

Referencias

[1] D. Carlson et al. (eds.): *Linear algebra gems. Assets for undergraduate mathematics*. MAA Notes series **59** (2002), ISBN:0–88385–170–9.