Algebra Lineal. Nuevos Ejercicios

1. (Extraído de *Nueve capítulos del arte matemática*, China, S. III AC) Supongamos que 5 corderos, 4 patos, 3 pollos y 2 conejos valen 1496 monedas, 4 corderos, 2 patos, 6 pollos y 3 conejos valen 1175 monedas, 3 corderos, un pato, 7 pollos y 5 conejos valen 958 monedas, 2 corderos, 3 patos, 5 pollos y un conejo valen 861 monedas. Dime cuál es el precio de un cordero, un pato, un pollo y un conejo.

2. *El problema de las cien aves.* (Extraído de *Manual de matemáticas de Zhang Qiujian*, China, S. V DC) Un gallo vale 5 monedas, una gallina 3 monedas y tres polluelos valen una moneda. Con 100 monedas queremos comprar 100 aves. ¿Cuántos gallos, gallinas y polluelos podemos comprar?

3. ¿Qué deben cumplir los parámetros reales a, b, c para que el sistema de ecuaciones siguiente tenga una solución con x, y, z reales?

$$\begin{cases} y^2 + z^2 & = 2a^2 + x^2/2 \\ x^2 + z^2 & = 2b^2 + y^2/2 \\ x^2 + y^2 & = 2c^2 + z^2/2 \end{cases}$$

4. Se dice que A es *idempotente* si $A^2 = A$ (resp. *involutiva* si $A^2 = I_n$) (resp. *nilpotente* si $A^2 = 0_n$). Sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, determinar todas las matrices de orden 2 idempotentes (resp. involutivas) (resp. nilpotentes).

5. Calcular los determinantes y generalizar los resultados a matrices de orden arbitrario: $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 14 & 143 & 1432 \\ 2 & 21 & 214 & 2143 \\ 3 & 32 & 321 & 3214 \\ 4 & 43 & 432 & 4321 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 & 123 & 1234 \\ 2 & 23 & 234 & 2341 \\ 3 & 34 & 341 & 3412 \\ 4 & 41 & 412 & 4123 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{pmatrix}.$$

Calcular los determinantes de orden arbitrario siguientes: $\begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & \cdots & (-1)^n a_n \\ 1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}.$$

6. *Determinante de Vandermonde.* Para cada $n \in \mathbb{N}$, demostrar que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

Indicación: obsérvese que $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2), \ldots, x^{n-1} - y^{n-1} = (x-y)(x^{n-2} + x^{n-3}y + \cdots + xy^{n-3} + y^{n-2})$. Comenzar restando la primera columna de las restantes columnas, y tomar $x = a_j$, $y = a_1$.

7. Una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ se dice *triangular superior* si $a_{ij} = 0$ siempre que $i > j$. Hallar el determinante de una tal matriz. Idem para triangular inferior, diagonal, triangular superior por bloques, triangular inferior por bloques y diagonal por bloques.

8. Dada $A \in M_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})$, demostrar que

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n},$$

donde S_n denota el grupo de permutaciones en n símbolos. Esto es la generalización de la *regla de Sarrus*.

9. Dadas matrices $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in M_{n\times r}(\mathbb{K})$, demostrar que

$$AB = (\operatorname{col}(A,1)| \cdots | \operatorname{col}(A,n)) \begin{pmatrix} \operatorname{fil}(B,1) \\ --- \\ \vdots \\ --- \\ \operatorname{fil}(B,n) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{col}(A,j) \operatorname{fil}(B,j)$$

y concluir que *el producto AB se expresa como la suma de n matrices de rango menor o igual que uno.* Además demostrar una matriz rectangular tiene rango menor o igual que uno si y sólo si es producto de columna por fila.

10. Dadas $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ tales que $AB = I_m$, ¿es cierto que $m = \min\{m, n\} = \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$? Dar una demostración o encontrar un contraejemplo.

11. Una matriz A de orden 3 se llama *cuadrado mágico* si la suma de cada una de sus 3 filas, de cada una de sus 3 columnas y de cada una de sus 2 diagonales es igual a un valor fijo $s \in \mathbb{K}$. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

a. Expresar la condición de que A sea un cuadrado mágico como un sistema lineal de 8 ecuaciones en las incógnitas s, a_i, b_i, c_i con $i = 1, 2, 3$.
b. Demostrar que $3b_2 = s$. Demostrar que la familia W de los cuadrados mágicos es un subespacio vectorial de $M_3(\mathbb{K})$ de dimensión 3 y que una base de W es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c. Sustituir las estrellas por números en las matrices B, C de modo que resulten cuadrados mágicos:

$$B = \begin{pmatrix} \star & 1 & \star \\ \star & \star & \star \\ 2 & \star & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

12.

a. En $\mathbb{R}^2$ se considera el haz de rectas paralelas a la recta de ecuación $3x+2y-6=0$. Identificar la familia anterior con el espacio cociente $\mathbb{R}^2/U$, para cierto subespacio U. Hacer una representación gráfica.
b. En $\mathbb{R}^3$ se considera el haz de planos paralelos al plano de ecuación $3x+2y-6=0$. Identificar la familia anterior con el espacio cociente $\mathbb{R}^3/U$, para cierto subespacio U. Hacer una representación gráfica.
c. En $\mathbb{R}^3$ se considera el haz de rectas paralelas a la recta de ecuaciones $x = 3, y = 7$. Identificar la familia anterior con el espacio cociente $\mathbb{R}^3/U$, para cierto subespacio U. Hacer una representación gráfica.

13. *Una construcción del cuerpo* $\mathbb{C}$. Sea

$$U = \{(x^2+1)p(x) : p(x) \in \mathbb{R}[x]\}.$$

Demostrar que U es un subespacio de $\mathbb{R}[x]$ y que $\mathbb{R}[x]/U$ es isomorfo a $\mathbb{C}$, como $\mathbb{R}$–espacios vectoriales. ¿Qué dimensión tienen? Mediante el isomorfismo anterior, trasladar la multiplicación de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}[x]/U$ y demostrar que $\mathbb{R}[x]/U$ es un cuerpo.

Otra construcción del cuerpo $\mathbb{C}$. Sea

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Demostrar que U, como subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$, es isomorfo a $\mathbb{C}$. Demostrar que U es un cuerpo isomorfo a $\mathbb{C}$.

14.

a. Demostrar que la desigualdad de Cauchy–Schwartz es una igualdad si y solo si los vectores involucrados son proporcionales.
b. Demostrar que si la desigualdad triangular es una igualdad, entonces los vectores involucrados son proporcionales.

15. Dados vectores u, v en un espacio vectorial euclídeo, demostrar que $|\|u\| - \|v\|| \leq |\|u - v\||$.

16. Demostrar que para cualesquiera vectores $x, x', y \in \mathbb{R}^3$ y escalar $a \in \mathbb{R}$, se verifica

a. $(x + x') \wedge y = x \wedge y + x' \wedge y$,
b. $(ax) \wedge y = a(x \wedge y) = x \wedge (ay)$,
c. $x \wedge y = -(y \wedge x)$,
d. si x, y son linealmente independientes, entonces $\|x \wedge y\|$ es el área del paralelogramo determinado por x e y.
e. *Construcción del producto vectorial de dos vectores.* Dados $x, y \in \mathbb{R}^3$, proyectamos y ortogonalmente sobre el plano vectorial $U = L(x)^{\perp}$, giramos el vector $p_U(y)$ un ángulo de $90°$ en el sentido adecuado a fin de que el sentido del vector m obtenido sea el mismo que el de $x \wedge y$ (regla de la mano izquierda). Finalmente tomamos $\|x\|m$, que es $x \wedge y$.

17. *Producto mixto.* Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, su producto mixto es $\langle x, y \wedge z \rangle$. En coordenadas, tenemos

$$\langle x, y \wedge z \rangle = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Sean $P_{x,y,z}$ el paralelepípedo determinado por x, y, z, $T_{x,y,z}$ el tetraedro determinado por x, y, z y $Pir_{x,y,x+y,z}$ la pirámide (irregular) determinada por $x, y, x + y, z$. Demostrar

a. $\operatorname{vol} P_{x,y,z} = |\langle x, y \wedge z \rangle|$,
b. $\operatorname{vol} T_{x,y,z} = |\langle x, y \wedge z \rangle| /6$,
c. $\operatorname{vol} Pir_{x,y,x+y,z} = |\langle x, y \wedge z \rangle| /3 = \operatorname{vol} Pir_{y,z,y+z,x} = \operatorname{vol} Pir_{z,x,z+x,y}$

Generalización: Dados n vectores en $\mathbb{R}^n$, se define el n–volumen del n–paralepípedo determinado por ellos como el valor absoluto del determinante de sus coordenadas respecto de la base canónica.

18. Demostrar que todo endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita es diferencia de dos automorfismos.

19.

- Sea $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una simetría (o reflexión) sobre una recta vectorial. Demostrar que existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$

tal que la matriz de s respecto de $\mathcal{B}$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. ¿Cuántas tales bases podemos encontrar en $\mathbb{R}^2$? Idem $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Sea $\alpha \in [0, 2\pi)$. En el plano $\mathbb{R}^2$ denotemos por r_α la rotación (o giro) de centro el origen, sentido positivo y amplitud α. Denotemos por s_α la simetría (o reflexión) sobre la recta vectorial que forma un ángulo de $\alpha/2$ con el semieje positivo de las x en sentido positivo. Observemos que $r_{2\pi-\alpha}$ es la rotación (o giro) de centro el origen, sentido NEGATIVO y amplitud α.

  Demostrar

$$r_\alpha \circ r_\beta = r_\beta \circ r_\alpha = r_{\alpha+\beta},$$

$$s_\alpha \circ s_\beta = r_{\alpha-\beta},$$

$$r_\alpha \circ s_\beta = s_{(\alpha+\beta)/2},$$

$$s_\alpha \circ r_\beta = s_{(\alpha-\beta)/2}.$$

20. *Matriz R de la rotación (o giro) $r_{E,\alpha}$ en $\mathbb{R}^3$, alrededor del eje $E = L(u)$, amplitud $\alpha \in [0, 2\pi)$ y sentido positivo, con $u = (a, b, c)^t$ unitario.*

a. Demostrar que la matriz de p_E, la proyección ortogonal sobre la recta E, es $A = uu^t = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$.

b. Demostrar que la aplicación $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $v \mapsto u \wedge v$ es lineal y satisface $g^2 = p_E - \mathrm{id}$ y $g^3 = -g$ y que la matriz de g es $B = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$.

c. Demostrar que $r_{E,\alpha} = \mathrm{id} + (\operatorname{sen}\alpha)g + (1 - \cos\alpha)g^2$ y que la matriz de $r_{E,\alpha}$ es

$$R = I + (\operatorname{sen}\alpha)B + (1 - \cos\alpha)(A - I).$$

d. Si $a \neq 0$ y $R = (r_{ij})$, demostrar que

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{r_{32} - (1 - \cos\alpha)bc}{a}, \ \cos\alpha = (\operatorname{tr} R - 1)/2.$$

e. (Sentido negativo) Demostrar que la matriz de $r_{E,-\alpha}$ es

$$I + (-\operatorname{sen}\alpha)B + (1 - \cos\alpha)(A - I) = R^t.$$

f. Demostrar que lo anterior no depende de que tomemos u ó $-u$.

21. *Matriz de la simetría (o reflexión) $s_{E^\perp}$ en $\mathbb{R}^3$ respecto del plano $E^\perp$ de ecuación $ax+by+cz = 0$, con vector $u = (a, b, c)^t$ unitario,* $E = L(u)$. Demostrar que $s_{E^\perp} = \mathrm{id} - 2p_E$ y que la matriz de $s_{E^\perp}$ es $S = I - 2A$, con las notaciones del problema previo (*Relación de Hausholder*).

22. *Matriz de la roto–simetría $s_{E^\perp} \circ r_{E,\alpha} = r_{E,\alpha} \circ s_{E^\perp}$ en $\mathbb{R}^3$ respecto del plano $E^\perp$ de ecuación $ax + by + cz = 0$, con vector $u = (a,b,c)^t$ unitario, amplitud α y sentido positivo, $E = L(u)$.* Con las notaciones de los dos problemas previos, demostrar

a. $SB = B = BS$ y $S(A - I) = (A - I) = (A - I)S$,
b. $SR = RS = S + (\operatorname{sen}\alpha)B + (1 - \cos\alpha)(A - I)$ es la matriz de la roto–simetría dada.
c. Si $a \neq 0$, demostrar que

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{(RS)_{32} - (2 - \cos\alpha)bc}{a}, \quad \cos\alpha = (\operatorname{tr} RS + 1)/2.$$

23. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$. Demostrar que A yA^t son semejantes.[Indicación: una forma de abordar este problema es comenzar resolviendo el caso particular $A = J$ donde $J = \lambda I + N$ es bloque de Jordan, $N = (n_{ij})$, con $n_{i,i+1} = 1$, $n_{ij} = 0$ en otro caso.]

24. Sea A una matriz cuadrada compleja con un único autovalor. Demostrar que el número de unos que figuran (fuera de la diagonal) en la matrix de Jordan de A es la diferencia entre las multiplicidades algebraica y geométrica.

25. *Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes.* Hallar la solución general de la ecuación:

a. $y''' - 2y'' - 3y' = 0$
b. $y''' + 2y'' + y' = 0$
c. $y''' + 4y'' + 13y' = 0$
d. $y^v - 2y^{iv} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0$.

26. Demostrar que los autovalores (reales o complejos) de una matriz A real ortogonal de orden arbitrario tienen módulo 1. (Indicación: sea $Av = \lambda v$, con $\lambda \in \mathbb{C}$ y $v \neq 0$ vector complejo no nulo. Calcular $\overline{Av}^t Av$.)

27. *Convexidad.* Dados puntos $A, B \in \mathbb{R}^n$, el *segmento* determinado por A, B es, por definición,

$$\operatorname{conv}(A,B) = \{\alpha A + \beta B : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta = 1, \alpha, \beta \geq 0\}.$$

Si $A \neq B$, la recta determinada por A, B es

$$\mathcal{A}(A,B) = \{\alpha A + \beta B : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta = 1\}.$$

Un subconjunto $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ se dice *convexo* si para cada $A, B \in \mathcal{C}$, el segmento determinado por A, B está contenido en $\mathcal{C}$. Demostrar:

a. la intersección arbitraria de convexos es convexo,
b. cada hiperplano afín de $\mathbb{R}^n$ es convexo,
c. cada subespacio afín de $\mathbb{R}^n$ es convexo.

Si H es el hiperplano de $\mathbb{R}^n$ de ecuación $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = c$, con $c \geq 0$, H determina dos *semiespacios cerrados* en $\mathbb{R}^n$:

$$H_+ = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \geq c\}$$

$$H_- = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \leq c\}$$

y dos *semiespacios abiertos* en $\mathbb{R}^n$:

$$H_+^\circ = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n > c\}$$

$$H_-^\circ = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n < c\}.$$

Dados puntos $A, B, C \in \mathbb{R}^n$, el triángulo determinado por A, B y C es

$$\operatorname{conv}(A, B, C) = \{\alpha A + \beta B + \gamma C : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha, \beta, \gamma \geq 0\}.$$

SI A, B, C no están alineados, el plano determinado por A, B y C es

$$\mathcal{A}(A, B, C) = \{\alpha A + \beta B + \gamma C : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha + \beta + \gamma = 1\}.$$

Demostrar:

a. cada semiespacio (abierto o cerrado) es convexo,
b. el triángulo $\operatorname{conv}(A, B, C)$ es convexo.

28. *Baricentros.* Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica distinta de 2 y 3. En un espacio afín sobre $\mathbb{K}$ se consideran tres puntos no alineados A, B, C. El baricentro de A y B es, por definición, el punto $\frac{A+B}{2}$. Es el punto medio del segmento $\operatorname{conv}(A, B)$. El baricentro de A, B y C es, por definición, el punto $\frac{A+B+C}{3}$. La mediana correspondiente a C es, por definición, la recta que une los puntos C y $\frac{A+B}{2}$. Sea G el baricentro de A, B y C. Demostrar que las tres medianas de $\operatorname{conv}(A, B, C)$ se cortan en G y G divide a cada mediana en segmentos en proporción $2/3$ y $1/3$.

29. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica distinta de 2 y 3 y un espacio afín sobre $\mathbb{K}$. Si G denota el baricentro de los puntos A, B, C, demostrar que el área de $\operatorname{conv}(A, B, G)$ es un tercio del área de $\operatorname{conv}(A, B, C)$. Demostrar que G divide a $\operatorname{conv}(A, B, C)$ en seis triángulos de igual área.

30. Buscar en un libro o en Wikipedia lo siguiente:

a. Teoremas de Ceva y Menelao (de la geometría afín),
b. ortocentro, incentro y circuncentro de un triángulo.

¿Se puede demostrar la existencia de estos tres puntos con argumentos de geometría afín euclídea?

31. Sean $A_1, A_2, \dots, A_r$ puntos en un espacio afín $\mathcal{A}$ de dimensión n. Probar que $\dim \mathcal{A}(A_1, A_2, \dots, A_r) = d$, donde

$$d + 1 = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr} \end{pmatrix}$$

y $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})^t$ son las coordenadas de A_j respecto de cierto sistema de referencia cartesiano de $\mathcal{A}$ dado. En particular, si $r = n + 1$, *los puntos $A_1, A_2, \dots, A_r$ son afínmente independientes si y solo si el determinante de la matriz anterior no se anula.*

32. Sea $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ una aplicación afín y sean $L, L_1, L_2 \subseteq \mathcal{A}$ y $L' \subseteq \mathcal{A}'$ variedades afines. Demostrar

a. $f(L)$ es variedad afín,
b. $f^{-1}(L')$ es variedad afín o el vacío.
c. f conserva las combinaciones afines y, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, f también conserva las combinaciones convexas.
d. si L_1, L_2 son paralelas, entonces $f(L_1), f(L_2)$ son paralelas.

33. La órbita que la Tierra describe alrededor del Sol es elíptica, con el Sol situado en uno de los focos (J. Kepler). Si el semieje mayor tiene una longitud de 150 millones de km y la excentricidad es 0,017, hallar las distancias al Sol mínima y máxima que la Tierra alcanza en su giro alrededor del mismo.

34. Hallar la ecuación (en coordenadas polares y cartesianas) de la cónica tal que tiene

a. foco F de coordenadas cartesianas $(2, 0)$, directriz de ecuación $x = -4$ y excentricidad $1/2$,
b. foco F de coordenadas cartesianas $(-3, 2)$, directriz de ecuación $x = 1$ y excentricidad 3,
c. foco F de coordenadas cartesianas $(-1, 4)$, directriz de ecuación $2x - y + 3 = 0$ y excentricidad 2.

35. Demostrar que la ecuación en coordenadas polares $r = \frac{7}{3+4\cos\theta}$, define una hipérbola uno de cuyos focos coincide con el polo. Idem para $r = \frac{1}{1-2\sin\theta}$.

36.

a. Demostrar que las directrices de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ son las rectas de ecuación $x = \pm\frac{a^2}{d} = \pm\frac{a}{e}$, donde $d^2 + b^2 = a^2$ y $e = \frac{d}{a}$ es la excentricidad.
b. Demostrar que las directrices de la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ son las rectas de ecuación $x = \pm\frac{a^2}{d} = \pm\frac{a}{e}$, donde $a^2 + b^2 = d^2$ y $e = \frac{d}{a}$ es la excentricidad.

37. Una hipérbola se dice *equilátera* si sus asíntotas son perpendiculares entre sí. Demostrar que la excentricidad de una hipérbola equilátera es $\sqrt{2}$.

38. Hallar el tipo de cónica, sus elementos (vértice(s), foco(s), directriz(ces), excentricidad y asíntotas (si las hubiere)) de las cónicas

a. $4x^2 + 9y^2 = 36$,
b. $x^2 - 9y^2 = 9$,
c. $x^2 - 7y + 2 = 0$.

Hacer una representación gráfica de cada curva.

39. Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los vértices de la hipérbola de ecuación $11x^2 - 7y^2 = 77$ y cuyos vértices son los focos de dicha hipérbola. Hacer una representación gráfica de dichas curvas.

40. Hallar el tipo de cónica en los siguientes casos:

a. $3x^2 - 4xy + 8x - 1 = 0$,
b. $6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 51 = 0$,
c. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$,
d. $4x^2 - y^2 + 56x + 2y + 195 = 0$.

En cada caso, hallar la ecuación canónica y los elementos de la cónica (vértice(s), foco(s), directriz(ces), excentricidad y asíntotas (si las hubiere)). Hacer una representación gráfica de cada curva que incluya los distintos sistemas de referencia utilizados.

41.

a. Sea $\mathcal{C}$ una cónica en $\mathbb{R}^2$. Probar que para toda recta l no contenida en $\mathcal{C}$, la intersección $\mathcal{C} \cap l$ consta, a lo sumo, de dos puntos.
b. Toma una cónica real irreducible $\mathcal{C}$ y un punto $P \in \mathcal{C}$ cualesquiera (ponte un ejemplo concreto). Considera el haz de rectas $\mathcal{H}$ que pasan por P. Para cada recta r de $\mathcal{H}$, fíjate en el punto de corte de r con el eje x: si ese punto es $(t, 0)$, llama a esa recta r_t. Cuando t varía en $\mathbb{R}$, r_t recorre $\mathcal{H}$. Interseca r_t con $\mathcal{C}$: obtendrás dos puntos, uno de los cuales es P. Las coordenadas del otro punto son expresiones racionales (i.e., cocientes de polinomios) en t. De esta forma has construido una *parametrización racional* de $\mathcal{C}$.

42. Hallar los puntos de corte de las cónicas $3x^2-4xy+8x-1 = 0$ y $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

43. ¿Verdadero o falso? $(y - 5)^2 + 3x - 3 = 0$ es la ecuación de una párabola y su directriz es la recta de ecuación $y = 3x/2$.

44. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ arbitrarios. En $\mathbb{R}^2$, hallar la ecuación de la imagen de la elipse de ecuación $(x/a)^2+(y/b)^2 = 1$ mediante la simetría axial cuyo eje es la recta de ecuación $x + y = c$.

45. Clasificar, según los valores del parámetro t, la cónica de ecuación $1-2x+2y+tx^2+2xy+ty^2=0$. Hallar el centro y los ejes para el caso $t=0$. En $\mathbb{R}^3$, representar gráficamente la superficie de ecuación $1-2x+2y+tx^2+2xy+ty^2=0$.

46. Sea $\mathcal{C}$ una cuádrica en $\mathbb{R}^3$. Probar que

a. para todo plano π no contenido en $\mathcal{C}$, la intersección $\mathcal{C}\cap\pi$ es una cónica, posiblemente degenerada,
b. para toda recta l, o bien l está totalmente contenida en $\mathcal{C}$, o bien la intersección $\mathcal{C}\cap l$ consta, a lo sumo, dos puntos.

47. En el plano complejo $\mathbb{C}^2$, sean $\mathcal{C}$ una cónica afín euclídea real irreducible (i.e., elipse, parábola ó hipérbola con ecuación real), P un punto y T_1, T_2 las rectas tangentes a $\mathcal{C}$ que pasan por P. Sean P_1, P_2 los puntos de corte de $\mathcal{C}$ con T_1, T_2 respectivamente, y sea T la recta determinada por P_1, P_2. Se dice que *P es polo de T y que T es polar de P respecto de $\mathcal{C}$.* Demostrar que si P es foco entonces T es directriz de $\mathcal{C}$. [Indicación: si $\mathcal{C}$ está dada por la ecuación de segundo grado $f(x,y)=0$ y P_j tiene coordenadas (x_j,y_j), entonces la recta tangente a $\mathcal{C}$ en P_j está dada por la ecuación $\frac{df(x_j,y_j)}{dx}(x-x_j)+\frac{df(x_j,y_j)}{dy}(y-y_j)=0$].

SOLUCIÓN EN CASO DE PARÁBOLA EN ECUACIÓN REDUCIDA $y^2=2px$, con $p>0$. Sabemos que el foco es el punto F de coordenadas $(p/2,0)$. Tenemos $f=y^2-2px$, con derivadas parciales $\frac{df}{dx}=-2p$ y $\frac{df}{dy}=2y$. La recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto $P_j\in\mathcal{C}$ es $-2p(x-x_j)+2y_j(y-y_j)=0$ y, si esta recta pasa por el foco, obtenemos $-2p(p/2-x_j)-2y_j^2=0$, de donde $-p^2=y_j^2$, luego $y_j=\pm pi$, con $i=\sqrt{-1}$. Hemos obtenido los puntos imaginarios $P_1=(-p/2,pi)$ y $P_2=(-p/2,-pi)$ en $\mathcal{C}$, que determinan la recta $x=-p/2$, que es la directriz, como queríamos demostrar. Observemos que como el foco queda en la *parte interna* de la parábola, las rectas tangentes T_1, T_2 a la parábola trazadas desde el foco resultan complejas, así como los puntos P_1, $P_2\in\mathcal{C}$, si bien la recta T, que los une, tiene ecuación real.

EN LOS CASOS DE ELIPSE O HIPÉRBOLA EN ECUACIÓN REDUCIDA SE RAZONA DE MODO PARECIDO.

48. (Para vacaciones de verano) Leer el capítulo 5 SPECIAL RELATIVITY de "Modern Geometry with Applications", G. A. Jennings, Universitext, Springer 1994. Leer el capítulo VII INVERSAS GENERALIZADAS Y MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS del libro de Merino y Santos.