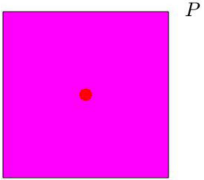
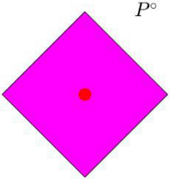
Volúmenes, politopos alcobados y matrices tropicales

M.J. de la Puente
F. Matemáticas, U. Complutense, Madrid
mpuente@ucm.es

$K \subset \mathbb{R}^n$ **cuerpo** (body) si K compacto convexo, interior no vacío
K **centralmente simétrico** si $K = -K$
Polar de K es $K^\circ := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \leq 1, \forall y \in K\}$
Politopo es envolvente convexa en $\mathbb{R}^n$ de conjunto finito
Ejemplo: $P = \text{conv}(p_1, p_2, \dots, p_r)$,
$P^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, p_k\rangle \leq 1, \forall k = 1, 2, \dots, r\}$, $p_1, p_2, \dots, p_r \in \mathbb{R}^n$ dados



$-1 \leq x_1 \leq 1$
$-1 \leq x_2 \leq 1$



$-1 \leq x_1 - x_2 \leq 1$
$-1 \leq x_1 + x_2 \leq 1$

Si $p_1 = (1, -1), p_2 = -p_1, p_3 = (1, 1), p_4 = -p_3 \in \mathbb{R}^2$,
$\langle x, p_1\rangle = x_1 - x_2, \langle x, p_2\rangle = -x_1 + x_2, \langle x, p_3\rangle = x_1 + x_2, \langle x, p_4\rangle = -x_1 - x_2$

Norma 2

C_n **cubo unidad** n–dim (de lado 2), C_n° **politopo de cruce unidad** n–dim (cross–polytope)

$$\mathrm{vol}(C_n) = 2^n, \quad \mathrm{vol}(C_n^\circ) = 2^n/n!$$

B_n es **bola unidad** n–dim, $\qquad B_n^\circ = B_n$

$$\mathrm{vol}(B_n) = \frac{\pi^{n/2}}{n/2\,\Gamma(n/2)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

$$\mathrm{vol}(K)\,\mathrm{vol}(K^\circ)?$$

(1949) **Desigualdad de Blaschke–Santaló**: $\mathrm{vol}(K)\,\mathrm{vol}(K^\circ) \leq \frac{\pi^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)^2}$

(1939) **Conjetura de Mahler**: $\frac{4^n}{n!} \leq \mathrm{vol}(K)\,\mathrm{vol}(K^\circ)$?

$$\mathrm{vol}(C_n)\,\mathrm{vol}(C_n^\circ) \leq \mathrm{vol}(K)\,\mathrm{vol}(K^\circ) \leq \mathrm{vol}(B_n)\,\mathrm{vol}(B_n^\circ)?$$

(Dyer y Frieze 1988, L. Khachiyan 1989): Calcular el **volumen** de un politopo es un problema $\#P$

Clase de complejidad $\#P$ (número P) ¿Qué es?

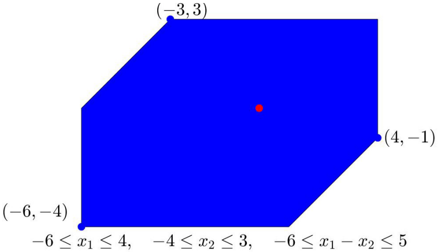
- **Problema de decisión** NP: ¿existen soluciones que satisfagan...?
- **Problema** $\#P$ **asociado al problema** NP **anterior**: ¿cuántas soluciones existen que satisfagan...?

- **Ejemplo:** ¿existen subconjuntos en una lista dada de enteros que suman cero? Es problema NP
- ¿cuántos subconjuntos existen, en dicha lista, que suman cero? Es su problema $\#P$ asociado

Politopo alcobado: ecuac. de caras de $P \subset \mathbb{R}^n$ son

- $x_i = a_i$
- $x_i - x_j = a_{ij}$, con $a_i, a_{ij} \in \mathbb{R}$ dados

Organizar coefs en matriz $(n+1) \times (n+1)$



$$A(P) = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -6 \\ -5 & 0 & -4 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

- $a_{i,n+1} \leq x_i \leq -a_{n+1,i}$
- $a_{i,j} \leq x_i - x_j \leq -a_{j,i}$ $\qquad A(P) = [a_{ij}] \in M_{n+1}(\mathbb{R} \cup -\infty)$

¿ **Al revés?:** si $A \in M_{n+1} \Rightarrow P(A) \subset \mathbb{R}^n$ politopo alcobado ?

(Sergeev (2009); P. (2013)) **Teorema:** si A normal e idempotente (con producto tropical) $\Rightarrow P(A)$ politopo alcobado

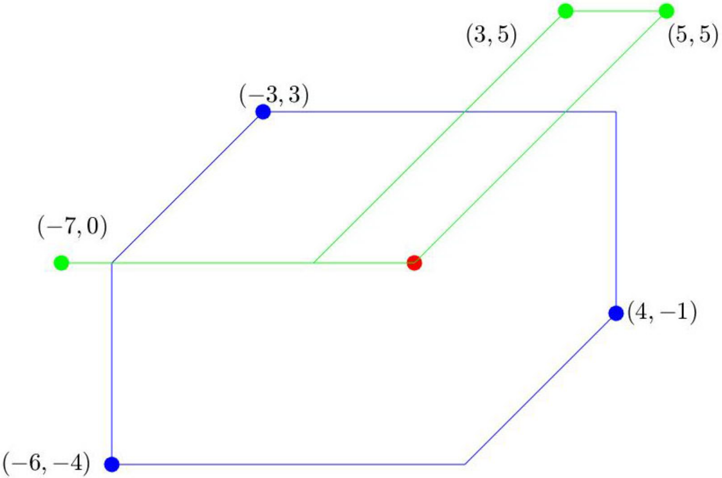
- A **normal:** $a_{ii} = 0$ y $a_{ij} \leq 0$, todo i, j
- A **idempotente:** $A \odot A = A$

$\oplus = \max$ es suma tropical $\qquad \odot = +$ es producto tropical

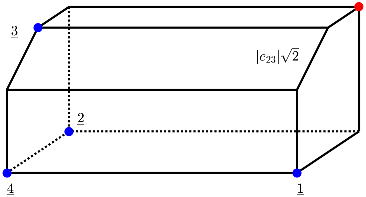
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -6 \\ -5 & 0 & -4 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad A \odot B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -6 \\ \max\{-5, \underline{0}, -9\} & 0 & 0 \\ \max\{-4, \underline{-3}, -5\} & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

- A idempotente, $B \odot B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{bmatrix}$, B no idempotente


(3, 5)
(5, 5)
(−3, 3)
(−7, 0)
(4, −1)
(−6, −4)

¿ Cierta Conjetura de Mahler para politopo alcobado P central–simétrico 3–dimensional?



- matriz $A = A(P) \in M_4$ normal idempot
- caja exterior
- seis biselados en caja, en ciclo
- $\operatorname{vol}(P) = \operatorname{vol}(\text{caja}) - \sum_{j=1}^{6} \operatorname{vol} P_j + \sum_j \operatorname{vol}(P_j \cap P_{j+1})$

- **Teorema** (2012) P.: A matriz normal idempot, $P(A)$ su politopo alcobado; A simétrica $\Leftrightarrow$ $P(A)$ central–simétrico
- **Teorema** (2017) P.: $\operatorname{vol}(P) = \ell_1\ell_2\ell_3 + \sum_{j=1}^{6} \frac{m_j^2 M_j}{2} - \frac{m_j^3}{6} - \frac{c_j^2 \ell_j}{2}$

$\operatorname{vol}(P)$ es **polinomio homogéneo, grado 3 en** a_{ij}, pues $\ell_1 = a_{14}$, $c_1 := a_{24} - a_{23}$, $c_2 := a_{14} - a_{13}$, $m_1 := \text{mín}\{|c_1|, |c_2|\}$, $M_1 := \text{máx}\{|c_1|, |c_2|\}$, etc.

Con transformación afín reducimos a **caso particular:** cubo unidad (arista 2), biselado por parámetros x, y, z $\qquad -1 \leq z \leq y \leq x \leq 0$

- $\mathrm{vol}(P) = 8 - x^2(y+z) - y^2 z + \frac{1}{3}\left(2x^3 + y^3\right) - 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$
- **Prop.** (2017) P.:
$\mathrm{vol}(P^\circ) = \frac{2/3}{(2+x)(2+y)} + \frac{2/3}{(2+y)(2+z)} + \frac{2/3}{(2+z)(2+x)} + \frac{1/3}{2+y} + \frac{2/3}{2+z} + \frac{1}{3}$

Conjetura de Mahler alcobados: $\mathrm{vol}(P)\,\mathrm{vol}(P^\circ) \geq \frac{4^3}{3!} = \frac{32}{3}$?

$MC|_R \geq 0$? $\qquad R$ es tetraedro $-1 \leq z \leq y \leq x \leq 0$

$$MC = 2x^4yz - 3x^3y^2z - 3x^3yz^2 + xy^4z - 3xy^3z^2 + 8x^4y + 6x^4z - 12x^3y^2 \\ -23x^3yz - 9x^3z^2 - 6x^2y^2z - 6x^2yz^2 + 4xy^4 - 15xy^3z - 9xy^2z^2 - \\ 6xyz^3 + 2y^4z - 6y^3z^2 + 24x^4 - 40x^3y - 38x^3z - 30x^2y^2 \\ -66x^2yz - 24x^2z^2 - 12xy^3 - 54xy^2z - 24xyz^2 - 18xz^3 + 10y^4 - 34y^3z - \\ 24y^2z^2 - 12yz^3 - 8x^3 - 156x^2y - 144x^2z - 72xy^2 \\ -72xyz - 72xz^2 - 28y^3 - 144y^2z - 60yz^2 - 48z^3 - 192x^2 - 96xy - \\ 120xz - 192y^2 - 144yz - 192z^2 - 96x - 144y - 192z.$$

MUCHAS GRACIAS

http://www.mat.ucm.es/~mpuente/