Ejercicios de Curvas Algebraicas

1. Representar la curva $\mathcal{C}_\lambda$ de ecuación

$$Y^2 = 4X^3 + 6X^2 + \lambda,$$

para $\lambda = -1, 0, 2$. ¿En qué puntos interceptan las curvas a los ejes coordenados? Idem para $\mathcal{C}_\lambda$ de ecuación

$$X^2 = Y^3 - 3Y + \lambda,$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. Idem para la *lemniscata de Huygens*, de ecuación $Y^2 - X^2 + X^4 = 0$.

2. Existe una gran variedad de curvas con forma de ocho, llamadas *lemniscatas*, tales como $X^4 + Y^4 - XY = 0$, $X^4 + Y^4 - Y^2 = 0$, $X^4 + Y^4 - Y^2 + X^2 = 0$, etc. Hallar las correspondientes ecuaciones polares.

3. La *lemniscata de Bernoulli* (1694) tiene ecuación $(X^2+Y^2)^2-X^2+Y^2 = 0$. Hacer una representación gráfica de la curva real. Hallar su ecuación en coordenadas polares. Demostrar que es una curva racional. *[Indicación: cortar con la familia de circunferencias que pasan por los puntos* $(0,0)$ *y* $(1,0)$*].*

4. La *cardioide* $\mathcal{C}$ se obtiene como la trayectoria de un punto P sobre una circunferencia K que rueda sin deslizamiento por el exterior de una circunferencia K' del mismo radio r. Obtener unas ecuaciones paramétricas, que involucren funciones trigonómetricas. Obtener una parametrización racional. Obtener la ecuación de $\mathcal{C}$ en coordenadas cartesianas y en coordenadas polares. Solución: si $r = 1$, se obtiene la ecuación $(X^2 + Y^2 + X)^2 = X^2 + Y^2$.

La *tricúspide* (también llamada *hipocicloide de tres puntas*, o *deltoide*) se obtiene como la trayectoria de un punto P sobre una circunferencia K de radio r que rueda sin deslizamiento por el interior de una circunferencia K' de radio $3r$. Obtener unas ecuaciones paramétricas, que involucren funciones trigonómetricas. Obtener una parametrización racional. Obtener la ecuación en coordenadas cartesianas y en coordenadas polares. Solución: si $r = 1/3$, se obtiene la ecuación $3(X^2+Y^2)^2+8X(3Y^2-X^2)+6(X^2+Y^2)-1 = 0$.

5. Sean p, q números naturales primos entre sí. Dibujar la curva de ecuación

$$Y^q = X^p$$

en el cuadrado $[-1,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. *[Indicación: tener en cuenta la paridad de* p *y* q*.]* Describir la misma curva en un entorno del origen de $\mathbb{C}^2$.