Ejercicios de Curvas Algebraicas

Los siguientes ejercicios sobre cónicas son de repaso. En ellos se pone de manifiesto que las clasificaciones son más sencillas sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ que sobre $\mathbb{R}$, y también son más simples en el caso proyectivo que en el afín.

6. *Cónicas en el plano afín real.* Dada la cónica $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}^2$ de ecuación

$$a_{11}X^2 + a_{12}XY + a_{22}Y^2 + a_1X + a_2Y + a_0 = 0,$$

con $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0 \in \mathbb{R}$ y a_{11}, a_{12}, a_{22} no todos nulos, demostrar que existe una transformación afín

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

tal que $\phi(\mathcal{C})$ tiene por ecuación una de las siguientes:

a. $X^2 + Y^2 - 1 = 0$, *elipse,*
b. $X^2 + Y^2 + 1 = 0$, *conjunto vacío,*
c. $X^2 - Y^2 + 1 = 0$, *hipérbola,*
d. $Y + X^2 = 0$, *parábola,*
e. $X^2 - Y^2 = 0$, *par de rectas que se cortan,*
f. $X^2 + Y^2 = 0$, *punto,*
g. $X^2 - 1 = 0$, *par de rectas paralelas,*
h. $X^2 + 1 = 0$, *conjunto vacío,*
i. $X^2 = 0$, *recta doble.*

7. *Cónicas en el plano proyectivo real.* Dada la cónica $\mathcal{C}$ en $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ de ecuación

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}Z^2 + a_{12}XY + a_{13}XZ + a_{23}YZ = 0,$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ no todos nulos, demostrar que existe una transformación proyectiva

$$\phi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

tal que $\phi(\mathcal{C})$ tiene por ecuación una de las siguientes:

a. $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$, *cónica no degenerada no vacía,*
b. $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$, *conjunto vacío,*
c. $X^2 - Y^2 = 0$, *par de rectas,*
d. $X^2 + Y^2 = 0$, *punto,*
e. $X^2 = 0$, *recta doble.*

8. *Cónicas en el plano afín complejo.* Dada la cónica $\mathcal{C}$ en $\mathbb{C}^2$ de ecuación

$$a_{11}X^2 + a_{12}XY + a_{22}Y^2 + a_1X + a_2Y + a_0 = 0,$$

con $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0 \in \mathbb{C}$ y a_{11}, a_{12}, a_{22} no todos nulos, demostrar que existe una transformación afín

$$\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$$

tal que $\phi(\mathcal{C})$ tiene por ecuación una de las siguientes:

a. $Y + X^2 = 0$, *parábola,*
b. $X^2 + Y^2 + 1 = 0$, *cónica no degenerada no parábola,*
c. $X^2 + Y^2 = 0$, *par de rectas que se cortan,*
d. $X^2 + 1 = 0$, *par de rectas paralelas,*

e. $X^2 = 0$ *recta doble.*

9. *Cónicas en el plano proyectivo complejo.* Dada la cónica $\mathcal{C}$ en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de ecuación

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}Z^2 + a_{12}XY + a_{13}XZ + a_{23}YZ = 0,$$

con $a_{ij} \in \mathbb{C}$ no todos nulos, demostrar que existe una transformación proyectiva

$$\phi : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

tal que $\phi(\mathcal{C})$ tiene por ecuación una de las siguientes:

a. $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$, *cónica no degenerada,*
b. $X^2 + Y^2 = 0$, *par de rectas,*
c. $X^2 = 0$, *recta doble.*

10.

a. Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ una cónica no degenerada. Demostrar que existe una transformación proyectiva

$$\phi : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

tal que $\phi(\mathcal{C})$ tiene por ecuación

$$XZ - Y^2 = 0.$$

[Esto significa que en apartado a) del ejercicio 9 podríamos haber puesto la ecuación $XZ - Y^2 = 0$ en lugar de $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$.]

b. Se dice que dos **curvas** proyectivas $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ son **proyectivamente equivalentes** si existe una transformación proyectiva

$$\xi : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

tal que $\xi(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$. Demostrar que dos cónicas proyectivas complejas no degeneradas son proyectivamente equivalentes.

11. Sea $Q = (a : b : c)$ un punto de $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ distinto de $P_1, P_2, P_3,\ P_4$. Hallar todas las cónicas que pasan por $P_1, \ldots, P_4$ y Q.

12. Estudiar la curva algebraica $\mathtt{V}_{\mathbb{R}}(f_a) \subseteq \mathbb{R}^2$ de ecuación

$$f_a = X^2 + 2aXY + Y^2 = 0,$$

según sea $|a| > 1$, $|a| = 1$ o $|a| < 1$, con $a \in \mathbb{R}$. Idem para $\mathtt{V}_{\mathbb{C}}(f_a) \subseteq \mathbb{C}^2$, con $|a| = 1$ o $|a| \neq 1$, $a \in \mathbb{C}$. Representar en $\mathbb{R}^3$ la superficie algebraica de ecuación

$$X^2 + 2XYZ + Y^2 = 0,$$

que llamaremos *doble paraguas.*

13. *Paraguas cúbico.* Representar en $\mathbb{R}^3$ la superficie algebraica de ecuación

$$ZX^2 - Y^2 + X^3 = 0.$$

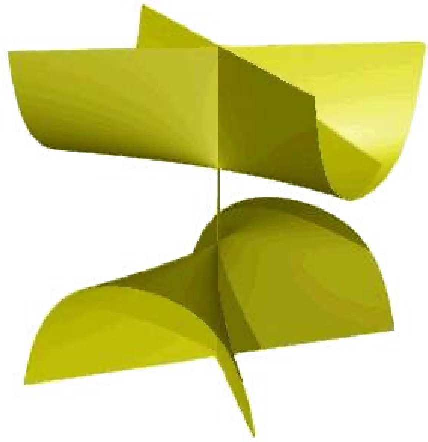

FIGURA 1. Doble paraguas.

FIGURA 2. Paraguas cúbico.

14. *Óvalos de Cassini* (1680). Sean e un número real positivo y F_1, F_2 dos puntos distintos del plano $\mathbb{R}^2$. Se considera la familia $\mathcal{C}$ de los puntos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$\mathrm{d}(P, F_1)\,\mathrm{d}(P, F_2) = e,$$

donde d denota la distancia euclídea. Demostrar que $\mathcal{C}$ es una cuártica. [Indicación: para hallar una ecuación, se puede suponer que F_1 tiene coordenadas $(-a, 0)$ y $F_2 = (a, 0)$]. Relacionar esta curva con la *lemniscata de Bernoulli*, de ecuación $(X^2+Y^2)^2-X^2+Y^2 = 0$.

15. Demostrar que la curva *cicloide* no es algebraica *[esto fue demostrado por C. Huygens]*. Dicha curva es la trayectoria $\mathcal{C}$ descrita por un punto M fijo sobre el borde de un disco D de radio $a > 0$ que rueda sin deslizamiento a lo largo de una recta L.

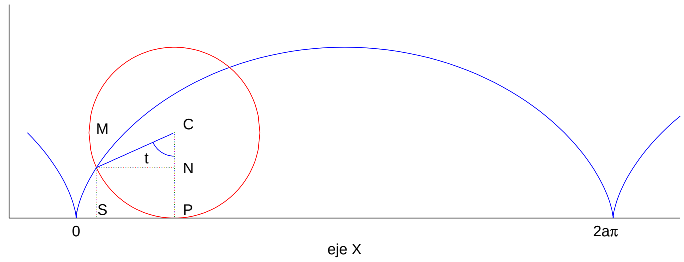

FIGURA 3. Cicloide