Ejercicios de Curvas Algebraicas

16. Hallar los puntos de intersección de la circunferencia unidad con la *cúbica de Neil*.

17. Para cada una de las siguientes curvas, escribir las ecuaciones de sus tres partes afines obtenidas por deshomogeneización respecto de X, Y, Z. Determinar sus puntos de intersección con los ejes coordenados y las multiplicidades de intersección en ellos.

a. $\mathcal{C}_{a,b} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de ecuación $Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3$, con $a, b \in \mathbb{C}$.
b. $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de ecuación $X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 = 2XYZ(X + Y + Z)$,
c. $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de ecuación $XZ^3 = (X^2 + Z^2)Y^2$.

18. Hallar los puntos de intersección y las multiplicidades de intersección en ellos de las curvas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de ecuaciones respectivas

$$Y^2Z - X^3 = 0, \qquad XYZ - ZY^2 + X^3 = 0.$$

19. Hallar los puntos de intersección y la multiplicidad de intersección en ellos de las curvas $\mathtt{V}_{\mathbb{C}}(F)$ y $\mathtt{V}_{\mathbb{C}}(G)$, con

a. $F = Y^2 - XZ$, $G = Y^2Z - XZ^2 + X^3$,
b. $F = Y^2Z - X(X - 2Z)(X + Z)$, $G = X^2 + Y^2 - 2XZ$,
c. $F = (X^2 + Y^2)Z + X^3 + Y^3$, $G = X^3 + Y^3 - 2XYZ$.

20. Se consideran las cúbicas proyectivas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ de ecuaciones respectivas

$$Y^3 - X^2Z = 0, \qquad Y^2Z - X^3 = 0.$$

Determinar la multiplicidad de intersección de ambas en cada punto $P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.

21. *Superficie con pliegue*. Vamos a representar gráficamente la superficie $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación

$$X^3 + XZ - Y = 0.$$

Fijemos un valor $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ con $z \neq 0$. Demostrar que

a. El valor $x \in \mathbb{R}$ es raíz múltiple del polinomio

$$X^3 + zX - y \in \mathbb{R}[X]$$

si y solo si

$$27y^2 + 4z^3 = 0, \qquad x = 3y/2z.$$

[Indicación: usar un discriminante, ver apéndice B.]

b. Existen tres valores reales distintos de x si y solo si

$$27y^2 + 4z^3 < 0.$$

Por otro lado, existe un único valor real de x si y solo si

$$27y^2 + 4z^3 > 0.$$

Dibujar la superficie $\mathcal{S}$ y la proyección de su “pliegue” sobre el plano de ecuación $X = 0$. *Esta superficie surge como primer ejemplo de la* teoría de catástrofes.