Ejercicios de Curvas Algebraicas

31. *Cúbica racional normal.* Consideremos la curva $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}^3$ dada por la parametrización (t, t^2, t^3).

a. Demostrar que $\mathcal{C}$ es lisa, i.e., $\mathcal{C}$ no posee puntos de autointersección ni puntos en los que se anule el vector derivado.
b. Hallar las proyecciones de $\mathcal{C}$ sobre los planos coordenados y dar ecuaciones implícitas de las mismas. Representar estas curvas en $\mathbb{R}^2$. ¿Son lisas?
c. Hallar la proyección de $\mathcal{C}$ sobre el plano Π de ecuación

$$X + Y + Z = 0$$

en la dirección

$$X = Y = Z.$$

¿Es lisa?

En los siguientes ejercicios hay que estudiar, en primer lugar, la minimalidad de los polinomios dados.

32. Encontrar los puntos singulares, sus órdenes y el cono tangente en ellos de las siguientes curvas:

a. $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}^2$ de ecuación $Y^3 - Y^2 + X^3 - X^2 + 3Y^2X + 3X^2Y + 2XY = 0$,
b. $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}^2$ de ecuación $X^4 + Y^4 - X^2Y^2 = 0$,
c. $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}^2$ de ecuación $Y^2 - X^3 - X = 0$.

33. Encontrar los puntos singulares, sus órdenes y las tangentes en dichos puntos de las siguientes curvas:

a. $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de ecuación $XY^4 + YZ^4 + XZ^4 = 0$,
b. $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de ecuación $X^2Y^3 + X^2Z^3 + Y^2Z^3 = 0$,
c. $\mathcal{C}_\lambda \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de ecuación $Y^2Z - X(X - Z)(X - \lambda Z) = 0$, con $\lambda \in \mathbb{C}$,
d. $\mathcal{C}_n \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de ecuación $X^n + Y^n \pm Z^n = 0$, con $n \in \mathbb{N}$, (*curva de Fermat n-sima*).

Nótese que las propiedades de las curvas $\mathtt{V}(X^n + Y^n - Z^n)$ y $\mathtt{V}(X^n + Y^n + Z^n)$ son esencialmente las mismas, cuando se trabaja sobre $\mathbb{C}$ y que, por simetría, es más cómoda la ecuación que lleva signo positivo en Z^n. En cambio, si se trabaja sobre $\mathbb{R}$ y se escoge signo positivo, se obtienen curvas vacías, para los valores pares de n; por ello es usual el signo negativo para Z^n, en el caso real.

34. Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, se considera el polinomio cuadrático

$$F_\lambda = X^2 + Y^2 + Z^2 + \lambda(X + Y + Z)^2.$$

a. ¿Para qué valores de λ posee la curva $\mathtt{V}(F_\lambda)$ algún punto singular? Calcular dichos puntos singulares.
b. Calcular las tangentes L, L' a la curva $\mathtt{V}(F_{-1/3})$ en su único punto singular y comprobar que

$$\mathtt{V}(F_{-1/3}) = L \cup L'.$$

c. Reformular el ejercicio en términos de haces de cónicas.

35. *Segundo criterio de las formas.* Sean $D, E \in \mathbb{C}[X,Y]$ formas no nulas de grados respectivos $2 \leq d < e$ y primas entre sí. Consideremos el polinomio

$$f = D + E$$

y la curva $\mathcal{C} = \mathtt{V}(f) \subseteq \mathbb{C}^2$. Demostrar que f es minimal para $\mathcal{C}$ y que $\operatorname{Sing}\mathcal{C} = \{(0,0)\}$.

36. *Curvas elípticas e hiperelípticas.* Consideremos la curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^2$ de ecuación

$$Y^2 - \phi(X) = 0,$$

donde $\phi \in \mathbb{C}[X]$ tiene grado $d \geq 3$ y no es un cuadrado. Demostrar las siguientes propiedades.

a. f es irreducible.
b. Cada punto singular (x,y) de $\mathcal{C}$ satisface $y = 0$; más aún, el punto $(a,0)$ es singular si y sólo si a es raíz múltiple de ϕ.
c. $\mathcal{C}$ tiene un único punto en el infinito y que dicho punto es liso si y sólo si $d = 3$. ¿Es dicho punto de inflexión? ¿Tiene asíntotas o ramas parábolicas la curva $\mathcal{C}$?
d. Para $\phi = (5 - X^2)(4X^4 - 20X^2 + 25)$, hallar el lugar singular de $\mathcal{C}$.

Si $d = 3$ o 4, la curva se dice *elíptica*; si $d \geq 5$, la curva se dice *hiperelíptica*.