Ejercicios de Curvas Algebraicas

45. En $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ se consideran las rectas L_1 de ecuación $Y = Z$ y L_2 de ecuación $X = Z$.

a. Hallar las cónicas tangentes en P_j a L_j, con $j = 1, 2$.
b. Idem y además pasan por P_3.

46. En $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ se consideran las rectas L_1 de ecuación $Y = Z$ y L_2 de ecuación $X = Z$. Hallar todas las cúbicas que tienen en P_1 un punto doble no ordinario con tangente L_1, pasan por P_3 y tienen una inflexión en P_2 con tangente L_2. ¿Cuántas hay?

En $\mathbb{C}^2$, definimos la *circunferencia de centro* $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ *y radio* $0 \neq r \in \mathbb{C}$ como la cónica afín de ecuación

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 - r^2 = 0.$$

También llamaremos *circunferencia* a la clausura proyectiva de una circunferencia afín. Los puntos

$$P_i = (i : 1 : 0), \qquad P_{-i} = (-i : 1 : 0)$$

de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ se denominan *puntos cíclicos*.

47. Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ una cónica no degenerada. Demostrar que $\mathcal{C}$ es una circunferencia si y solo si $\mathcal{C}$ pasa por los puntos cíclicos. *[Este resultado lo demostró V. Poncelet.]* Demostrar que las circunferencias de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ constituyen un sistema lineal de dimensión cuatro. Hallar las cónicas degeneradas de dicho sistema lineal.

48.

a. Dado un punto P genérico en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, demostrar que las circunferencias de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ con centro P constituyen un haz y hallar las cónicas degeneradas del mismo.
b. Dados un punto P genérico y una recta L genérica en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ con $P \notin L$, demostrar que las circunferencias de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ que pasan por P y tienen centro en L constituyen un haz y hallar las cónicas degeneradas del mismo.
c. Dada una recta L genérica en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, comprobar que las circunferencias de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tangentes a L no constituyen un sistema lineal.

49. Encontrar los puntos de $\mathbb{C}^2$ de intersección de las cónicas de ecuaciones

$$Y^2 + X^2 - Y - 3X = 0, \qquad Y^2 - 6XY - X^2 + 11Y + 7X - 12 = 0.$$

[Indicación: Usar dos métodos: uno, vía resultantes y otro, calculando las cónicas degeneradas del haz generado por los datos.]

50. Con ayuda de la cónica de ecuación $Y = X^2$ (y sin usar calculadora ni ordenador), hallar las raíces complejas del polinomio

$$X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X - 2.$$

51. Consideremos en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ los puntos $R_1, \ldots, R_4$ de coordenadas $(\pm 1 : \pm 1 : 1)$ y los puntos $Q_1, \ldots, Q_5$ de coordenadas $(0 : 5 : 1), \ldots, (0 : 9 : 1)$. Hallar la dimensión del sistema lineal $\mathcal{S}$ de las cúbicas que pasan por $R_1, \ldots, R_4, Q_1, \ldots, Q_5$. Si es posible, hallar generadores reducibles de $\mathcal{S}$.

52. Se consideran los puntos $(\pm 1, \pm 2)$, $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$ de $\mathbb{C}^2$.

a. Hallar la dimensión del sistema lineal de las cúbicas que pasan por dichos ocho puntos.
b. Idem para los puntos anteriores y el punto $(1/2, 3/2)$. ¿Es (son) irreducible(s)?
c. Idem para los puntos anteriores y el punto $(1/2, 5/2)$. ¿Es (son) irreducible(s)?
d. Idem para los puntos anteriores y el punto $(0, 0)$. ¿Es (son) irreducible(s)?

53. Los siguientes conocidos teoremas de geometría proyectiva se pueden demostrar usando haces de cúbicas.

a. Sean $\mathcal{C}$ una cúbica plana proyectiva y H un hexágono inscrito en $\mathcal{C}$. Supongamos que dos pares de lados opuestos de H se cortan en sendos puntos de $\mathcal{C}$. Demostrar que el restante par de lados opuestos de H también se corta en un punto de $\mathcal{C}$.
b. *Teorema de Pascal* (1639). Los puntos de intersección de los lados opuestos de un hexágono H están alineados, si H está inscrito en una cónica irreducible.
c. *Teorema de Brianchon* (1806). Las rectas que unen los vértices opuestos de un hexágono H son concurrentes, si H circunscribe a una cónica irreducible. *[Es dual del anterior.]*
d. *Teorema de Desargues* (1648). Sean dos triángulos distintos T, de vértices S_0, S_1, S_2 y T' de vértices S'_0, S'_1, S'_2. Sean L_j y L'_j los lados de T y T' opuestos a S_j y a S'_j, respectivamente y sean las intersecciones
$$L_j \cap L'_j = \{R_j\},$$
$j = 0, 1, 2$. Si T y T' están en perspectiva desde un punto P, entonces R_0, R_1, R_2 son puntos alineados.
e. *Teorema de Pappus* (c. siglos III–IV). Sean $S_0, S_1, S_2, Q_0, Q_1, Q_2$ puntos distintos del plano y sean
$$L_{S_1Q_2} \cap L_{S_2Q_1} = \{R_0\},\ L_{S_0Q_2} \cap L_{S_2Q_0} = \{R_1\},\ L_{S_0Q_1} \cap L_{S_1Q_0} = \{R_2\}.$$
Si existen rectas distintas L, M tales que $S_0, S_1, S_2 \in L \setminus \{P\}$ y $Q_0, Q_1, Q_2 \in M \setminus \{P\}$, siendo
$$L \cap M = \{P\},$$
entonces R_0, R_1, R_2 son puntos alineados.

Nótese que los recíprocos de estos famosos teoremas también son ciertos.

54. Hallar la base de cada uno de los siguientes haces de cúbicas:

a. generado por $X^3 + X^2Z, \qquad Y^2Z,$
b. generado por $X^3, \qquad X^2Z - Y^2Z,$
c. generado por $X^3 - Y^2Z, \qquad X^2Z.$

Además, comprobar que en todas las cúbicas genéricas de todos los haces anteriores, el punto P_3 es doble ordinario.

55. *Cúbicas de Steiner.* Consideremos el haz de cúbicas
$$\mathcal{H} = \{\mathcal{C}_{\lambda,\mu} : \lambda, \mu \in \mathbb{C}\},$$
donde $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ es la curva definida por la forma
$$F_{\lambda,\mu} = \mu(X^3 + Y^3 + Z^3) + 3\lambda XYZ.$$

Sea $\omega = e^{2\pi i/3} \in \mathbb{C}$.

a. Demostrar que la curva $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ es singular si y solo si
$$\mu = 0 \text{ o bien } [\mu = 1 \text{ y } \lambda \in \{-1, -\omega, -\omega^2\}]$$
y que, en cada uno de estos cuatro casos, la curva $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ es la unión de tres rectas no concurrentes.

b. Hallar las inflexiones de las *cúbicas de Steiner* no singulares. Demostrar que se trata de nueve puntos sobre doce rectas y describir la configuración de dichos puntos y rectas.

c. Hallar la base de $\mathcal{H}$.