CURVAS ALGEBRAICAS REALES PLANAS

M. J. de la Puente * †

Dedicado a J. Arregui

Resumen

En este trabajo se presentan y contrastan las propiedades algebraicas y topológicas más relevantes de las curvas algebraicas planas afines y proyectivas definidas sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$. Definimos la clase $\mathcal{F}$ de las curvas planas reales que poseen un polinomio minimal, con las cuáles se puede trabajar como con las curvas planas complejas.

1991 Math. Subj. Class.: 14H50, 14P25

1 Introducción

Todos los textos elementales sobre curvas algebraicas renuncian en un momento muy temprano al estudio de las curvas reales que, considera–das como objetos patológicos de difícil comprensión, son mencionadas a penas de pasada. Evidentemente, conviene comenzar con las curvas planas. Para los autores, son las curvas complejas las más sencillas de estudiar, y son mejores aún las proyectivas que las afines. Contrasta esta visión con la de aquel que se aproxima por vez primera a las curvas algebraicas, para quien un camino natural sería, tras haber comprendido las gráficas de funciones reales de variable real, pasar al estudio de las curvas reales afines (donde Y es función implícita de X), de ahí a las curvas reales proyectivas y sólo entonces a las curvas afines y proyectivas complejas.

*Departamento de Algebra, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040-Madrid, e mail:MariaJesus_delaPuente@mat.ucm.es

†Financiado parcialmente por DGICYT PB95-0354

Estas notas quieren dar a conocer los aspectos más básicos de las curvas algebraicas planas definidas sobre $\mathbb{R}$ (o, más generalmente, sobre un cuerpo real cerrado R). Los textos disponibles, elementales o no, trabajan sobre un cuerpo algebraicamente cerrado C, como por ejemplo $\mathbb{C}$. Esto se debe al uso que desde un primer momento se hace del *Teorema fundamental del álgebra.* En efecto, toda curva algebraica plana $\mathcal{C}$ definida sobre $\mathbb{C}$ es infinita (se deduce fácilmente intersecando con rectas arbitrariamente alejadas del origen) y posee un *polinomio minimal,* (en el sentido de que todo polinomio que se anule sobre la curva es necesariamente múltiplo de éste), único salvo producto por constantes no nulas. Su grado se denomina *grado de la curva* $\mathcal{C}$ y se demuestra el famoso y básico *Teorema de Bézout,* según el cual dos curvas algebraicas proyectivas planas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ de grados respectivos m y n sin componentes irreducibles en común se cortan en j puntos distintos, con $0 < j \leq mn$. El hecho de que el teorema fundamental del álgebra no se verifique para el cuerpo $\mathbb{R}$ junto con la existencia de polinomios reales cuyos conjuntos de ceros son finitos o incluso vacíos, impide un comienzo análogo para la teoría de curvas reales.

Nuestra aportación, presentada en la segunda sección de estas notas, comienza por dar condiciones para que una curva algebraica real plana sea infinita. A continuación se caracteriza (en términos algebraicos elementales) la clase $\mathcal{F}$ de todas las curvas algebraicas planas reales para las que existe un *polinomio minimal* y, por tanto, para las que podemos definir la noción de *grado.* Las herramientas que utilizamos son tres: la continuidad de los polinomios como funciones en $\mathbb{R}^2$ o en $P^2(\mathbb{R})$, la noción de polinomio indefinido, semidefinido o definido y la solución afirmativa dada por Artin al problema 17º de Hilbert. De éstas, la tercera es posiblemente desconocida para muchos, si bien su enunciado es muy asequible (su demostración, que queda fuera del alcance de estas notas, no presenta grandes dificultades, para quien desee estudiarla). La clase $\mathcal{F}$ es suficientemente amplia y creemos que merece la pena su consideración. Por ejemplo, del teorema de Bézout deducimos de inmediato que dos curvas algebraicas proyectivas planas reales $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ en la clase $\mathcal{F}$ de grados respectivos m y n sin componentes irreducibles en común se cortan en j puntos reales distintos, con $0 \leq j \leq mn$.

En la práctica, puede no ser fácil determinar si una curva algebraica real concreta $\mathcal{C}$ pertenece a la clase $\mathcal{F}$, ya que para ello se requiere conocer la descomposición en factores irreducibles de un polinomio que proporcione una ecuación para $\mathcal{C}$ así como algunos aspectos de las componentes conexas de $\mathcal{C}$; ver [3] y su bibliografía.

En la sección tercera se encuentran las propiedades topológicas más relevantes de las curvas algebraicas afines y proyectivas complejas y reales, indicando ejemplos sencillos y referencias donde se pueden encontrar las demostraciones de las mismas.

2 Curvas afines y proyectivas: aspectos algebraicos

Sean K un cuerpo, $s \in \mathbb{N}$ y $f_1, \ldots, f_s \in K[X,Y]$. El conjunto $\{(x,y) \in K^2 : f_1(x,y) = 0, \ldots, f_s(x,y) = 0\}$ se denota $\mathtt{V}_K(f_1, \ldots, f_s)$ y se denomina *conjunto algebraico* del plano afín K^2 o *conjunto de ceros de* $f_1, \ldots, f_s$ *en* K^2. Claramente tenemos
(a) $\mathtt{V}_K(f_1, \ldots, f_s) = \mathtt{V}_K(f_1) \cap \ldots \cap \mathtt{V}_K(f_s)$,
(b) $\mathtt{V}_K(f_1 f_2) = \mathtt{V}_K(f_1) \cup \mathtt{V}_K(f_2)$; en particular, si f divide a h entonces $\mathtt{V}_K(f) \subseteq \mathtt{V}_K(h)$,
(c) si K es cuerpo infinito, tenemos $\mathtt{V}_K(f) = K^2$ si y sólo si $f = 0$, y
(d) $\mathtt{V}_K(c) = \emptyset$, $\forall c \in K \setminus \{0\}$.

Un conjunto algebraico $\mathcal{C}$ de K^2 se dice *irreducible* si para cualesquiera conjuntos algebraicos $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ de K^2 con $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ se tiene que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$ ó $\mathcal{C} = \mathcal{C}_2$.

Una *curva algebraica afín plana sobre* K es, por definición, el conjunto de ceros en K^2 de un polinomio de grado positivo $f \in K[X,Y]$, ésto es, $\mathtt{V}_K(f)$. Diremos que $f = 0$ es una *ecuación para* $\mathtt{V}_K(f)$. Por ejemplo (ver [8]), para cada $c \in \mathbb{R}$, tenemos la curva algebraica real $\mathtt{V}_{\mathbb{R}}(f_c) \subseteq \mathbb{R}^2$, donde $f_c = X^2 + 2cXY + Y^2 \in \mathbb{R}[X,Y]$, que corresponde al punto $(0,0)$, a una recta o a la unión de dos rectas, según sea $|c| < 1, |c| = 1$ ó $|c| > 1$, respectivamente. En efecto, basta observar que $f_c = (X + cY)^2 + (1 - c^2)Y^2$. El conjunto vacío es una curva algebraica real: lo obtenemos, por ejemplo, como conjunto de ceros del polinomio $X^2 + 1$ o de $Y^2 + 1 \in \mathbb{R}[X,Y]$. Esto no es cierto si sustituimos $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$.

El subíndice indicativo del cuerpo se suprimirá cuando se sobreentienda el cuerpo K en el que se trabaja. Una curva $\mathtt{V}(f)$ se dice *irreducible* si es irreducible como conjunto algebraico.

Lema 1 *Toda familia finita de puntos de $\mathbb{R}^2$ constituye una curva algebraica real.*

dem. Dados $(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)\in\mathbb{R}^2$, tenemos $\mathrm{V}(g_c)=\{(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)\}$ donde $g_c=\prod_{j=1}^n[(X-a_j)^2+2c(X-a_j)(Y-b_j)+(Y-b_j)^2]$, cualquiera que sea $c\in\mathbb{R}$ con $|c|<1$. ■

Este resultado es falso si sustituimos $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$: en efecto, del teorema fundamental del álgebra se deduce sin dificultad que para todo $f\in\mathbb{C}[X,Y]$ de grado positivo, la curva $\mathrm{V}(f)$ posee una cantidad infinita de puntos.

Lema 2 *Salvo el propio $\mathbb{R}^2$, todo conjunto algebraico de $\mathbb{R}^2$ constituye una curva algebraica real.*

dem. Tenemos $\mathrm{V}_K(f_1,\ldots,f_s)=\mathrm{V}_K(f_1)\cap\ldots\cap\mathrm{V}_K(f_s)=\mathrm{V}_K(f_1^2+\cdots+f_s^2)$. ■

De nuevo, este resultado es falso si sustituimos $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$.

Consideremos el cuerpo $K(X)$, de las expresiones racionales en la indeterminada X con coeficientes en K. En el anillo de polinomios en la indeterminada Y, $K(X)[Y]$, disponemos de algoritmo de Euclides, con el tamaño de los restos de la división entera controlado por el grado de los polinomios, (esta misma propiedad no es cierta en el anillo de polinomios en dos indeterminadas $K[X,Y]$). Sin dificultad, se deduce de ahí la existencia de máximo común divisor $g\in\mathbb{R}(X)[Y]$ para cualesquiera dos elementos $f,h\in\mathbb{R}(X)[Y]$ y se verifica que $g=lf+mh$, para ciertos $l,m\in\mathbb{R}(X)[Y]$. Usando lo anterior (ver demostración del lema de Study real, más abajo) o alternativamente, usando resultantes, es fácil demostrar la siguiente

Proposición 1 (Pre–Bézout). *Sean K un cuerpo arbitrario, y $f,h\in K[X,Y]$ de grado positivo y sin factores en común. Entonces $\mathrm{V}(f)\cap\mathrm{V}(h)$ es conjunto finito, posiblemente vacío.* ■

Vayamos al caso $K=\mathbb{R}$. Diremos que el polinomio $f\in\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ es *indefinido* si existen $a,b\in\mathbb{R}^n$ tales que $f(a)<0<f(b)$. En caso contrario, se dice que f es *definido positivo* si $f(a)>0$, para todo $a\in\mathbb{R}^n$, es *definido negativo* si $f(a)<0$, para todo $a\in\mathbb{R}^n$, es *semidefinido positivo* si $f(a)\geq 0$, para todo $a\in\mathbb{R}^n$ y es *semidefinido negativo* si $f(a)\leq 0$, para todo $a\in\mathbb{R}^n$.

Proposición 2 *Si $f\in\mathbb{R}[X,Y]$ es indefinido, entonces $\mathrm{V}(f)$ posee una cantidad infinita de puntos.*

dem. Podemos suponer que existen a y $b_1<b_2$ en $\mathbb{R}$ tales que $f(a,b_1)<0<f(a,b_2)$. Por continuidad, existe $\delta>0$ tal que $f(u,b_1)<0<f(u,b_2)$, para todo $u\in(a-\delta,a+\delta)$. Por el teorema del valor intermedio, para cada $u\in(a-\delta,a+\delta)$ existe b_u en el intervalo (b_1,b_2) tal que $f(u,b_u)=0$. ■

Veamos a continuación un par de condiciones suficientes para la indefinición.

Proposición 3 *Sea $f\in\mathbb{R}[X,Y]$ de grado d positivo.*
(a) Si d es impar entonces f es indefinido.
(b) Si existe $(x_0,y_0)\in\mathrm{V}(f)$ tal que $\operatorname{grad}(f)(x_0,y_0)\neq(0,0)$ entonces f es indefinido.

dem. (a) Un cambio de coordenadas nos permite suponer que $f(0,0)\neq 0$. Para cada $\lambda\in\mathbb{R}$, consideremos el polinomio $g_\lambda\in\mathbb{R}[X]\setminus\{0\}$ dado por $g_\lambda(X):=f(X,\lambda X)$. Tenemos $\deg(g_\lambda)\leq\deg(f)$ para todo $\lambda\in\mathbb{R}$ con igualdad para todo $\lambda\in\mathbb{R}\setminus F$, donde $F\subseteq\mathbb{R}$ es cierto conjunto finito. Dado $\lambda\in\mathbb{R}\setminus F$, es conocido que existen $x_\lambda,x'_\lambda\in\mathbb{R}$ tales que $g(x_\lambda)<0<g(x'_\lambda)$, de donde concluimos.

(b) Sea por ejemplo, $\frac{\partial f}{\partial X}(x_0,y_0)\neq 0$. Entonces la función $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que asigna a x el valor $f(x,y_0)$ es estrictamente monótona en cierto entorno de x_0 y, al ser $f(x_0,y_0)=0$, necesariamente cambia de signo en dicho entorno. Alternativamente, para demostrar (b) basta aplicar el teorema de la función implícita. ■

Se conoce como *lema de Study* el siguiente resultado: *dados $f,h\in\mathbb{C}[X,Y]$ ambos de grado positivo tales que f es irreducible y $\mathrm{V}(f)\subseteq\mathrm{V}(h)$, entonces f divide a h.* De aquí se deduce lo que denominamos *irreducibilidad compleja*, i.e., la relación existente entre la irreducibilidad de un polinomio f y la irreduciblilidad de la curva $\mathrm{V}(f)$: *dado $f\in\mathbb{C}[X,Y]$ de grado positivo, la curva $\mathrm{V}(f)$ es irreducible si y sólo si existen $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $g\in\mathbb{C}[X,Y]$ irreducible y $k\in\mathbb{N}$ tales que $f=cg^k$. En particular, si g es irreducible entonces $\mathrm{V}(g)$ es irreducible.*

Para $\mathbb{R}$ podemos demostrar

Proposición 4 (Lema de Study real). *Dados $f, h \in \mathbb{R}[X,Y]$ ambos de grado positivo tales que f es irreducible e indefinido y $\mathtt{V}(f) \subseteq \mathtt{V}(h)$, entonces f divide a h.*

dem. [6] Podemos suponer que existen a y $b_1 < b_2$ en $\mathbb{R}$ tales que $f(a,b_1) < 0 < f(a,b_2)$. Es fácil ver que si f no divide a h en $\mathbb{R}[X,Y]$ entonces f tampoco divide a h en $\mathbb{R}(X)[Y]$. Así, 1 es máximo común divisor de f y h, luego existen $l, m \in \mathbb{R}(X)[Y]$ tales que $1 = lf + mh$. Quitando denominadores, obtenemos $d \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ y $l', m' \in \mathbb{R}[X,Y]$ tales que $d = l'f + m'h$, con $l' = dl$ y $m' = dm$. Según vimos antes, existe $\delta > 0$ y para cada $u \in (a-\delta, a+\delta)$ existe b_u en el intervalo (b_1, b_2) tales que $(u, b_u) \in \mathtt{V}(f)$. Asi, $(u, b_u) \in \mathtt{V}(h)$ luego $d(u) = 0$, para todo $u \in (a-\delta, a+\delta)$, de donde $d = 0$, contradicción. ∎

Como vemos, las curvas reales $\mathtt{V}(f)$, con f polinomio indefinido, tienen propiedades que reproducen las de las curvas complejas.

A continuación, vamos a deducir en el caso real, qué relación hay entre la irreducibilidad de un polinomio f y la irreduciblilidad de la curva $\mathtt{V}(f)$. En primer lugar, tenemos ejemplos de polinomios semidefinidos e irreducibles f tales que $\mathtt{V}(f)$ es reducible: basta tomar $f = X^2 + Y^2(Y-1)^2 \in \mathbb{R}[X,Y]$, $\mathtt{V}(f) = \{(0,0),(0,1)\}$.

Proposición 5 (Irreducibilidad real). *Si $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $g \in \mathbb{R}[X,Y]$ es indefinido e irreducible, $k \in \mathbb{N}$ y $f = cg^k$ entonces $\mathtt{V}(f)$ es irreducible. En particular, $\mathtt{V}(g)$ es irreducible.*

dem. Tenemos $\mathtt{V}(f) = \mathtt{V}(g)$. Supongamos que $\mathtt{V}(g) = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, con $\mathcal{C}_1 = \mathtt{V}(h_1, \dots, h_s)$ y $\mathcal{C}_2 = \mathtt{V}(t_1, \dots, t_m)$ para ciertos $s, m \in \mathbb{N}$ y $h_1, \dots, h_s$, $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}[X,Y]$ de grados positivos. Como g es indefinido, entonces $\mathcal{C}_1$ es infinito o bien $\mathcal{C}_2$ es infinito. Supongamos, por ejemplo, $\mathcal{C}_1$ infinito.

Si además es $s = 1$ tenemos $\mathtt{V}(g) = \mathtt{V}(h_1) \cup \mathcal{C}_2 = \mathtt{V}(h_1) \cup [\mathtt{V}(t_1) \cap \dots \cap \mathtt{V}(t_m)] \subseteq \mathtt{V}(h_1 t_j)$, $\forall j = 1, \dots, m$. La irreducibilidad de g y el lema de Study real implican que o bien g divide a h_1 o bien g divide a t_j, $\forall j$. En el primer caso tenemos $\mathtt{V}(g) = \mathcal{C}_1$ y en el segundo $\mathtt{V}(g) = \mathcal{C}_2$.

Si, por el contrario, es $s > 1$ entonces los polinomios $h_1, \dots, h_s$ no pueden ser primos entre sí, por Pre–Bézout. Quizá intercambiando X por Y, podemos suponer que $\deg_Y(g) \geq 1$. Sea $l \in \mathbb{R}[X,Y]$ un máximo común divisor de $h_1, \dots, h_s$. Como vimos más arriba trabajando en $\mathbb{R}(X)[Y]$, concluimos que existen $d \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ y $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{R}[X,Y]$

tales que $d = a_1 h_1 + \dots + a_s h_s$. Así, $\mathtt{V}(l) \subseteq \mathcal{C}_1 \subseteq \mathtt{V}(ld)$. Tenemos $\mathtt{V}(g) \subseteq \mathtt{V}(ld) \cup [\mathtt{V}(t_1) \cap \dots \cap \mathtt{V}(t_m)] \subseteq \mathtt{V}(ldt_j)$, $\forall j$. La irreducibilidad de g y el lema de Study real implican que g divide a ld o bien g divide a t_j, $\forall j$. En el primer caso tenemos $\mathtt{V}(g) = \mathcal{C}_1$ y en el segundo $\mathtt{V}(g) = \mathcal{C}_2$. ∎

Obsérvese que $\mathtt{V}(g)$ irreducible no implica g indefinido; por ejemplo, $g = X^2 + Y^2$, $\mathtt{V}(g) = \{(0,0)\}$.

¿Qué podemos decir de $\mathtt{V}(f)$, cuando $f \in \mathbb{R}[X,Y]$ es semidefinido? Es obvio que toda suma de cuadrados de polinomios en $\mathbb{R}[X,Y]$ es un polinomio semidefinido positivo. Sobre esta cuestión para polinomios homogéneos (caso al cual se reduce el caso general, vía homogeneización) ya se interesó D. Hilbert en 1885. Por entonces, Minkowski sostenía que "no parece verosímil que todo polinomio homogéneo semidefinido positivo sea representable como suma de cuadrados de polinomios homogéneos". Hilbert, algo escéptico, se puso a pensar en el tema y en 1888 publicó un trabajo en el que demostró que la representación sólo es posible para polinomios homogéneos en $n \leq 2$ variables, o de grado $m = 2$ o para $(n,m) = (3,4)$. Un ejemplo explícito de polinomio semidefinido positivo que no es suma de cuadrados no se ha conocido hasta 1967 y se debe a Motzkin: $Z^6 + X^4Y^2 + X^2Y^4 - 3X^2Y^2Z^2$; este polinomio es semidefinido positivo ya que la media arítmetica es mayor o igual que la media geométrica. Aún interesado en la cuestión, Hilbert modificó el enunciado del problema, usando expresiones racionales, y lo presentó en el Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en París en 1990, como Problema 17º. Con precisión: sea $n \in \mathbb{N}$, si $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ es semidefinido positivo, ¿existen $t \in \mathbb{N}$ y expresiones racionales $h_j/g_j \in \mathbb{R}(X_1, \dots, X_n)$ tales que

$$f = (h_1/g_1)^2 + \dots + (h_t/g_t)^2?$$

Conviene aclarar que, la igualdad se pide sea cierta allá donde todas las expresiones racionales involucradas estén definidas, i.e., en $\mathbb{R}^n \setminus \mathtt{V}(g_1 \cdots g_t)$. En 1927 Artin dio respuesta afirmativa al problema anterior. Usando este resultado, podemos demostrar la siguiente

Proposición 6 *Sea $f \in \mathbb{R}[X,Y]$ semidefinido tal que ni f ni $-f$ es un cuadrado, i.e., no existe $h \in \mathbb{R}[X,Y]$ tal que $\pm f = h^2$. Entonces $\mathtt{V}(f)$ es finito, siendo vacío si y sólo si f es definido. En particular, si f es semidefinido e irreducible entonces $\mathtt{V}(f)$ es finito.*

sin factores cuadrados

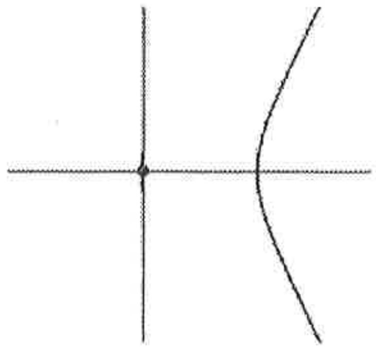
dem. Podemos suponer que f es semidefinido positivo. Por el resultado de Artin, existen expresiones $(*)$ $f = (h_1/g_1)^2 + \cdots + (h_t/g_t)^2$, con $t \in \mathbb{N}$, $h_j, g_j \in \mathbb{R}[X,Y]$, $g_j \neq 0$ y con h_j, g_j primos entre sí. Quitando denominadores obtenemos $d^2 f = {h'_1}^2 + \cdots + {h'_t}^2$ para ciertos $h'_j \in \mathbb{R}[X,Y]$ con $h_j/g_j = h'_j/d$, donde d es un máximo común divisor de $g_1, \ldots, g_t$ en $\mathbb{R}[X,Y]$. Tenemos que $\mathtt{V}(f) \subseteq \mathtt{V}(d^2 f) = \mathtt{V}({h'_1}^2 + \cdots + {h'_t}^2) = \mathtt{V}(h'_1) \cap \cdots \cap \mathtt{V}(h'_t)$. Tomando una expresión $(*)$ con $\deg(d)$ mínimo posible deducimos que los polinomios h'_j son primos entre sí, y concluimos aplicando Pre–Bézout. ∎

Sea $f \in \mathbb{R}[X,Y]$ de grado positivo, $f = c f_1^{k_1} \cdots f_r^{k_r}$ la descomposición en factores irreducibles no proporcionales dos a dos de f, con $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $r \in \mathbb{N}$, $k_j \in \mathbb{N}$. Sean $0 \leq s \leq t \leq r$ tales que f_j es indefinido, $\forall j \leq s$, f_j es semidefinido no definido, $\forall j$ con $s+1 \leq j \leq t$ y f_j es definido, $\forall j$ con $t+1 \leq j \leq r$. Claramente $\mathtt{V}(f) = \mathtt{V}(f_1) \cup \cdots \cup \mathtt{V}(f_s) \cup \mathtt{V}(f_{s+1}) \cup \cdots \cup \mathtt{V}(f_t)$, donde $\mathtt{V}(f_j)$ es infinito e irreducible, $\forall j \leq s$ y $\mathtt{V}(f_j)$ es finito no vacío, $\forall j$ con $s+1 \leq j \leq t$.

Definición 1 *Con las notaciones anteriores, definimos las* componentes irreducibles *de la curva* $\mathtt{V}(f)$*. Estas son de dos tipos:*
(a) cada $\mathtt{V}(f_j)$*, con* $j \leq s$ *y*
(b) cada punto del conjunto $\cup_{j=s+1}^{t} \mathtt{V}(f_j) \setminus \cup_{j=1}^{s} \mathtt{V}(f_j)$.

La razón por la que excluimos en (b) los puntos $\cup_{j=1}^{s} \mathtt{V}(f_j)$ se debe a nuestra definición de curva como conjunto de puntos. Cada componente de tipo (b) es un punto aislado, mientras que cada una de las de tipo (a) es una curva algebraica irreducible infinita. Los factores irreducibles definidos de f son irrelevantes a los efectos del estudio de $\mathtt{V}(f)$. Por ejemplo, para la curva $\mathtt{V}(f_1^6 f_2^5 f_3 f_4)$, con $f_1 = Y + X^5 - 2XY - 2$, $f_2 = X^2 + (Y-2)^4$, $f_3 = Y^2 + (X-10)^2(X+4)^6$, $f_4 = (X+Y)^2 + 3$, tenemos que $\mathtt{V}(f_1)$ es componente irreducible de tipo (a) y $(10,0)$ y $(-4,0)$ son componentes irreducibles de tipo (b), pero no lo es $(0,2) \in \mathtt{V}(f_2) \subseteq \mathtt{V}(f_1)$, donde $s=1$, $t=3$, $r=4$.

No todo punto asilado en una curva algebraica real constituye una componente irreducible de la misma. Por ejemplo, el polinomio $f = X^2 + Y^2 - X^3 \in \mathbb{R}[X,Y]$ es indefinido e irreducible, por lo que la curva $\mathtt{V}(f)$ es irreducible, si bien $(0,0) \in \mathtt{V}(f)$ es punto aislado.



Con las notaciones anteriores, queremos saber en qué condiciones $V(f)$ posee polinomio minimal.
(i) Si $V(f) = \emptyset$, la respuesta es negativa ya que, según vimos más arriba, X^2+1 y Y^2+1 son polinomios que se anulan en la curva y es claro que éstos son primos entre sí.
(ii) Si $V(f) \neq \emptyset$ y suponemos además que $V(f)$ no posee componentes irre- ducibles de tipo (b), entonces $f_1 \cdots f_s$ es polinomio minimal para $\mathtt{V}(f)$. Un caso particular es si f no posee nigún factor irreducible semidefinido no definido y posee al menos uno indefinido, i.e., si $1 \leq s = t$.
(iii) Finalmente, si $V(f) \neq \emptyset$ y además $V(f)$ posee componentes irreducibles de tipo (b), entonces $V(f)$ no posee polinomio minimal. En efecto, si $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ son todas las componentes irreducibles de tipo (b) de $V(f)$ entonces, con g_c como en el lema 1, tenemos que $h_c := f_1 \cdots f_s g_c$ y $h_{c'} := f_1 \cdots f_s g_{c'}$ son polinomios que se anulan en $V(f)$, cualesquiera que sean $|c| \neq |c'| < 1$ y el máximo común divisor de h_c y $h_{c'}$ es $f_1 \cdots f_s$, que no se anula en $V(f)$. Un caso particular es aquél en que f no posee ningún factor irreducible indefinido y posee alguno no definido, i.e., si $0 = s < t$, por ejemplo, si f es semidefinido no definido.

Definición 2 *Con las notaciones anteriores, la clase* $\mathcal{F}_a$*, de las curvas algebraicas afines reales que poseen polinomio minimal está constituida por las curvas que satisfacen (ii).*

Pasemos al estudio de las curvas algebraicas proyectivas planas. Denotemos por $K[X,Y,Z]_H$ el subanillo constituido por el cero y los polinomios homogéneos de $K[X,Y,Z]$. Sean $F_1,\ldots,F_s \in K[X,Y,Z]_H$; el conjunto $\{(x:y:z) \in P^2(K) : F_1(x,y,z) = 0,\ldots,F_s(x,y,z) = 0\}$ se denota $\mathtt{V}_K(F_1,\ldots,F_s)$ y se denomina *conjunto algebraico* del plano proyectivo $P^2(K)$ o *conjunto de ceros de* $F_1,\ldots,F_s$ *en* $P^2(K)$. La misma notación V para designar conjuntos de ceros afines o proyectivos no debería ser objeto de confusión. Es evidente la razón por la que se trabaja, en el caso proyectivo, exclusivamente con polinomios homogéneos: dado que tanto $(x:y:z)$ como $(\lambda x:\lambda y:\lambda z)$ son coordenadas homogéneas de un mismo punto de $P^2(K)$ (si x,y,z no son simultáneamente nulos y si $\lambda \neq 0$) entonces es necesario que $F(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$ se anule si y sólo si $F(x,y,z)$ se anula, para lo cual es condición necesaria y suficiente que F sea homogéneo.

Las propiedades (a) a (d) y las definiciones de conjunto algebraico proyectivo irreducible y de curva algebraica proyectiva plana son análogas a las afines.

Asimismo, tenemos ejemplos de curvas algebraicas proyectivas reales que son el conjunto vacío, o un conjunto finito de puntos y podemos demostrar que salvo el propio $P^2(\mathbb{R})$, todo conjunto algebraico de $P^2(\mathbb{R})$ constituye una curva algebraica real.

A cada $f \in K[X,Y]$ de grado $d>0$ le asociamos de manera única un polinomio $F \in K[X,Y,Z]_H$ con $\deg(f) = \deg(F)$, denominado *homogeneizado de* f u *homogeneización de* f como sigue: $F := Z^d f(X/Z, Y/Z)$, o lo que es lo mismo, $F := f_{(0)}Z^d + \cdots + f_{(d-1)}Z + f_{(d)}$, donde $f = f_{(0)} + \cdots + f_{(d-1)} + f_{(d)}$ y $f_{(j)}$ es la parte homogénea de f de grado j o es nulo. Es claro que Z no divide a F. Recíprocamente, si $F \in K[X,Y,Z]_H$ es de grado $d>0$ y si ni Z, ni Y, ni X dividen a F, definimos $f_3 := F(X,Y,1) \in K[X,Y]$, $f_2 := F(X,1,Z) \in K[X,Z]$ y $f_1 := F(1,Y,Z) \in K[Y,Z]$, con $\deg(f_j) = \deg(F)$, $\forall j = 1,2,3$. Se denominan respectivamente, *deshomogeneizado de* F o *deshomogeneización de* F *respecto de* Z, Y *y* X.

Es inmediato comprobar que si $F \in K[X,Y,Z]_H$ es de grado $d>0$ y si ni Z, ni Y, ni X dividen a F, entonces F es irreducible si y sólo si existe $k \in \{1,2,3\}$ tal que f_k es irreducible.

Sea $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. El espacio K^3 induce en $P^2(K)$ estructura de espacio topológico conexo y compacto. Las aplicaciones $j_3 : K^2 \to P^2(K)$ con $j_3(x,y) = (x:y:1)$, $j_2 : K^2 \to P^2(K)$ con $j_2(x,z) = (x:1:z)$ y $j_1 : K^2 \to P^2(K)$ con $j_1(y,z) = (1:y:z)$ son inyectivas y cada una tiene imagen abierta y densa, que denotaremos por $K^2_{X,Y}$, $K^2_{X,Z}$ y $K^2_{Y,Z}$ respectivamente y se verifica que $P^2(K) = K^2_{X,Y} \cup K^2_{X,Z} \cup K^2_{Y,Z}$. Asimismo, identificando $\mathtt{V}(f_k)$ con su imagen mediante j_k tenemos, para cada $F \in K[X,Y,Z]_H$ de grado positivo que $\mathtt{V}(F) = \mathtt{V}(f_3) \cup \mathtt{V}(f_2) \cup \mathtt{V}(f_1)$ es un recubrimiento por abiertos densos, pues $\mathtt{V}(f_3) = \mathtt{V}(F) \cap \{(x:y:z) : z \neq 0\}$, $\mathtt{V}(f_2) = \mathtt{V}(F) \cap \{(x:y:z) : y \neq 0\}$ y $\mathtt{V}(f_1) = \mathtt{V}(F) \cap \{(x:y:z) : x \neq 0\}$.

Veamos el caso $K = \mathbb{R}$. Usando argumentos de continuidad y teniendo en cuenta que $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2_{X,Y}$ es denso en $P^2(\mathbb{R})$ obtenemos la siguiente

Proposición 7 *Sean* $f \in K[X,Y]$ *de grado* $d>0$ *y* $F \in K[X,Y,Z]_H$ *su homogeneizado. Se verifica que*
(a) f *es indefinido si y sólo si* F *es indefinido,*
(b) f *es semidefinido si y sólo si* F *es semidefinido,*
(c) si f *es definido entonces* F *es semidefinido, y*
(d) si F *es definido entonces* f *es definido.* ■

Por ejemplo, $f = X^2 + 1$ es definido mientras que $F = X^2 + Z^2$ es semidefinido no definido.

Podemos reproducir las definiciones 1 y 2 para curvas proyectivas reales planas. Sea $F \in \mathbb{R}[X,Y,Z]_H$ de grado positivo, $F = cF_1^{k_1}\cdots F_r^{k_r}$ la descomposición en factores irreducibles no proporcionales dos a dos de F, con $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $r \in \mathbb{N}$, $k_j \in \mathbb{N}$. Sean $0 \le s \le t \le r$ tales que F_j es indefinido, $\forall j \le s$, F_j es semidefinido no definido, $\forall j$ con $s+1 \le j \le t$ y F_j es definido, $\forall j$ con $t+1 \le j \le r$. Claramente $\mathtt{V}(F) = \mathtt{V}(F_1)\cup\cdots\cup\mathtt{V}(F_s)\cup\mathtt{V}(F_{s+1})\cup\cdots\cup\mathtt{V}(F_t)$, donde $\mathtt{V}(F_j)$ es infinito e irreducible, $\forall j \le s$ y $\mathtt{V}(F_j)$ es finito no vacío, $\forall j$ con $s+1 \le j \le t$.

Definición 3 *Con las notaciones anteriores, definimos las* componentes irreducibles *de la curva* $\mathtt{V}(F)$. *Estas son de dos tipos:*
(a) cada $\mathtt{V}(F_j)$, *con* $j \le s$ *y*
(b) cada punto del conjunto $\cup_{j=s+1}^{t}\mathtt{V}(F_j) \setminus \cup_{j=1}^{s}\mathtt{V}(F_j)$.

Definición 4 *Con las notaciones anteriores, la clase* $\mathcal{F}_p$, *de las curvas algebraicas proyectivas reales que poseen polinomio minimal está constituida por las curvas* $V(F) \neq \emptyset$ *que no poseen componentes irreducibles de tipo (b). Para una tal curva,* $F_1\cdots F_s$ *es polinomio minimal. Como* *caso particular tenemos aquellos F que no poseen nigún factor irreducible semidefinido no definido y poseen al menos uno indefinido, i.e., si $1 \leq s = t$.*

Pondremos
$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_a \cup \mathcal{F}_p.$$

Proposición 8 *Sean $F \in \mathbb{R}[X,Y,Z]_H$ de grado positivo y $C \subset P^2(\mathbb{R})$ una curva algebraica. Entonces*
(a) la irreducibilidad de F es un invariante proyectivo,
(b) el carácter (indefinido, semidefinido no definido o definido) de F es un invariante proyectivo,
(c) la pertenencia a la clase $\mathcal{F}_p$ de C es un invariante proyectivo, y
(d) si $C \in \mathcal{F}_p$, entonces el grado y la irreducibilidad de C son invariantes proyectivos.

dem. Sean $\phi : P^2(\mathbb{R}) \to P^2(\mathbb{R})$ una transformación proyectiva y $(a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ una matriz no singular que represente a ϕ^{-1} respecto de un sistema de referencia dado. Sea $F \in \mathbb{R}[X,Y,Z]_H$ de grado positivo. Tenemos $F(X,Y,Z) = F(a_{1,1}X' + a_{1,2}Y' + a_{1,3}Z', a_{2,1}X' + a_{2,2}Y' + a_{2,3}Z', a_{3,1}X' + a_{3,2}Y' + a_{3,3}Z') := \widetilde{F}(X',Y',Z')$. Es inmediato comprobar que
(i) F es irreducible si y sólo si $\widetilde{F}$ es irreducible,
(ii) F es indefinido si y sólo si $\widetilde{F}$ es indefinido,
(iii) F es semidefinido si y sólo si $\widetilde{F}$ es semidefinido,
(iv) F es definido si y sólo si $\widetilde{F}$ es definido,
(v) $\deg(F) = \deg(\widetilde{F})$, y
(vi) si $F = cF_1^{k_1} \cdots F_r^{k_r}$ es la descomposición en factores irreducibles no proporcionales dos a dos de F, con $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $r \in \mathbb{N}$, $k_j \in \mathbb{N}$ y $0 \leq s \leq t \leq r$ como arriba, entonces $\widetilde{F} = c\widetilde{F}_1^{k_1} \cdots \widetilde{F}_r^{k_r}$ es la correspondiente descomposición de $\widetilde{F}$. Así, es claro que $\cup_{j=s+1}^t \mathtt{V}(F_j) \subseteq \cup_{j=1}^s \mathtt{V}(F_j)$ si y sólo si $\cup_{j=s+1}^t \mathtt{V}(\widetilde{F_j}) \subseteq \cup_{j=1}^s \mathtt{V}(\widetilde{F_j})$ por lo que $\mathtt{V}(F)$ pertenece a $\mathcal{F}_p$ si y sólo si $\mathtt{V}(\widetilde{F})$ pertenece a $\mathcal{F}_p$.

3 Curvas afines y proyectivas: aspectos topológicos

En esta sección contrastamos las propiedades topológicas más relevantes de las curvas algebraicas planas afines y proyectivas complejas y reales, indicando ejemplos sencillos y referencias donde se pueden encontrar las demostraciones.

`Espacios ambiente`

Para $\mathbb{C}$: $\mathbb{C}^2$ y $P^2(\mathbb{C})$ son $\mathbb{R}$–variedades topológicas conexas, de dimensión 4, orientables y $P^2(\mathbb{C})$ es compacta.

Para $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}^2$ y $P^2(\mathbb{R})$ son $\mathbb{R}$–variedades topológicas conexas de dimensión 2. Además $\mathbb{R}^2$ es orientable y $P^2(\mathbb{R})$ es no orientable y compacta; ver [5].

`Curvas algebraicas afines o proyectivas`

Tanto las curvas, como sus componentes conexas, como los complementarios de ellas son conjuntos semialgebraicos reales (ver [1] o [2]), y para tales conjuntos es sabido que la conexión coincide con la conexión por caminos; ver [2] pag. 35. Las curvas son conjuntos cerrados diseminados (tienen interior vacío).

Para $\mathbb{C}$: Considerada como $\mathbb{R}$–variedad topológica, toda curva tiene dimensión 2 (ya que el subconjunto de sus puntos regulares es una subvariedad de dimensión 2 densa; ver [7] cap. 7). El complementario de una curva es conexo (pues tiene codimensión 2). En el entorno de un punto x de multiplicidad $m \geq 1$, una curva es homeomorfa a la unión de m discos abiertos todos cuyos centros están identificados.

Para $\mathbb{R}$: Toda curva tiene dimensión menor o igual que 1 (ya que el subconjunto de sus puntos regulares es una subvariedad de dimensión 1 —posiblemente vacía— y no necesariamente densa; es vacía cuando la curva se reduce a una cantidad finita de puntos y no es densa siempre que la curva posee puntos aislados). Se define la noción de *dimensión local de una curva en un punto*; ver [2], pag. 53. Por ejemplo, la cúbica $\mathtt{V}(X^2 + Y^2 - X^3)$ tiene dimensión 1, siendo 0 la dimensión local en el punto $(0,0)$ y 1 en cualquier otro punto de la misma. El complementario de una curva puede o no ser conexo, y siempre lo es si la curva se reduce a un conjunto finito de puntos (por tener codimensión 2). Todo punto x de una curva C posee un entorno U tal que $U \setminus \{x\}$ es homeomorfo a la unión de una cantidad par de segmentos abiertos; esta propiedad se expresa diciendo que *el número de semirramas de C en el punto x es par*. Por ejemplo, un segmento cerrado o la letra T no pueden ser homeomorfos a una curva algebraica real. Existen curvas que poseen puntos (algebraicamente) singulares en el entorno de los cuales la curva es de clase C^m o incluso analítica; por ejemplo, el punto $(0,0)$ en $\mathtt{V}(Y^q - X^{q+1})$ con $q \geq 3$ impar y $m = 1$, en el primer caso, y el punto $(0,0)$ en $\mathtt{V}(X^4 - 2X^2Y - Y^3)$, en el segundo. En el primer caso, Y es función implícita de clase C^1 de X y en el segundo Y como función implícita de X es analítica. La gráfica de ambas curvas es semejante a la de una parábola.

`Curvas algebraicas afines`

Para $\mathbb{C}$: Son no acotados (se deduce fácilmente intersecando con rectas arbitrariamente alejadas del origen). Sus componentes conexas son uniones de componentes irreducibles; en particular, toda curva irreducible es conexa.

Para $\mathbb{R}$: Pueden ser o no ser acotados. Existen curvas irreducibles no conexas, (por ejemplo, la hipébola $\mathtt{V}(X^2 - Y^2 - 1)$ o la cúbica $\mathtt{V}(X^2 + Y^2 - X^3)$) y pueden tener puntos aislados, cada uno de los cuales puede o no constituir una componente irreducible (por ejemplo, el punto $(0,0)$ es componente irreducible en la curva unión de recta y punto $\mathtt{V}((X-1)(X^2+Y^2))$, mientras que no lo es en la cúbica $\mathtt{V}(X^2 + Y^2 - X^3)$).

`Curvas algebraicas proyectivas`

Para $\mathbb{C}$: Son compactos y, gracias al teorema de Bézout, también conexos.

Para $\mathbb{R}$: Son compactos y verifican el *Teorema de Harnack* (ver [1] pag. 246), según el cual el número de componentes conexas de una curva no singular definida como los ceros de un polinomio de grado n es menor o igual que $\gamma(n) + 1$, donde $\gamma(1) = 0$ y $\gamma(n) = \binom{n-1}{2}$, si $n \geq 2$.

A modo de breve conclusión, digamos que para el estudio de una curva (o más generalmente de un conjunto algebraico) real afín o proyectiva, es indispensable su estudio sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ y además hay que hacer uso de herramientas específicas para el caso real como son, entre otras, el Teorema de Sturm y variantes (para contar raíces reales de polinomios), el Principio de Tarski-Seidenberg, el método de descomposición de conjuntos semi-algebraicos o "saucissonnage"y el Lema de Thom etc. (ver [2] o [1]), así como los desarrollos de Puiseux racionales sobre $\mathbb{R}$ (ver [4]).

Referencias

[1] R. Benedetti, J.J. Risler, *Real algebraic and semi-algebraic sets*, Actualités Mathématiques, (Hermann, Paris, 1990).

[2] J. Bochnak, M. Coste, M.F. Roy, *Real algebraic geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, (Springer, Berlin, 1998).

[3] F. Cucker, L. González-Vega, F. Roselló, *On algorithms for real algebraic plane curves* en *Effective methods in algebraic geometry*, T. Mora, C. Traverso eds., (Birkhäuser, Boston, 1991) 63-87.

[4] D. Duval, *Rational Puiseux expansions*, Compo. Math. **70** (1989) 119-154.

[5] M.J. Greenberg, J.R. Harper, *Algebraic topology. A first course*, MLNS **58**, (Benjamin/Cummings, Menlo Park, 1981).

[6] T.Y. Lam, *An introduction to real algebra*, Rocky Mount. J. of Math. **14**, n.4 (1984) 767-813.

[7] I.R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry*, (2 vols.) (Springer, Berlin, 1994).

[8] H.Whitney, *Elementary structure of real algebraic varieties*, Ann. of Math. **66** (1957) 545-556.